Uma análise numérica do atrator de Lorenz

Lucas Amaral Taylor   Julio Cezar de Moura Lima

Junho de 2024

Estrutura da apresentação

O fenômeno de convecção atmosférica

Segundo Charles A. Doswell III, meteorologista americano, o fenômeno de convecção atmosférica, pode ser definido como:

> *"De um modo geral, a convecção refere-se ao transporte de uma determinada propriedade através do movimento de um fluido, na maioria das vezes com referência ao transporte de calor"*

Fonte: Doswell III, C. A., ***Severe Convective Storms****, American Meteorological Society, 1996.*

Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem—I

Em 1962, Barry Saltzman publica o artigo que intitula este slide. Nele, Saltzman realiza experimentos meteorológicos e hidrodinâmicos. O artigo, tem dois objetivos:

1. Formular um modelo matemático para fenômenos de convecção de natureza não-linear;
2. Determinar um método de solução de um caso de movimento convectivo dependente do tempo bidimensionais.

Equação desenvolvida por Saltzman

$$\frac{a}{(1+a^2)^k}\psi = x(t)\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi u}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi v}{H}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\pi R_o \theta}{R \Delta T} = y(t)\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi u}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi v}{H}\right) - z(t)\sin\left(\frac{2\pi}{H}v\right) \tag{2}$$

Onde:

- u: coordenada espacial horizontal (m);
- $x(t), y(t), z(t)$: coeficientes dependentes do tempo (amplitudes) (Unidade depende do contexto);
- $\frac{\pi}{H}$: inverso da profundidade da camada de fluido (máximo de v) (m^{-1});
- a: parâmetro de geometria;
- Ra: número de Rayleigh;
- R_c: valor crítico de Ra ($R_c = \pi^4(1+a^2)^3/a^2$);
- ΔT: diferença de temperatura total (K).

Equação desenvolvida por Lorenz

Lorenz simplificou a equação desenvolvida por Saltzman, eliminou as funções trigonométricas e adotou equações diferenciais ordinárias. Temos o seguinte resultado:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \dfrac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{cases}$$

- σ controla a sensibilidade do sistema à diferença entre as variáveis x e y (número de Prandtl).
- ρ está associado à taxa de convecção do sistema (número de Rayleigh).
- β está associado à geometria do sistema e à diferença entre as taxas de crescimento das variáveis x e z.

Abordagem

1. Utilizamos o método *Runge-Kutta* para a **discretização** e **resolução do sistema de equações diferenciais**;
2. Empregamos *splines cúbicas* para a **representação gráfica**;
3. Aplicamos o *Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)* para a **análise da sensibilidade** do sistema.

Razões para a seleção do Método Runge-Kutta

Optamos pelo Método de Runge-Kutta pelos seguinte motivos:

1. O método escolhido calcula inclinações em quatro pontos dentro de cada intervalo de tempo, oferecendo uma aproximação mais precisa em comparação aos métodos aprendidos em aula.
2. O método de quarta ordem possui um erro de truncamento local da ordem de h^5 e um erro de truncamento global da ordem de h^4, onde h é o passo de tempo.

Método Runge-Kutta

Para as nossas simulações, os valores dos parâmetros utilizados são:

Parâmetros do sistema

$$\sigma = 10, \quad \rho = 28, \quad \beta = 8/3$$

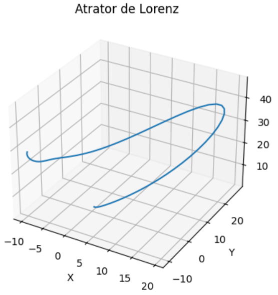
Condições iniciais

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1.05$$

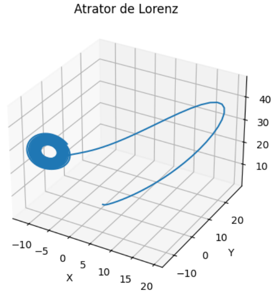
Configurações do método

Passo de tempo: $h = 0.01$, Número de passos $= 1 \times 10^4$

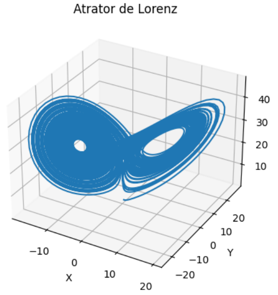
Evolução do atrator em função do número de passos



1×10^2 passos



1×10^3 passos

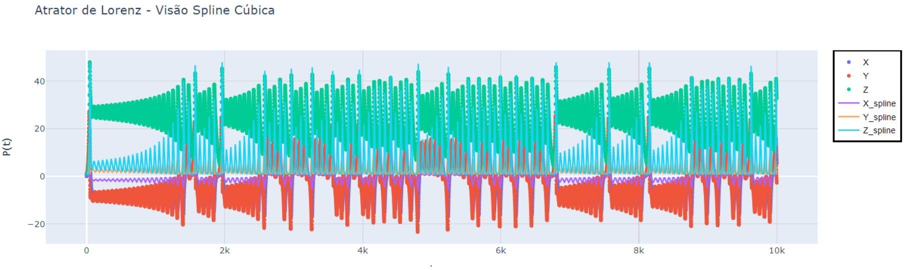


1×10^4 passos

Justificativa do emprego de *Spline* cúbicas

1. Garantia de suavidade e continuidade nas curvas, essenciais dada a natureza não-linear e caótica do sistema.
2. Métodos, como o de Lagrange, não são adequados devido à perda de informação decorrente da linearização, comprometendo a representação precisa do sistema.

Spline Cúbicas: resultado obtidos

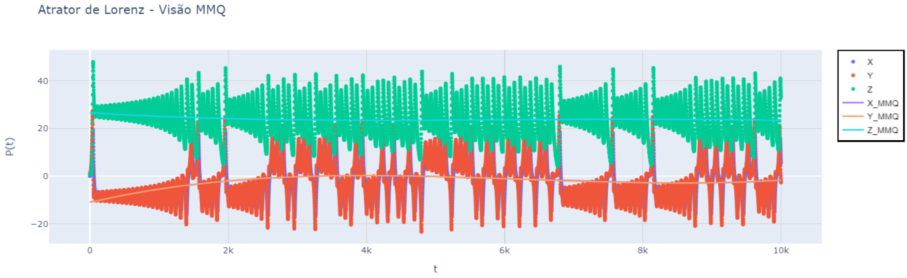


Produzido pelos autores

Motivos para a adoção do MMQ

1. O MMQ aproxima bem as dinâmicas não-lineares do sistema.
2. Quantifica o impacto das alterações nos parâmetros e como pequenas mudanças afetam o sistema.
3. Destaca-se pela alta eficiência computacional.

MMQ: Resultados obtidos



Produzido pelos autores

Abordagem para o Tratamento do Erro

1. O atrator de Lorenz não possui uma **solução analítica**.
2. Usamos a **solução numérica** com o menor h como referência "**exata**".
3. O **erro** é a diferença entre as soluções numéricas para diferentes h e essa referência.

Tabela de Convergência no método RK4

	$X_{0.01}$	$Y_{0.01}$	$Z_{0.01}$	$X_{0.001}$	$Y_{0.001}$	$Z_{0.001}$	$X_{0.0001}$	$Y_{0.0001}$	$Z_{0.0001}$
0	0.000	1.000	1.050	0.000	1.000	1.050	0.000	1.000	1.050
1	0.095	1.003	1.023	0.010	0.999	1.047	0.001	1.000	1.050
2	0.183	1.031	0.997	0.020	0.999	1.044	0.002	1.000	1.049
3	0.266	1.081	0.973	0.030	0.998	1.042	0.003	1.000	1.049
4	0.346	1.152	0.951	0.039	0.998	1.039	0.004	1.000	1.049
5	0.427	1.245	0.931	0.049	0.998	1.036	0.005	1.000	1.049
6	0.511	1.359	0.912	0.058	0.999	1.034	0.006	1.000	1.048
7	0.598	1.495	0.896	0.068	0.999	1.031	0.007	1.000	1.048
8	0.691	1.653	0.882	0.077	1.000	1.028	0.008	0.999	1.048
9	0.791	1.837	0.872	0.086	1.002	1.025	0.009	0.999	1.047

Table: Tabela de Convergência no método RK4

Diferenças ΔX, ΔY, ΔZ no método RK4

	Δ entre 0.01 e 0.001			Δ entre 0.01 e 0.0001		
	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.085	0.004	-0.024	0.094	0.003	-0.027
2	0.163	0.032	-0.047	0.181	0.031	-0.052
3	0.236	0.083	-0.069	0.263	0.081	-0.076
4	0.307	0.154	-0.088	0.342	0.152	-0.098
5	0.378	0.247	-0.105	0.422	0.245	-0.118
6	0.453	0.360	-0.122	0.505	0.359	-0.136
7	0.530	0.496	-0.135	0.591	0.495	-0.151
8	0.614	0.653	-0.146	0.683	0.653	-0.166
9	0.705	0.835	-0.153	0.782	0.838	-0.175

Table: Diferenças entre os valores de X, Y e Z para diferentes passos de integração

Convergência do Erro no Método RK4

- **Redução do Erro com Passos Menores**: Passos menores no RK4 resultam em valores mais precisos. As diferenças ΔX, ΔY e ΔZ diminuem à medida que o passo de integração é reduzido.
- **Convergência do Método RK4**: Passos menores mostram que o RK4 converge para a solução correta. Os valores de X, Y e Z tornam-se mais próximos com passos menores.

Principais referências

E. N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, 20(2), pp. 130-141, doi:10.1175/1520-0469(1963)020¡0130:DNF¿2.0.CO;2

L. R. Ford, *Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955

R. L. Burden, D. J. Faires, A. M. Burden, *Análise Numérica*, Editora Cengage, 2016

A. M. Roma, J. S. Bevilacqua, R. L. Nós, *Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais*, Notas de aula, curso de Métodos Numéricos, USP, 2023

Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe, *Chaos and Fractals*, Springer Science & Business Media, 2013

Obrigado!