# Um breve estudo do Modelo Lorenz 80

Lucas Amaral Taylor

Instituto de Matemática e Estatística
(IME-USP)

# Estrutura da apresentação

# Objetivos gerais

1. Apresentação dos aspectos gerais do artigo "*Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium*" de Edward Norton Lorenz
2. Relacionar o conteúdo artigo com conceitos apresentados em aula
3. Realizar uma abordagem alinhada com o curso de graduação

# Metodologia

1. Estudar os conceitos de fluídos geofísicos e adjacentes
2. Reproduzir a construção dos modelos apresentados
3. Realizar de simulações computacionais dos modelos

# *Modelo PE*: Características do fluido

- **Homogêneo.** A densidade do fluido é uniforme em todo volume;
- **Incompressível.** O volume não muda quando submetido à pressão ($\nabla \cdot V = 0$)

# *Modelo PE*: O modelo de água rasa

Fazendo as devidas alterações notacionais em [Sal98], temos:

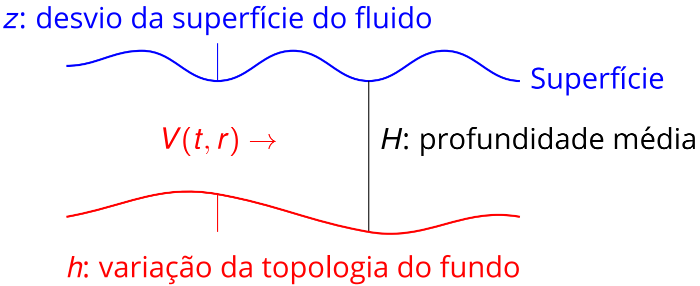
$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + f\mathbf{k} \times V = -g\nabla z \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \cdot (zV) = 0 \tag{2}$$

Onde:

- $t$: tempo;
- $\mathbf{r}$: vetor de posição inicial;
- $V(t, r)$: Velocidade horizontal;
- $z(t, r)$: altura da superfície;
- $f$: parâmetro de Coriolis;
- $g$: aceleração da gravidade;
- $\mathbf{k}$: vetor da vertical.

# *Modelo PE*: Modelo de água rasa



# *Modelo PE*: O modelo de água rasa modificado

No artigo, nos é apresentado as seguintes equações:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)V - f\mathbf{k} \times V - g\nabla z + \nu\nabla^2\mathbf{V} \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)(z - h) - (H + z - H)\nabla \cdot \mathbf{V} + \kappa\nabla^2 z + F \tag{4}$$

Onde:

- $t$: tempo
- $\mathbf{r}$: vetor de posição inicial;
- $H$: profundidade média do fluido;
- $h(r)$: variação da superfície topológica;
- $V(t, r)$: Velocidade horizontal;
- $z(t, r)$: altura da superfície;
- $f$: parâmetro de Coriolis;
- $g$: aceleração da gravidade;
- $F$: forças externas;
- $\kappa$: coeficiente de difusão viscosa;
- $\nu$: coeficiente de difusão térmica;
- $\mathbf{k}$: vetor da vertical.

# *Modelo PE*: Sobre os processos de difusão

Nas equações (3) e (4), temos dois processos de difusão:

1. **Difusão viscosa:** transferência do momento entre partes do fluido devido à viscosidade *(exemplo: mel)*;
2. **Difusão térmica:** Transferência de calor por condução entre regiões com diferentes temperaturas.

*Observação: Ambos os processos tendem a uniformizar suas respectivas propriedades.*

# *Modelo PE*: Algumas observações das equações (3) e (4)

1. A média horizontal de $h$ e $z$ é zero;
2. $V(t, r)$ e $z(t, r)$ são amortecidas pelo processo de difusão de pequenas escala, este fato auxilia na simulação de fenômenos atmosféricos;
3. O "efeito $\beta$", efeito que indica como o movimento do fluido é afetado pelas alterações espaciais do parâmetro Coriolis, é suprimido da equação (4), através da escolha da topografia. Tal decisão baseia-se no artigo [Von52] que prova o fato teoricamente e laboratorialmente.

# *Modelo PE*: A formação de novas equações

A partir da *Decomposição de Helmholtz*, decomposição que divide a *parte rotacional* e a parte *divergente*, aplicada a equação (4), temos:

$$V = \nabla\chi + \mathbf{k} \times \nabla\psi \tag{5}$$

Onde:

- $\chi$: potencial de velocidade (*parte divergente*)
- $\psi$: função corrente (*parte rotacional*)
- **k**: vetor unitário vertical

# *Modelo PE*: A formação de novas equações

A partir da equação (3) e (5), obtemos as duas seguintes equações:

$$\frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2(\nabla\chi \cdot \nabla\chi) - \nabla\chi \cdot \nabla(\nabla^2\psi) \times \mathbf{k} + \nabla^2(\nabla\chi \cdot \nabla\psi \times \mathbf{k})$$
$$+ \nabla \cdot (\nabla^2\psi\nabla\psi) - \frac{1}{2}\nabla^2(\nabla\psi \cdot \nabla\psi) + \nu\nabla^4\chi + f\nabla^2\psi - g\nabla^2 z \tag{6}$$
$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla^2\psi\nabla\chi) - \nabla\psi \cdot \nabla(\nabla^2\psi) \times \mathbf{k} - f\nabla^2\chi + \nu\nabla^4\psi \tag{7}$$

# *Modelo PE*: A formação de novas equações

Realizando o mesmo processo, a partir das equações (4) e (5), obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot (z - h)\nabla \chi - \nabla \psi \cdot \nabla (z - h) \times \mathbf{k} - H\nabla^2 \chi + \kappa \nabla^2 z + F \tag{8}$$

As equações (6), (7) e (8) serão as equações básicas para a construção do modelo de baixa ordem

# *Modelo PE:* Objetivos do Processo de simplificação

1. Converter as equações (6), (7) e (8) para um modelo de baixa ordem.
2. Transformaremos um modelo formado originalmente por equações primitivas atmosféricas em um sistema de nove variáveis.

# *Modelo PE*: Processo de simplificação

Primeiro, introduziremos três vetores adimensionais, que respeitam a seguinte condição:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{9}$$

Junto a permutação abaixo:

$$(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \tag{10}$$

Definiremos as variáveis $a_i, b_i$ e $c_i$

# *Modelo PE*: Processo de simplificação

As variavéis $a_i, b_i$ e $c_i$ são definidas da seguinte forma:

$$a_i = \alpha_1 \cdot \alpha_j$$
$$b_i = \alpha_j \cdot \alpha_i$$
$$c_i = \alpha_j \times \alpha_k \cdot \mathbf{k}$$

Apesar dessa relação ser válida, Lorenz apresenta outra (esta foi usado na aplicação computacional):

$$b_i = \frac{1}{2}\left(a_i - a_j - a_k\right)$$
$$c_i = c$$

# *Modelo PE*: Processo de simplificação

Por fim, definimos um comprimento $L$ e criamos três funções ortogonais:

$$\phi_i = \cos\left(\alpha_i \cdot \frac{r}{L}\right)$$

A partir delas, temos:

$$L^2\nabla^2\phi_i = -a_i\phi_i$$
$$L^2\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_k = -\frac{1}{2}b_{ik}\phi_i + \cdots$$
$$L^2\nabla \cdot (\phi_j\nabla\phi_k) = \frac{1}{2}b_{jk}\phi_i + \cdots$$
$$L^2\phi_j \cdot \nabla\phi_k \times \mathbf{k} = -\frac{1}{2}c_{jk}\phi_i + \cdots$$

# *Modelo PE*: Processo de simplificação

A partir delas, podemos introduzir as variáveis adimensionais normalizadas:

$$t = f^{-1}\tau \tag{11}$$

$$\chi = 2L^2 f^2 \sum x_i \phi_i \tag{12}$$

$$\psi = 2L^2 f^2 \sum y_i \phi_i \tag{13}$$

$$z = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum z_i \phi_i \tag{14}$$

$$h = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum h_i \phi_i \tag{15}$$

$$F = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum F_i \phi_i \tag{16}$$

# *Modelo PE*: Processo de simplificação

Em seguida, aplicamos as variáveis definidas em (11)-(16), nas equações (6), (7) e (8), obtemos as seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
a_i \frac{dx_i}{d\tau} &= a_i b_i x_i x_k - c(a_i - a_k) x_i y_k c(a_i - a_j) y_i x_k \\
&\quad - 2c^2 y_i y_k - \nu_0 a_i^2 x_i + a_i y_i - a_i z_i \qquad (17) \\
a_i \frac{dy_i}{d\tau} &= -a_i b_k x_i y_k - a_i b_i y_i x_k + c(a_k - a_i) y_i y_k - a_i x_i - \nu_0 a_i^2 y_i \qquad (18) \\
\frac{dz_i}{d\tau} &= -b_k x_i (z_k - h_k) - b_i (z_i - h_i) x_k + c y_i (z_k - h_k) \\
&\quad - c(z_i - h_i) y_k + g_0 a_i x_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i \qquad (19)
\end{aligned}
$$

# *Modelo PE*: Variáveis

- $x$ – **Potencial de velocidade**: relacionado à divergência do fluxo.
- $y$ – **Função de corrente**: associado à vorticidade do fluido.
- $z$ – **Elevação da superfície**: altura da superfície perturbada.

# *Modelo PE*: Variáveis

- $\frac{dx}{dt}$ – Ondas gravitacionais.
- $\frac{dy}{dt}$ – Associado à vorticidade do fluido.
- $\frac{dz}{dt}$ – Relacionado à variação da altura da superfície e sua interação com a vorticidade.

# *Modelo PE:* Breves observações

- As variáveis com índice 1 correspondem a campos de velocidade e altura zonalmente uniformes.
- As variáveis com índice 2 ou 3 representam componentes associadas a ondas, ou redemoinhos de grande escala sobrepostos.
- Este modelo será utilizado nas simulações do estudo, seguindo a permutação dada em (10).

# *Modelo PE:* Mais um processo de simplificação

Primeiro, definiremos $U$ e $V$:

$$U_i = -b_i x_i + c y_i \tag{20}$$

$$V_i = -b_k x_i - c y_i \tag{21}$$

Em seguida, $X_i$ e $Y_i$:

$$X_i = -a_i x_i \tag{22}$$

$$Y_i = -a_i y_i \tag{23}$$

# *Modelo PE:* Mais um processo de simplificação

Aplicando $U$, $V$, $X_i$ e $Y_i$ em (17), (18) e (19), obtemos:

$$\frac{dX_i}{d\tau} = U_i U_k + V_j V_k - \nu_0 a_i X_i + Y_i + a_i z_i \tag{24}$$

$$\frac{dY_i}{d\tau} = U_i Y_k + Y_j V_k - X_i - \nu_0 a_i Y_i \tag{25}$$

$$\frac{dz_i}{d\tau} = U_i (z_k - h_k) + (z_j - h_j) V_k - g_0 X_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i \tag{26}$$

Este modelo também segue as permutações de (10).

# *Modelo QG*: Construção do modelo

Da equação (17):

- Elimina-se todos os termos que contém $x$, inclusive aqueles que tem derivada em relação ao tempo

Das equações (18) e (19):

- Elimina-se todos os termos não lineares ou topográficos
- Elimina-se todos os termos com $x$ e $z$

# *Modelo QG*: Construção do modelo

A partir deste processo obtem-se:

$$
\begin{aligned}
(a_i g_0 + 1)\frac{dy_i}{d\tau} = {} & g_0 c(a_k - a_j)y_j y_k - a_i(a_i g_0 v_0 + \kappa_0)y_i \\
& - ch_k y_j + ch_j y_k + F_i
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Onde:

- $(a_i g_0 + 1)\frac{dy_i}{d\tau}$: termo de evolução temporal
- $g_o c(a_k - a_j)y_j y_k$: Advecção da vorticidade planetária
- $-a_i(a_i g_0 v_0 + \kappa_0)y_i$: dissipação
- $-ch_k y_j + ch_j y_k$: efeitos topográficos
- $F_i$: forçamento

# Observações iniciais

É importante destacar que: para apresentação, optei por apresentar a comparação entre os modelos tomando **apenas** a base para o critério de comparação entre os modelos.

Nas seções finais do artigo [Lor80], há uma análise detalhada sobre a estrutura do atrator e sua relação com a variedade invariante, incluindo suas propriedades qualitativas.

# Modelo dissipativo forçado

Primeiro, vamos expor um Modelo dissipativo forçado genérico:

$$\frac{dw_i}{dt} = \sum_{j,k}^{N} a_{ijk} w_j w_k - \sum_{j}^{N} b_{ij} w_j + c_i \tag{28}$$

$$A = \sum_{i,j,k}^{N} a_{ijk} w_i w_j w_k \quad \wedge \quad B = \sum_{i,j}^{N} b_{ij} w_i w_j > 0$$

$$C = \sum_{i}^{N} c_i w_i \quad \wedge \quad R^2 = \sum_{i}^{N} w_i^2$$

# Modelo dissipativo forçado

- $A$ é um polinômio cúbico e representa as interações não lineares entre as componentes do sistema;
- $B$ é um polinônio quadrático e representa a dissipação do sistema;
- $C$ é um polinômio linear e representa o forçamento externo;
- $R$ é a norma euclidiana ao quadrado e representa a energia total.

E vamos definir o $A_1$ e $C_1$ como o máximo de $A$ e $C$ e $B_1$ como o mínimo de $B$

# Condições especiais

Os modelos de interesse do artigo [Lor80] as seguintes condições:

1. $$B_1^2 - 4A_1C_1 > 0$$
2. $a_{ijk} = 0$, se $j = 1 \quad \vee \quad k = i$
3. **Volume zero**

$$\frac{dV}{dt} = -V\sum_{i}^{N} b_{ii} \tag{29}$$

# Volume zero

A equação (29) mostra que:

- Como $B$ é definido positivo, temos $V \to 0$ exponencialmente.
- Isso implica que a dinâmica do sistema restringe-se progressivamente a conjuntos de menor volume.
- Qualquer superfície inicial $S$ gera uma sequência $S_1, S_2, \ldots$, cada uma envolvendo um volume menor que a anterior.
- No limite, o volume da sucessão de superfícies tende a zero.

# Relacionando o modelo genérico com os modelos construídos

1. **Modelo QG.** No modelo QG, a energia total é conservada pelos termos quadráticos. Além disso, a dissipação introduzida pelos coeficientes de atrito e viscosidade age de forma análoga ao termo dissipativo do sistema genérico (28). Assim, o modelo QG possui um atrator de **volume zero**.
2. **Modelo PE.** Apesar do modelo PE não conservar a energia total, se $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ for suficientemente pequeno, a condição (1) é satisfeita. Nesse caso, as trajetórias do sistema permanecem limitadas e o atrator tem **volume zero**.

# *Modelo PE*: Processo de simulação

Dada a seleção do modelo, o seguinte processo é realizado:

1. Seleção de constantes e condições iniciais
2. Método de discretização (RK4)
3. Plotagem

# *Modelo PE*: Seleção de constantes

```
vetor_a = [1, 1, 3]
vetor_b = [
0.5 * (vetor_a[0] - vetor_a[1] - vetor_a[2]),
0.5 * (vetor_a[1] - vetor_a[2] - vetor_a[0]),
0.5 * (vetor_a[2] - vetor_a[0] - vetor_a[1]),
]
c = math.sqrt(3/4)

f_inv = 10800
vetor_h = [-1, 0, 0]
vetor_f = [0.1, 0, 0]
g_0 = 8
kappa_0 = 1 / 48
nu_0 = kappa_0
```

# *Método de discretização RK4*: Características gerais

Um método é de Runge-Kutta explícito de ordem 4 se, e só se, satisfaz três propriedades:

1. Método de passo único explícito;
2. Apresenta boa estabilidade para equações diferenciais ordinárias (EDOs).
3. Possui erro global da ordem de $\mathcal{O}(h^4)$, garantindo alta precisão com um custo computacional moderado.

# *Método de discretização RK4*: Formulação

Tomando como referência [A M23], podemos expressar o método RK44 da seguinte maneira:

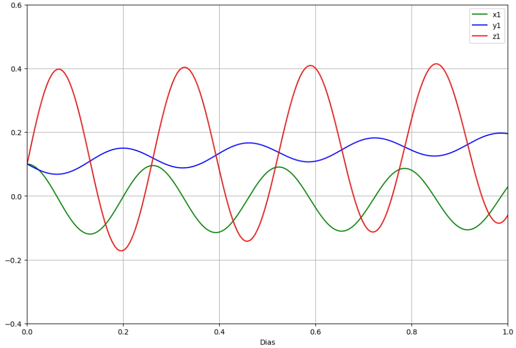
$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{6}\left(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4\right) \quad \text{com} \quad \begin{cases} \kappa_1 = f(t, y) \\ \kappa_2 = f\left(t + h/2, y + (h/2)\kappa_1\right) \\ \kappa_3 = f\left(t + h/2, y + (h/2)\kappa_2\right) \\ \kappa_4 = f\left(t + h, y + h\kappa_3\right) \end{cases}$$

# *Modelo PE*: Condições iniciais - padrão

Primeira condição inicial, é a dada por padrão e tem o intuito de reproduzir a figura 1 do artigo.

```
# Condições iniciais
x0 = [0.1, 0, 0]
y0 = [0.1, 0, 0]
z0 = [0.1, 0, 0]

```

# *Modelo PE*: Resultados condição inicial padrão




(a) Condição padrão - 01 dia (reprodução)

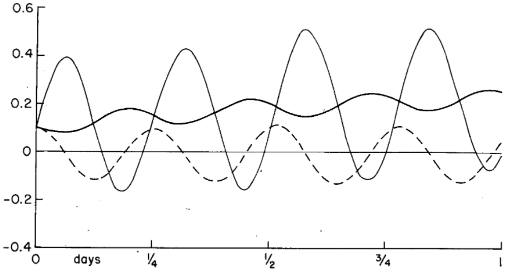
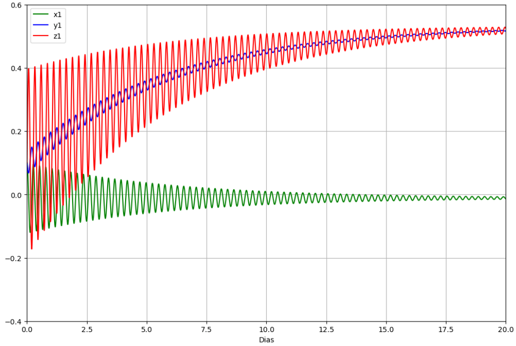


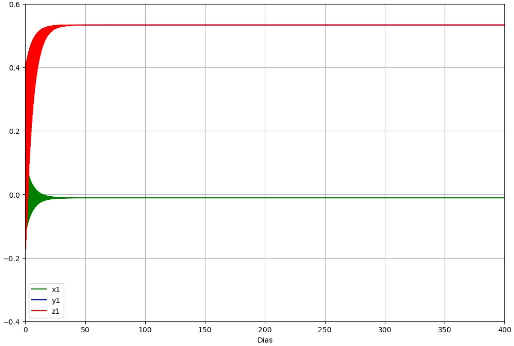

FIG. 1. Variations of $x_1$ (dashed curve), $y_1$ (heavy solid curve) and $z_1$ (thin solid curve) during first day of first numerical solution of PE model.

(b) Condição padrão - 01 dia (artigo)

# *Modelo PE*: Resultados condição inicial padrão




(a) Condição padrão - 20 dias




(b) Condição padrão - 400 dias

# Condições de Hadley

Segundo [GM82], temos que:
A circulação de Hadley é um padrão de circulação atmosférica nos trópicos, onde o ar quente sobe próximo ao equador e desce em latitudes mais altas, formando um ciclo convectivo.

- Em 1735, Hadley incorporou o efeito da rotação da Terra, mostrando que a velocidade do ar varia com a latitude, influenciando a direção predominante dos ventos nos trópicos.
- Baseia-se na conservação do momento angular, garantindo o equilíbrio do movimento atmosférico e evitando mudanças na rotação da Terra.
- Responsável pelos ventos predominantes nos trópicos e pela redistribuição de calor na atmosfera, influenciando padrões climáticos globais.

# *Modelo PE*: Condições iniciais - Hadley 01

A partir do artigo [GM82], temos que os valores dos vetores para as condições de Harley são definidas como:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\nu_0 a_1 y_1 , \\
y_1 &= \frac{F_1}{a_1} v_0 \left(1 + a_1 g_0 + \nu_0^2 a_1^2\right) , \\
z_1 &= \left(1 + \nu_0^2 a_1^2\right) y_1 \\
x_2 &= y_2 = z_2 = x_3 = y_3 = z_3
\end{aligned}
$$

# *Modelo PE*: Condições iniciais - Hadley 01

Adaptando para o código, temos:

```
# Condições iniciais
y1 = (vetor_f[1]
/ vetor_a[1] * nu_0 * (1 + vetor_a[1] * g_0 + nu_0**2 * vetor_a[1] ** 2)
    )
z1 = (1 + nu_0**2 * vetor_a[1] ** 2) * y1
x1 = -nu_0 * vetor_a[1] * y1

x_Hadley01_inicial = [x1, 0, 0]
y_Hadley01_inicial = [y1, -(10 ** (-5)), 0]
z_Hadley01_inicial = [z1, 10 ** (-5), 0]
```

# *Modelo PE*: Resultados para condição de Hadley 01

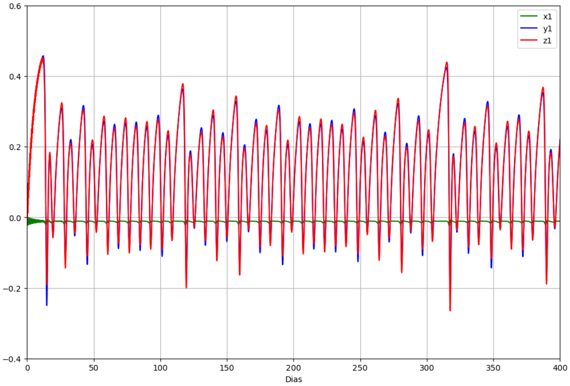



Figure: Hadley 01 - 400 dias

# *Modelo PE*: Resultados para condição de Hadley 01

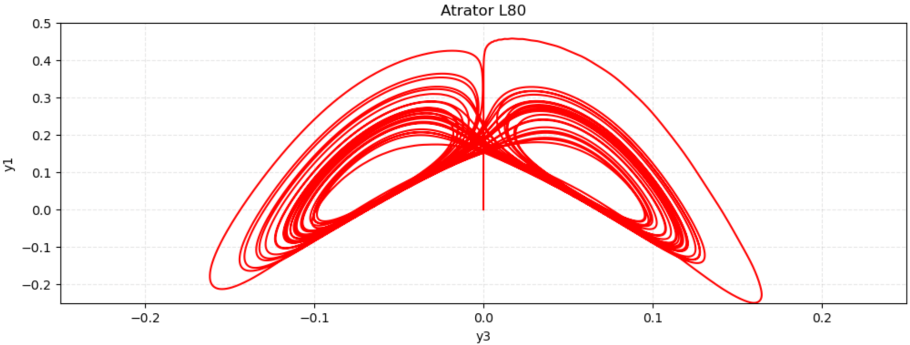



Figure: Hadley 01 - Projeção $y_3 \times y_1$

# *Modelo PE*: Resultados para condição de Hadley 01

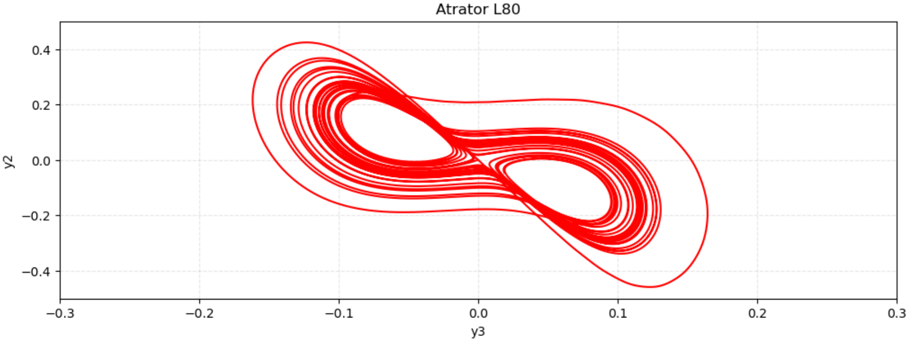



Figure: Hadley 01 - Projeção $y_3 \times y_2$

# *Modelo PE*: Resultados para condição de Hadley 01

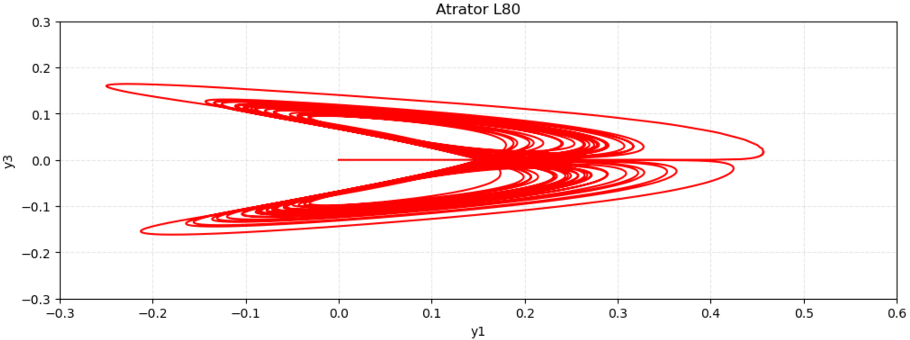



Figure: Hadley 01 - Projeção $y_1 \times y_3$

# *PE Model e QG Model*: Condições iniciais - Hadley 02

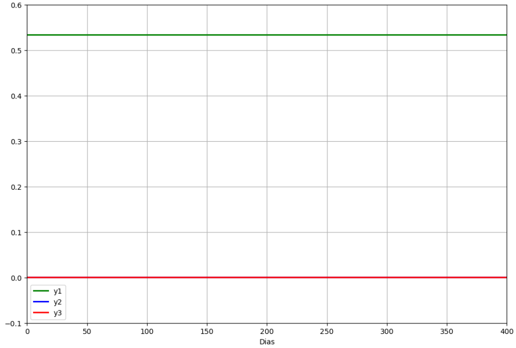
A presente condição reproduz as condições da circulação de Hadley de acordo com [Lor80]

```
# Condições iniciais do modelo PE
x_Hadley02_inicial = [-0.01111, 0, 0]
y_Hadley02_inicial = [0.53331, 0, 0]
z_hardle02_inicial = [0.53354, 0, 0]

```

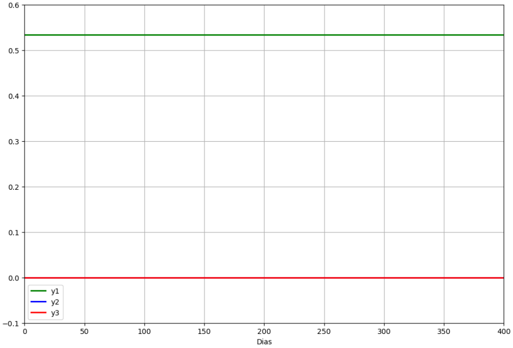
Equivalente a seguinte condição do QG Model:

```
# Condições iniciais do modelo QG
y0 = [0.53333, 0, 0]

```

# *Modelo PE* e *Modelo QG*: Resultados para a condição de Hadley 02




(a) Condição de Hadley 02 - 400 dias (PE Model)




(b) Condição de Hadley 02 - 400 dias (QG Model)

# *Algumas dificuldades*: As equações (24)-(26)

1. Apesar das equações (24)-(26) serem simplificações de (17)-(19), nenhuma das referências utilizadas utilizou as equações (24)-(26)
2. Na tentativa de plotagem das (24)-(26), houve diversos problemas, os principais foram: *overflow* e desvio em relação a natureza das equações (17)-(19)

# *Algumas dificuldades*: As equações (24)-(26)

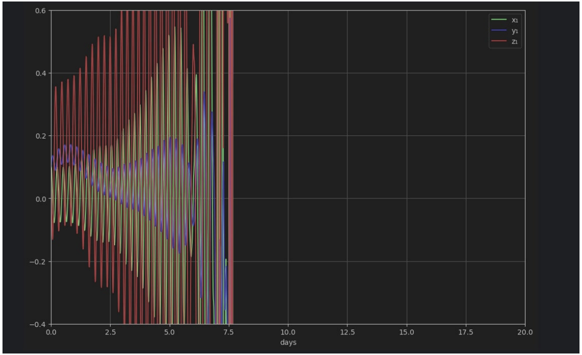
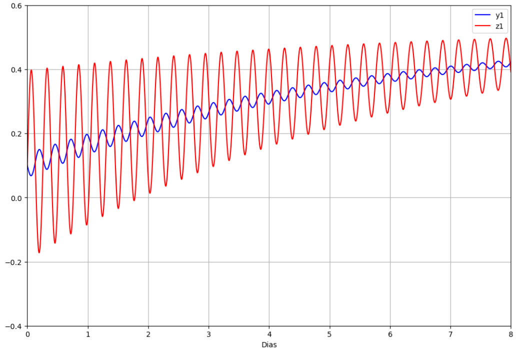



Figure: Tentativa de plotagem equações (24)-(26)

# *Algumas dificuldades*: equações (17)-(19)




(a) Condição padrão - 8 dias

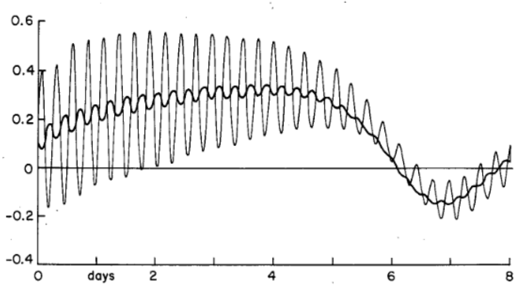



FIG. 2. Variations of $y_1$ (heavy curve) and $z_1$ (thin curve) during first eight days of first numerical solution of PE model.

(b) Condição padrão - 8 dias (artigo)

# Repositório do Github

GitHub

# Referências I

[A M23] R. L. Nós A. M. Roma J. S. Bevilacqua. "Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais". Notas de aula, curso de Métodos Numéricos, USP. 2023.

[CLM17] Mickaël D Chekroun, Honghu Liu, and James C McWilliams. "The emergence of fast oscillations in a reduced primitive equation model and its implications for closure theories". In: *Comput. Fluids* 151 (June 2017), pp. 3–22.

[CLM21] Mickaël D Chekroun, Honghu Liu, and James C McWilliams. "Stochastic rectification of fast oscillations on slow manifold closures". en. In: *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 118.48 (Nov. 2021), e2113650118.

[Gil82] Adrian E. Gill. *Front matter*. International geophysics series. Elsevier, 1982, p. iii.

# Referências II


[GM82] Peter R Gent and James C McWilliams. “Intermediate model solutions to the Lorenz equations: Strange attractors and other phenomena”. en. In: *J. Atmos. Sci.* 39.1 (Jan. 1982), pp. 3–13.

[Lor80] Edward N Lorenz. “Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium”. en. In: *J. Atmos. Sci.* 37.8 (Aug. 1980), pp. 1685–1699.

[Sal98] Rick Salmon. *Lectures on geophysical fluid dynamics*. Oxford University Press, USA, 1998.

[Von52] WILLIAM S. Von ARX. “A Laboratory Study of the Wind-driven Ocean Circulation.”. In: *Tellus* 4.4 (1952), pp. 311–318. DOI: https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1952.tb01018.x.

# Obrigado pela atenção!