Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional
com Habilitação em Métodos Matemáticos

Uma abordagem estocástica do Modelo de Lorenz 80

Lucas Amaral Taylor

Monografia Final

MAP 2429 — Trabalho de Formatura em Matemática Aplicada

Supervisor: Prof. Dr. Breno Raphaldini Ferreira da Silva

São Paulo
2025

Na verdade, na verdade vos digo que, se o
grão de trigo, caindo na terra, não morrer,
fica ele só; mas se morrer, dá muito fruto.
João 12:24

Agradecimentos

Do. Or do not. There is no try.
— Mestre Yoda

Texto texto. Texto opcional.

Resumo

Lucas Amaral Taylor. **Uma abordagem estocástica do Modelo de Lorenz 80**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, constituído de uma sequência de frases concisas e objetivas, em forma de texto. Deve apresentar os objetivos, métodos empregados, resultados e conclusões. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, conter no máximo 500 palavras e ser seguido dos termos representativos do conteúdo do trabalho (palavras-chave). Deve ser precedido da referência do documento. Texto texto. Texto texto.

Palavras-chave: Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.

Abstract

Lucas Amaral Taylor. **A stochastic approach for the Lorenz 80 model**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, elaborado com as mesmas características do resumo em língua portuguesa. De acordo com o Regimento da Pós-Graduação da USP (Artigo 99), deve ser redigido em inglês para fins de divulgação. É uma boa ideia usar o sítio www.grammarly.com na preparação de textos em inglês. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text.

Keywords: Keyword1. Keyword2. Keyword3.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de programas

Sumário

Introdução

Lorem

Capítulo 1

O modelo de Lorenz 80 determinístico

1.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar o modelo determinístico Lorenz 80 (L80). Para isso, iniciamos, na seção 1.2, com uma introdução aos conceitos básicos de geofísica, buscando familiarizar o leitor com os fundamentos desta área. Na sequência, na seção 1.3, contextualizamos o modelo, abordando os trabalhos que o antecederam e as motivações que levaram à sua formulação.

A construção do modelo é detalhada na seção 1.4, seguida pela apresentação de suas principais propriedades e características na seção 1.5. Por fim, na seção 1.6, são exibidas simulações computacionais realizadas com o modelo, acompanhadas da análise gráfica dos resultados.

1.2 Breves considerações sobre geofísica

Nesta seção, reunimos um breve glossário com os principais conceitos de geofísica que servem de base para a compreensão do modelo de Lorenz 80 (L80). Como esse modelo se apoia no modelo de água rasa, também apresentaremos os fundamentos desse modelo.

1.2.1 Glossário

Segue abaixo a definição de alguns conceitos de geofísica fundamentais para o modelo estudado:

- **Quasi-geostrófico.**
- **Parâmetro de Coriolis.**
- **Equilíbrio hidrostático.**

1.2.2 O modelo de água rasa

O modelo de água rasa

1.3 Motivação e apresentação do modelo

Edward Norton Lorenz (1917-2008) foi um importante matemático e meteorologista responsável pela publicação de vários artigos e desenvolvimento de modelos na área de previsão do tempo e outros fenômenos geofísicos. Dentre eles, o mais famoso foi o modelo Lorenz 63, conhecido popularmente pelo "efeito borboleta" que foi um marco de grande relevância para simulações matemáticas computacionais.

Em 1980, Lorenz publica o artigo intitulado "*Attractor Sets and Quasi-Geostrophic Equilibrium* " (Lorenz, 1980). Nele, Lorenz apresenta a construção e a simulação de dois modelos distintos: o primeiro, é formado a partir das equações primitivas (PE) com nove EDOs (equações diferenciais ordinárias), derivado das equações de águas rasas com topografia e forçamento, enquanto o segundo é um modelo quasi-geostrófico (QG) com 3 EDOs, obtido ao descartar as variáveis associadas ao escoamento divergente x e seus termos correspondentes. O modelo PE contém tanto ondas gravitacionais rápidas quanto oscilações quasi-geostróficas lentas, enquanto o modelo QG mantém apenas estas últimas, em um quadro simplificado para atmosfera de latitudes médias.

O artigo

1.4 Construção do modelo

Como dito anteriormente, o modelo é construído a partir das equações de água-rasa com algumas particularidades descritas a seguir.

Consideremos um fluido homogêneo e incompressível, ou seja, com densidade constante em todo o volume e volume invariável mesmo sob variações de pressão. O escoamento é predominantemente horizontal, descrito por uma velocidade $V(t, \mathbf{r})$ independente da altura, onde $\mathbf{r}$ representa o vetor de posição inicial.

A componente vertical da velocidade é determinada pela continuidade de massa. A superfície livre do fluido está localizada na altura $H + z(t, \mathbf{r})$, onde H representa a profundidade média e a base se apoia sobre uma topografia variável $h(\mathbf{r})$. Temos também que $h(\mathbf{r})$ e $z(t, \mathbf{r})$ possuem média zero.

O sistema está sujeito à rotação planetária, com um parâmetro de Coriolis constante f. Tanto o campo de velocidades V quanto a elevação da superfície z sofrem dissipação difusiva, associada a movimentos de pequena escala: o termo ν representa o coeficiente de difusão viscosa (dissipação de momento) e κ representa o coeficiente de difusão térmica. O modelo também inclui um termo de forçamento externo $F(\mathbf{r})$ e, por fim, adota-se a hipótese de equilíbrio hidrostático.

A partir da descrição acima, podemos construir o seguinte diagrama:

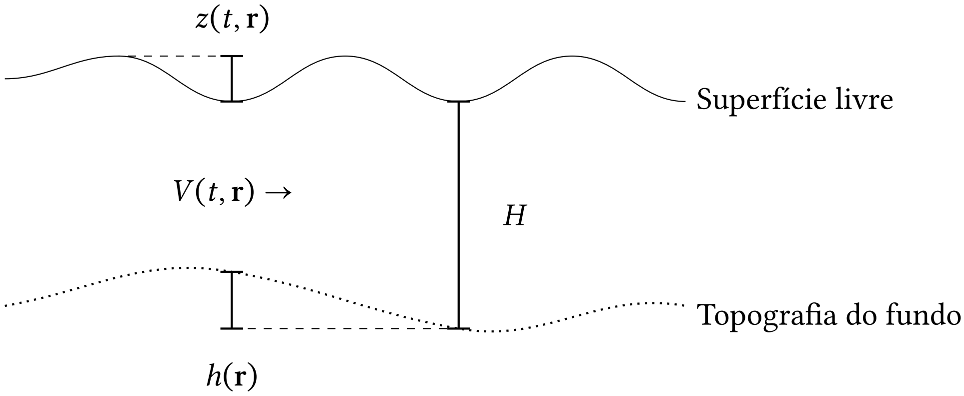

Figura 1.1: *Diagrama do modelo de água-rasa adaptado*

Além disso, o modelo de água-rasa adaptado é expresso por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)V - f\mathbf{k} \times V - g\nabla z + \nu\nabla^2 V \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)(z - h) - (H + z - h)\nabla \cdot V + \kappa\nabla^2 z + F \tag{1.2}$$

Em seguida, aplicamos a *decomposição de Helmholtz* à equação (1.1), escrevendo

$$V = \nabla\chi + \mathbf{k} \times \nabla\psi,$$

onde χ é o potencial de velocidade associado à parte divergente e ψ a função corrente associada à parte rotacional. Dessa forma, $\nabla^2\chi$ representa a divergência e $\nabla^2\psi$ a vorticidade. Substituindo essa decomposição obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nabla^2\chi}{\partial t} &= -\tfrac{1}{2}\nabla^2(\nabla\chi \cdot \nabla\chi) - \nabla\chi \cdot \nabla(\nabla^2\psi) \times \mathbf{k} + \nabla^2(\nabla\chi \cdot \nabla\psi \times \mathbf{k}) \\ &\quad + \nabla \cdot (\nabla^2\psi\nabla\psi) - \tfrac{1}{2}\nabla^2(\nabla\psi \cdot \nabla\psi) + \nu\nabla^4\chi + f\nabla^2\psi - g\nabla^2 z, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla^2\psi\nabla\chi) - \nabla\psi \cdot \nabla(\nabla^2\psi) \times \mathbf{k} - f\nabla^2\chi + \nu\nabla^4\psi. \tag{1.4}$$

Analogamente, aplicando (1.2), temos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[(z - h)\nabla\chi\right] - \nabla\psi \cdot \nabla(z - h) \times \mathbf{k} - H\nabla^2\chi + \kappa\nabla^2 z + F. \tag{1.5}$$

Nosso objetivo é reduzir as equações (1.3)–(1.5) a um modelo de baixa ordem. Para isso, introduzimos três vetores adimensionais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que satisfazem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

e adotamos as permutações cíclicas

$$(i, j, k) = (1, 2, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2).$$

Definimos então:

$$a_i = \alpha_i \cdot \alpha_i, \quad b_i = \alpha_j \cdot \alpha_k, \quad c = (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)^{1/2}.$$

Lorenz também apresenta uma forma alternativa, equivalente, mais conveniente para a implementação computacional:

$$b_i = \tfrac{1}{2}(a_i - a_j - a_k), \quad c_i = c.$$

Escolhido um comprimento característico L, construímos três funções ortogonais:

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \cos\left(\alpha_i \cdot \frac{\mathbf{r}}{L}\right),$$

para as quais valem, por exemplo:

$$\begin{aligned} L^2\nabla^2\phi_i &= -a_i\phi_i, \\ L^2\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_k &= -\tfrac{1}{2}b_{ik}\phi_i + \cdots, \\ L^2\nabla \cdot (\phi_j \nabla\phi_k) &= \tfrac{1}{2}b_{jk}\phi_i + \cdots, \\ L^2\phi_j \cdot \nabla\phi_k \times \mathbf{k} &= -\tfrac{1}{2}c_{jk}\phi_i + \cdots, \end{aligned}$$

onde os termos omitidos são múltiplos de cossenos. Com essas funções, expandimos as variáveis em série e introduzimos escalas adimensionais:

$$\begin{aligned} t &= f^{-1}\tau, \\ \chi &= 2L^2 f^2 \sum_i x_i\phi_i, \\ \psi &= 2L^2 f^2 \sum_i y_i\phi_i, \\ z &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i z_i\phi_i, \\ h &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i h_i\phi_i, \\ F &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i F_i\phi_i. \end{aligned}$$

Substituindo as equações acima em (1.3)–(1.5), e projetando sobre a base $\{\phi_i\}$, obtemos finalmente o modelo PE de baixa ordem, composto de nove equações diferenciais ordinárias:

$$a_i \frac{dx_i}{d\tau} = a_i b_i x_i x_k - c(a_i - a_k)x_i y_k + c(a_i - a_j)y_i x_k - 2c^2 y_i y_k - \nu_0 a_i^2 x_i + a_i y_i - a_i z_i, \tag{1.6}$$

$$a_i \frac{dy_i}{d\tau} = -a_i b_k x_i y_k - a_i b_i y_i x_k + c(a_k - a_i)y_i y_k - a_i x_i - \nu_0 a_i^2 y_i, \tag{1.7}$$

$$\frac{dz_i}{d\tau} = -b_k x_i(z_k - h_k) - b_i(z_i - h_i)x_k + c\, y_i(z_k - h_k) - c(z_i - h_i)y_k + g_0 a_i x_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i. \tag{1.8}$$

Na construção do modelo QG, começamos desprezando todos os termos não lineares, assim como aqueles que envolvem as variáveis x, incluindo a derivada temporal, na equação (1.6). Fazemos o mesmo com os termos não lineares ou topográficos que dependem de x nas equações (1.7) e (1.8). Por fim, eliminamos as variáveis x e z, obtendo ao modelo QG apresentado a seguir:

$$(a_i g_0 + 1)\frac{dy_i}{d\tau} = g_0 c(a_k - a_j)y_j y_k - a_i(a_i g_0 \nu_0 + \kappa_0)y_i - ch_k y_j + ch_j y_k + F_i, \tag{1.9}$$

1.5 Propriedades

1.6 Simulações

1.6.1 Escolha de parâmetros

1.6.2 Gráficos

Apêndice A

Glossário de geofísica

- **Quasi-geostrófico.**
- **Parâmetro de Coriolis.**
- **Equilíbrio hidrostático.**

Referências

[Lorenz 1980] Edward N. Lorenz. “Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 37.8 (ago. de 1980), pp. 1685–1699. issn: 1520-0469. doi: 10.1175/1520-0469(1980)037<1685:asaqge>2.0.co;2 (citado na pg. 4).

Índice remissivo