



Um breve estudo do Modelo Lorenz 80

Lucas Amaral Taylor

Instituto de Matemática e Estatística
(IME-USP)

Estrutura da apresentação

- 1 Introdução
- 2 Construção dos modelos
- 3 Comparação entre os modelos
- 4 Simulações
- 5 Conclusão

Objetivos gerais

- 1 Apresentação dos aspectos gerais do artigo "*Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium*" de Edward Norton Lorenz
- 2 Relacionar o conteúdo artigo com conceitos apresentados em aula
- 3 Realizar uma abordagem alinhada com o curso de graduação

Metodologia

- 1 Estudar os conceitos fundamentais de fluidos geofísicos e áreas relacionadas.
- 2 Reproduzir a construção dos modelos apresentados no artigo.
- 3 Realizar simulações computacionais para analisar o comportamento dos modelos.

Modelo PE: Características do fluido

- **Homogêneo.** A densidade do fluido é uniforme em todo volume;
- **Incompressível.** O volume não muda quando submetido à pressão.

Modelo PE: O modelo de água rasa

Fazendo as devidas alterações notacionais em [Sal98], temos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + f\mathbf{k} \times V = -g\nabla z \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \cdot (zV) = 0 \quad (2)$$

Onde:

- t : tempo;
- \mathbf{r} : vetor de posição inicial;
- $V(t, r)$: Velocidade horizontal;
- $z(t, r)$: altura da superfície;
- f : parâmetro de Coriolis;
- g : aceleração da gravidade;
- \mathbf{k} : vetor da vertical.

Modelo PE: O modelo de água rasa modificado

No artigo, são apresentadas as seguintes equações:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} - g \nabla z + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla)(z - h) - (H + z - H) \nabla \cdot \mathbf{V} + \kappa \nabla^2 z + F \tag{4}$$

Onde:

- t : tempo
- \mathbf{r} : vetor de posição inicial;
- H : profundidade média do fluido;
- $h(r)$: variação da superfície topológica;
- $V(t, r)$: Velocidade horizontal;
- $z(t, r)$: altura da superfície;
- f : parâmetro de Coriolis;
- g : aceleração da gravidade;
- F : forças externas;
- κ : coeficiente de difusão viscosa;
- ν : coeficiente de difusão térmica;
- \mathbf{k} : vetor da vertical.

Modelo PE: Modelo de água rasa

z : desvio da superfície do fluido



H : profundidade média

h : variação da topologia do fundo

Modelo PE: Sobre os processos de difusão

Nas equações (3) e (4), temos dois processos de difusão:

- 1 **Difusão viscosa:** transferência do momento entre partes do fluido devido à viscosidade (*exemplo: mel*);
- 2 **Difusão térmica:** Transferência de calor por condução entre regiões com diferentes temperaturas.

Observação: Ambos os processos tendem a uniformizar suas respectivas propriedades.

Modelo PE: Algumas observações das equações (3) e (4)

- 1 A média horizontal de h e z é zero;
- 2 $V(t, r)$ e $z(t, r)$ são amortecidas pelo processo de difusão de pequenas escala, este fato auxilia na simulação de fenômenos atmosféricos;
- 3 O “efeito β ”, efeito que indica como o movimento do fluido é afetado pelas alterações espaciais do parâmetro Coriolis, é suprimido da equação (4), através da escolha da topografia. Tal decisão baseia-se no artigo [Von52] que prova o fato teoricamente e laboratorialmente.

Modelo PE: A formação de novas equações

A partir da *Decomposição de Helmholtz*, decomposição que divide a *parte rotacional* e a *parte divergente*, aplicada a equação (4), temos:

$$\mathbf{V} = \nabla\chi + \mathbf{k} \times \nabla\psi \quad (5)$$

Onde:

- χ : potencial de velocidade (*parte divergente*)
- ψ : função corrente (*parte rotacional*)
- \mathbf{k} : vetor unitário vertical

Modelo PE: A formação de novas equações

A partir da equação (3) e (5), obtemos as duas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \nabla^2 (\nabla \chi \cdot \nabla \chi) - \nabla \chi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) \times \mathbf{k} + \nabla^2 (\nabla \chi \cdot \nabla \psi \times \mathbf{k}) \\ & + \nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla \psi) - \frac{1}{2} \nabla^2 (\nabla \psi \cdot \nabla \psi) + \nu \nabla^4 \chi + f \nabla^2 \psi - g \nabla^2 z \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla \chi) - \nabla \psi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) \times \mathbf{k} - f \nabla^2 \chi + \nu \nabla^4 \psi \quad (7)$$

Modelo PE: A formação de novas equações

Realizando o mesmo processo, a partir das equações (4) e (5), obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot (z - h)\nabla \chi - \nabla \psi \cdot \nabla (z - h) \times \mathbf{k} - H\nabla^2 \chi + \kappa \nabla^2 z + F \quad (8)$$

As equações (6), (7) e (8) serão as equações básicas para a construção do modelo de baixa ordem

Modelo PE: Objetivos do Processo de simplificação

- 1 Converter as equações (6), (7) e (8) para um modelo de baixa ordem.
- 2 Transformaremos um modelo formado originalmente por equações primitivas atmosféricas em um sistema de nove variáveis.

Modelo PE: Processo de simplificação

Primeiro, introduziremos três vetores adimensionais, que respeitam a seguinte condição:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (9)$$

Junto a permutação abaixo:

$$(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \quad (10)$$

Definiremos as variáveis a_i , b_i e c_i

Modelo PE: Processo de simplificação

As variáveis a_i , b_i e c_i são definidas da seguinte forma:

$$a_i = \alpha_j \cdot \alpha_j$$

$$b_i = \alpha_j \cdot \alpha_i$$

$$c_i = \alpha_j \times \alpha_k \cdot \mathbf{k}$$

Apesar dessa relação ser válida, Lorenz apresenta outra (esta foi usada na aplicação computacional):

$$b_i = \frac{1}{2} (a_i - a_j - a_k)$$

$$c_i = c$$

Modelo PE: Processo de simplificação

Por fim, definimos um comprimento L e criamos três funções ortogonais:

$$\phi_i = \cos\left(\alpha_i \cdot \frac{r}{L}\right)$$

A partir delas, temos:

$$L^2 \nabla^2 \phi_i = -a_i \phi_i$$

$$L^2 \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_k = -\frac{1}{2} b_{ik} \phi_i + \dots$$

$$L^2 \nabla \cdot (\phi_j \nabla \phi_k) = \frac{1}{2} b_{jk} \phi_i + \dots$$

$$L^2 \phi_j \cdot \nabla \phi_k \times \mathbf{k} = -\frac{1}{2} c_{jk} \phi_i + \dots$$

Modelo PE: Processo de simplificação

A partir delas, podemos introduzir as variáveis adimensionais normalizadas:

$$t = f^{-1} \tau \quad (11)$$

$$\chi = 2L^2 f^2 \sum x_i \phi_i \quad (12)$$

$$\psi = 2L^2 f^2 \sum y_i \phi_i \quad (13)$$

$$z = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum z_i \phi_i \quad (14)$$

$$h = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum h_i \phi_i \quad (15)$$

$$F = 2L^2 f^2 g^{-1} \sum F_i \phi_i \quad (16)$$

Modelo PE: Processo de simplificação

Em seguida, aplicamos as variáveis definidas em (11)-(16), nas equações (6), (7) e (8), obtemos as seguintes equações:

$$a_i \frac{dx_i}{d\tau} = a_i b_i x_i x_k - c(a_i - a_k) x_i y_k c(a_i - a_j) y_i x_k - 2c^2 y_i y_k - \nu_0 a_i^2 x_i + a_i y_i - a_i z_i \quad (17)$$

$$a_i \frac{dy_i}{d\tau} = -a_i b_k x_i y_k - a_i b_i y_i x_k + c(a_k - a_i) y_i y_k - a_i x_i - \nu_0 a_i^2 y_i \quad (18)$$

$$\frac{dz_i}{d\tau} = -b_k x_i (z_k - h_k) - b_i (z_i - h_i) x_k + c y_i (z_k - h_k) - c(z_i - h_i) y_k + g_0 a_i x_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i \quad (19)$$

Modelo PE: Variáveis

- x – **Potencial de velocidade**: relacionado à divergência do fluxo.
- y – **Função de corrente**: associado à vorticidade do fluido.
- z – **Elevação da superfície**: altura da superfície perturbada.

Modelo PE: Variáveis

- $\frac{dx}{dt}$ – Ondas gravitacionais.
- $\frac{dy}{dt}$ – Associado à vorticidade do fluido.
- $\frac{dz}{dt}$ – Relacionado à variação da altura da superfície e sua interação com a vorticidade.

Modelo PE: Breves observações

- As variáveis com índice 1 correspondem a campos de velocidade e altura zonalmente uniformes.
- As variáveis com índice 2 ou 3 representam componentes associadas a ondas, ou redemoinhos de grande escala sobrepostos.
- Este modelo será utilizado nas simulações do estudo, seguindo a permutação dada em (10).

Modelo PE: Mais um processo de simplificação

Primeiro, definiremos U e V :

$$U_i = -b_i x_i + c y_i \quad (20)$$

$$V_i = -b_k x_i - c y_i \quad (21)$$

Em seguida, X_i e Y_i :

$$X_i = -a_i x_i \quad (22)$$

$$Y_i = -a_i y_i \quad (23)$$

Modelo PE: Mais um processo de simplificação

Aplicando U , V , X_i e Y_i em (17), (18) e (19), obtemos:

$$\frac{dX_i}{d\tau} = U_i U_k + V_j V_k - \nu_0 a_i X_i + Y_i + a_i z_i \quad (24)$$

$$\frac{dY_i}{d\tau} = U_i Y_k + Y_j V_k - X_i - \nu_0 a_i Y_i \quad (25)$$

$$\frac{dz_i}{d\tau} = U_i(z_k - h_k) + (z_j - h_j)V_k - g_0 X_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i \quad (26)$$

Este modelo também segue as permutações de (10).

Modelo QG: Construção do modelo

Da equação (17):

- Eliminam-se todos os termos que contêm x , inclusive aqueles que têm derivada em relação ao tempo.

Das equações (18) e (19):

- Eliminam-se todos os termos não lineares ou topográficos.
- Eliminam-se todos os termos que contêm x e z .

Modelo QG: Construção do modelo

A partir deste processo obtem-se:

$$\begin{aligned} (a_i g_0 + 1) \frac{dy_i}{d\tau} = & g_0 c(a_k - a_j) y_j y_k - a_i (a_i g_0 v_0 + \kappa_0) y_i \\ & - ch_k y_j + ch_j y_k + F_i \end{aligned} \quad (27)$$

Observações iniciais

É importante destacar que: para apresentação, optei por apresentar a comparação entre os modelos tomando **apenas** a base para o critério de comparação entre os modelos.

Nas seções finais do artigo [Lor80], há uma análise detalhada sobre a estrutura do atrator e sua relação com a variedade invariante, incluindo suas propriedades qualitativas.

Modelo dissipativo forçado

Primeiro, vamos expor um Modelo dissipativo forçado genérico:

$$\frac{dw_i}{dt} = \sum_{j,k}^N a_{ijk} w_j w_k - \sum_j^N b_{ij} w_j + c_i \quad (28)$$

$$A = \sum_{i,j,k}^N a_{ijk} w_i w_j w_k \quad \wedge \quad B = \sum_{i,j}^N b_{ij} w_i w_j > 0$$

$$C = \sum_i^N c_i w_i \quad \wedge \quad R^2 = \sum_i^N w_i^2$$

Modelo dissipativo forçado

- A é um polinômio cúbico e representa as interações não lineares entre as componentes do sistema;
- B é um polinômio quadrático e representa a dissipação do sistema;
- C é um polinômio linear e representa o forçamento externo;
- R é a norma euclidiana ao quadrado e representa a energia total.

E vamos definir o A_1 e C_1 como o máximo de A e C e B_1 como o mínimo de B

Condições Especiais

Os modelos analisados no artigo [Lor80] devem satisfazer as seguintes condições:

- ① A condição de dissipação:

$$B_1^2 - 4A_1C_1 > 0 \quad (29)$$

- ② Restrição sobre os coeficientes do sistema:

$$a_{ijk} = 0, \quad \text{se } j = 1 \quad \vee \quad k = i$$

- ③ **Volume zero:** A taxa de variação do volume satisfaz

$$\frac{dV}{dt} = -V \sum_{i=1}^N b_{ii}, \quad (30)$$

o que implica que o volume diminui exponencialmente ao longo do tempo devido à dissipação do sistema.

Volume zero

A equação (30) indica que:

- Como B é positivo definido, $V \rightarrow 0$ à medida que o tempo avança.
- Isso implica que a dinâmica do sistema se restringe progressivamente a regiões de menor volume no espaço de fase.
- Qualquer superfície inicial S gera uma sequência de superfícies S_1, S_2, \dots , onde cada uma tem volume menor que a anterior.
- No limite, a sucessão de superfícies converge para um subconjunto de dimensão inferior, caracterizando um **atrator dissipativo**.

Relacionando o modelo genérico com os modelos construídos

- 1 **Modelo QG.** No modelo QG, a energia total é aproximadamente conservada pelos termos quadráticos. Além disso, a dissipação introduzida pelos processos de difusão age de forma análoga ao termo dissipativo do sistema genérico (28). Assim, o modelo QG possui um atrator de **volume zero**.
- 2 **Modelo PE.** Apesar do modelo PE não conservar exatamente a energia total, se $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ for suficientemente pequeno, a condição (29) é satisfeita. Nesse caso, as trajetórias do sistema permanecem limitadas e o atrator tem **volume zero**.

Modelo PE: Processo de simulação

Dada a seleção do modelo, o seguinte processo é realizado:

- 1 Seleção de constantes e condições iniciais
- 2 Método de discretização (RK4)
- 3 Plotagem

Modelo PE: Seleção de constantes

```
1 vetor_a = [1, 1, 3]
2 vetor_b = [
3 0.5 * (vetor_a[0] - vetor_a[1] - vetor_a[2]),
4 0.5 * (vetor_a[1] - vetor_a[2] - vetor_a[0]),
5 0.5 * (vetor_a[2] - vetor_a[0] - vetor_a[1]),
6 ]
7 c = math.sqrt(3/4)
8
9 f_inv = 10800
10 vetor_h = [-1, 0, 0]
11 vetor_f = [0.1, 0, 0]
12 g_0 = 8
13 kappa_0 = 1 / 48
14 nu_0 = kappa_0
15
```

Método de discretização RK4: Características gerais

Um método é de Runge-Kutta explícito de ordem 4 se, e só se, satisfaz três propriedades:

- 1 Método de passo único explícito;
- 2 Apresenta boa estabilidade para equações diferenciais ordinárias (EDOs).
- 3 Possui erro global da ordem de $\mathcal{O}(h^4)$, garantindo alta precisão com um custo computacional moderado.

Método de discretização RK4: Formulação

Tomando como referência [A M23], podemos expressar o método RK4 da seguinte maneira:

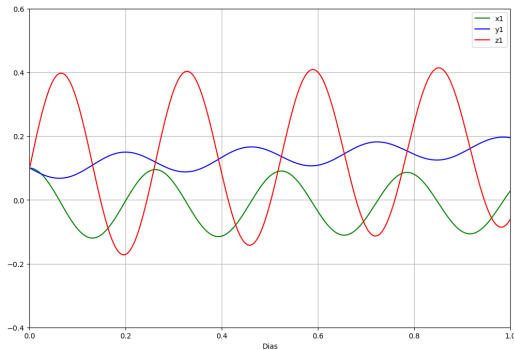
$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{6} (\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4) \quad \text{com} \quad \begin{cases} \kappa_1 = f(t, y) \\ \kappa_2 = f(t + h/2, y + (h/2)\kappa_1) \\ \kappa_3 = f(t + h/2, y + (h/2)\kappa_2) \\ \kappa_4 = f(t + h, y + h\kappa_3) \end{cases}$$

Modelo PE: Condições iniciais - padrão

Primeira condição inicial, é a dada por padrão e tem o intuito de reproduzir a figura 1 do artigo.

```
1 # Condições iniciais
2 x0 = [0.1, 0, 0]
3 y0 = [0.1, 0, 0]
4 z0 = [0.1, 0, 0]
5
```

Modelo PE: Resultados condição inicial padrão



(a) Condição padrão - 01 dia
(reprodução)

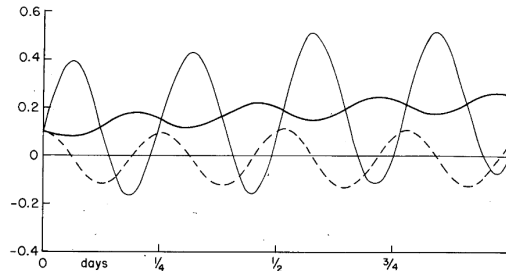
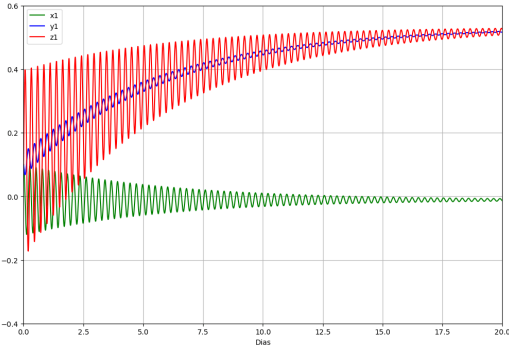


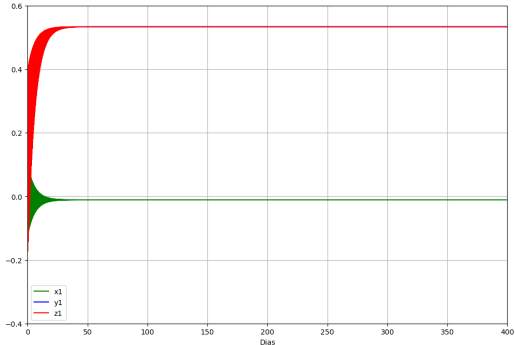
FIG. 1. Variations of x_1 (dashed curve), y_1 (heavy solid curve) and z_1 (thin solid curve) during first day of first numerical solution of PE model.

(b) Condição padrão - 01 dia
(artigo)

Modelo PE: Resultados condição inicial padrão



(a) Condição padrão - 20 dias



(b) Condição padrão - 400 dias

Condições de Hadley

A circulação de Hadley é um padrão de circulação atmosférica nos trópicos, onde o ar quente sobe próximo ao equador e desce em latitudes mais altas, formando um ciclo convectivo.

- Em 1735, Hadley incorporou o efeito da rotação da Terra, mostrando que a velocidade do ar varia com a latitude, influenciando a direção predominante dos ventos nos trópicos.
- Baseia-se na conservação do momento angular, garantindo o equilíbrio do movimento atmosférico e evitando mudanças na rotação da Terra.
- Responsável pelos ventos predominantes nos trópicos e pela redistribuição de calor na atmosfera, influenciando padrões climáticos globais.

Modelo PE: Condições iniciais - Hadley 01

A partir do artigo [GM82], temos que os valores dos vetores para as condições de Hadley são definidas como:

$$x_1 = -\nu_0 a_1 y_1,$$

$$y_1 = \frac{F_1}{a_1} \nu_0 \left(1 + a_1 g_0 + \nu_0^2 a_1^2 \right),$$

$$z_1 = \left(1 + \nu_0^2 a_1^2 \right) y_1$$

$$x_2 = y_2 = z_2 = x_3 = y_3 = z_3 = 0$$

Modelo PE: Condições iniciais - Hadley 01

Adaptando para o código, temos:

```
1 # Condições iniciais
2 y1 = (vetor_f[1]
3 / vetor_a[1] * nu_0 * (1 + vetor_a[1] * g_0 + nu_0**2 * vetor_a[1] ** 2)
4 )
5 z1 = (1 + nu_0**2 * vetor_a[1] ** 2) * y1
6 x1 = -nu_0 * vetor_a[1] * y1
7
8 x_hadley01_inicial = [x1, 0, 0]
9 y_hadley01_inicial = [y1, -(10 ** (-5)), 0]
10 z_hadley01_inicial = [z1, 10 ** (-5), 0]
```

Modelo PE: Resultados para condição de Hadley 01

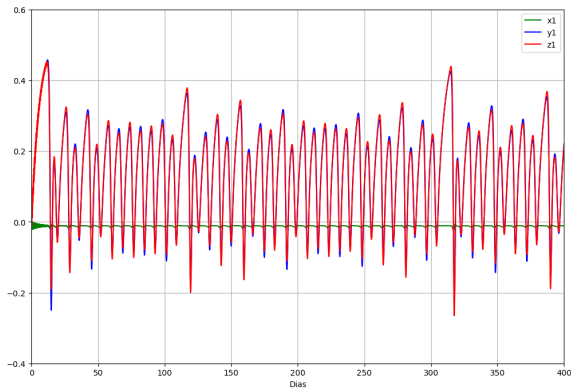


Figure: Hadley 01 - 400 dias

Modelo PE: Resultados para condição de Hadley 01

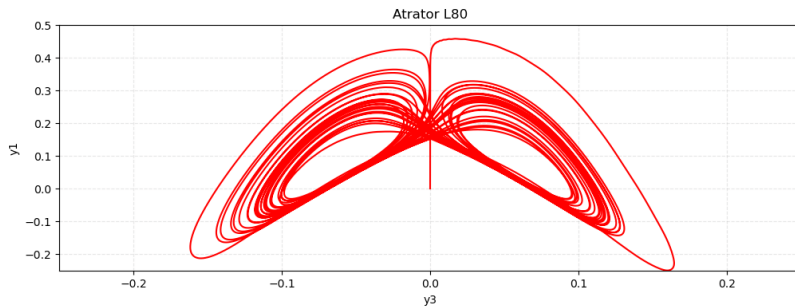


Figure: Hadley 01 - Projeção $y_3 \times y_1$

Modelo PE: Resultados para condição de Hadley 01

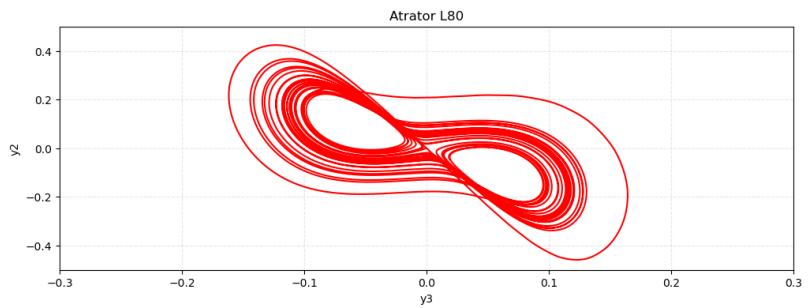


Figure: Hadley 01 - Projeção $y_3 \times y_2$

Modelo PE: Resultados para condição de Hadley 01

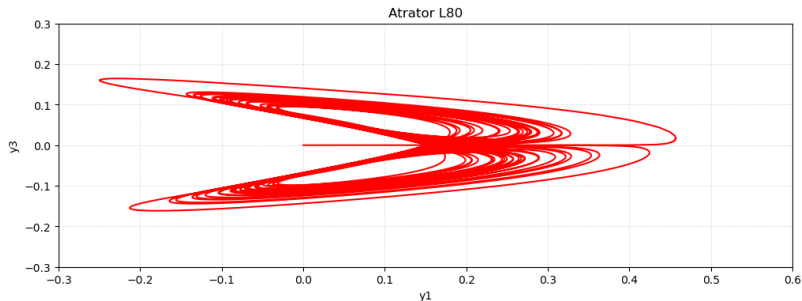


Figure: Hadley 01 - Projeção $y_1 \times y_3$

PE Model e QG Model: Condições iniciais - Hadley 02

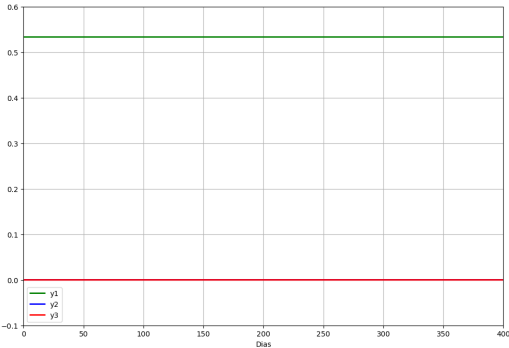
A presente condição reproduz as condições da circulação de Hadley de acordo com [Lor80]

```
1 # Condições iniciais do modelo PE
2 x_hadley02_inicial = [-0.01111, 0, 0]
3 y_hadley02_inicial = [0.53331, 0, 0]
4 z_hadley02_inicial = [0.53354, 0, 0]
5
```

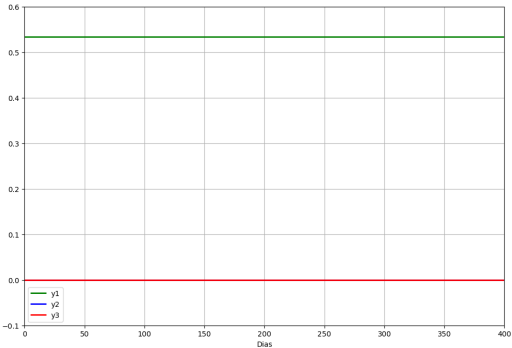
Equivalente a seguinte condição do QG Model:

```
1 # Condições iniciais do modelo QG
2 y0 = [0.53333, 0, 0]
3
```

Modelo PE e Modelo QG: Resultados para a condição de Hadley 02



(a) Condição de Hadley 02 - 400 dias
(PE Model)



(b) Condição de Hadley 02 - 400 dias
(QG Model)

Algumas dificuldades: As equações (24)-(26)

- 1 Apesar das equações (24)-(26) serem simplificações de (17)-(19), nenhuma das referências utilizadas utilizou as equações (24)-(26)
- 2 Na tentativa de plotagem das (24)-(26), houve diversos problemas, os principais foram: *overflow* e desvio em relação a natureza das equações (17)-(19)

Algumas dificuldades: As equações (24)-(26)

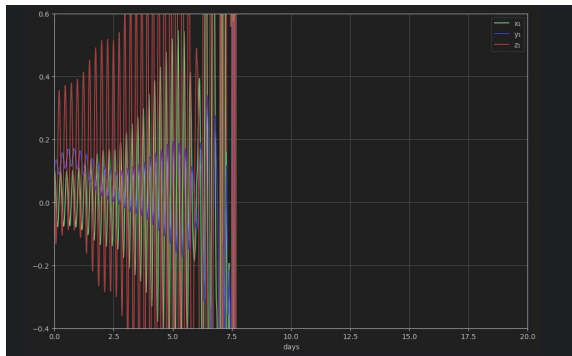
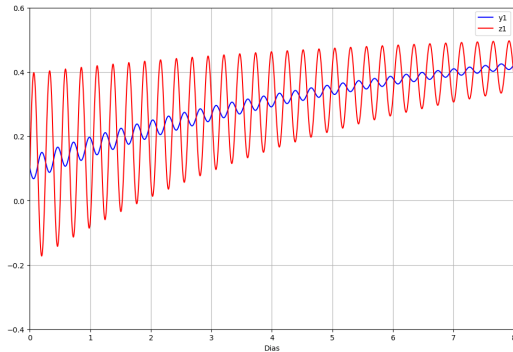


Figure: Tentativa de plotagem equações (24)-(26)

Algumas dificuldades: equações (17)-(19)



(a) Condição padrão - 8 dias

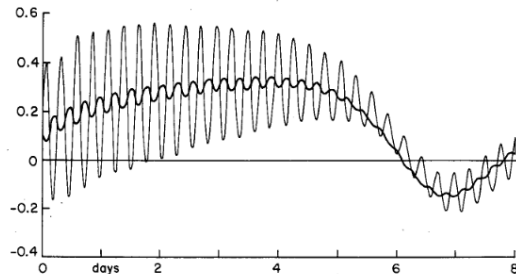


FIG. 2. Variations of y_1 (heavy curve) and z_1 (thin curve) during first eight days of first numerical solution of PE model.

(b) Condição padrão - 8 dias (artigo)

Repositório do Github



Referências I

- [A M23] R. L. N. A. M. Roma J. S. Bevilacqua. “Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais”. *Notas de aula, curso de Métodos Numéricos, USP*. 2023.
- [CLM17] Mickaël D Chekroun, Honghu Liu, and James C McWilliams. “The emergence of fast oscillations in a reduced primitive equation model and its implications for closure theories”. In: *Comput. Fluids* 151 (June 2017), pp. 3–22.
- [CLM21] Mickaël D Chekroun, Honghu Liu, and James C McWilliams. “Stochastic rectification of fast oscillations on slow manifold closures”. *en. In: Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 118.48 (Nov. 2021), e2113650118.
- [Gil82] Adrian E. Gill. *Front matter*. International geophysics series. Elsevier, 1982, p. iii.

Referências II

- [GM82] Peter R Gent and James C McWilliams. “Intermediate model solutions to the Lorenz equations: Strange attractors and other phenomena”. en. In: *J. Atmos. Sci.* 39.1 (Jan. 1982), pp. 3–13.
- [Lor80] Edward N Lorenz. “Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium”. en. In: *J. Atmos. Sci.* 37.8 (Aug. 1980), pp. 1685–1699.
- [Sal98] Rick Salmon. *Lectures on geophysical fluid dynamics*. Oxford University Press, USA, 1998.
- [Von52] WILLIAM S. Von ARX. “A Laboratory Study of the Wind-driven Ocean Circulation.”. In: *Tellus* 4.4 (1952), pp. 311–318. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1952.tb01018.x>.

Obrigado pela atenção!