

Estudo do Problema de Dirichlet para a Equação de Poisson com Discretização Finita

Julio Cezar de Moura Lima

Lucas Amaral Taylor

Este relatório trata do problema de Dirichlet para a equação de Poisson, que é discretizado em um quadrado unitário utilizando o método de diferenças finitas com espaçamento $h = \frac{1}{N}$. As equações que descrevem U_{mn} , juntamente com as condições de contorno, são organizadas em um sistema linear. Esse sistema é então resolvido utilizando uma ordenação lexicográfica para facilitar o processo de solução numérica.

I. Introdução

Este relatório aborda a solução numérica da equação de Poisson no domínio unitário $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ com condições de contorno de Dirichlet. A equação a ser resolvida é:

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

com as condições de fronteira:

$$u(\xi, \eta) = g(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \partial\Omega.$$

Utilizamos o método de diferenças finitas centradas para discretizar a equação, transformando-a em um sistema linear. A discretização do domínio em uma malha de tamanho $N \times N$, com espaçamento $h = \frac{1}{N}$, resulta na seguinte equação:

$$\frac{1}{h^2}(-U_{m-1,n} - U_{m,n-1} + 4U_{mn} - U_{m,n+1} - U_{m+1,n}) = f_{mn}, \quad 1 \leq m, n \leq N-1.$$

Esse sistema é resolvido usando bibliotecas como **numpy** e **scipy**. Simulações foram realizadas para diferentes N e comparadas com soluções exatas. Os resultados demonstram a eficiência do método, com erros decrescendo à medida que N aumenta.

II. Fundamentos teóricos

Na presente seção discutiremos os principais aspectos teóricos, discutidos em aula, que envolvem o processo de discretização da equação de Poisson no domínio em questão, são elas: o problema do contorno e a estimação do erro.

O problema do contorno é fundamental, visto que são restrições impostas na fronteira do domínio que influenciam diretamente as soluções da equação diferencial dentro desse domínio.

Além disso, abordaremos a respeito da estimação do erro, recorrendo sobre a convergência dele e sua consistência, a fim de mostrar a eficiência do método empregado.

As principais referências utilizadas para redigir esta seção estão presentes em [3] e [2], onde poderão ser encontradas as devidas demonstrações e demais detalhes dos fatos apresentados. Por fim, os tópicos foram selecionados com base na metodologia empregadas em aula [4].

A. Problema de contorno

No que diz respeito a *problema do contorno*, abordaremos sobre a *condição de Dirichlet* e a *condição de Neumann*. Para a condição de Dirichlet, temos a equação de Poisson:

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \Omega,$$

com a condição de contorno prescrita:

$$u = g \quad \text{em } \partial\Omega,$$

Nesse caso, o valor da função u é fixado na fronteira pela condição $u = g$. No método de diferenças finitas, isso significa que as incógnitas associadas aos nós na fronteira são eliminadas do sistema linear, substituídas pelos valores prescritos de g . A matriz do sistema linear resultante é modificada para refletir essa eliminação, o que pode ser feito de diferentes formas. Uma abordagem comum é ajustar diretamente os valores no vetor de solução.

Já para a condição de Neumann, temos a equação de Poisson:

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \Omega,$$

com a condição de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{em } \partial\Omega,$$

onde $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada normal de u na fronteira $\partial\Omega$. Essa condição especifica o fluxo na direção normal à fronteira, em vez de fixar diretamente os valores de u .

No método de diferenças finitas, essa derivada normal pode ser aproximada usando diferenças finitas. Para melhorar a precisão, introduzem-se pontos fantasmas fora do domínio Ω . Por exemplo, uma aproximação de primeira ordem para a derivada normal em $x = x_1$ é:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{u_1 - u_2}{h} + \mathcal{O}(h),$$

onde h é o espaçamento da malha. Para uma aproximação de segunda ordem, pode-se usar:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{u_0 - u_2}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

onde u_0 é o valor no ponto fantasma fora do domínio.

Para eliminar o ponto fantasma da equação, utiliza-se a condição de contorno de Neumann e manipula-se o sistema de equações de forma a manter a simetria da matriz. Por exemplo, para um ponto (x_1, y_j) , a equação é ajustada para:

$$2u_{1,j} - u_{2,j} - 0.5u_{1,j+1} - 0.5u_{1,j-1} = 0.5h^2 f_{1,j} + hg_{1,j}.$$

Isso garante que a condição de Neumann seja satisfeita com precisão.

A condição de Neumann requer que as funções f e g satisfaçam a condição de compatibilidade:

$$-\int_{\Omega} f \, dx = \int_{\partial\Omega} g \, dS,$$

que garante a consistência entre o fluxo total na fronteira e a integral da fonte f sobre o domínio Ω . Se essa condição não for satisfeita, a equação pode não ter solução. No contexto de diferenças finitas, essa compatibilidade é garantida ao ajustar o termo constante na equação, como em:

$$\sum_{i=1}^N f_i = 0,$$

onde f_i são os valores discretos da função f nos nós da malha. Detalhes e demonstrações em [3] e [2].

B. Análise do Erro

Primeiramente, é importante destacar que analisamos o erro partindo da metodologia apresentada em sala [4] e detalhamento proveniente de [3].

1. Consistência

Definiremos duas variáveis:

U_{mn} : Solução do problema discreto

u_{mn} : Valor da solução do problema contínuo em (x_n, y_n)

A partir do processo de discretização, temos que:

$$\frac{u_{m,n-1} + u_{m+1,n} - 4u_{m,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n+1}}{h^2} = f_{m,n} + d_{m,n}$$

$$\frac{U_{m,n-1} + U_{m+1,n} - 4U_{m,n} + U_{m+1,n} + U_{m,n+1}}{h^2} = f_{m,n}$$

O erro pode ser expresso como a diferença entre $u_{m,n}$ e $U_{m,n}$, isto é:

$$E_{m,n} = u_{m,n} - U_{m,n}$$

Assim,

$$\frac{E_{m,n-1} + E_{m+1,n} - 4E_{m,n} + E_{m+1,n} + E_{m,n+1}}{h^2} = d_{m,n}, \quad 1 \leq m, n \leq N$$

Com

$$E_{0,m} = E_{N+1,n} = E_{m,0} = E_{m,N+1} = 0$$

Ou seja, o operador de diferenças finitas aplicado ao erro $E_{m,n}$ pode ser expresso por:

$$(\Delta_h E)_{m,n} = d_{m,n}, \quad 1 \leq m, n \leq N$$

Como discutido em [3], o termo d_{mn} representa o erro de truncamento, que surge ao aproximar o operador contínuo Δ pelo operador de diferenças finitas Δ_h . Para métodos de diferenças finitas de segunda ordem, o erro de truncamento é proporcional a h^2 , resultando na seguinte aproximação:

$$\Delta_h u_{mn} = \Delta u_{mn} + \mathcal{O}(h^2),$$

onde $\mathcal{O}(h^2)$ é o erro associado à discretização. Assim, o erro residual d_{mn} é estimado como:

$$d_{mn} \leq C_4 \cdot h^2,$$

com C_4 dependendo da regularidade de u (supondo que $u \in C^4$). Essa estimativa reflete a consistência do método, com o erro diminuindo à medida que h se refina.

2. Estimação do erro

Primeiro, enunciaremos o *Princípio do Máximo (mínimo)*, cuja a demonstração estará omitida, mas apresentada devidamente em [3].

Se $(\Delta_h v)_{mn} \geq 0$ (≤ 0), $1 \leq m, n \leq N$, então o máximo (mínimo) de v é atingido na fronteira Γ_h :

$$\begin{aligned} \max v &= \max_{\Omega_h} v = \max_{\Gamma_h} v \\ \min v &= \min_{\Omega_h} v = \min_{\Gamma_h} v \end{aligned}$$

A enunciação do *Princípio do Máximo (mínimo)* é fundamental, pois ele implica que a solução numérica obtida no interior do domínio está limitada pelos valores na fronteira, o que auxilia na estimação do erro. Isto posto, podemos abordar sobre a estimação do erro.

No método de diferenças finitas, a solução numérica V_{mn} para a equação $(\Delta_h V)_{mn} = F_{mn}$ com condições de contorno de Dirichlet $V = 0$ na fronteira Γ_h pode ser controlada pela função forçante F_{mn} .

Aplicando o *Princípio do Máximo*, concluímos que o erro no interior do domínio é limitado pelo valor máximo de F_{mn} :

$$|V_{mn}| \leq \frac{1}{8} \max_{1 \leq m, n \leq N} |F_{mn}|.$$

Isso garante que o erro numérico dentro do domínio não cresce além de uma fração do valor máximo de F_{mn} .

Além disso, ao considerar a função auxiliar $W(x, y)$, cuja derivada discreta $\Delta_h W_{mn} = 1$, ajustamos a estimativa de erro para obter:

$$\Delta_h v_{mn} + \|F\|_\infty W_{mn} \geq 0,$$

onde $\|F\|_\infty$ é a **norma do máximo** de F , definida como:

$$\|F\|_\infty = \max_{1 \leq m, n \leq N} |F_{mn}|,$$

isto é, o maior valor absoluto de F_{mn} no domínio discretizado.

Isso confirma que o erro v_{mn} é limitado por $\|F\|_\infty$, reforçando a estabilidade do método. Demonstração em [4].

III. Implementação e explicação da resolução da tarefa

Para explicação das tarefas desempenhadas no trabalho, vamos iniciar com o exercício de número 1.

O problema se inicia obtendo f em ambos os casos em que u_{exata} é definida. Utilizando a definição bastaria que fosse atribuído $-\Delta u$ para achar cada f .

```
# funcao u (item a)
u = lambda x, y: x**4 - 6*x**2*y**2 + y**4
f_u = lambda x, y: -12*(x**2 + y**2)

# Funcao v (item b)
v = lambda x, y: np.exp(x) * np.sin(y)
f_v = lambda x, y: 0
```

Em seguida realizamos a construção de uma função que estabelece A e b , no que tange, a resolução do problema $AU = b$. Note que a mesma será usada essencialmente em ambos os exercícios.

```
def poisson_system(N: int, f: float, g: float):
    h = 1/N
    n = (N-1)**2 # numero de variaveis presentes no sistema
    diagonals = [-1, -1, 4, -1, -1] # valores que serao atribuidos as diagonais de A
    offsets = [-N+1, -1, 0, 1, N-1] # confere o deslocamento das diagonais

    # matriz A iniciada
    A: csc_array = diags(diagonals=diagonals, offsets=offsets, shape=(n,n)).tocsc()

    # vetor b (termos da equacao e cond. de contorno)
    b = np.zeros(n)

    # Preenchimento de b com f (pontos internos)
    for k in range(1, N):
        for j in range(1, N):
            i = (k - 1) * (N-1) + (j-1) # indice lexicografico
            x, y = k * h, j * h
            b[i] = h ** 2 * f(x, y)

    # Bordas (esq -> dir) & (inf -> sup): cond. de contorno
    if k == 1:
        b[i] -= g(0, y) # borda esquerda
    if k == N - 1:
        b[i] -= g(1, y) # borda direita
    if j == 1:
        b[i] -= g(x, 0) # borda inferior
    if j == N - 1:
        b[i] -= g(x, 1) # borda superior

    return A, b
```

Tendo esta implementação, vamos partir para finalização, determinando g e solucionando o sistema, de modo que teremos a solução numérica e, portanto, possibilidades de visualizá-la graficamente.

```
g = lambda x,y: exact(x,y) # atribui u_exata no caso solicitado

A, b = poisson_system(N, f, g) #(i)
numeric = linalg.spsolve(A,b) #(ii)
plot_solution(N, exact, numeric, title) #(iii)
```

Tendo solucionado o problema 1, para o problema 2 partiremos dos mesmos princípios já introduzidos.

```
# Iniciando as funcoes do problema
u = lambda x,y: np.cos(x) * np.sin(y)
f = lambda x,y: -2 * np.cos(x) * np.sin(y)
```

Vamos partir da análise de funções que serão usadas na resolução dos itens (b) e (c). O sistema que retorna A e b segue o mesmo que foi mencionado para o exercício 1. Desse modo para avaliarmos o erro, faremos uso da seguinte função:

```
def error_function(N, exact, numeric) -> pd.DataFrame:
    x = np.linspace(0, 1, N+1)
    y = np.linspace(0, 1, N+1)
    X, Y = np.meshgrid(x, y)
```

```

# solucao exata nos pontos da grade
U_exata = exact(X, Y)

# Inserir solucao numerica nos pontos internos
U_numerica = np.zeros((N+1, N+1))
U_numerica[1:N, 1:N] = numeric.reshape((N-1, N-1))

# Calcular o erro absoluto
errors = np.abs(U_exata - U_numerica) # Erro em modulo

# Dataframe em pandas para armazenar os erros (row, column) = (X_i, y_i)
df = pd.DataFrame(errors,
                   columns=[f"Erro y={i/(N+1):.2f}" for i in range(N+1)],
                   index=[f"x={i/(N+1):.2f}" for i in range(N+1)])

return df

```

Portanto, com a coletânea de funções necessárias basta resolver o sistema, calcular o erro relativo à u_{exata} e assim plotar simulações em cada N .

```

def solve_system(N, f, u):
    g = lambda x,y: u(x,y)

    A, b = poisson_system(N, f, g)
    numeric = linalg.spsolve(A,b)
    plot_solutions(N, u, numeric)
    print(error_function(N, u, numeric))

print("Simulacoes")
for N in [50, 100, 200]:
    print(f"N = {N}")
    solve_system(N, f, u)

```

IV. Apresentação dos resultados

1. Construir os exemplos a partir da função dada (obtenha f e g) a partir da solução u , implemente esses exemplos e realize simulações para $N = 20, 50$ e 100 :

(a) $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

Solução:

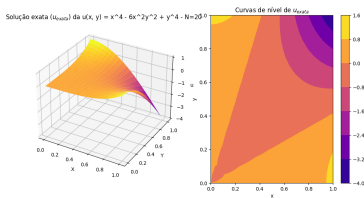


Figura 1: Simulação 1A com $N = 20$

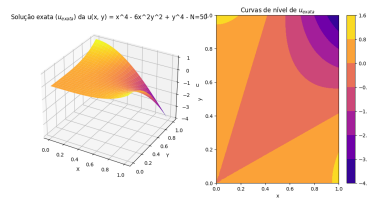


Figura 2: Simulação 1A com $N = 50$

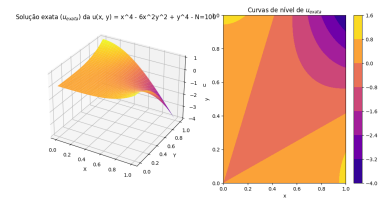


Figura 3: Simulação 1A com $N = 100$

(b) $u(x, y) = e^x \sin(y)$

Solução:

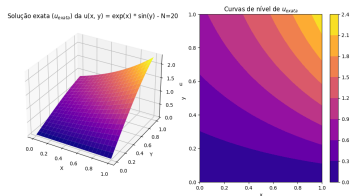


Figura 4: Simulação 1B com $N = 20$

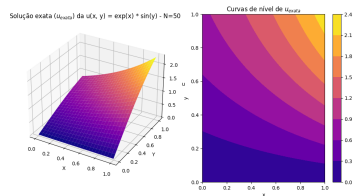


Figura 5: Simulação 1B com $N = 50$

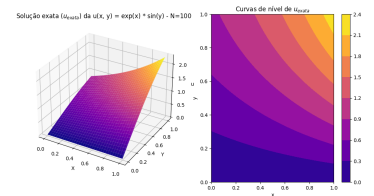


Figura 6: Simulação 1B com $N = 100$

2. Considere a equação de Poisson ($\Delta u = f$) no quadrado unitário $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ com a função de força dada por:

$$f(x, y) = -2 \cos(x) \sin(y) \quad (1)$$

Para resolver essa equação de Poisson, consideramos a solução exata:

$$u_{\text{exata}}(x, y) = \cos(x) \sin(y) \quad (2)$$

Considerando condições de fronteira de Dirichlet dadas pela solução exata:

- (a) Verifique que a Equação (2) satisfaz a equação com a função de força dada pela Equação (1)

Na resolução dessa questão, criamos uma função de verificação como segue:

```
# Funcao para verificar se a equacao eh satisfeita
def verify() -> bool:
    # Definindo uma malha de pontos para x e y no intervalo [0, 1] com 5 divisoes
    X = np.linspace(0, 1, 5)
    Y = np.linspace(0, 1, 5)

    # Loop pelos valores de X e Y
    for x in X:
        for y in Y:
            left = f(x, y) # esquerda da equacao, o valor de f(x, y)
            right = -2 * np.cos(x) * np.sin(y) # direita da equacao

            # Verifica se a parte esquerda eh aproximadamente igual a direita
            if not np.isclose(left, right):
                # Se os valores nao forem proximos, imprime um erro com os valores
                # correspondentes de x e y
                print(f"Erro: para (x={x}, y={y}), esquerda = {left}, direita = {right}")
                return False # Retorna False para indicar que a equacao nao foi
                               # satisfeita

    return True # A solucao u(x, y) satisfaz a equacao com a funcao f(x, y)
```

Validando o item (a) com sua função, teremos o seguinte retorno de código:

```
print("Validando o item (a)")
verify()
# -> True
```

- (b) Realize simulações para valores de $N = 50, 100, 200$ e plote as soluções numéricas e a solução exata.

Solução:

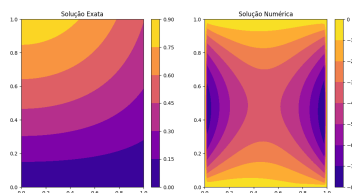


Figura 7: Simulação 2B com $N = 20$

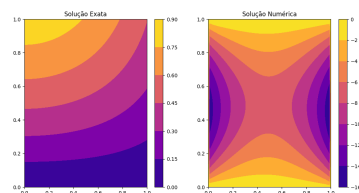


Figura 8: Simulação 2B com $N = 100$

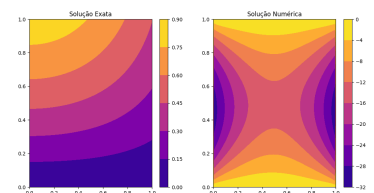


Figura 9: Simulação 2B com $N = 200$

- (c) Imprima os erros em relação à solução exata contínua.

Observação: Para este relatório, apresentamos 20% dos valores assumidos por x e 4 valores de y para tornar a apresentação mais clara. A tabela completa está disponível nos códigos e arquivos .csv anexados.

Tabela I: Erro calculado na simulação $N = 50$

x	$y = 0.00$	$y = 0.24$	$y = 0.47$	$y = 0.71$
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.10	0.099833	1.882937	1.616623	2.112684
0.20	0.198669	3.290300	2.644325	3.354436
0.29	0.295520	4.328647	3.445981	4.265023
0.39	0.389418	4.958013	3.957576	4.799946
0.49	0.479426	5.178478	4.148823	4.953132
0.59	0.564642	5.004041	4.017148	4.737323
0.69	0.644218	4.454460	3.582953	4.178380
0.78	0.717356	3.555614	2.888192	3.317695
0.88	0.783327	2.351951	1.997187	2.221227

Tabela II: Erro calculado na simulação $N = 100$

x	$y = 0.00$	$y = 0.25$	$y = 0.50$	$y = 0.74$
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.05	0.049979	1.800425	1.580714	2.211568
0.10	0.099833	3.290075	2.649791	3.674547
0.15	0.149438	4.663765	3.657335	5.017072
0.20	0.198669	5.883958	4.577122	6.202277
0.25	0.247404	6.927325	5.386953	7.208167
0.30	0.295520	7.781173	6.069078	8.023337
0.35	0.342898	8.439803	6.610197	8.643080
0.40	0.389418	8.901834	7.001193	9.066735
0.45	0.434966	9.168515	7.236726	9.296104
0.50	0.479426	9.242750	7.314824	9.334585
0.54	0.522687	9.128568	7.236536	9.186741
0.59	0.564642	8.830868	7.005679	8.858139
0.64	0.605186	8.355364	6.628709	8.355390
0.69	0.644218	7.708736	6.114688	7.686390
0.74	0.681639	6.899043	5.475334	6.860820
0.79	0.717356	5.936584	4.725096	5.891004
0.84	0.751280	4.835443	3.881186	4.793198
0.89	0.783327	3.615889	2.963487	3.589201
0.94	0.813416	2.307188	1.994244	2.307665

Tabela III: Erro calculado na simulação $N = 200$

x	$y = 0.00$	$y = 0.25$	$y = 0.50$	$y = 0.75$
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.02	0.019999	1.461875	1.337067	1.886796
0.04	0.039989	2.667926	2.190556	3.083192
0.06	0.059964	3.857494	3.035968	4.262617
0.08	0.079915	5.023001	3.869449	5.417385
0.10	0.099833	6.157533	4.687248	6.540515
0.12	0.119712	7.254949	5.485749	7.625847
0.14	0.139543	8.309931	6.261493	8.668087
0.16	0.159318	9.317985	7.011203	9.662789
0.18	0.179030	10.275386	7.731804	10.606301
0.20	0.198669	11.179117	8.420429	11.495686
0.22	0.218230	12.026776	9.074439	12.328629
0.24	0.237703	12.816498	9.691418	13.103346
0.26	0.257081	13.546865	10.269181	13.818498
0.28	0.276356	14.216838	10.805773	14.473115
0.30	0.295520	14.825685	11.299460	15.066528
0.32	0.314567	15.372932	11.748732	15.598318
0.34	0.333487	15.858310	12.152287	16.068264
0.36	0.352274	16.281724	12.509030	16.476315
0.38	0.370920	16.643219	12.818060	16.822552
0.40	0.389418	16.942954	13.078665	17.107171
0.42	0.407760	17.181186	13.290309	17.330460
0.44	0.425939	17.358254	13.452628	17.492789
0.46	0.443948	17.474564	13.565421	17.594595
0.48	0.461779	17.530584	13.628641	17.636378
0.50	0.479426	17.526836	13.642390	17.618691
0.52	0.496880	17.463888	13.606916	17.542140
0.54	0.514136	17.342356	13.522605	17.407378
0.56	0.531186	17.162898	13.389980	17.215108
0.58	0.548024	16.926217	13.209698	16.966079
0.60	0.564642	16.633058	12.982549	16.661093
0.62	0.581035	16.284216	12.709451	16.301004
0.64	0.597195	15.880535	12.391458	15.886728
0.66	0.613117	15.422918	12.029754	15.419245
0.68	0.628793	14.912336	11.625655	14.899616
0.70	0.644218	14.349838	11.180616	14.328987
0.72	0.659385	13.736566	10.696224	13.708612
0.74	0.674288	13.073777	10.174208	13.039867
0.76	0.688921	12.362868	9.616434	12.324278
0.78	0.703279	11.605403	9.024911	11.563548
0.80	0.717356	10.803155	8.401786	10.759585
0.82	0.731146	9.958146	7.749346	9.914547
0.84	0.744643	9.072699	7.070015	9.030875
0.86	0.757843	8.149492	6.366347	8.111341
0.88	0.770739	7.191612	5.641024	7.159079
0.90	0.783327	6.202604	4.896841	6.177620
0.92	0.795602	5.186507	4.136700	5.170910
0.94	0.807558	4.147869	3.363597	4.143303
0.96	0.819192	3.091718	2.580601	3.099536
0.98	0.830497	2.023504	1.790843	2.044666

V. Conclusão

Neste trabalho, exploramos a solução numérica da equação de Poisson utilizando o método de diferenças finitas em um domínio unitário, sob condições de contorno de Dirichlet. A implementação foi bem-sucedida em gerar soluções numéricas para diferentes valores de N , e conseguimos observar a convergência do erro à medida que o espaçamento da malha diminuía.

A análise das tabelas de erro revelou que, para valores maiores de N , o erro absoluto calculado em pontos do domínio diminuiu significativamente, confirmando a eficiência do método. Por exemplo, quando $N = 20$, o erro era mais perceptível, especialmente nas regiões próximas às bordas do domínio. No entanto, ao aumentar N para 50 e 100, o erro diminuiu consideravelmente, provando a consistência do método e a tendência de convergência da solução numérica para a solução exata conforme a malha se tornava mais refinada.

Ao longo do processo, identificamos aspectos importantes relacionados à estimação do erro e à consistência do método. Um ponto que se destacou foi a importância de definir corretamente as condições de contorno, que têm um impacto direto nos resultados obtidos.

Em resumo, este estudo proporcionou um entendimento mais profundo sobre a aplicação de métodos numéricos a equações diferenciais, mostrando a eficácia do método de diferenças finitas e a relevância da análise de erro para validar as soluções numéricas.

VI. Referências

- [1] R. L. Burden and J. D. Faires. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 9 edition, 2010.
- [2] J. S. Butler. Wave equation: Boundary conditions, 2024. Acesso em: 28 de setembro de 2024.
- [3] L. Chen. Finite difference methods for poisson equation, 2014. Acesso em: 28 de setembro de 2024.
- [4] N. M. Kuhl. Notas de aula map2320 - métodos numéricos em equações diferenciais ii, 2024. Conteúdo apresentado em aula.