

MAP2419 – INTRODUÇÃO AO TRABALHO DE FORMATURA

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo
(IME-USP)

Projeto

Uma abordagem estocástica do Modelo de Lorenz 80

A stochastic approach for the Lorenz 80 model

Orientador:

Prof. Dr. Breno Raphaldini Ferreira da
Silva

brenorfs@usp.br

IME-USP

Aluno:

Lucas Amaral Taylor

NUSP: 13865062

lucasamtaylor@usp.br

IME-USP

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo do Modelo Lorenz 80, originalmente proposto por Edward Lorenz (1980), a partir de uma abordagem estocástica inspirada em Chekroun et al. (2021). São abordados fundamentos teóricos essenciais, como o formalismo de Mori-Zwanzig, propriedades gerais de equações diferenciais estocásticas e as características matemáticas e físicas do próprio modelo. O desenvolvimento computacional inclui a implementação e simulação numérica do modelo utilizando as linguagens *Julia* e *Python*, com ênfase em bibliotecas científicas voltadas para sistemas dinâmicos estocásticos e análise de dados. Por fim, realiza-se uma análise exploratória de diferentes configurações do termo de ruído, com o objetivo de investigar abordagens alternativas e complementares ao tratamento original.

Abstract

This project presents a study of the Lorenz 80 Model, originally proposed by Edward Lorenz (1980), from a stochastic approach inspired by Chekroun et al. (2021). Essential theoretical foundations are covered, such as the Mori-Zwanzig formalism, general properties of stochastic differential equations and the mathematical and physical characteristics of the model itself. The computational development includes the implementation and numerical simulation of the model using the *Julia* and *Python* languages, with an emphasis on scientific libraries aimed at stochastic dynamic systems and data analysis. Finally, an exploratory analysis of different configurations of the noise term is carried out, with the aim of investigating alternative and complementary approaches to the original treatment.

Introdução

Em 1980, Edward N. Lorenz publicou o artigo *Attractor Sets and Quasi-Geostrophic Equilibrium* (Lorenz, 1980), no qual desenvolveu o modelo que ficou conhecido como *Modelo Lorenz 80* (L80), com o objetivo de estudar a dinâmica de sistemas atmosféricos forçados e dissipativos.

Partindo das equações de águas rasas com topografia, Lorenz construiu um modelo de baixa ordem com nove equações diferenciais ordinárias, baseado em equações primitivas. Posteriormente, ao eliminar os termos de derivadas temporais nas equações de divergência, obteve-se uma versão quasi-geostrófica com apenas três equações. O modelo apresenta duas escalas distintas de movimento: oscilações rápidas, associadas a ondas gravitacionais, e oscilações lentas, de caráter quasi-geostrófico. Com o tempo, as componentes rápidas se dissipam, e a dinâmica concentra-se em uma variedade invariante de dimensão reduzida, onde o equilíbrio quasi-geostrófico é uma boa aproximação. Além da formulação teórica, Lorenz realizou simulações computacionais do modelo, um feito de grande importância para a época e para o desenvolvimento da matemática computacional.

Em novembro de 2021, foi publicado o artigo *Stochastic Rectification of Fast Oscillations on Slow Manifold Closures* (Chekroun et al., 2021), que propôs uma abordagem estocástica para sistemas lentos-rápidos utilizando métodos da física estatística. Neste estudo, os autores utilizaram o *Modelo L80* como estudo de caso, aplicando o método de Mori-Zwanzig (MZ).

O método MZ, originado na física estatística, separa a dinâmica de um sistema em partes relevantes e irrelevantes por meio de operadores de projeção. Uma característica central desse método é que, ao projetar a dinâmica sobre um subespaço de variáveis relevantes, os efeitos das variáveis descartadas não desaparecem. As variáveis irrelevantes são incorporados à dinâmica efetiva na forma de dois termos adicionais: um termo markoviano, que representa a influência da memória dos estados passados, e um termo de ruído, que modela a variabilidade não resolvida.

Em janeiro de 2025, o aluno Lucas Amaral Taylor cursou a disciplina **MAP5007 - Ondas em Fluidos Geofísicos**, oferecida no programa de verão do Instituto de Matemática e Estatística (IME-USP) e ministrada pelo Prof. Dr. Breno Raphaldini Ferreira da Silva. A

disciplina teve como objetivo apresentar conceitos básicos da dinâmica de fluidos geofísicos por meio de uma abordagem matemática (Sistema Janus - USP, 2025). Ao final da disciplina, o aluno realizou um seminário¹ com o tema *Um breve estudo do Modelo Lorenz 80*, cujo objetivo foi apresentar os aspectos gerais do modelo L80.

Por fim, o presente trabalho é uma extensão desse estudo anterior. Agora, em vez de explorar o modelo determinístico de Lorenz (1980), o foco será a abordagem estocástica proposta por Chekroun et al. (2021). Serão analisadas propriedades matemáticas, estatísticas e físicas envolvidas na construção e tratamento do modelo, além de serem realizadas simulações computacionais.

Objetivos

O presente trabalho, baseia-se em três principais objetivos:

1. Compreensão e manipulação dos conceitos teóricos essenciais

- (a) Estudo aprofundado do método MZ: teoria e aplicações, particularmente, em sistemas dinâmicos lentos-rápidos;
- (b) Análise das propriedades gerais de equações diferenciais estocásticas;
- (c) Estudo das particularidades do Modelo L80, tanto em sua versão determinística quanto na versão estocástica, considerando suas implicações físicas e matemáticas.

2. Desenvolvimento de habilidades em ferramentas computacionais.

- (a) Domínio de linguagens computacionais voltadas à simulação e análise de modelos matemáticos, especialmente *Julia* e *Python*, com foco na utilização de bibliotecas científicas;
- (b) Capacidade de implementar, otimizar e interpretar rotinas computacionais para simulações numéricas.

3. Realizações de simulações do modelo L80 e análise exploratória.

- (a) Desenvolvimento do modelo L80 em *Julia*;
- (b) Análise exploratória de ruídos.

¹Os arquivos do seminário estão disponíveis publicamente no repositório do *GitHub* (Taylor, 2025).

Metodologia

Para a **compreensão e manipulação dos objetos matemáticos fundamentais para o desenvolvimento do modelo**, iniciamos com a leitura aprofundada dos artigos-base que introduzem os principais conceitos e motivam o estudo, em especial os trabalhos de Chekroun et al. (2017) e Chekroun et al. (2021). Em seguida, para consolidar o entendimento do método MZ, serão analisadas referências que tratam da formulação e aplicações deste método, incluindo os textos de Gouasmi et al. (2017), Chorin et al. (2000), Chorin et al. (2002) e Chorin e Hald (2013).

No **desenvolvimento de habilidades em ferramentas computacionais**, será utilizada, principalmente, a linguagem *Julia* (Julia contributors, 2024), com foco na biblioteca SciML (SciML Team, 2025), voltada para simulações com equações diferenciais estocásticas e Python (Python Software Foundation, 2025), principalmente, com as bibliotecas **numpy** (The NumPy development team, 2025) e **pandas** (The pandas development team, 2025) para análise de dados. Para a familiarização inicial, serão feitas simulações com base no exemplo 11.7 de (Pavliotis e Stuart, 2008, p. 169).

Por fim, na etapa de **realizações de simulações do modelo L80 e análise exploratória**, serão realizadas simulações computacionais do modelo L80. Inicialmente, reproduziremos os resultados apresentados em Chekroun et al. (2021). Em seguida, com base no conhecimento e na experiência adquiridos ao longo do projeto, idealmente, proporemos variações na modelagem do ruído, distintas daquelas adotadas no artigo original. A intenção é avaliar se abordagens alternativas ou complementares em relação ao ruído podem aperfeiçoar os resultados obtidos na formulação estocásticas.

Plano de trabalho

Mês	Atividade
Abril	Definição do tema, escolha do orientador e levantamento das principais referências
Maio	Introdução ao método MZ e à linguagem <i>Julia</i> .
Junho	Primeiras simulações em <i>Julia</i> utilizando modelos simplificados.
Julho	Leitura sobre equações diferenciais estocásticas e aprofundamento no Modelo L80.
Agosto	Implementação inicial do Modelo L80.
Setembro	Análise exploratória das propriedades do termo de ruído.
Outubro	Redação e conclusão da monografia.
Novembro	Revisão final, tradução e preparação para a apresentação.

Resultados preliminares

O andamento do projeto pode ser acompanhado pelo link abaixo:

https://github.com/lucasamtaylor01/Lorenz80_SDE

Referências

- Chekroun, M. D., H. Liu e J. C. McWilliams (jun. de 2017). “The emergence of fast oscillations in a reduced primitive equation model and its implications for closure theories”. Em: *Computers & Fluids* 151, pp. 3–22. ISSN: 0045-7930. DOI: 10.1016/j.compfluid.2016.07.005. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2016.07.005>.
- Chekroun, M. D., H. Liu e J. C. McWilliams (nov. de 2021). “Stochastic rectification of fast oscillations on slow manifold closures”. Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 118.48. ISSN: 1091-6490. DOI: 10.1073/pnas.2113650118. URL: <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.2113650118>.
- Chekroun, M. D., H. Liu e S. Wang (2015a). *Approximation of Stochastic Invariant Manifolds: Stochastic Manifolds for Nonlinear SPDEs I*. Springer International Publishing. ISBN: 9783319124964. DOI: 10.1007/978-3-319-12496-4. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-12496-4>.
- Chekroun, M. D., H. Liu e S. Wang (2015b). *Stochastic Parameterizing Manifolds and Non-Markovian Reduced Equations: Stochastic Manifolds for Nonlinear SPDEs II*. Springer International Publishing. ISBN: 9783319125206. DOI: 10.1007/978-3-319-12520-6. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-12520-6>.
- Chorin, A. J. e O. H. Hald (2013). *Stochastic Tools in Mathematics and Science*. Springer New York. ISBN: 9781461469803. DOI: 10.1007/978-1-4614-6980-3. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-6980-3>.
- Chorin, A. J., O. H. Hald e R. Kupferman (2000). “Optimal prediction and the Mori–Zwanzig representation of irreversible processes”. Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 97.7, pp. 2968–2973. DOI: 10.1073/pnas.97.7.2968. URL: <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.97.7.2968>.
- Chorin, A. J., O. H. Hald e R. Kupferman (2002). “Optimal prediction with memory”. Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 166.3, pp. 239–257. ISSN: 0167-2789. DOI: 10.1016/S0167-2789(02)00446-3. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278902004463>.
- Evans, L. C. (jan. de 2014). *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Gouasmi, A., E. J. Parish e K. Duraisamy (2017). “A priori estimation of memory effects in reduced-order models of nonlinear systems using the Mori–Zwanzig formalism”. Em: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 473.2205, p. 20170385. DOI: 10.1098/rspa.2017.0385. URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.2017.0385>.
- Julia contributors (2024). *The Julia Programming Language*. <https://julialang.org/>. Disponível em: acesso em 23 maio 2025.
- Lorenz, E. N. (1980). “Attractor Sets and Quasi-Geostrophic Equilibrium”. Em: *Journal of Atmospheric Sciences* 37.8, pp. 1685–1699. DOI: 10.1175/1520-0469(1980)037<1685:ASAQGE>2.0.CO;2. URL: https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/37/8/1520-0469_1980_037_1685_asaqge_2_0_co_2.xml.

- Pavliotis, G. A. e A. Stuart (2008). *Multiscale Methods: Averaging and Homogenization*. Vol. 53. Springer Science & Business Media.
- Python Software Foundation (2025). *The Python Programming Language*. Acesso em: 12 jun. 2025. URL: <https://www.python.org/>.
- SciML Team (2025). *Stochastic Differential Equations · DifferentialEquations.jl*. Acessado em: 1 de junho de 2025. URL: https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/tutorials/sde_example/.
- Sistema Janus - USP (2025). *Ondas em Fluidos Geofísicos*. <https://uspdigital.usp.br/janus/componente/disciplinasOferecidasInicial.jsf?action=3&sgldis=MAP5007>. Disponível em: acesso em 08 maio 2025.
- Taylor, L. A. (2025). *Lorenz80: Estudo do modelo de Lorenz (1980)*. <https://github.com/lucasamtaylor01/Lorenz80>. Disponível em: acesso em 08 maio 2025.
- The NumPy development team (2025). *NumPy*. <https://numpy.org/>. Disponível em: acesso em 14 junho 2025.
- The pandas development team (2025). *Pandas - Python Data Analysis Library*. <https://pandas.pydata.org/>. Disponível em: acesso em 14 junho 2025.