Um breve estudo do Modelo Lorenz 80

Lucas Amaral Taylor

Instituto de Matemática e Estatística
(IME-USP)

Estrutura da apresentação

Objetivos da apresentação

1. Apresentação geral do artigo de Lorenz
2. Relacionar os assuntos apresentados em aula com os temas abordados no artigo.
3.

PE Model: Características do fluido

- **Homogêneo.** A densidade do fluido é uniforme em todo volume;
- **Incompressível.** O volume não muda quando submetido à pressão ($\nabla \cdot V = 0$)

PE Model: O modelo de água rasa

Fazendo as devidas alterações notacionais em [Sal98], temos:

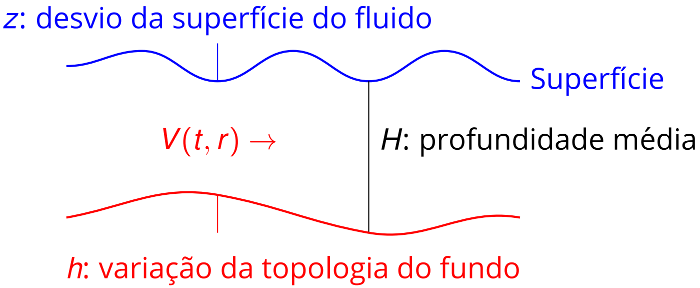
$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + f\mathbf{k} \times V = -g\nabla z \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \cdot (zV) = 0 \tag{2}$$

Onde:

- t: tempo;
- $\mathbf{r}$: vetor de posição inicial;
- $V(t, r)$: Velocidade horizontal;
- $z(t, r)$: altura da superfície;
- f: parâmetro de Coriolis;
- g: aceleração da gravidade;
- $\mathbf{k}$: vetor da vertical.

PE Model: Modelo de água rasa



PE Model: O modelo de água rasa modificado

No artigo, nos é apresentado as seguintes equações:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)V - f\mathbf{k} \times V - g\nabla z + \nu\nabla^2\mathbf{V} \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)(z - h) - (H + z - H)\nabla \cdot \mathbf{V} + \kappa\nabla^2 z + F \tag{4}$$

Onde:

- t: tempo
- $\mathbf{r}$: vetor de posição inicial;
- H: profundidade média do fluido;
- $h(r)$: variação da superfície topológica;
- $V(t, r)$: Velocidade horizontal;
- $z(t, r)$: altura da superfície;
- f: parâmetro de Coriolis;
- g: aceleração da gravidade;
- F: forças externas;
- κ: coeficiente de difusão viscosa;
- ν: coeficiente de difusão térmica;
- $\mathbf{k}$: vetor da vertical.

PE Model: Sobre os processos de difusão

Nas equações (3) e (4), temos dois processos de difusão:

1. **Difusão viscosa:** transferência do momento entre partes do fluido devido à viscosidade *(exemplo: mel)*;
2. **Difusão térmica:** Transferência de calor por condução entre regiões com diferentes temperaturas.

Observação: Ambos os processos tendem a uniformizar suas respectivas propriedades.

PE Model: Algumas observações das equações (3) e (4)

1. A média horizontal de h e z é zero;
2. $V(t, r)$ e $z(t, r)$ são amortecidas pelo processo de difusão de pequenas escala, este fato auxilia na simulação de fenômenos atmosféricos;
3. O "efeito β", efeito que indica como o movimento do fluido é afetado pelas alterações espaciais do parâmetro Coriolis, é suprimido da equação (4), através da escolha da topografia. Tal decisão baseia-se no artigo [Von52] que prova o fato teoricamente e laboratorialmente.

PE Model: A formação de novas equações

A partir da *Decomposição de Helmholtz*, decomposição que divide a *parte rotacional* e a parte *divergente*, aplicada a equação (4), temos:

$$V = \nabla \chi + \mathbf{k} \times \nabla \psi \tag{5}$$

Onde:

- χ: potencial de velocidade (*parte divergente*)
- ψ: função corrente (*parte rotacional*)
- **k**: vetor unitário vertical

PE Model: A formação de novas equações

A partir da equação (5) e (3), obtemos as duas seguintes equações:

$$\frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2(\nabla\chi \cdot \nabla\chi) - \nabla\chi \cdot \nabla(\nabla^2\psi) \times \mathbf{k} + \nabla^2(\nabla\chi \cdot \nabla\psi \times \mathbf{k})$$
$$+ \nabla \cdot (\nabla^2\psi\nabla\psi) - \frac{1}{2}\nabla^2(\nabla\psi \cdot \nabla\psi) + \nu\nabla^4\chi + f\nabla^2\psi - g\nabla^2 z \tag{6}$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla^2\psi\nabla\chi) - \nabla\psi \cdot \nabla(\nabla^2\psi) \times \mathbf{k} - f\nabla^2\chi + \nu\nabla^4\psi \tag{7}$$

Onde:

- $\frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t}$: expressa a vorticidade;
- $\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t}$: expressa o divergente

PE Model: A formação de novas equações

Realizando o mesmo processo, a partir das equações (4) e (5), obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot (z - h)\nabla\chi - \nabla\psi \cdot \nabla(z - h) \times \mathbf{k} - H\nabla^2\chi + \kappa\nabla^2 z + F \tag{8}$$

As equações (6), (7) e (8) serão as equações básicas para a construção do modelo de baixa ordem

PE Model: Objetivos do Processo de simplificação

1. Converter as equações (6), (7) e (8) para um modelo de baixa ordem.
2. Transformaremos um modelo formado originalmente por equações primitivas atmosféricas em um sistema de nove variáveis.

PE Model: Processo de simplificação

Primeiro, introduziremos três vetores adimensionais, que respeitam a seguinte condição:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{9}$$

Junto a permutação abaixo:

$$(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \tag{10}$$

Definiremos as variáveis a_i, b_i e c_i

PE Model: Processo de simplificação

As variavéis a_i, b_i e c_i são definidas da seguinte forma:

$$a_i = \alpha_1 \cdot \alpha_j$$
$$b_i = \alpha_j \cdot \alpha_i$$
$$c_i = \alpha_j \times \alpha_k \cdot \mathbf{k}$$

Observação: Apesar dessa relação ser válida, Lorenz apresenta outra (esta foi usado na aplicação computacional):

$$b_i = \frac{1}{2}\left(a_i - a_j - a_k\right)$$
$$c_i = c$$

PE Model: Processo de simplificação

Por fim, definimos um comprimento L e criamos três funções ortogonais:

$$\phi_i = \cos\left(\alpha_i \cdot \frac{r}{L}\right)$$

A partir delas, temos:

$$L^2 \nabla^2 \phi_i = -a_i \phi_i$$

$$L^2 \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_k = -\frac{1}{2} b_{ik} \phi_i + \cdots$$

$$L^2 \nabla \cdot (\phi_j \nabla \phi_k) = \frac{1}{2} b_{jk} \phi_i + \cdots$$

$$L^2 \phi_j \cdot \nabla \phi_k \times \mathbf{k} = -\frac{1}{2} c_{jk} \phi_i + \cdots$$

PE Model: Processo de simplificação

A partir delas, podemos introduzir as variáveis adimensionais normalizadas:

$$t = f^{-1}\tau \tag{11}$$

$$\chi = 2L^2 f^2 \sum x_i \phi_i \tag{12}$$

$$\psi = 2L^2 f^2 \sum y_i \phi_i \tag{13}$$

$$z = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum z_i \phi_i \tag{14}$$

$$h = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum h_i \phi_i \tag{15}$$

$$F = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum F_i \phi_i \tag{16}$$

PE Model: Processo de simplificação

Em seguida, aplicamos as variáveis definidas em (11)-(16), nas equações (6), (7) e (8), obtemos as seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
a_i \frac{dx_i}{d\tau} &= a_i b_1 x_i x_k - c(a_i - a_k) x_i y_k c(a_i - a_j) y_i x_k \\
&\quad - 2c^2 y_i y_k - \nu_0 a_i^2 x_i + a_i y_i - a_i z_i && (17) \\
a_i \frac{dy_i}{d\tau} &= -a_i b_k x_i y_k - a_i b_i y_i x_k + c(a_k - a_i) y_i y_k - a_i x_i - \nu_0 a_i^2 y_i && (18) \\
\frac{dz_i}{d\tau} &= -b_k x_i (z_k - h_k) - b_i (z_i - h_i) x_k + c y_i (z_k - h_k) \\
&\quad - c(z_i - h_i) y_k + g_0 a_i x_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i && (19)
\end{aligned}
$$

PE Model: Breves observações

- As variáveis com o índice 1 representam campos de velocidade e altura zonalmente uniformes
- As variáveis com o índice 2 ou 3 representam ondas ou redemoinhos de grande escala sobrepostos.
- Este modelo será usado em simulações e levará em consideração a permutação (10)

PE Model: Mais um processo de simplificação

Primeiro, definiremos U e V:

$$U_i = -b_i x_i + c y_i \tag{20}$$
$$V_i = -b_k x_i - c y_i \tag{21}$$

Em seguida, X_i e Y_i:

$$X_i = -a_i x_i \tag{22}$$
$$Y_i = -a_i y_i \tag{23}$$

PE Model: Mais um processo de simplificação

Aplicando U, V, X_i e Y_i em (17), (18) e (19), obtemos:

$$\frac{dX_i}{d\tau} = U_i U_k + V_j V_k - \nu_0 a_i X_i + Y_i + a_i z_i \tag{24}$$

$$\frac{dY_i}{d\tau} = U_i Y_k + Y_j V_k - X_i - \nu_0 a_i Y_i \tag{25}$$

$$\frac{dz_i}{d\tau} = U_i(z_k - h_k) + (z_j - h_j) V_k - g_0 X_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i \tag{26}$$

Este modelo também segue as permutações de (10).

QG Model: Construção do modelo

Da equação (17):

- Elimina-se todos os termos que contém x, inclusive aqueles que tem derivada em relação ao tempo

Das equações (18) e (19):

- Elimina-se todos os termos não lineares ou topográficos
- Elimina-se todos os termos com x e z

QG Model: Construção do modelo

A partir deste processo obtem-se:

$$(a_i g_0 + 1)\frac{dy_i}{d\tau} = g_0 c(a_k - a_j) y_j y_k - a_i(a_i g_0 v_0 + \kappa_0) y_i \\ - c h_k y_j + c h_j y_k + F_i \quad (27)$$

Onde:

- $(a_i g_0 + 1)\frac{dy_i}{d\tau}$: termo de evolução temporal
- $g_o c(a_k - a_j) y_j y_k$: Advecção da vorticidade planetária
- $-a_i(a_i g_0 v_0 + \kappa_0) y_i$: dissipação
- $-c h_k y_j + c h_j y_k$: efeitos topográficos
- F_i: forçamento

PE Model: Processo de plotagem

Dada a seleção do modelo, o seguinte processo é realizado:

1. Seleção de constantes e condições iniciais
2. Método de discretização (RK4)
3. Plotagem

PE Model: Seleção de constantes

```
vetor_a = [1, 1, 3]
vetor_b = [
    0.5 * (vetor_a[0] - vetor_a[1] - vetor_a[2]),
    0.5 * (vetor_a[1] - vetor_a[2] - vetor_a[0]),
    0.5 * (vetor_a[2] - vetor_a[0] - vetor_a[1]),
]
c = math.sqrt(3/4)

f_inv = 10800
vetor_h = [-1, 0, 0]
vetor_f = [0.1, 0, 0]
g_0 = 8
kappa_0 = 1 / 48
nu_0 = kappa_0
```

PE Model: Condições iniciais - padrão

Primeira condição inicial, é a dada por padrão e tem o intuito de reproduzir a figura 1 do artigo.

```
# Condições iniciais - dia 01
x0 = [0.1, 0, 0]
y0 = [0.1, 0, 0]
z0 = [0.1, 0, 0]

```

COndição de Hardley

PE Model: Condições iniciais - Hardley 01

A presente condição reproduz as condições da circulação de Hardley de acordo como [GM82]:

```
# Condição Hardley 01
y1 = (vetor_f[1] / vetor_a[1] * nu_0 * (1 + vetor_a[1] * g_0 + nu_0**2 *
     vetor_a[1] ** 2))
z1 = (1 + nu_0**2 * vetor_a[1] ** 2) * y1
x1 = -nu_0 * vetor_a[1] * y1


x_hardley_inicial = [x1, 0, 0]
y_hardley_inicial = [y1, -(10 ** (-5)), 0]
z_hardley_inicial = [z1, 10 ** (-5), 0]

```

PE Model e QG Model: Condições iniciais - Hardley 02

A presente condição reproduz as condições da circulação de Hardley de acordo com [Lor80]

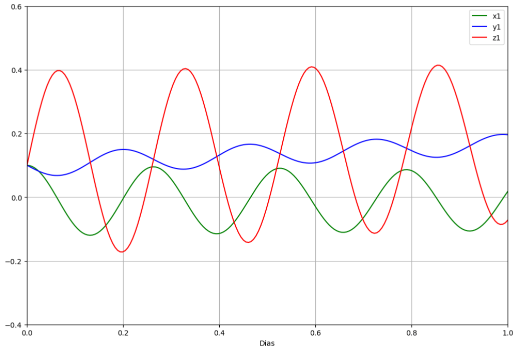
```
x_hardley02_inicial = [-0.01111, 0, 0]
y_hardley02_inicial = [0.53331, 0, 0]
z_hardle02_inicial = [0.53354, 0, 0]
```

Equivalente a seguinte condição do QG Model:

```
y0 = [0.53333, 0, 0]
```

Método de discretização RK4

PE Model: Resultados condição inicial padrão



(a) Condição padrão - reprodução

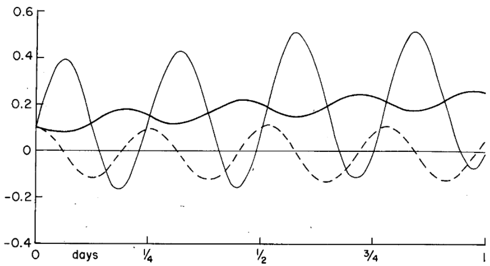
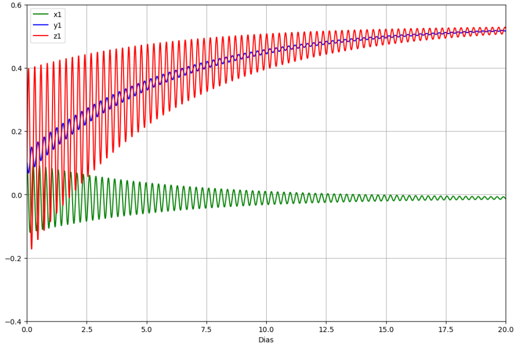


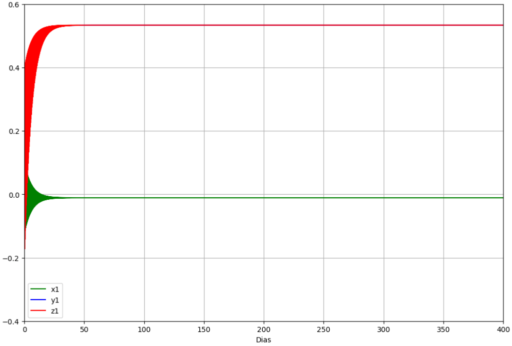
FIG. 1. Variations of x_1 (dashed curve), y_1 (heavy solid curve) and z_1 (thin solid curve) during first day of first numerical solution of PE model.

(b) Condição padrão - artigo

PE Model: Resultados condição inicial padrão



(a) Condição padrão - 20 dias



(b) Condição padrão - 400 dias

PE Model: Resultados para condição de Hardley 01

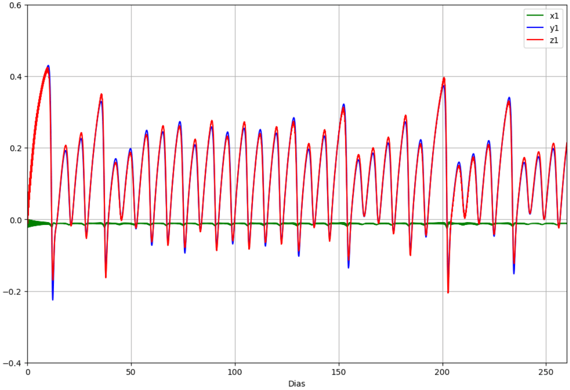


Figure: Hardley 01 - 260 dias

PE Model: Resultados para condição de Hardley 01

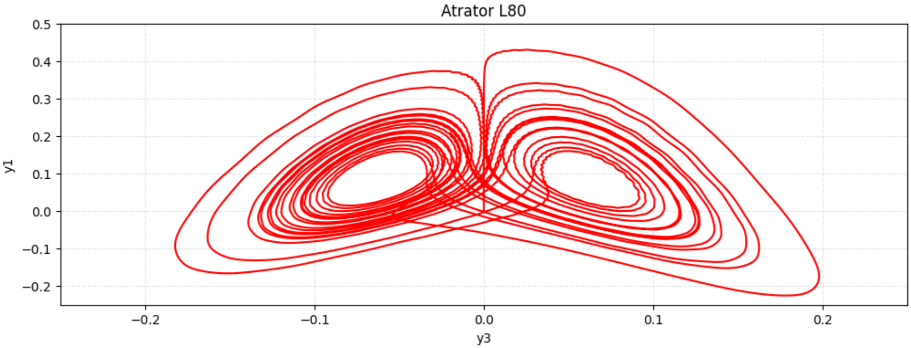


Figure: Hardley 01 - Projeção $y_3 \times y_1$

PE Model: Resultados para condição de Hardley 01

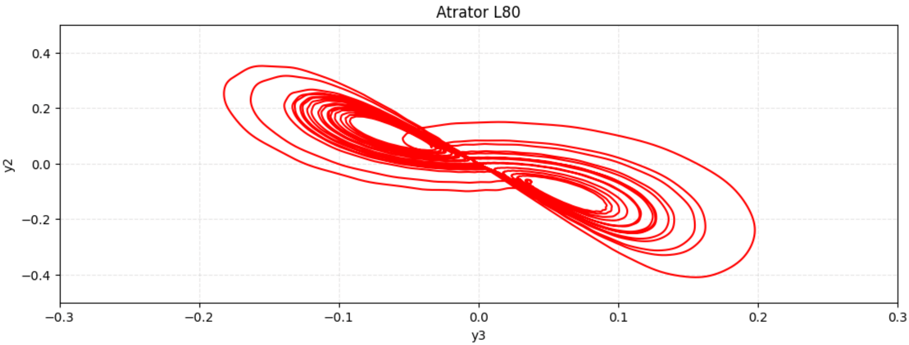


Figure: Hardley 01 - Projeção $y_3 \times y_2$

PE Model: Resultados para condição de Hardley 01

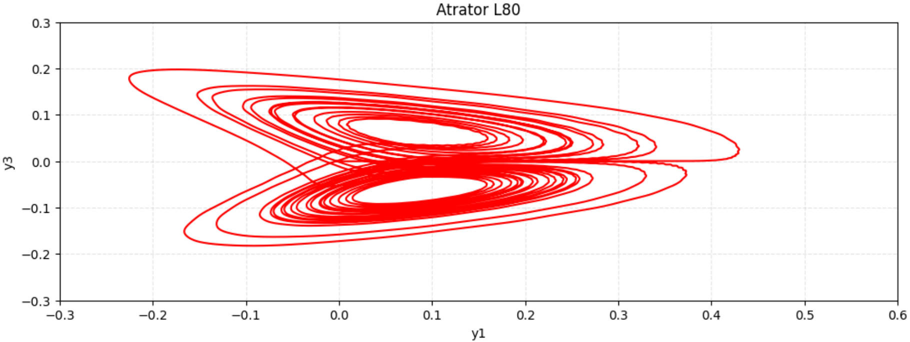
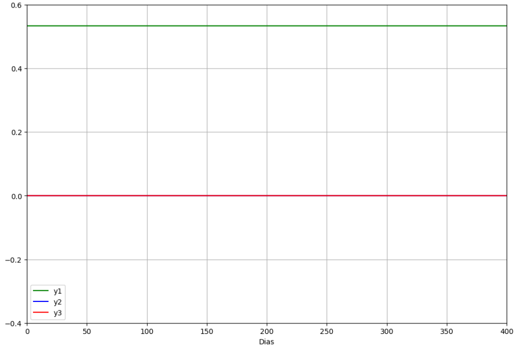
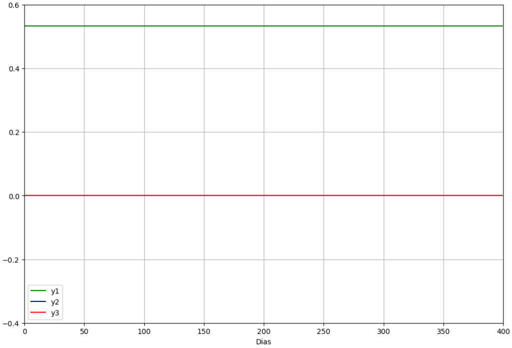


Figure: Hardley 01 - Projeção $y_1 \times y_3$

PE Model e *QG Model*: Resultados para a condição de Hardley 02



(a) Condição de Hardley 02 - 400 dias (PE Model)



(b) Condição de Hardley 02 - 400 dias (QG Model)

Referências

[GM82] Peter R Gent and James C McWilliams. "Intermediate model solutions to the Lorenz equations: Strange attractors and other phenomena". en. In: *J. Atmos. Sci.* 39.1 (Jan. 1982), pp. 3–13.

[Lor80] Edward N Lorenz. "Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium". en. In: *J. Atmos. Sci.* 37.8 (Aug. 1980), pp. 1685–1699.

[Sal98] Rick Salmon. *Lectures on geophysical fluid dynamics*. Oxford University Press, USA, 1998.

[Von52] WILLIAM S. Von ARX. "A Laboratory Study of the Wind-driven Ocean Circulation.". In: *Tellus* 4.4 (1952), pp. 311–318. DOI: https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1952.tb01018.x.

Obrigado pela atenção!