Introdução ao Formalismo Mori-Zwanzig

Aluno: Lucas Amaral Taylor

Orientador: Prof. Dr. Breno Raphaldini Ferreira da Silva

Abril de 2025

1 Introdução

O principal objetivo do artigo de Chekroun, Liu e McWilliams (2021) é simplificar o modelo de Lorenz 80, preservando seu comportamento. Para isso, utilizaremos o método de Mori-Zwanzig, que é uma abordagem física-estatística aplicável em sistemas como o L80.

O método de Mori-Zwanzig, desenvolvido por Robert Walter Zwanzig e Hajime Mori na segunda metade do século XX, é utilizado em sistemas hamiltonianos. Esse método consiste em classificar as variáveis do sistema em duas categorias: "resolvidas" e "não resolvidas". As variáveis resolvidas são aquelas cujos comportamentos e valores são bem conhecidos, enquanto as não resolvidas são aquelas para as quais não se possui informações diretas. Para substituir essas variáveis não resolvidas, o método introduz termos estocásticos, denominados ruídos (*noise*), além de um termo de amortecimento (*damping*), também conhecido como termo de memória (*memory term*). Essa abordagem permite que o comportamento do sistema de interesse seja preservado de maneira adequada, mesmo sem conhecer completamente as variáveis não resolvidas.

Dada a relevância deste método para o trabalho de Chekroun, Liu e McWilliams (2021), optamos por incluir uma introdução ao formalismo de Mori-Zwanzig, a fim de proporcionar uma melhor compreensão de sua aplicação no contexto do modelo de Lorenz 80 e permitir uma base teórica sólida para eventuais explorações.

2 Motivação

3 Prolegômenos

3.1 Escrevendo sistemas de EDO não lineares como sistemas de EDPs lineares

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) dado por:

$$\frac{d}{dt}\phi(x,t) = R(\phi(x,t)), \quad \phi(x,0) = x, \tag{1}$$

onde R é uma função não linear, ϕ é uma função dependente do tempo, e R, ϕ e x podem assumir dimensões infinitas, sendo formados pelos vetores R_i, ϕ_i e x_i, respectivamente.

A partir disso, podemos definir o *Operador de Liouville* associado à equação (1) como:

$$L = \sum_i R_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2}$$

Utilizando o *Operador de Liouville*, podemos transformar o sistema de EDOs não lineares em um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) lineares da forma:

$$u_t = Lu, \quad u(x,0) = g(x) \tag{3}$$

A solução desse sistema existe, é única, e é dada por $u(x,t) = g(\phi(x,t))$. Portanto, temos que a equação (3) é bem definida[1].

[1]Detalhes da demonstração podem ser encontrados em Chorin e Hald (2013)

3.2 Notação de semigrupo

4 Mori-Zwanzig

4.1 Definição

4.2 Exemplos e propriedades

A Sistemas Hamiltonianos

B Casos particulares apresentados

C Aproximações

Referências

CHEKROUN, Mickaël D.; LIU, Honghu; MCWILLIAMS, James C. Stochastic rectification of fast oscillations on slow manifold closures. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 118, n. 48, nov. 2021. ISSN 1091-6490. DOI: `10.1073/pnas.2113650118`. Disponível em: ¡`http://dx.doi.org/10.1073/pnas.2113650118`¿.

CHORIN, Alexandre J.; HALD, Ole H. **Stochastic Tools in Mathematics and Science**. [S.l.]: Springer New York, 2013. ISBN 9781461469803. DOI: `10.1007/978-1-4614-6980-3`. Disponível em: ¡`http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-6980-3`¿.