Um breve estudo do Modelo Lorenz 80

Lucas Amaral Taylor

Instituto de Matemática e Estatística
(IME-USP)

Fevereiro / 2025

Estrutura da apresentação

Objetivos da apresentação

1. Apresentação geral do artigo de Lorenz
2. Relacionar os assuntos apresentados em aula com os temas abordados no artigo.
3.

PE Model: Características do fluido

- **Homogêneo.** A densidade do fluido é uniforme em todo volume;
- **Incompressível.** O volume não muda quando submetido à pressão ($\nabla \cdot V = 0$)

PE Model: O modelo de água rasa

Fazendo as devidas alterações notacionais em [Sal98], temos:

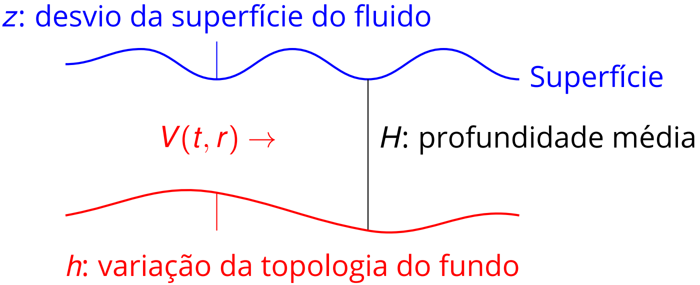
$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V + f\mathbf{k} \times V = -g \nabla z \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \cdot (zV) = 0 \tag{2}$$

Onde:

- t: tempo;
- $\mathbf{r}$: vetor de posição inicial;
- $V(t, r)$: Velocidade horizontal;
- $z(t, r)$: altura da superfície;
- f: parâmetro de Coriolis;
- g: aceleração da gravidade;
- $\mathbf{k}$: vetor da vertical.

PE Model: Modelo de água rasa



PE Model: O modelo de água rasa modificado

No artigo, nos é apresentado as seguintes equações:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)V - f\mathbf{k} \times V - g\nabla z + \nu\nabla^2\mathbf{V} \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)(z - h) - (H + z - H)\nabla \cdot \mathbf{V} + \kappa\nabla^2 z + F \tag{4}$$

Onde:

- t: tempo
- $\mathbf{r}$: vetor de posição inicial;
- H: profundidade média do fluido;
- $h(r)$: variação da superfície topológica;
- $V(t, r)$: Velocidade horizontal;
- $z(t, r)$: altura da superfície;
- f: parâmetro de Coriolis;
- g: aceleração da gravidade;
- F: forças externas;
- κ: coeficiente de difusão viscosa;
- ν: coeficiente de difusão térmica;
- $\mathbf{k}$: vetor da vertical.

PE Model: Sobre os processos de difusão

Nas equações (3) e (4), temos dois processos de difusão:

1. **Difusão viscosa:** transferência do momento entre partes do fluido devido à viscosidade *(exemplo: mel)*;
2. **Difusão térmica:** Transferência de calor por condução entre regiões com diferentes temperaturas.

Observação: Ambos os processos tendem a uniformizar suas respectivas propriedades.

PE Model: Algumas observações das equações (3) e (4)

1. A média horizontal de h e z é zero;
2. $V(t, r)$ e $z(t, r)$ são amortecidas pelo processo de difusão de pequenas escala, este fato auxilia na simulação de fenômenos atmosféricos;
3. O "efeito β", efeito que indica como o movimento do fluido é afetado pelas alterações espaciais do parâmetro Coriolis, é suprimido da equação (4), através da escolha da topografia. Tal decisão baseia-se no artigo [Von52] que prova o fato teoricamente e laboratorialmente.

PE Model: A formação de novas equações

A partir da *Decomposição de Helmholtz*, decomposição que divide a *parte rotacional* e a parte *divergente*, aplicada a equação (4), temos:

$$V = \nabla\chi + \mathbf{k} \times \nabla\psi \tag{5}$$

Onde:

- χ: potencial de velocidade (*parte divergente*)
- ψ: função corrente (*parte rotacional*)
- **k**: vetor unitário vertical

PE Model: A formação de novas equações

A partir da equação (5) e (3), obtemos as duas seguintes equações:

$$\frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2(\nabla\chi\cdot\nabla\chi) - \nabla\chi\cdot\nabla(\nabla^2\psi)\times\mathbf{k} + \nabla^2(\nabla\chi\cdot\nabla\psi\times\mathbf{k}) + \nabla\cdot(\nabla^2\psi\nabla\psi) - \frac{1}{2}\nabla^2(\nabla\psi\cdot\nabla\psi) + \nu\nabla^4\chi + f\nabla^2\psi - g\nabla^2 z \tag{6}$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\nabla\cdot(\nabla^2\psi\nabla\chi) - \nabla\psi\cdot\nabla(\nabla^2\psi)\times\mathbf{k} - f\nabla^2\chi + \nu\nabla^4\psi \tag{7}$$

Onde:

- $\frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t}$: expressa a vorticidade;
- $\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t}$: expressa o divergente

PE Model: A formação de novas equações

Realizando o mesmo processo, a partir das equações (4) e (5), obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot (z - h)\nabla\chi - \nabla\psi \cdot \nabla(z - h) \times \mathbf{k} - H\nabla^2\chi + \kappa\nabla^2 z + F \quad (8)$$

As equações (6), (7) e (8) serão as equações básicas para a construção do modelo de baixa ordem

PE Model: Objetivos do Processo de simplificação

1. Converter as equações (6), (7) e (8) para um modelo de baixa ordem.
2. Transformaremos um modelo formado originalmente por equações primitivas atmosféricas em um sistema de nove variáveis.

PE Model: Processo de simplificação

Primeiro, introduziremos três vetores adimensionais, que respeitam a seguinte condição:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{9}$$

Junto a permutação abaixo:

$$(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \tag{10}$$

Definiremos as variáveis a_i, b_i e c_i

PE Model: Processo de simplificação

As variavéis a_i, b_i e c_i são definidas da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
a_i &= \alpha_1 \cdot \alpha_j \\
b_i &= \alpha_j \cdot \alpha_i \\
c_i &= \alpha_j \times \alpha_k \cdot \mathbf{k}
\end{aligned}
$$

Observação: Apesar dessa relação ser válida, Lorenz apresenta outra (esta foi usado na aplicação computacional):

$$
\begin{aligned}
b_i &= \frac{1}{2}\left(a_i - a_j - a_k\right) \\
c_i &= c
\end{aligned}
$$

PE Model: Processo de simplificação

Por fim, definimos um comprimento L e criamos três funções ortogonais:

$$\phi_i = \cos\left(\alpha_i \cdot \frac{r}{L}\right)$$

A partir delas, temos:

$$L^2\nabla^2\phi_i = -a_i\phi_i$$

$$L^2\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_k = -\frac{1}{2}b_{ik}\phi_i + \cdots$$

$$L^2\nabla \cdot (\phi_j\nabla\phi_k) = \frac{1}{2}b_{jk}\phi_i + \cdots$$

$$L^2\phi_j \cdot \nabla\phi_k \times \mathbf{k} = -\frac{1}{2}c_{jk}\phi_i + \cdots$$

PE Model: Processo de simplificação

A partir delas, podemos introduzir as variáveis adimensionais normalizadas:

$$t = f^{-1}\tau \tag{11}$$

$$\chi = 2L^2 f^2 \sum x_i \phi_i \tag{12}$$

$$\psi = 2L^2 f^2 \sum y_i \phi_i \tag{13}$$

$$z = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum z_i \phi_i \tag{14}$$

$$h = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum h_i \phi_i \tag{15}$$

$$F = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum F_i \phi_i \tag{16}$$

PE Model: Processo de simplificação

Em seguida, aplicamos as variáveis definidas em (11)-(16), nas equações (6), (7) e (8), obtemos as seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
a_i \frac{dx_i}{d\tau} &= a_i b_1 x_i x_k - c(a_i - a_k) x_i y_k c(a_i - a_j) y_i x_k \\
&\quad - 2c^2 y_i y_k - \nu_0 a_i^2 x_i + a_i y_i - a_i z_i && (17) \\
a_i \frac{dy_i}{d\tau} &= -a_i b_k x_i y_k - a_i b_i y_i x_k + c(a_k - a_i) y_i y_k - a_i x_i - \nu_0 a_i^2 y_i && (18) \\
\frac{dz_i}{d\tau} &= -b_k x_i (z_k - h_k) - b_i (z_i - h_i) x_k + c y_i (z_k - h_k) \\
&\quad - c(z_i - h_i) y_k + g_0 a_i x_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i && (19)
\end{aligned}
$$

PE Model: Breves observações

- As variáveis com o índice 1 representam campos de velocidade e altura zonalmente uniformes
- As variáveis com o índice 2 ou 3 representam ondas ou redemoinhos de grande escala sobrepostos.
- Este modelo será usado em simulações e levará em consideração a permutação (10)

PE Model: Mais um processo de simplificação

Primeiro, definiremos U e V:

$$U_i = -b_i x_i + c y_i \tag{20}$$

$$V_i = -b_k x_i - c y_i \tag{21}$$

Em seguida, X_i e Y_i:

$$X_i = -a_i x_i \tag{22}$$

$$Y_i = -a_i y_i \tag{23}$$

PE Model: Mais um processo de simplificação

Aplicando U, V, X_i e Y_i em (17), (18) e (19), obtemos:

$$\frac{dX_i}{d\tau} = U_iU_k + V_jV_k - \nu_0 a_i X_i + Y_i + a_i z_i \tag{24}$$

$$\frac{dY_i}{d\tau} = U_iY_k + Y_jV_k - X_i - \nu_0 a_i Y_i \tag{25}$$

$$\frac{dz_i}{d\tau} = U_i(z_k - h_k) + (z_j - h_j)V_k - g_0 X_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i \tag{26}$$

Este modelo também segue as permutações de (10) e também será usado em simulações numéricas.

QG Model: Construção do modelo

Da equação (17):

- Elimina-se todos os termos que contém x, inclusive aqueles que tem derivada em relação ao tempo

Das equações (18) e (19):

- Elimina-se todos os termos não lineares ou topográficos
- Elimina-se todos os termos com x e z

QG Model: Construção do modelo

A partir deste processo obtem-se:

$$(a_i g_0 + 1)\frac{dy_i}{d\tau} = g_0 c(a_k - a_j) y_j y_k - a_i(a_i g_0 v_0 + \kappa_0) y_i - c h_k y_j + c h_j y_k + F_i \tag{27}$$

Onde:

- $(a_i g_0 + 1)\frac{dy_i}{d\tau}$: termo de evolução temporal
- $g_o c(a_k - a_j) y_j y_k$: Advecção da vorticidade planetária
- $-a_i(a_i g_0 v_0 + \kappa_0) y_i$: dissipação
- $-c h_k y_j + c h_j y_k$: efeitos topográficos
- F_i: forçamento

Python

```python
def calcular_dobro(x):
    """Retorna o dobro do número"""
    return 2 * x

# Testando a função
numero = 5
resultado = calcular_dobro(numero)
print(f"O dobro de {numero} é {resultado}")
```

Fim da apresentação!