

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
BACHARELADO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL  
COM HABILITAÇÃO EM MÉTODOS MATEMÁTICOS

**Modelo de Lorenz 80: Uma abordagem  
estocástica**

Lucas Amaral Taylor

MONOGRAFIA FINAL  
MAP 2429 — TRABALHO DE  
FORMATURA EM MATEMÁTICA APLICADA

Supervisor: Prof. Dr. Breno Raphaldini Ferreira da Silva

São Paulo  
2025

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0  
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

*Na verdade, na verdade vos digo que, se o  
grão de trigo, caindo na terra, não morrer,  
fica ele só; mas se morrer, dá muito fruto.*

*João 12:24*



[illegible]



# Resumo

Lucas Amaral Taylor. **Modelo de Lorenz 80: Uma abordagem estocástica**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Este trabalho apresenta um estudo do Modelo Lorenz 80, originalmente proposto em [LORENZ \(1980\)](#), a partir de uma abordagem estocástica inspirada em [CHEKROUN \*et al.\* \(2021\)](#). São abordados fundamentos teóricos essenciais, como o formalismo de Mori-Zwanzig, propriedades gerais de equações diferenciais estocásticas e as características matemáticas e físicas do próprio modelo. O desenvolvimento computacional inclui a implementação e simulação numérica do modelo utilizando as linguagens *Julia* e *Python*, com ênfase em bibliotecas científicas voltadas para sistemas dinâmicos estocásticos e análise de dados. Por fim, realiza-se uma análise exploratória de diferentes configurações do termo de ruído, com o objetivo de investigar abordagens alternativas e complementares ao tratamento original.

**Palavras-chave:** Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.





# Abstract

Lucas Amaral Taylor. **The Lorenz 80 model: a stochastic approach**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

This project presents a study of the Lorenz 80 Model, originally proposed in [LORENZ \(1980\)](#), from a stochastic approach inspired by [CHEKROUN \*et al.\* \(2021\)](#). Essential theoretical foundations are covered, such as the Mori-Zwanzig formalism, general properties of stochastic differential equations and the mathematical and physical characteristics of the model itself. The computational development includes the implementation and numerical simulation of the model using the *Julia* and *Python* languages, with an emphasis on scientific libraries aimed at stochastic dynamic systems and data analysis. Finally, an exploratory analysis of different configurations of the noise term is carried out, with the aim of investigating alternative and complementary approaches to the original treatment.

**Keywords:** Keyword1. Keyword2. Keyword3.



## Lista de figuras

|     |  |   |
|-----|--|---|
| 1.1 | Diagrama do modelo de água-rasa adaptado . . . . . | 6 |
| 1.2 | Simulação do modelo PE (1 dia). . . . .            | 8 |
| 1.3 | Simulação do modelo PE (10 dias) . . . . .         | 9 |

## Lista de tabelas

## Lista de programas



# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introdução</b>                                  | <b>1</b>  |
| <b>1 O modelo de Lorenz 80 determinístico</b>      | <b>3</b>  |
| 1.1 Introdução . . . . .                           | 3         |
| 1.2 Breves considerações sobre geofísica . . . . . | 3         |
| 1.3 Motivação e apresentação do modelo . . . . .   | 4         |
| 1.4 O modelo de água-rasa . . . . .                | 4         |
| 1.5 Construção dos modelos . . . . .               | 5         |
| 1.6 Propriedades . . . . .                         | 8         |
| 1.7 Simulações . . . . .                           | 8         |
| <b>Apêndices</b>                                   |           |
| <b>A Códigos</b>                                   | <b>11</b> |
| <b>Anexos</b>                                      |           |
| <b>Referências</b>                                 | <b>13</b> |
| <b>Índice remissivo</b>                            | <b>15</b> |



# Introdução

Lorem





# Capítulo 1

## O modelo de Lorenz 80 determinístico

### 1.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar o modelo determinístico Lorenz 80. Para isso, começamos, na seção 1.2, com uma introdução aos conceitos básicos de geofísica, a fim de familiarizar o leitor com os fundamentos dessa área. Em seguida, na seção 1.3, contextualizamos o modelo, discutindo os trabalhos que o precederam e as motivações por trás de sua formulação.

Na seção 1.4, introduzimos o modelo de água rasa, que serve de base para o desenvolvimento do Lorenz 80. A construção deste é detalhada na seção 1.5, seguida pela apresentação de suas principais propriedades e características, na seção 1.6. Por fim, a seção 1.7 traz simulações computacionais realizadas com o modelo, acompanhadas de uma análise gráfica dos resultados.

### 1.2 Breves considerações sobre geofísica

Nesta seção, reunimos um breve glossário com os principais conceitos de geofísica que servem de base para a compreensão do modelo de Lorenz 80. Segue abaixo a definição de alguns conceitos de geofísica fundamentais para o modelo estudado:

- **Quasi-geostrófico.**
- **Parâmetro de Coriolis.**
- **Equilíbrio hidrostático.**
- **Estratificação.**
- **Momento.**
- **Conservação de massa.**

### 1.3 Motivação e apresentação do modelo

Edward Norton Lorenz (1917-2008) foi um importante matemático e meteorologista responsável pela publicação de vários artigos e desenvolvimento de modelos na área de previsão do tempo e outros fenômenos geofísicos.

Dentre eles, o mais famoso foi o modelo Lorenz 63, conhecido popularmente pelo “efeito borboleta” que foi um marco de grande relevância para simulações matemáticas computacionais.

Em 1980, Lorenz publica o artigo intitulado “*Attractor Sets and Quasi-Geostrophic Equilibrium*” (LORENZ, 1980). Nele, Lorenz apresenta a construção e a simulação de dois modelos distintos: o primeiro, é formado a partir das equações primitivas (PE) com nove EDOs (equações diferenciais ordinárias), derivado das equações de águas rasas com topografia e forçamento, enquanto o segundo é um modelo quasi-geostrófico (QG) com 3 EDOs, obtido ao descartar as variáveis associadas ao escoamento divergente  $x$  e seus termos correspondentes. O modelo PE contém tanto ondas gravitacionais rápidas quanto oscilações quasi-geostróficas lentas, enquanto o modelo QG mantém apenas estas últimas, em um quadro simplificado para atmosfera de latitudes médias.

### 1.4 O modelo de água-rasa

O modelo de água rasa descreve um fluido de densidade constante, em equilíbrio hidrostático, que pode ou não estar em rotação. Nele, a escala horizontal é significativamente maior que a profundidade. Esse fluido possui superfície livre e é limitado pelas bordas. No caso considerado, adotamos a versão de uma única camada, o que é vantajoso por permitir a desconsideração dos efeitos de estratificação. (VALLIS, 2017).

Matematicamente, para a construção do modelo de água-rasa, consideramos a equação do equilíbrio hidrostático, dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g, \quad (1.1)$$

onde:

- $p$ : pressão do fluido,
- $z$ : coordenada vertical (positiva para cima),
- $\rho_0$ : densidade constante do fluido,
- $g$ : aceleração da gravidade.

A partir das manipulações envolvendo os conceitos de momento e conservação de

massa, detalhado em [VALLIS \(2017\)](#), obtemos as equações que descrevem o modelo:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + f\mathbf{k} \times V = -g\nabla z \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \cdot (zV) = 0 \quad (1.3)$$

Onde:

- $t$ : tempo;
- $\mathbf{r}$ : vetor de posição inicial;
- $V(t, \mathbf{r})$ : Velocidade horizontal;
- $z(t, \mathbf{r})$ : altura da superfície;
- $f$ : parâmetro de Coriolis;
- $g$ : aceleração da gravidade;
- $\mathbf{k}$ : vetor da vertical.

## 1.5 Construção dos modelos

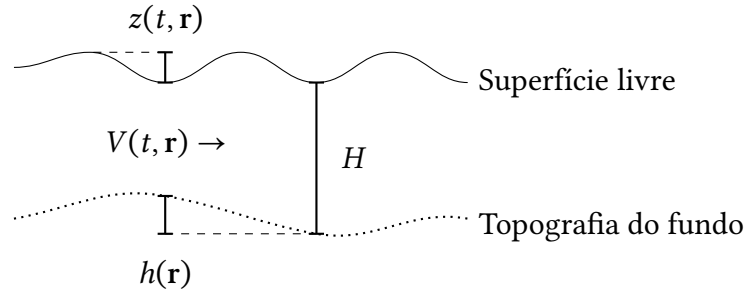
Nesta seção, apresentaremos a construção dos modelos apresentados no artigo [LORENZ \(1980\)](#). Como dito anteriormente, o modelo é construído a partir das equações de água-rasa com algumas particularidades descritas a seguir.

Consideremos um fluido homogêneo e incompressível, ou seja, com densidade constante em todo o volume e volume invariável mesmo sob variações de pressão. O escoamento é predominantemente horizontal, descrito por uma velocidade  $V(t, \mathbf{r})$  independente da altura, onde  $\mathbf{r}$  representa o vetor de posição inicial.

A componente vertical da velocidade é determinada pela continuidade de massa. A superfície livre do fluido está localizada na altura  $H + z(t, \mathbf{r})$ , onde  $H$  representa a profundidade média e a base se apoia sobre uma topografia variável  $h(\mathbf{r})$ . Temos também que  $h(\mathbf{r})$  e  $z(t, \mathbf{r})$  possuem média zero.

O sistema está sujeito à rotação planetária, com um parâmetro de Coriolis constante  $f$ . Tanto o campo de velocidades  $V$  quanto a elevação da superfície  $z$  sofrem dissipação difusiva, associada a movimentos de pequena escala: o termo  $\nu$  representa o coeficiente de difusão viscosa (dissipação de momento) e  $\kappa$  representa o coeficiente de difusão térmica. O modelo também inclui um termo de forçamento externo  $F(\mathbf{r})$  e, por fim, adota-se a hipótese de equilíbrio hidrostático.

A partir da descrição acima, podemos construir o seguinte diagrama:



**Figura 1.1:** Diagrama do modelo de água-rasa adaptado

Além disso, o modelo de água-rasa adaptado é expresso por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)V - f\mathbf{k} \times V - g\nabla z + \nu \nabla^2 V \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)(z - h) - (H + z - h)\nabla \cdot V + \kappa \nabla^2 z + F \quad (1.5)$$

Em seguida, aplicamos a *decomposição de Helmholtz* à equação (1.4), escrevendo

$$V = \nabla \chi + \mathbf{k} \times \nabla \psi,$$

onde  $\chi$  é o potencial de velocidade associado à parte divergente e  $\psi$  a função corrente associada à parte rotacional. Dessa forma,  $\nabla^2 \chi$  representa a divergência e  $\nabla^2 \psi$  a vorticidade. Substituindo essa decomposição obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \nabla^2 (\nabla \chi \cdot \nabla \chi) - \nabla \chi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) \times \mathbf{k} + \nabla^2 (\nabla \chi \cdot \nabla \psi \times \mathbf{k}) \\ & + \nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla \psi) - \frac{1}{2} \nabla^2 (\nabla \psi \cdot \nabla \psi) + \nu \nabla^4 \chi + f \nabla^2 \psi - g \nabla^2 z, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla \chi) - \nabla \psi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) \times \mathbf{k} - f \nabla^2 \chi + \nu \nabla^4 \psi. \quad (1.7)$$

Analogamente, aplicando (1.5), temos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot [(z - h) \nabla \chi] - \nabla \psi \cdot \nabla (z - h) \times \mathbf{k} - H \nabla^2 \chi + \kappa \nabla^2 z + F. \quad (1.8)$$

Nosso objetivo é reduzir as equações (1.6)–(1.8) a um modelo de baixa ordem. Para isso, introduzimos três vetores adimensionais  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  que satisfazem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

e adotamos as permutações cíclicas

$$(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2).$$

Definimos então:

$$a_i = \alpha_i \cdot \alpha_i, \quad b_i = \alpha_j \cdot \alpha_k, \quad c = (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)^{1/2}.$$

Lorenz também apresenta uma forma alternativa, equivalente, mais conveniente para a implementação computacional:

$$b_i = \frac{1}{2}(a_i - a_j - a_k), \quad c_i = c.$$

Escolhido um comprimento característico  $L$ , construímos três funções ortogonais:

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \cos\left(\alpha_i \cdot \frac{\mathbf{r}}{L}\right),$$

para as quais valem, por exemplo:

$$\begin{aligned} L^2 \nabla^2 \phi_i &= -a_i \phi_i, \\ L^2 \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_k &= -\frac{1}{2} b_{ik} \phi_i + \dots, \\ L^2 \nabla \cdot (\phi_j \nabla \phi_k) &= \frac{1}{2} b_{jk} \phi_i + \dots, \\ L^2 \phi_j \cdot \nabla \phi_k \times \mathbf{k} &= -\frac{1}{2} c_{jk} \phi_i + \dots, \end{aligned}$$

onde os termos omitidos são múltiplos de cossenos. Com essas funções, expandimos as variáveis em série e introduzimos escalas adimensionais:

$$\begin{aligned} t &= f^{-1} \tau, \\ \chi &= 2L^2 f^2 \sum_i x_i \phi_i, \\ \psi &= 2L^2 f^2 \sum_i y_i \phi_i, \\ z &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i z_i \phi_i, \\ h &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i h_i \phi_i, \\ F &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i F_i \phi_i. \end{aligned}$$

Substituindo as equações acima em (1.6)–(1.8), e projetando sobre a base  $\{\phi_i\}$ , obtemos finalmente o modelo PE de baixa ordem, composto de nove equações diferenciais ordinárias:

$$a_i \frac{dx_i}{d\tau} = a_i b_i x_i x_k - c(a_i - a_k) x_i y_k + c(a_i - a_j) y_i x_k - 2c^2 y_i y_k - v_0 a_i^2 x_i + a_i y_i - a_i z_i, \quad (1.9)$$

$$a_i \frac{dy_i}{d\tau} = -a_i b_k x_i y_k - a_i b_i y_i x_k + c(a_k - a_i) y_i y_k - a_i x_i - v_0 a_i^2 y_i, \quad (1.10)$$

$$\frac{dz_i}{d\tau} = -b_k x_i (z_k - h_k) - b_i (z_i - h_i) x_k + c y_i (z_k - h_k) - c(z_i - h_i) y_k + g_0 a_i x_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i. \quad (1.11)$$

Na construção do modelo QG, começamos desprezando todos os termos não lineares, assim como aqueles que envolvem as variáveis  $x$ , incluindo a derivada temporal, na equação (1.9). Fazemos o mesmo com os termos não lineares ou topográficos que dependem de  $x$  nas equações (1.10) e (1.11). Por fim, eliminamos as variáveis  $x$  e  $z$ , obtendo ao modelo QG apresentado a seguir:

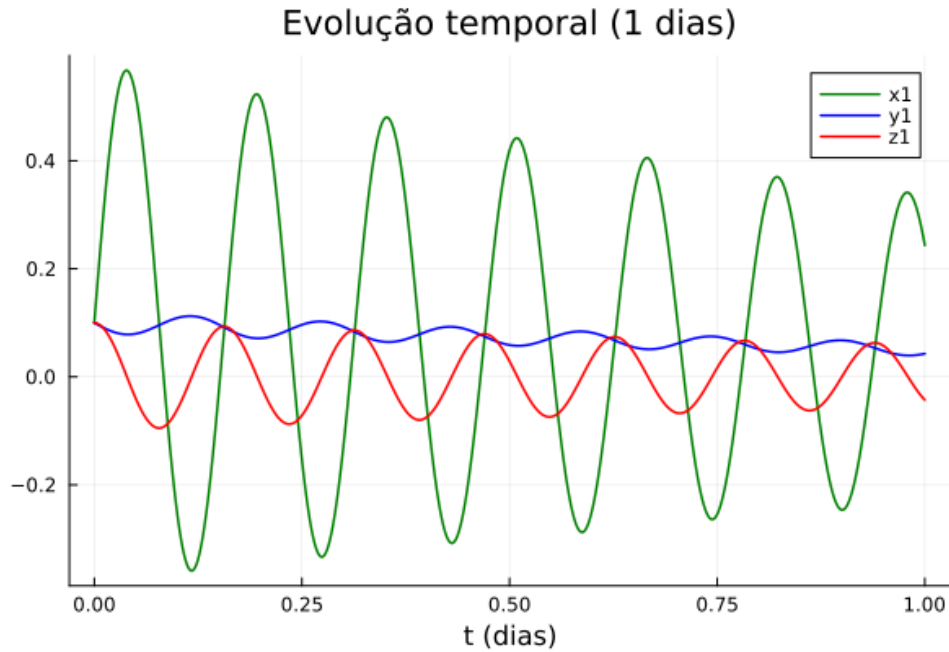
$$(a_i g_0 + 1) \frac{dy_i}{d\tau} = g_0 c(a_k - a_j) y_j y_k - a_i (a_i g_0 v_0 + \kappa_0) y_i - ch_k y_j + ch_j y_k + F_i, \quad (1.12)$$

## 1.6 Propriedades

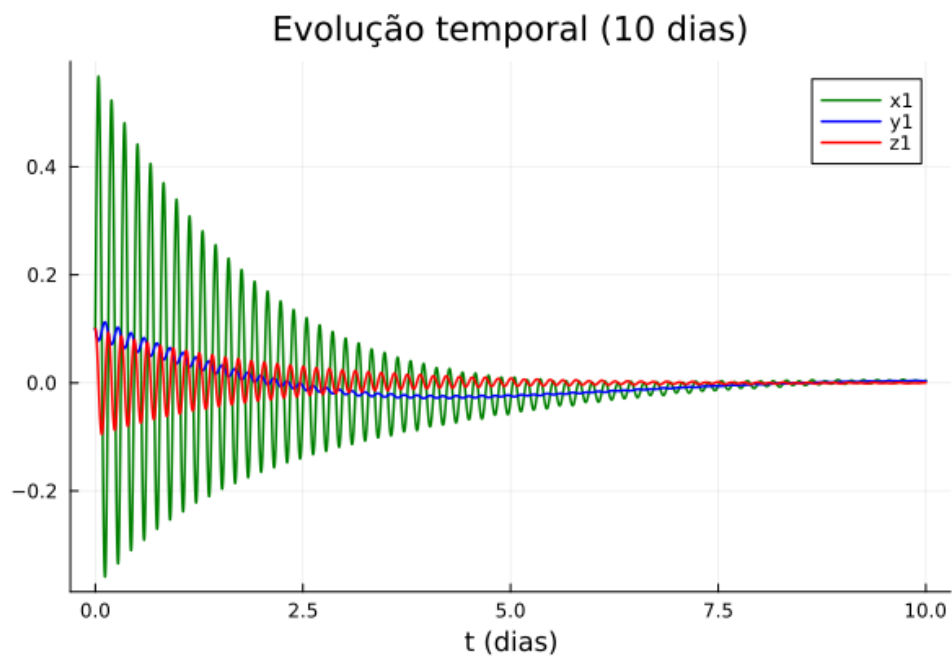
## 1.7 Simulações

Nesta seção, apresentaremos o resultados das simulações computacionais dos dois modelos construídos ao longo do capítulo. Os gráficos foram gerados a partir de simulações computacionais realizadas em Julia, principalmente, com o auxílio da biblioteca *SciML: Differentiable Modeling and Simulation Combined with Machine Learning* (RACKAUCKAS e NIE, 2017).

O có



**Figura 1.2:** Simulação do modelo PE (1 dia).



**Figura 1.3:** *Simulação do modelo PE (10 dias)*





# **Apêndice A**

## **Códigos**



## Referências

- [CHEKROUN *et al.* 2021] Mickaël D. CHEKROUN, Honghu LIU e James C. McWILLIAMS. “Stochastic rectification of fast oscillations on slow manifold closures”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 118.48 (nov. de 2021). ISSN: 1091-6490. DOI: [10.1073/pnas.2113650118](https://doi.org/10.1073/pnas.2113650118). URL: <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.2113650118> (citado nas pgs. [iii](#), [v](#)).
- [LORENZ 1980] Edward N. LORENZ. “Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 37.8 (ago. de 1980), pp. 1685–1699. ISSN: 1520-0469. DOI: [10.1175/1520-0469\(1980\)037<1685:asaqge>2.0.co;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1980)037<1685:asaqge>2.0.co;2) (citado nas pgs. [iii](#), [v](#), [4](#), [5](#)).
- [RACKAUCKAS e NIE 2017] Christopher RACKAUCKAS e Qing NIE. “DifferentialEquations.jl—a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in Julia”. *Journal of Open Research Software* 5.1 (2017) (citado na pg. [8](#)).
- [VALLIS 2017] Geoffrey K. VALLIS. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*. Cambridge University Press, jun. de 2017. ISBN: 9781107588417. DOI: [10.1017/9781107588417](https://doi.org/10.1017/9781107588417) (citado nas pgs. [4](#), [5](#)).



# Índice remissivo

Captions, *veja* Legendas

Código-fonte, *veja* Floats

Equações, *veja* Modo matemático

Figuras, *veja* Floats

Floats

    Algoritmo, *veja* Floats, ordem

Fórmulas, *veja* Modo matemático

Inglês, *veja* Língua estrangeira

Palavras estrangeiras, *veja* Língua es-  
trangeira

Rodapé, notas, *veja* Notas de rodapé

Subcaptions, *veja* Subfiguras

Sublegendas, *veja* Subfiguras

Tabelas, *veja* Floats

Versão corrigida, *veja* Tese/Dissertação,  
versões

Versão original, *veja* Tese/Dissertação,  
versões