

Uma análise numérica do atrator de Lorenz

MAP2310 — Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I

Lucas Amaral Taylor

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo - USP

Julio Cezar de Moura Lima

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo - USP

6 de setembro de 2024

Resumo

No presente relatório aplicaremos os métodos numéricos estudados na disciplina MAP2310 no sistema de equações diferenciais do atrator de Lorenz.

Palavras-chave: Métodos numéricos; Atrator de Lorenz;

1 Introdução

Edward Norton Lorenz (1917–2008) foi um matemático e meteorologista que realizou uma grande contribuição para o estudo de previsões meteorológicas utilizando-se equações diferenciais. O **Atrator de Lorenz** foi uma das principais contribuições do matemático nesta área de estudo. Publicado na revista *Journal of the Atmospheric Sciences* em 1963 com o título *Deterministic Nonperiodic Flow* [3], Lorenz desenvolveu um modelo matemático simplificado para convecção atmosférica de três equações diferenciais ordinárias expressas abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{cases} \quad (1)$$

Além da clara importância do modelo para a meteorologia, o modelo é conhecido por ser caótico e inaugurar o estudo da Teoria do Caos.

Neste relatório, assim como Edward Norton Lorenz, Ellen Cole Fetter Gille e Margaret Elaine Hamilton — estas duas importantes matemáticas que contribuíram com o trabalho de Lorenz — faremos simulações numéricas para estudar o sistema de equações expostas em (1).

Logicamente, com a diferença de ser em um nível de graduação e, assim como orientado, utilizando o conteúdo aprendido em aula. Para tal tarefa, seguiremos a seguinte abordagem: primeiro, usaremos o método *Runge-Kutta* para discretizar e resolver o sistema de equações diferenciais que define o atrator. Em seguida, para a representação gráfica, utilizaremos o *splines* cúbicas. O atrator de Lorenz tem curvas suaves e acreditamos que essa seja o melhor método para isso. Por fim, usaremos o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para ver a sensibilidade do sistema (o sistema é conhecido por ser bem sensível). Com o MMQ criaremos um conjunto de simulações com variações leves em cada um dos parâmetros e comparamos ao final.

2 Modelagem Matemática

Nesta seção, apresentaremos considerações e premissas que levam à equação diferencial que modela matematicamente. Além disso, mostraremos como o sistema de equações é consistente em relação ao Problema de Cauchy e, ao final, apresentaremos as condições iniciais e o domínio de definição do problema.

2.1 Considerações e premissas

Na introdução de seu artigo, Lorenz afirma que o sistema de equações expostos em (1) é um modelo determinístico de sistemas hidrodinâmicos ideais e que tais sistemas foram desenvolvidos para representar sistema hidrodinâmico dissipativo de força. Além disso, cabe destacar que o trabalho do artigo de *Deterministic Nonperiodic Flow*[3], tem como principal base o artigo *Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem—I* publicado em 1962 de autoria de Barry Saltzman [10].

A partir do artigo de Saltzman, introduziremos ao leitor os conceitos meteorológicos, metodologia utilizada pelo autor e, por fim, o raciocínio matemático para chegar nas equações propostas por Saltzman até o sistema de equações de (1) trabalhados por Lorenz. Os detalhes do desenvolvimento da equação podem ser consultados pelo leitor nos artigos citados [3] e [10].

Antes de iniciar, é necessário explicar o que seria o fenômeno de convecção. Convecção é um processo de transferência de calor que ocorre em fluidos, como líquidos e gases. Esse fenômeno envolve o movimento do próprio fluido, transferindo energia térmica de uma região para outra.

Em [10], o autor como base experimentos meteorológicos e hidrodinâmicos. Neles, os pesquisadores trabalham com modelos de um fenômeno de convecção de natureza não-linear, devido às variações espaciais de movimento e temperatura. Saltzman tem dois objetivos: formular um modelo matemático e um método de solução de um caso de movimento convectivo dependente do tempo bidimensionais. Para isso, ele utiliza um número fixo e limitado de componentes de Fourier e resultados de trabalhos precedentes, destacando-se: *On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side* [9] e *Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der*

Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen [5].

Após manipulações algumas manipulações algébricas, cujo leitor pode conferir os detalhes em [10], Saltzman chega ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + v \nabla^4 \psi + g \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta \quad (3)$$

Onde:

- ψ : função de fluxo bidimensional ($m^2 \cdot s^{-1}$)
- θ : desvio de temperatura (K);
- g : aceleração da gravidade ($m \cdot s^{-2}$);
- α : coeficiente de expansão térmica (K^{-1});
- v : constante de viscosidade cinemática ($m^2 \cdot s^{-1}$);
- κ : constante de condutividade térmica ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$).

Manipulando os termos e adicionando os componentes de Fourier, obtemos a seguinte expressão [7] [10]:

$$\frac{a}{(1+a^2)^k} \psi = x(t) \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi u}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi v}{H}\right) \quad (4)$$

$$\frac{\pi R_o \theta}{R \Delta T} = y(t) \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi u}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi v}{H}\right) - z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{H} v\right) \quad (5)$$

Onde:

- u : coordenada espacial horizontal (m);
- $x(t), y(t), z(t)$: coeficientes dependentes do tempo (amplitudes) (Unidade depende do contexto);
- $\frac{\pi}{H}$: inverso da profundidade da camada de fluido (máximo de v) (m^{-1});
- a : parâmetro de geometria;
- Ra : número de Rayleigh [9];

- R_c : valor crítico de Ra ($R_c = \pi^4(1 + a^2)^3/a^2$);
- ΔT : diferença de temperatura total (K).

Finalmente, em posse de todas essas equações. Realizando a substituição de 4 e 5 em 2 e 3 e eliminando as funções trigonométricas, obtemos 1, isto é:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

- σ controla a sensibilidade do sistema à diferença entre as variáveis x e y (número de Prandtl).
- ρ está associado à taxa de convecção do sistema.(número de Rayleigh)
- β está associado à geometria do sistema e à diferença entre as taxas de crescimento das variáveis x e z .

2.2 O problema de Cauchy

Lorenz em seu artigo, considera o sistema de equações como um sistema dissipativo de energia composto por um conjunto finito de equações lineares em um espaço de fase.

2.2.1 Um sistema dissipativo em um espaço de fase

Primeiramente, é importante definir o que é um sistema dissipativo de energia e o que é um espaço de fase e como estes conceitos dialogam com o atrator de Lorenz.

Sistemas dissipativos de energia tem como característica o fato de perder energia em processos não conservativos, como atrito, transformando-se em formas menos úteis, como calor. O Atrator de Lorenz é um exemplo desses sistemas, por se tratar do fenômeno convecção atmosférica (fenômeno devidamente explicado na seção anterior), onde a energia constantemente alimentada e dissipada.

O espaço de fase é uma representação que descreve todos os possíveis estados de um sistema dinâmico através de suas variáveis. Cada ponto neste espaço indica um estado específico do sistema.

Isto posto, podemos explicar a abordagem tomada por Lorenz para explicar a existência e unicidade da equação diferencial. Podemos classificar o fenômeno de convecção como um sistema dissipativo de energia formado por conjunto finito de equações lineares. Isto posto, podemos tomar n variáveis x_1, \dots, x_n e definir o seguinte sistema:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n) \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (6)$$

Onde F_i possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas e t é a única variável independente. Assim, para descrever todos os possíveis estados de um sistema dinâmico através de suas variáveis, adequaremos o sistema em um espaço de fase euclidiano de dimensão n constituído pelas variáveis x_1, \dots, x_n .

Assim, como o sistema é composto por equações lineares com variáveis dependentes e que $F_i \in C_1$, temos que, conseqüentemente, o sistema possui solução única diretamente. Isto é:

$$x_i = f_i(x_{1_0}, \dots, x_{n_0}, t) \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (7)$$

Para algum intervalo que contenha t_0 e satisfaça a condição abaixo:

$$f_i(x_{1_0}, \dots, x_{n_0}, t_0) = x_{i_0} \quad i = \{1, \dots, n\}$$

Tal fato é demonstrado em [2] na forma de um Teorema, exposto a seguir:

Teorema. Considere um intervalo fechado $[A, B]$ onde as funções $F_i(x_1, \dots, x_n)$ são contínuas juntamente com suas derivadas parciais de primeira ordem $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Se para algum ponto t_0 em (A, B) são dadas condições iniciais $x_{i_0} = x_i(t_0)$, então existe um único conjunto de funções $x_i(t)$ que são soluções do sistema no intervalo $[A, B]$ e satisfazem $x_i(t_0) = x_{i_0}$. Além disso, as soluções $x_i(t)$ possuem derivadas contínuas em $[A, B]$.

Com base no teorema apresentado e na formulação das equações diferenciais $\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n)$, o problema de *Cauchy* é adequadamente satisfeito. Dadas condições iniciais em um tempo t_0 , a existência e unicidade das soluções $x_i(t)$ são garantidas para o intervalo $[A, B]$.

2.2.2 Uma breve nota do Teorema da Existência e Unicidade de Picard

Primeiramente, expressaremos o Teorema da Existência e Unicidade de Picard utilizando a [11]:

Teorema. Seja f contínua e lipschitzana em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω , existe uma e única solução de

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

em I_α onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$

Geralmente, a fim de mostrar a resolução do problema de *Cauchy*, utiliza-se como abordagem o Teorema exposto acima. Este método não foi utilizado para a tratar o sistema de Lorenz.

Ao pesquisar livros e referências sobre o tema, nenhum utilizou como abordagem este método. Isso porque é fácil de demonstrar que as funções do sistema (1) tem derivada contínua, mas pelo sistema ser não-linear a demonstração de ser localmente lipschitzana é extremamente complexa e é preferível a abordagem utilizada pelo próprio autor em [3]. Optamos por seguir a abordagem majoritariamente utilizada.

2.2.3 Condições iniciais e domínio de definição do problema

Definiremos o domínio de definição do problema da seguinte forma: as variáveis $x, y, z \in \mathbb{R}$ refletindo a capacidade do sistema de atingir qualquer estado no espaço tridimensional (cabe dizer aqui que: apesar de Lorenz tratar o sistema em um estado de fase, por questões de simplicidade e representação computacional clara, utilizaremos o espaço tridimensional em nossas simulações). Além disso, temos que $t \in [0, \infty)$, o tempo começa em zero e não tem limite superior, permitindo a análise do sistema ao longo do tempo para observar seu comportamento dinâmico.

As condições iniciais que definimos são: $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = \frac{8}{3}$. Os valores apresentados são tipicamente escolhidos em simulações da literatura. Além disso, as escolhas de x , y e z são números reais arbitrariamente escolhidos, por questões de simplicidade escolheremos: $x = 0$, $y = 1.0$ e $z = 1.05$.

3 Metodologia Numérica

Nesta seção, apresentaremos os métodos utilizados no desenvolvimento do trabalho, justificando devidamente o emprego de cada uma. A fim de promover uma descrição adequada de cada método utilizaremos como referência [1] e [8].

3.1 Uma breve nota sobre os métodos utilizados

Nesta seção, apresentamos os métodos numéricos de maneira teórica, detalhando as justificativas e o funcionamento teórico conforme a abordagem adotada durante as aulas. É importante ressaltar que, na aplicação prática, utilizamos as bibliotecas *numpy* e *scipy* na linguagem de programação *Python*. Optamos por não incluir no texto algumas divergências e detalhes específicos relacionados ao uso dessas ferramentas computacionais, pois eles se referem mais à implementação técnica nas bibliotecas e as especificações delas do que aos conceitos teóricos discutidos em aula.

3.2 Método Runge-Kutta

3.2.1 Justificativa da escolha do método

O fato do atrator de *Lorenz* ser um sistema não linear, de alta sensibilidade, principalmente, pela mudança das condições iniciais, e caótico. Pelo fato de calcular as inclinações em quatro pontos dentro de cada intervalo de tempo, o método oferece uma aproximação mais precisa comparada aos demais aprendidos em aula. Por exemplo, o método de Euler não seria suficientemente eficaz para a discretização do sistema por não modelar muito bem fenômenos de natureza não linear. A

Além disso, O Runge-Kutta de quarta ordem, oferece um erro de truncamento local da ordem de h^5 e um erro de truncamento global da ordem de h^4 , onde h é o passo de tempo [8] [1]. Isso significa que pequenos aumentos no passo de tempo podem produzir resultados precisos sem aumentar significativamente o erro, o que é ideal para lidar com a dinâmica complexa e sensível do atrator de Lorenz.

3.2.2 Funcionamento do método

O método Runge-Kutta visa discretizar os valores do sistema (1) com os valores iniciais apresentados na seção 2.2.3. Seguiremos o método apresentado em [1]:

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{6}(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4) \quad (8)$$

De tal forma que:

$$\begin{cases} \kappa_1 = f(t, y) \\ \kappa_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}\kappa_1\right) \\ \kappa_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}\kappa_2\right) \\ \kappa_4 = f(t + h, y + h\kappa_3) \end{cases} \quad (9)$$

3.3 *Spline* Cúbico

3.3.1 Justificativa da escolha do método

Utilizaremos o método de interpolação chamado *spline* cúbico. A escolha deste método para a interpolação dos dados do atrator de Lorenz é motivada pela necessidade de representar as curvas do sistema de maneira suave e contínua, uma característica crucial para tratar sua natureza não-linear e caótica.

Outros métodos, como, por exemplo, o método de interpolação de Lagrange não seria adequado, já que este envolve um processo de linearização que acarretaria perda de informação e, conseqüentemente, não representaria o sistema da melhor forma possível.

3.3.2 Funcionamento do método

Este método envolve a criação de um polinômio cúbico em cada subintervalo de um intervalo total, para interpolar um conjunto de pontos dados. Seguiremos como referência a construção de *spline* proposta pela referência [8], expressa abaixo:

Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ um conjunto de nós. Um interpolante de *spline* cúbica S para f é uma função que satisfaz as seguintes condições:

1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, denotado $S_j(x)$, em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para $j = 0, 1, \dots, n-1$.
2. $S_j(x_j) = f(x_j)$ e $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.
3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$.
4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$.
5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$.
6. Uma das seguintes condições de contorno é satisfeita:
 - (a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (contorno livre ou natural).
 - (b) $S'(x_0) = f'(x_0)$ (contorno fixado ou clampeado).

3.4 Método dos Mínimos Quadrados

3.4.1 Justificativa da escolha do método

Utilizamos o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para analisar a sensibilidade do atrator de Lorenz ao longo do tempo. Embora o atrator de Lorenz seja um sistema altamente não-linear, o MMQ proporciona uma boa aproximação das dinâmicas envolvidas nesse sistema. Além disso, ele quantifica o impacto das alterações em cada parâmetro, evidenciando como pequenas mudanças nas variáveis podem afetar o sistema. Por fim, vale destacar a alta eficiência computacional deste método.

3.4.2 Funcionamento do método

O método dos mínimos quadrados polinomial aproxima um conjunto de dados (x_i, y_i) , com um polinômio algébrico $P_n(x)$ de grau $n < m-1$, escolhendo os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n para minimizar o erro quadrático $E = \sum_{i=1}^m (y_i - P_n(x_i))^2$. Isso resulta em $n+1$ equações normais para os $n+1$ coeficientes desconhecidos a_j :

$$\sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{i=1}^m x_i^{j+k} \right) = \sum_{i=1}^m y_i x_i^j, \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n. \quad (10)$$

Resolvendo esse sistema, obtemos os coeficientes do polinômio que melhor se ajusta aos

dados no sentido dos mínimos quadrados. A ser expresso em:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Detalhes a serem vistos em [8].

4 Metodologia Computacional

A fim de aplicar os métodos citados anteriormente, essa seção traz como proposta apresentar a abordagem computacional no emprego dos métodos, comprovação do comportamento no fenômeno de atrator e por fim avaliar algumas métricas provenientes de cada uma das metodologias.

4.1 Contexto

Apresentamos métodos de “discretização” que possibilitam estimar valores para o vetor solução $S = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ em um dado tempo t . Durante a metodologia computacional os passos trabalhados foram:

1. Aplicação de Runge-Kutta no sistema de Lorenz com $n_steps = 10^4$, ou seja, o vetor solução seria calculado ao longo de 10 000 períodos. A justificativa para a quantidade de pontos é dada graficamente, de modo que o atrator toma forma ao longo do tempo.
2. A partir das soluções encontradas em RK, os dados são tabelados e assim utilizados para interpolação *spline* cúbica. De maneira análoga, para MMQ, portanto, teremos dois polinômios interpoladores.
3. Com os polinômios previamente calculados desenhos os gráficos.

4.2 Dados preliminares

Utilizando o método RK, três simulações foram feitas para o sistema de Lorenz já definido, mostrando que o fenômeno atrator forma as espirais conforme os passos dados, sabendo que um tempo(t) maior gera com mais assertividade o fenômeno evidenciado por Lorenz (*Visualização na figura 3*).

A função em *Python* responsável por calcular RK é definida pelos seguintes parâmetros: $\sigma, \rho, \beta, x_0, y_0, z_0, h, num_steps$. Considerando as variáveis comuns ao sistema convencionado, sendo (x_0, y_0, z_0) condições iniciais do sistema e h o comprimento do intervalo em que t (tempo) está compreendido.

Na execução da função, valores comuns dentro do estudo de Lorenz foram usados, de modo que:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= 10, \\
 \rho &= 28, \\
 \beta &= \frac{8}{3}, \\
 x_0 &= 0, \\
 y_0 &= 1, \\
 z_0 &= 1.05, \\
 h &= 0.01, \\
 \text{num_steps} &= 10^4
 \end{aligned} \tag{11}$$

Índice	X	Y	Z
0	0.000000	1.000000	1.050000
1	0.095105	1.003039	1.022849
2	0.182649	1.030512	0.997333
3	0.265581	1.080595	0.973428
4	0.346436	1.152210	0.951187
5	0.427432	1.244918	0.930735
6	0.510567	1.358849	0.912268
7	0.597683	1.494637	0.896062
8	0.690531	1.653393	0.882484
9	0.790823	1.836671	0.872011
10	0.900278	2.046464	0.865257
11	1.020660	2.285199	0.863005
12	1.153819	2.555743	0.866250
13	1.301723	2.861417	0.876253
14	1.466492	3.206010	0.894607
15	1.650427	3.593802	0.923322

Tabela 1: Seleção de 15 pontos

Atrator de Lorenz

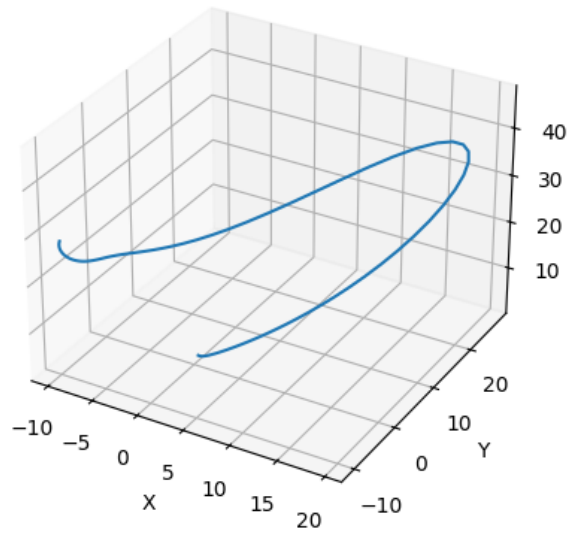


Figura 1: Atrator para 100 passos.

Atrator de Lorenz

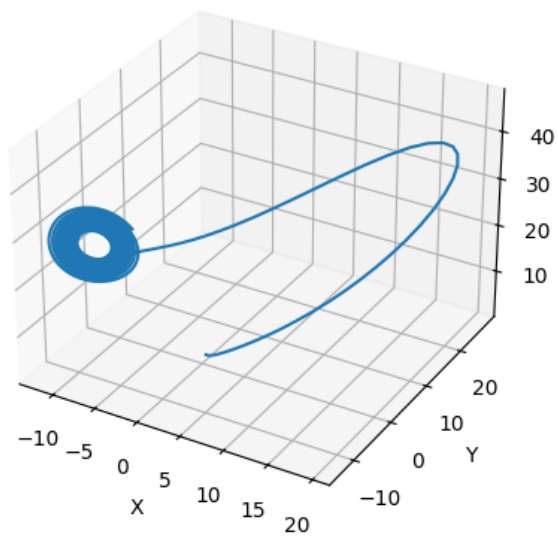


Figura 2: Atrator para 1000 passos.

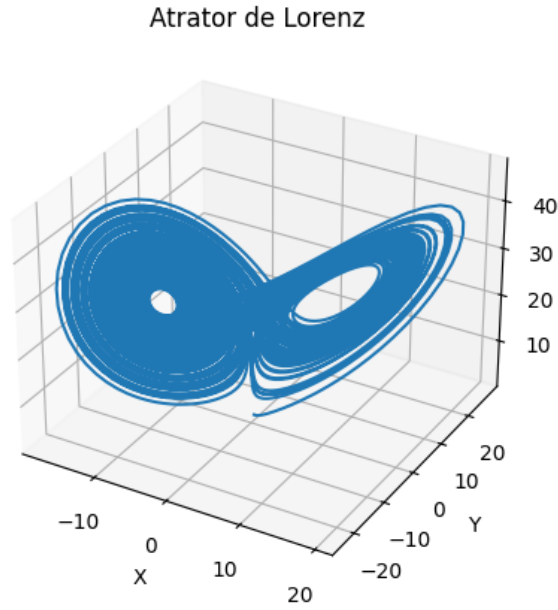


Figura 3: Atrator para 10000 passos.

4.3 Métodos Interpoladores

4.3.1 *Spline* Cúbica

No emprego do método de interpolação por *spline* cúbica foi utilizada a biblioteca Scipy do python, sendo aplicado o método `scipy.interpolate.CubicSpline`. O motivo por tal técnica é para fins de teste e comprovação do método, dado que o número de pontos trabalhados é alto, o que gera um custo computacional significativo. Observando o método, vemos que a estratégia segue algo que Lorenz já evidenciou nos testes, assim sendo um bom método interpolador que compreende o comportamento “oscilante” descrito no problema.

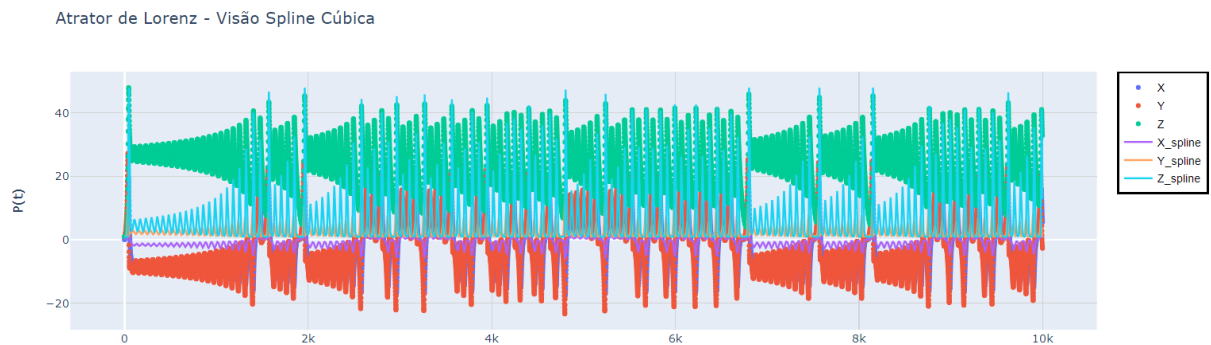


Figura 4: Spline Cúbica

4.3.2 MMQ

Já no MMQ, seguimos a mesma estratégia abordada na *spline* cúbica, mas com o pacote NumPy e para biblioteca *numpy.polyfit*, de modo que o pacote faça um *fit* através da estratégia de mínimos quadrados com os pontos previamente tabelados. De fato, não há uma boa predição de dados nas curvas do MMQ, o que se aproxima do comportamento conhecido de uma regressão linear, já que há uma alta dispersão nos pontos, grande volume e, por consequência, granularidade na interpolação.

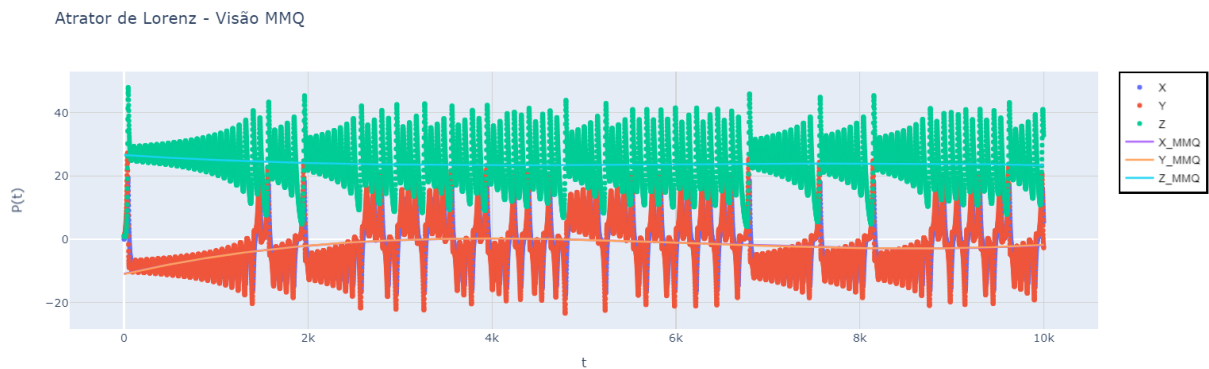


Figura 5: MMQ

5 Resultados

5.1 Análise Manufaturada

Para realizar a análise de maneira manufaturada, faremos um comparativo intrínseco acerca de um dos métodos que Lorenz abordou na resolução do problema: o método de diferenças progressivas[3] e o método já aprofundado no texto que se trata do RK4.

Como fim didático, vamos detalhar o método de diferenças progressivas(*forward-difference*).

A equação que estabelece o método é dada por:

$$X_i(t_{n+1}) = X_i(t_n) + F_i(P_n)\Delta t$$

De modo que $F_i(P_n) = \dot{X}_i(P_n)$ e $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, assim fazemos uso de aproximações progressivas, ou seja, diferenças finitas trabalhadas com a função em um tempo t_n e no tempo futuro t_{n+1} para calcular valores futuros. Abaixo temos a tabela de valores gerada com o método, assim como a diferença entre os valores de cada ponto com os pontos gerados por RK4.

	X	Y	Z	$X - X_{rk}$	$Y - Y_{rk}$	$Z - Z_{rk}$
1	0.000000	1.000000	1.050000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.100000	0.990000	1.022000	0.004895	-0.013039	-0.000849
3	0.189000	1.007078	0.995737	0.006351	-0.023434	-0.001596
4	0.270808	1.048045	0.971087	0.005226	-0.032550	-0.002341
5	0.348532	1.110761	0.948030	0.002096	-0.041449	-0.003157
6	0.424755	1.193938	0.926620	-0.002678	-0.050980	-0.004114
7	0.501673	1.296994	0.906982	-0.008894	-0.061854	-0.005286
8	0.581205	1.419943	0.889302	-0.016478	-0.074694	-0.006760
9	0.665079	1.563312	0.873840	-0.025452	-0.090081	-0.008644
10	0.754902	1.728089	0.860935	-0.035921	-0.108582	-0.011076

Tabela 2: Diferença em comparação com os valores dos pontos de RK4

Seja $E = \{(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \mathbb{R}^3\}$, o vetor de médias amostrais do módulo da diferença entre os pontos. Então $E = (0.007, 0.049, 0.004)$, disso evidenciamos estatisticamente que os pontos gerados não apresentam grandes distâncias, entretanto no caráter de sensibilidade

do atrator há grandes mudanças gráficas. Aqui notamos que os saltos em cada iteração são menores, comparados ao RK4, o que reflete diretamente na formação do atrator com ‘vórtices’ mais compactos e sem grande detalhamento no efeito. Temos a seguinte imagem:

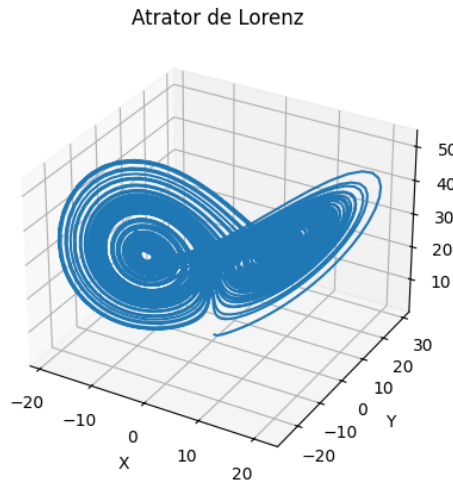


Figura 6: Imagem gerada com método de diferenças progressivas

5.2 Aplicações na meteorologia

Como já exposto na introdução deste relatório, podem-se reafirmar a importância do atrator de Lorenz na meteorologia. Logicamente, apesar de ser um modelo simplificado daquele exposto por Saltzman em [10], o modelo de Lorenz é considerado um ótimo modelo na área para a modelagem de convecção atmosféricas ao redor do globo.

Um grande exemplo do uso do atrator de Lorenz é o trabalho de Timothy Noel Palmer intitulado como “Extended-Range Atmospheric Prediction and the Lorenz Model” [6], o qual apresentamos o resumo (em tradução livre) abaixo:

A base física para a previsão de longo alcance é explorada utilizando o famoso modelo de convecção Lorenz de três componentes, tomado como uma representação conceitual da circulação extratropical caótica, e alargado através do acoplamento a um oscilador linear para representar interações tropicais-extratropicais de grande escala. O modelo é utilizado para analisar os papéis do cálculo da média temporal e da previsão por conjuntos e, numa forma alargada, o impacto da temperatura anômala da superfície do mar tropical e da temperatura anômala da superfície do mar extratropical. Os paradigmas conceituais e os cálculos analíticos apresentados são utilizados para interpretar resultados de previsões meteorológicas numéricas e de experiências com modelos de circulação geral. São apresentadas

algumas observações sobre a relevância dos estudos de previsibilidade para o problema das alterações climáticas.

6 Convergência do erro

A fim de completar nossa análise do atrator de Lorenz, iremos realizar a análise da convergência do erro das duas abordagens trabalhadas no presente relatório. Primeiramente, é importante pontuar que: como o atrator de Lorenz não possui uma solução analítica simples para comparação direta, uma abordagem comum é considerar a solução numérica obtida com o menor h como uma aproximação da solução “exata”. Então, calcularemos o erro como a diferença entre as soluções numéricas obtidas para os diferentes valores de h e a solução com o menor h .

6.1 Método Runge-Kutta de ordem 4

6.1.1 Base teórica

Para iniciar uma análise comparativa robusta, é essencial primeiro definir e entender as principais características do método utilizado. Com base nessas características, desenvolveremos uma fundamentação teórica sólida que suporte a análise comparativa.

O Método Runge-Kutta de ordem 4, utilizado para a discretização do atrator de Lorenz pelos autores, é um método de passo único, isso porque a solução em cada passo depende apenas do valor da solução no passo anterior, e não de múltiplos passos anteriores. Além disso, é um método de Runge-Kutta explícito, ou seja, os valores de k_i são calculados diretamente dos valores já conhecidos, sem necessidade de resolver equações adicionais para obter k_i .

A partir desta caracterização inicial, podemos recorrer a **Definição 3.1** [1] que lista as três principais propriedades do método RK explícito de ordem q (para o nosso caso, ordem 4):

Definição 3.1 (Propriedades de um RK explícito de ordem 4). Um método é de *Runge-Kutta explícito de ordem 4* se, e só se, satisfaz três propriedades:

1. é um método de passo único explícito,
2. tem as derivadas de $y(t)$ (e, portanto, de $D^j f(t, y)$) aproximadas em pontos “convenientemente escolhidos” e, por fim,
3. “concorda” com o Método da Série de Taylor até o termo de quarta ordem.

Após apontar as principais características do método trabalhado, podemos enfim levantar

os principais pontos relacionados ao erro do método empregado e sua convergência.

O RK4 usa uma combinação ponderada de quatro inclinações $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ dentro do intervalo h em pontos específicos para estimar a próxima solução. Ao expandir a solução em série de Taylor e comparar com a fórmula do RK4, pode-se mostrar que os termos de erro de ordem superior são cancelados devido à escolha específica dos coeficientes de ponderação e dos pontos de amostragem. Isso leva a um **erro local de truncamento de ordem 5** em cada passo.

Ao acumular os erros locais ao longo de n passos, **o erro global se torna de ordem 4**, uma ordem a menos. Logo, à medida que o tamanho do passo h diminui, o erro global do RK4 converge para zero¹ a uma taxa de h^4 .

Por fim, a alta ordem de convergência do RK4 $O(h^4)$ implica que o erro diminui rapidamente à medida que o tamanho do passo h é reduzido. Essa rápida convergência, juntamente com sua natureza explícita e estabilidade numérica, torna o RK4 um método eficiente para o problema trabalhado.

6.2 Método de diferenças progressivas

6.2.1 Base teórica

O método de diferenças progressivas utilizado como método da análise manufaturado foi o método utilizado pelo Lorenz em [3]. Como devidamente mostrado na seção anterior, temos que “evidenciamos estatisticamente que os pontos gerados não apresentam grandes distâncias, entretanto no caráter de sensibilidade do atrator há grandes mudanças gráficas”. Essa grande mudança gráfica devido a sensibilidade do sistema será justificada na presente seção. Assim como, o método de Runge-Kutta antes de tratar o erro propriamente, iremos expor propriedades do método a fim de extrair informações mais consistentes e robustas do erro e convergência do método empregado. Isto posto, comecemos nossa análise.

Da maneira que foi empregado, o método de diferenças progressivas pode ser analisado como o método de Euler explícito de passo único. As principais propriedades do método

¹Por isso, considerar a solução numérica obtida com o menor h como uma aproximação da solução “exata” é viável

estão listadas a seguir e embasadas pela referência [12]:

1. **Simplicidade:** É um dos métodos mais simples para a resolução de EDOs;
2. **Ordem:** É um método de primeira ordem, o que significa que o erro de truncamento é proporcional ao quadrado do tamanho do passo, enquanto o erro acumulado é proporcional ao tamanho do passo;
3. **Convergência:** Converge para a solução correta à medida que o tamanho do passo diminui, mas requer passos de tempo pequenos para uma boa precisão, especialmente em sistemas dinâmicos sensíveis;
4. **Estabilidade:** Pode ser instável se o passo de tempo não for suficientemente pequeno, o que é crítico em sistemas que são sensíveis às condições iniciais.

As características do Método de Euler são essenciais para compreender o erro e sua convergência, particularmente quando aplicadas a sistemas complexos como o Atrator de Lorenz. A simplicidade do método, embora benéfica para a implementação, apresenta desvantagens significativas:

1. **Dependência do Tamanho do Passo:** O Método de Euler possui uma alta dependência do tamanho do passo. Isso implica que tanto o erro local quanto o erro global estão diretamente ligados ao tamanho do passo escolhido.
2. **Convergência e Estabilidade:** Devido à forte dependência do tamanho do passo, a convergência do método pode ser comprometida. Um passo maior pode resultar em uma solução numérica instável, especialmente em sistemas dinâmicos sensíveis como o Atrator de Lorenz, onde pequenas variações nas condições iniciais podem levar a grandes divergências nas trajetórias calculadas.

Como mencionado anteriormente, o erro local de truncamento para o método de Euler é proporcional ao quadrado do tamanho do passo e o erro global é proporcional ao tamanho do passo. Então:

$$\text{Erro Local} = O(\Delta t^2) \quad \text{e} \quad \text{Erro Global} = O(\Delta t)$$

Substituindo, pelo valor utilizado em nossa implementação, $\Delta t = 0.01$, para cada passo, temos:

$$\text{Erro Local} = O(0.0001) \quad \text{e} \quad \text{Erro Global} = O(0.01)$$

Levando em consideração, que foram utilizados 10^4 passos, temos que:

$$\text{Erro Global Acumulado} = O(N \cdot \Delta t) = O(10^4 \cdot 0.01) = O(10^2)$$

O que explica a diferença na análise comparativa do presente trabalho e por que **atualmente** existe a preferência de utilizar RK-4 ao invés do método de Euler para implementação computacional.

Antes de criar a tabela de convergência do método de Euler, é importante realizar uma breve observação à respeito estabilidade e na convergência desse método, principalmente, para um sistema caótico como o apresentado.

Uma estrutura para analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos, como o atrator de Lorenz, é fornecida pela teoria de *Liapunov*, mas, devido à sua natureza caótica, encontrar uma função deste tipo adequada para o atrator de Lorenz é considerada difícil e, por conta disso, não será abordada no presente trabalho;

Pelo fato do tamanho do passo de tempo escolhido está diretamente relacionado à convergência e estabilidade do método de Euler para o atrator de Lorenz, temos que passos de tempo maiores podem resultar em erros e instabilidades numéricas maiores, enquanto passos de tempo menores tendem a produzir resultados mais precisos e estáveis.

A taxa de decaimento de correlações e a propriedade de *mixing*² foram incluídas nas propriedades de recorrência do atrator de Lorenz. Essas características contribuem para a caracterização da dinâmica caótica do atrator e estão associadas à sua estabilidade.

²*Mixing* é uma propriedade de sistemas dinâmicos que indica um alto grau de imprevisibilidade e sensibilidade às condições iniciais. Em um sistema *mixing*, quaisquer duas regiões do espaço de fase, não importa quão pequenas ou distantes, eventualmente se sobrepõem à medida que o sistema evolui no tempo. Detalhes em [4]

6.2.2 Tabelas de convergência

	$X_{0.01}$	$Y_{0.01}$	$Z_{0.01}$	$X_{0.001}$	$Y_{0.001}$	$Z_{0.001}$	$X_{0.0001}$	$Y_{0.0001}$	$Z_{0.0001}$
0	0.000000	1.000000	1.050000	0.000000	1.000000	1.050000	0.000000	1.000000	1.050000
1	0.100000	0.990000	1.022000	0.001000	0.999900	1.049720	0.001000	0.999900	1.049720
2	0.189000	1.007078	0.995737	0.001999	0.999803	1.049440	0.001999	0.999803	1.049440
3	0.270808	1.048045	0.971087	0.002997	0.999708	1.049161	0.002997	0.999708	1.049161
4	0.348532	1.110761	0.948030	0.003993	0.999616	1.048881	0.003993	0.999616	1.048881
5	0.424755	1.193938	0.926620	0.004989	0.999527	1.048602	0.004989	0.999527	1.048602
6	0.501673	1.296994	0.906982	0.005984	0.999441	1.048323	0.005984	0.999441	1.048323
7	0.581205	1.419943	0.889302	0.006977	0.999357	1.048044	0.006977	0.999357	1.048044
8	0.665079	1.563312	0.873840	0.007969	0.999276	1.047765	0.007969	0.999276	1.047765
9	0.754902	1.728089	0.860935	0.008961	0.999197	1.047486	0.008961	0.999197	1.047486
10	0.852221	1.915682	0.851022	0.009951	0.999121	1.047208	0.009951	0.999121	1.047208
11	0.958567	2.127894	0.844654	0.010940	0.999048	1.046930	0.010940	0.999048	1.046930
12	1.075500	2.366917	0.842527	0.011928	0.998978	1.046651	0.011928	0.998978	1.046651
13	1.204641	2.635327	0.845516	0.012915	0.998910	1.046374	0.012915	0.998910	1.046374
14	1.347710	2.936088	0.854715	0.013901	0.998845	1.046096	0.013901	0.998845	1.046096

Tabela 3: Tabela de Convergência - Método Lorenz

	ΔX	ΔY	ΔZ
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	-0.099000	0.009900	0.027720
2	-0.187001	-0.007275	0.053704
3	-0.267811	-0.048337	0.078073
4	-0.344538	-0.111145	0.100851
5	-0.419765	-0.194411	0.121982
6	-0.495689	-0.297554	0.141341
7	-0.574228	-0.420586	0.158742
8	-0.657109	-0.564036	0.173925
9	-0.745941	-0.728892	0.186551
10	-0.842270	-0.916560	0.196186
11	-0.947627	-1.128846	0.202276
12	-1.063571	-1.367939	0.204124
13	-1.191726	-1.636417	0.200858
14	-1.333809	-1.937243	0.191381

Tabela 4: Variação $\Delta = h_{0.001} - h_{0.01}$

	ΔX	ΔY	ΔZ
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	-0.099000	0.009900	0.027720
2	-0.187001	-0.007275	0.053704
3	-0.267811	-0.048337	0.078073
4	-0.344538	-0.111145	0.100851
5	-0.419765	-0.194411	0.121982
6	-0.495689	-0.297554	0.141341
7	-0.574228	-0.420586	0.158742
8	-0.657109	-0.564036	0.173925
9	-0.745941	-0.728892	0.186551
10	-0.842270	-0.916560	0.196186
11	-0.947627	-1.128846	0.202276
12	-1.063571	-1.367939	0.204124
13	-1.191726	-1.636417	0.200858
14	-1.333809	-1.937243	0.191381

Tabela 5: Variação $\Delta = h_{0.0001} - h_{0.01}$

	$X_{0.01}$	$Y_{0.01}$	$Z_{0.01}$	$X_{0.001}$	$Y_{0.001}$	$Z_{0.001}$	$X_{0.0001}$	$Y_{0.0001}$	$Z_{0.0001}$
0	0.000000	1.000000	1.050000	0.000000	1.000000	1.050000	0.000000	1.000000	1.050000
1	0.095105	1.003039	1.022849	0.009946	0.999135	1.047209	0.000999	0.999901	1.049720
2	0.182649	1.030512	0.997333	0.019785	0.998537	1.044435	0.001998	0.999805	1.049440
3	0.265581	1.080595	0.973428	0.029522	0.998203	1.041678	0.002995	0.999712	1.049161
4	0.346436	1.152210	0.951187	0.039160	0.998131	1.038938	0.003991	0.999622	1.048881
5	0.427432	1.244918	0.930735	0.048702	0.998318	1.036215	0.004986	0.999534	1.048602
6	0.510567	1.358849	0.912268	0.058153	0.998760	1.033509	0.005980	0.999449	1.048323
7	0.597683	1.494637	0.896062	0.067516	0.999456	1.030819	0.006973	0.999366	1.048044
8	0.690531	1.653393	0.882484	0.076793	1.000402	1.028146	0.007965	0.999286	1.047766
9	0.790823	1.836671	0.872011	0.085989	1.001597	1.025489	0.008956	0.999209	1.047487
10	0.900278	2.046464	0.865257	0.095106	1.003037	1.022849	0.009946	0.999135	1.047209
11	1.020660	2.285199	0.863005	0.104149	1.004721	1.020225	0.010934	0.999063	1.046931
12	1.153819	2.555743	0.866250	0.113119	1.006647	1.017617	0.011922	0.998994	1.046653
13	1.301723	2.861417	0.876253	0.122020	1.008812	1.015025	0.012908	0.998927	1.046375
14	1.466492	3.206010	0.894607	0.130856	1.011214	1.012450	0.013894	0.998864	1.046097

Tabela 6: Tabela de Convergência no método RK4

	ΔX	ΔY	ΔZ
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	-0.085159	-0.003904	0.024360
2	-0.162864	-0.031975	0.047102
3	-0.236059	-0.082392	0.068250
4	-0.307276	-0.154079	0.087751
5	-0.378730	-0.246601	0.105480
6	-0.452414	-0.360088	0.121241
7	-0.530167	-0.495181	0.134757
8	-0.613738	-0.652991	0.145662
9	-0.704834	-0.835074	0.153479
10	-0.805171	-1.043427	0.157592
11	-0.916511	-1.280478	0.157220
12	-1.040700	-1.549096	0.151367
13	-1.179703	-1.852605	0.138772
14	-1.335636	-2.194796	0.117843

Tabela 7: Variação $\Delta = h_{0.001} - h_{0.01}$

	ΔX	ΔY	ΔZ
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	-0.094106	-0.003137	0.026871
2	-0.180651	-0.030706	0.052107
3	-0.262586	-0.080883	0.075733
4	-0.342444	-0.152588	0.097695
5	-0.422446	-0.245385	0.117868
6	-0.504587	-0.359400	0.136055
7	-0.590709	-0.495271	0.151982
8	-0.682566	-0.654106	0.165282
9	-0.781867	-0.837462	0.175476
10	-0.890332	-1.047330	0.181952
11	-1.009726	-1.286136	0.183926
12	-1.141897	-1.556749	0.180403
13	-1.288815	-1.862489	0.170122
14	-1.452598	-2.207146	0.151491

Tabela 8: Variação $\Delta = h_{0.0001} - h_{0.01}$

A O bater de asas de uma borboleta

Uma das perguntas mais famosas relacionadas ao atrator de Lorenz é a seguinte:

“O simples bater de asas de uma borboleta no Brasil pode ocasionar um tornado no Texas?” ³

Essa frase é de autoria do próprio Edward Lorenz e foi dita no 139º encontro da *American Association for the Advancement of Science*, em 1969.

É uma pergunta provocativa que destaca uma característica instigante, já citada várias vezes no presente relatório, do atrator estudado. A propriedade em questão é a alta sensibilidade às condições iniciais. Ou seja, pequenas mudanças feitas nas variáveis x_0, y_0 e z_0 podem mudar totalmente a trajetória gerada pelo atrator. A fim de evidenciar este fenômeno tão particular do objeto estudado, realizaremos um breve estudo comparativo entre os resultados obtidos pela simulação exposta no desenvolvimento do relatório e uma pequena variação (cerca de 1×10^6 em cada variável e comparar os resultados obtidos).

A.1 Simulação com pequenas variações

Os valores de $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = \frac{8}{3}$ permanecerão os mesmos.

Tabela 9: Valores Iniciais e Variações para x_0, y_0 , e z_0

Parâmetro	Valor Original	Valor com Variação
x_0	0	0.000001
y_0	1	1.000001
z_0	1.05	1.050001

A partir dos dados obtidos, realizaremos a análise de dados e uma análise visual dos gráficos plotados.

³Tradução livre.

A.2 Análise de dados

Comparação de dados originais com dados com pequenas variações nas variáveis iniciais.

	x_0	y_0	z_0	x'_0	y'_0	z'_0
0	0.000000	1.000000	1.050000	0.000001	1.000001	1.050001
1	0.095105	1.003039	1.022849	0.095106	1.003040	1.022850
2	0.182649	1.030512	0.997333	0.182650	1.030513	0.997334
3	0.265581	1.080595	0.973428	0.265582	1.080597	0.973429
4	0.346436	1.152210	0.951187	0.346437	1.152212	0.951188
5	0.427432	1.244918	0.930735	0.427433	1.244921	0.930736
6	0.510567	1.358849	0.912268	0.510568	1.358851	0.912269
7	0.597683	1.494637	0.896062	0.597684	1.494640	0.896063
8	0.690531	1.653393	0.882484	0.690533	1.653396	0.882485
9	0.790823	1.836671	0.872011	0.790825	1.836675	0.872012
10	0.900278	2.046464	0.865257	0.900280	2.046469	0.865258
11	1.020660	2.285199	0.863005	1.020662	2.285204	0.863006
12	1.153819	2.555743	0.866250	1.153822	2.555749	0.866251
13	1.301723	2.861417	0.876253	1.301726	2.861423	0.876254
14	1.466492	3.206010	0.894607	1.466495	3.206017	0.894608
15	1.650427	3.593802	0.923322	1.650431	3.593809	0.923324
16	1.856043	4.029574	0.964933	1.856047	4.029583	0.964935
17	2.086094	4.518626	1.022627	2.086098	4.518636	1.022629
18	2.343603	5.066769	1.100408	2.343608	5.066780	1.100411
19	2.631881	5.680308	1.203294	2.631886	5.680320	1.203297
20	2.954546	6.365989	1.337560	2.954552	6.366003	1.337564
21	3.315532	7.130899	1.511029	3.315540	7.130915	1.511034
22	3.719083	7.982295	1.733421	3.719091	7.982312	1.733427
23	4.169727	8.927339	2.016750	4.169736	8.927358	2.016757
24	4.672222	9.972692	2.375784	4.672232	9.972713	2.375792
25	5.231461	11.123923	2.828531	5.231472	11.123945	2.828541

Tabela 10: Comparação de dados

Através da tabulação de dados, é possível notar que o passo $h = 0.000001$ não gera perceptível distância entre os pontos construídos com os valores originais. Mas porque trazer um passo que não gera distâncias significativas? O ponto está em evidenciar que numericamente não temos, mas graficamente há uma adição de um novo “laço” no atrator, logo um passo tão pequeno como 10^{-6} pode reduzir em larga escala o diâmetro do atrator.

A seguir temos tabelados as métricas para *splines* cúbicas e MMQ:

Tabela 11: Métricas *splines* cúbicas

	MAE	RMSE	EVS
x	5.6220	6.6144	0.3012
y	8.0196	10.3087	-0.1349
z	17.4370	18.2417	0.5562

Tabela 12: Métricas para MMQ

	MAE	RMSE	EVS
x	5.6886	7.3251	0.0919
y	6.1727	8.3677	0.0735
z	6.7409	8.2431	0.0071

As métricas trazidas: MAE, RMSE, EVS representam erro médio absoluto, raiz do erro médio quadrático e escore de variância, respectivamente.

No que tange a análise de dados, é primordial evidenciar o caráter estatístico na geração de dados a partir de um modelo e assim vamos avaliar os dados tabelados.

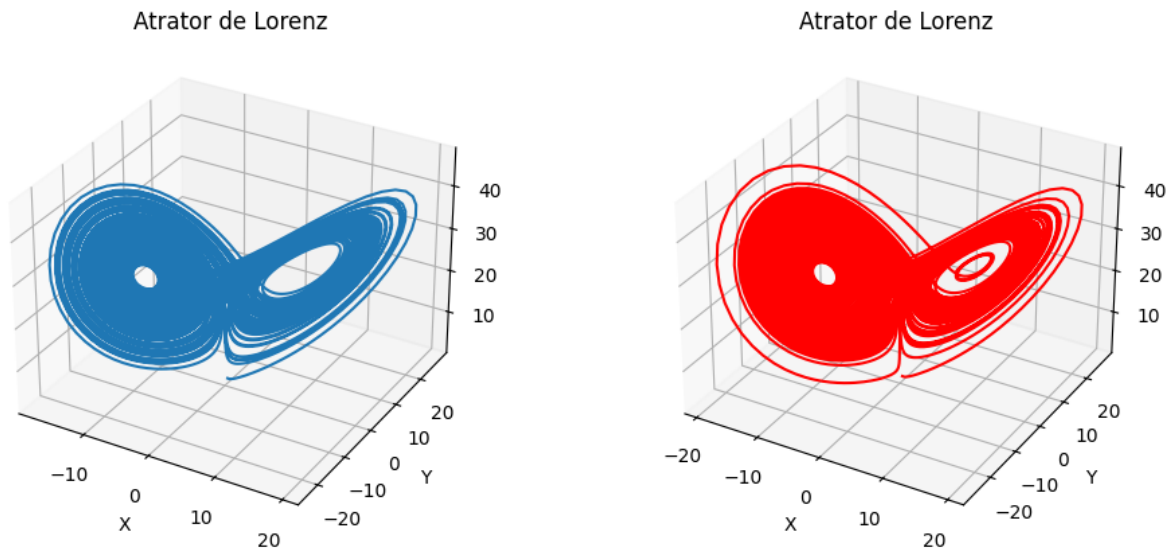
Como contexto, levaremos em consideração:

1. $MAE = \sum_{i=1}^n X_i - X_{rk}$
2. $RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{rk})^2}$
3. $EVS = 1 - \frac{\mathbb{V}_{X_i} - \mathbb{V}_{X_{rk}}}{\mathbb{V}_{X_i}}$

Diante do contexto em que atuamos neste trabalho, é evidente que RMSE explica de forma eficaz a maneira que os pontos se distanciam em cada uma de suas coordenadas. E como validação do método, teremos o EVS para explicar a variância diante dos dados observados

As métricas mostram o MMQ com menor distanciamento dos pontos observados e gerados, no entanto a dispersão desses pontos não se estende de forma suave ao conjunto completo, o que gera determinada granularidade, então graficamente as splines explicam melhor o atrator e sua suavidade.

A seguir, realizaremos uma análise comparativa entre os gráficos gerados a partir dos dados originais e aqueles gerados com pequenas variações.



(a) Atrator com 1×10^4 pontos com valores originais

(b) Atrator com 1×10^4 pontos com valores com variação

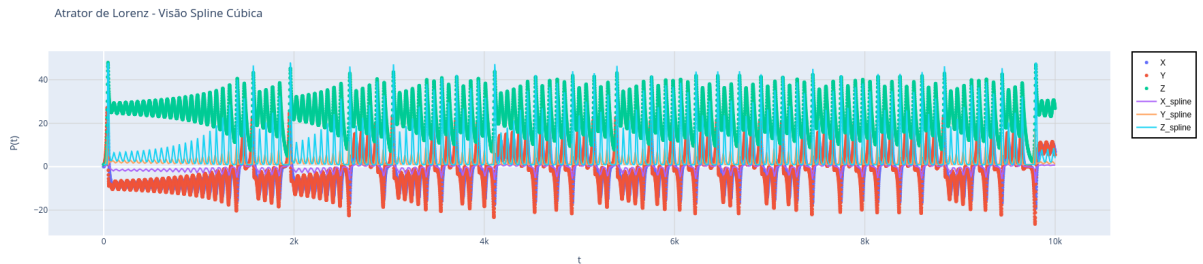
Figura 7: Comparação entre atratores

Principais diferenças:

- **Vórtices:** No primeiro gráfico, os vórtices parecem mais preenchidos e definidos, enquanto no segundo gráfico, os vórtices são menos preenchidos, com espaços mais visíveis entre as linhas de trajetória.
- **Distribuição das Trajetórias:** No primeiro gráfico, as trajetórias cobrem mais uniformemente o espaço do atrator. No segundo gráfico, as trajetórias são mais espaçadas.



(a) *Spline* cúbica com valores iniciais originais



(b) *Spline* cúbica com valores iniciais com variação

Figura 8: Comparação entre *splines* cúbicas

- **X_{spline} (linha roxa):**

- **0k a 2.5k:** O gráfico 01 mostra flutuações significativas com picos altos e vales profundos. O gráfico 02 mostra que essas flutuações são mais suavizadas e menos intensas.
- **2.5k a 5k:** O gráfico 01 mostra flutuações intensas, mas elas estão começando a suavizar. O gráfico 02 mostra a suavização com picos e vales menos marcados.
- **7.5k a 10k:** O gráfico 01 mostra que as flutuações são claramente menores. A linha mostrada no gráfico 02 permanece quase inalterada e apresenta pequenas variações.

- **Y_{spline} (linha laranja):**

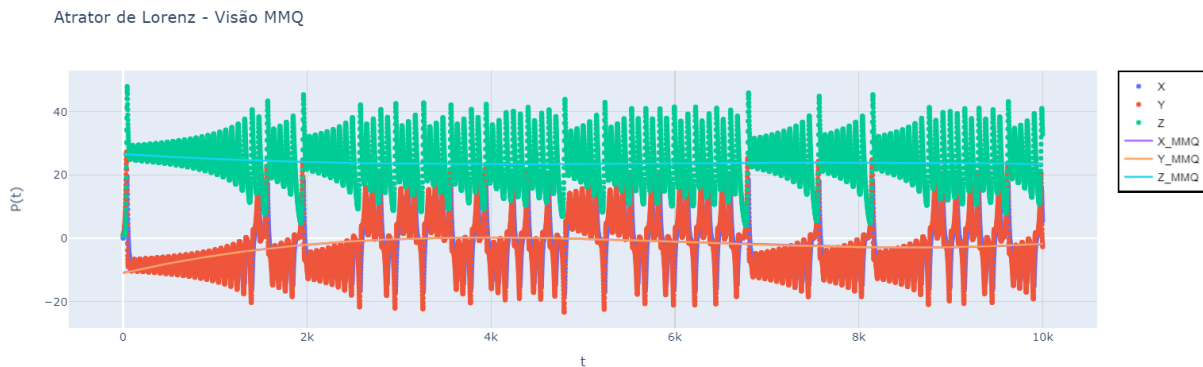
- **0k a 2.5k:** O gráfico 01 mostra variações comuns, mas não tão extensas quanto X_{spline} . O gráfico 02 mostra que as variações são mais difusas e menos intensas.
- **2.5k a 5k:** O gráfico 01 mostra que as variações são persistentes e marcantes.

O gráfico 02 mostra que as variações são menos marcantes e mais suaves.

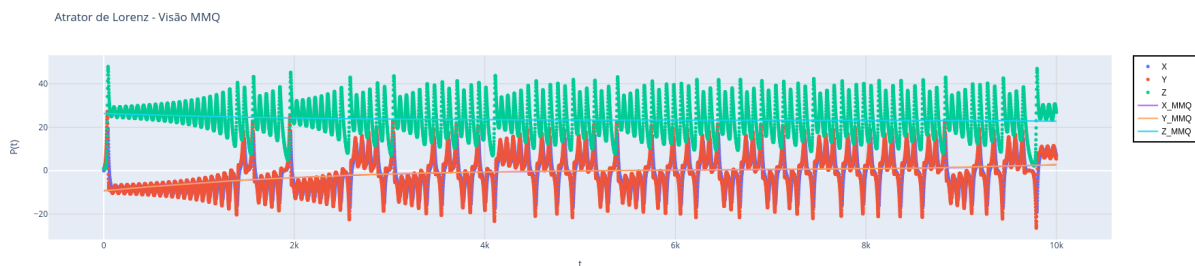
- **7.5k a 10k:** O gráfico 01 mostra que as variações são espaçadas e mínimas. O gráfico 02 mostra que a suavização é ainda maior.

- **Z_spline (linha ciano):**

- **0k a 2.5k:** : O gráfico 01 mostra flutuações mais espaçadas e menores. As variações são ainda menos evidentes quase no gráfico 02.
- **2.5k a 5k:** O gráfico 01 mostra flutuações mais espaçadas e de menor amplitude. O gráfico 02 mostra que as variações são quase lineares e têm uma amplitude significativa.
- **7.5k a 10k:** A linha no gráfico 01 é quase linear. O gráfico 02 mostra que a linha permanece estável e apresenta poucas variações.



(a) MMQ com valores iniciais originais



(b) MMQ com valores iniciais com variação

Figura 9: Comparação entre MMQ

As principais diferenças estão listadas a seguir:

- **X_MMQ (linha roxa):**

- **0k a 2.5k:** No gráfico 01, apresentam-se grandes oscilações com picos altos e vales profundos. No gráfico 02, as oscilações são menos intensas e mais suaves.
- **2.5k a 5k:** No gráfico 01, as oscilações são significativas, mas começam a suavizar. No gráfico 02, a suavização é mais evidente, com picos e vales menos acentuados.
- **7.5k a 10k:** No gráfico 01, as oscilações são visivelmente menores. No gráfico 02, a linha é quase estável, com mínimas variações.

- **Y_MMQ (linha laranja):**

- **0k a 2.5k:** No gráfico 01, variações frequentes, com menor amplitude que X_MMQ. No gráfico 02, as variações são menos intensas e mais espaçadas.
- **2.5k a 5k:** No gráfico 01, variações constantes. No gráfico 02, as variações são mais suaves e menos intensas.
- **5k a 7.5k:** No gráfico 01, as variações estão estabilizando. No gráfico 02, a estabilização é mais evidente, com oscilações menos pronunciadas.
- **7.5k a 10k:** No gráfico 01, as variações tornam-se quase inexistentes, com flutuações mínimas. No gráfico 02, a linha torna-se praticamente estável, com variações muito pequenas e quase lineares.

- **Z_MMQ (linha ciano):**

- **0k a 2.5k:** No gráfico 01, flutuações menores e espaçadas. No gráfico 02, as flutuações são menos pronunciadas, quase lineares.
- **2.5k a 5k:** No gráfico 01, menor amplitude e espaçadas. No gráfico 02, as variações são quase lineares, com amplitude reduzida.
- **5k a 7.5k:** No gráfico 01, flutuações menores e espaçadas. No gráfico 02, as variações são quase inexistentes, quase lineares.
- **7.5k a 10k:** No gráfico 01, as flutuações são praticamente inexistentes, com variações mínimas. No gráfico 02, a linha torna-se praticamente estável, com oscilações quase imperceptíveis e lineares.

Referências

- [1] R. L. N. A. M. Roma, J. S. Bevilacqua. Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais. Notas de aula, curso de Métodos Numéricos, USP, 2023.
- [2] L. R. Ford. *Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.
- [3] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [4] Stefano Luzzatto, Ian Melbourne, and Frederic Paccaut. The lorenz attractor is mixing. *Communications in Mathematical Physics*, 260, 10 2004.
- [5] A. Oberbeck. Ueber die wärmeleitung der flüssigkeiten bei berücksichtigung der strömungen infolge von temperaturdifferenzen. *Annalen der Physik*, 243(6), 1879.
- [6] T. N. Palmer. Extended-range atmospheric prediction and the lorenz model. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 74(1):49 – 66, 1993.
- [7] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, and Dietmar Saupe. *Chaos and Fractals*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] A. M. Burden R. L. Burden, D. J. Faires. *Análise Numérica*. Editora Cengage, 2016.
- [9] L. Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 32(192):529–546, 1916.
- [10] B. Saltzman. Finite amplitude free convection as an initial value problem—i. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 19:329–341, 1962.
- [11] Jorge Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, 1979.
- [12] Éliton Fontana. Métodos numéricos para análise de equações diferenciais. 2018.