MAP2320 - Métodos em Equações Diferenciais II
Período noturno - $2^{\underline{o}}$ semestre de 2024

EPREC - Data de entrega: 27/01/2025

1 Introdução

Neste exercício programa aplicaremos o Método de Diferenças Finitas (MDF daqui em diante) para a resolução numérica da equação equação da onda unidimensional. Usaremos conceitos vistos em aula juntamente com uma ideia para tratar a derivada temporal de ordem 2.

2 A equação da onda unidimensional

Já vimos em aula. A equação é

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \tag{1}$$

onde $c > 0$ é a *velocidade da onda*. A função $u(x, t)$ pode modelar [1] o deslocamento em relação à posição de equilíbrio de uma corda no ponto x e no instante t ou uma perturbação da velocidade nula do ar em um tubo na posição x e no instante t (neste caso c é a velocidade do som).

O problema de valor inicial em $x \in \mathbb{R}$, no qual especificamos

$$u(x, 0) = \Phi(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = \Psi(x), \tag{2}$$

pode ser resolvido usando-se a fórmula de d'Alembert. Porém, a expressão pode ser complicada e, além disso, em domínios limitados onde especificamos condições de fronteira, o uso da fórmula é imparaticável para a obtenção de valores numéricos. O MDF é simples de implementar e pode ser aplicado também em dimensões espaciais maiores do que 1.

3 Discretização da equação da onda

Considere uma malha

$$(x_m, t_n) = (mh, n\tau), \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

onde $h > 0$ e $\tau > 0$ são os espaçamentos em x e t, respectivamente. Se $u(x, t)$ for solução de (1), então em particular temos

$$u_{tt}(x_m, t_n) = c^2 u_{xx}(x_m, t_n).$$

[1] Veja o Capítulo 1 do livro *Partial Differential Equations* de Walter A. Strauss

Discretizando-se u_{tt} e u_{xx} em (x_m, t_n) pela aproximação usual para a derivada segunda obtemos

$$\frac{u(x_m, t_{n+1}) - 2u(x_m, t_n) + u(x_m, t_{n-1})}{\tau^2} =$$
$$c^2 \frac{u(x_{m-1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m+1}, t_n)}{h^2} + T_{mn}(h, \tau),$$

onde T_{mn} é o erro de discretização local ou erro de truncamento. Se u for de classe C^4, então $T_{mn}(h,\tau) = O(h^2) + O(\tau^2)$ e dizemos que a discretização tem ordem de consistência 2 no espaço e no tempo.

Desprezando-se o erro de truncamento, obtemos o esquema de diferenças finitas

$$\frac{U_m^{n+1} - 2U_m^n + U_m^{n-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2}$$

para as aproximações U_m^n de $u(x_m, t_n)$, que pode ser reescrito como

$$U_m^{n+1} = c^2\lambda^2(U_{m-1}^n + U_{m+1}^n) + 2(1 - c^2\lambda^2)U_m^n - U_m^{n-1} \tag{4}$$

onde $\lambda = \tau/h$. Portanto, se conhecermos U_m^n e U_m^{n-1}, podemos calcular explicitamente U_m^{n+1} pela fórmula acima. Neste sentido, o esquema (4) é dito explícito.

Se as condições iniciais (2) forem especificadas, usamos

$$U_m^0 = \Phi(x_m). \tag{5}$$

Precisamos ainda de valores para U_m^1 a fim de podermos usar (4) para calcularmos U_m^2, U_m^3, etc. Isto pode ser feito a partir de (2) aproximando-se a derivada em t como $\Psi(x_m) = u_t(x_m, 0) = \frac{u(x_m,\tau) - u(x_m,0)}{\tau} + O(\tau)$ o que nos dá $U_m^1 = \Phi(x_m) + \tau\Psi(x_m)$ após desprezarmos o erro de truncamento. Porém, estes valores são obtidos de uma aproximação para $u_t(x_m, 0)$ com ordem de consistência 1 em τ, menor do que a ordem de discretização da equação da onda.

Esta aproximação pode ser melhorada usando um termo a mais na expansão em Taylor juntamente com a equação da onda da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_t(0, x_m) &= \frac{u(x_m,\tau) - u(x_m,0)}{\tau} - \frac{\tau}{2}u_{tt}(x_m, 0) + O(\tau^2) \\ &= \frac{u(x_m,\tau) - u(x_m,0)}{\tau} - \frac{\tau}{2}c^2 u_{xx}(x_m, 0) + O(\tau^2) \end{aligned}$$

onde usamos (1) em $(x,t) = (x_m, 0)$. Discretizando-se u_{xx} da maneira usual obtemos uma aproximação para $u_t(x_m, 0)$ com a mesma ordem de consistência da discretização de (1) e também a expressão

$$U_m^1 = \frac{c^2\lambda^2}{2}(\Phi_{m-1} + \Phi_{m+1}) + (1 - c^2\lambda^2)\Phi_m + \tau\Psi_m \tag{6}$$

com $\Phi_m = \Phi(x_m)$ e $\Psi_m = \Psi(x_m)$.

A solução do problema (1) com condições inicais (2) pode então ser aproximada na malha calculando-se primeiramente U_m^0 e U_m^1 por (5) e (6), respectivamente, e depois usando o esquema (4) para obter as aproximações nos instantes posteriores.

4 Convergência

Será que as aproximações calculadas pelo método descrito na seção anterior convergem para a solução do problema contínuo quando h e τ tendem a zero? Isto não pode acontecer se h e τ tenderem a zero com $c\lambda > 1$ pois neste caso o domínio de dependência numérico está estritamente contido no domínio de depenência da solução. Explique este fato usando uma figura (lembre-se que $\lambda = \tau/h$).

Logo, uma condição necessária para a convergência é que h e τ tendam a zero satisfazendo

$$c\lambda \leq 1. \tag{7}$$

Esta é a famosa condição CFL [2]. Pode-se provar que para o método da seção anterior aplicado ao problema de valor inicial (1) e (2) a condição também é suficiente para a convergência. Além disso, se $u(x,t)$ for suficientemente regular, o erro entre as aproximações e ela tende a zero proporcionalmente a h^2 e τ^2, tendo o mesmo comportamento que a ordem de consistência. Para obtermos aproximações cada vez melhores, h e τ devem diminuir simultaneamente. Em geral isto é feito mantendo-se λ constante respeitando a condição (7).

Uma propriedade notável de soluções $u(x,t)$ de (1) é que elas satisfazem a identidade

$$u(x, t+\tau) + u(x, t-\tau) = u(x - c\tau, t) + u(x + c\tau, t)$$

para qualquer $\tau > 0$ em qualquer ponto (x,t). Demonstre a igualdade acima. Em particular, escolhendo-se $h = c\tau$ obtemos nos pontos da malha a relação

$$u(x_m, t_{n+1}) = u(x_{m-1}, t_n) + u(x_{m+1}, t_n) - u(x_m, t_{n-1}).$$

Ou seja, soluções de (1) são soluções de (4) quando $c\lambda = 1$. Neste caso o esquema de diferenças finitos é exato! Porém note que não temos o valor exato de $u(x_m, t_1)$ e também que com um termo forçante o esquema deixa de ser exato. De qualquer forma, usarmos (4) com $c\lambda = 1$ é uma opção interessante e respeita a condição CFL.

5 Condições de fronteira

Para aproximar soluções da equação da onda em domínios limitados $a \leq x \leq b$, até um instante final $T > 0$, a malha pode ser construída escolhendo-se

$$h = \frac{b-a}{M}, \quad \tau = \frac{T}{N},$$

com M e N inteiros positivos e $x_m = a + mh$, $0 \leq m \leq M$. O esquema (4), (5) e (6) é usado com com $m = 1, 2, \ldots, M-1$ (pontos interiores) e $n \leq N-1$. Os valores de U_0^{n+1} e U_M^{n+1} para $n \geq 0$ em $x_0 = a$ e $x_M = b$, respectivamente, devem ser obtidos das condições de fronteira e também devemos usar $U_0^0 = \Phi(a)$ e $U_M^0 = \Phi(b)$.

[2] A sigla refere-se aos matemáticos Richard Courant, Kurt Friedrichs e Hans Lewy, que estudaram esta condição em um artigo de 1928. Uma tradução para a língua inglesa do trabalho encontra-se em web.stanford.edu/class/cme324/classics/courant-friedrichs-lewy.pdf

Quando a condição de fornteira é de Dirchlet isto é fácil. Se for especificado $u(a,t) = \alpha(t)$, usamos $U_0^{n+1} = \alpha(t_{n+1})$ ou a expressão $U_M^{n+1} = \beta(t_{n+1})$ se for especificado $u(b,t) = \beta(t)$. Já a condição de Neumann deve ser tratada com maior cuidado, pois deve-se aproximar derivadas e a ordem da aproximação interfere na ordem de convergência.

Por exemplo, se for dado que $u_x(a,t) = \varphi(t)$, podemos usar a aproximação unilateral de ordem 1 $u_x(a,t) \approx [u(x_1,t) - u(x_0,t)]/h$ e se $u_x(b,t) = \psi(t)$ podemos usar $u_x(b,t) \approx [u(x_M,t) - u(x_{M-1},t)]/h$ gerando as expressões

$$\begin{aligned}
U_0^{n+1} &= U_1^{n+1} - h\varphi(t_{n+1}) \quad \text{se} \quad u_x(a,t) = \varphi(t),\\
U_M^{n+1} &= U_{M-1}^{n+1} + h\psi(t_{n+1}) \quad \text{se} \quad u_x(b,t) = \psi(t).
\end{aligned}$$

Estas aproximações reduzem a ordem de convergência para 1 em τ. Se quisermos preservar ordem 2, podemos usar as seguintes aproximações unilaterais de ordem 2 (verifique como exercício que as expressões abaixo aproximam a derivada com ordem 2):

$$\begin{aligned}
U_0^{n+1} &= \frac{4U_1^{n+1} - U_2^{n+1} - 2h\varphi(t_{n+1})}{3} \quad \text{se} \quad u_x(a,t) = \varphi(t),\\
U_M^{n+1} &= \frac{4U_{M-1}^{n+1} - U_{M-2}^{n+1} + 2h\psi(t_{n+1})}{3} \quad \text{se} \quad u_x(b,t) = \psi(t).
\end{aligned}$$

6 Tarefa

Implemente um programa em Python para resolver a equação da onda (1) em um intervalo $x \in [a,b]$ com condições iniciais (2) usando o esquema de diferenças finita (4), (5) e (6). Leve em conta a possibilidade de ter condições de fronteira de Dirichlet nos extremos, ou condições de Neumann nos extremos, ou Dirichlet em um extremo e Neumann no outro extremo. Use as aproximações descritas na Seção 5 para obter U_0^{n+1} e U_M^{n+1}. Permita o uso de aproximações de ordens 1 ou 2 quando a condição for Neumann.

Teste o seu programa nos exemplos abaixo. Em todos eles, use $c = 1$.

Exemplo 1 O intervalo é $0 \le x \le 1$ e $T = 1$. As condições iniciais são

$$u(x,0) = 2\cos(x), \quad u_t(x,0) = 0$$

e as condições de fronteira são

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 2\cos(1)\cos(t).$$

Use $h = 1/10$, $1/20$ e $1/40$ e $\lambda = 1$. Confirme numericamente a ordem de convergência para as discretizações de ordem 1 e 2 da condição de Neumann, calculando o erro entre $u(1,x_m)$ e U_m^N, $0 \le m \le M$.

Obs.: A solução exata é $u(x,t) = \cos(x+t) + \cos(x-t)$.

Exemplo 2 O intervalo é $-2 \leq x \leq 2$ e $T = 3.8$. As condições iniciais são

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1, \end{cases} \qquad \Psi(x) = 0$$

e as condições de contorno $u(-2,t) = 0$, $u_x(2,t) = 0$. Use $h = 1/10$, $1/20$, $1/40$ e $1/80$ e $\lambda = 0.95$. Faça comentários sobre a precisão das aproximações calculando o erro entre $u(x_m, 3.8)$ e U_m^N, $0 \leq m \leq M$. A solução exata, quando estendida a toda a reta, é simétrica em torno do ponto $x = 2$ para todo t.

Exemplo 3 O intervalo é $0 \leq x \leq 1$ e $T = 10$. As condições iniciais são

$$\Phi(x) = e^{-1000(x-0.5)^2}\text{sen}(300x), \quad \Psi(x) = 0$$

e as condições de fronteira são $u(0,t) = 0$, $u(1,t)$=0. Neste exemplo, o pacote de onda inicial se separa em dois, um se movendo para a direita e o outro para a esquerda, ambos com velocidade 1. Quando atingem a fronteira (a primeira vez em $t = 0.5$), eles refletem e então viajam na direção oposta. Nos instantes t iguais a inteiros pares a solução é igual ao seu valor em $t = 0$ (você consegue explicar estas propriedades?)

Usando $h = 1/300$ e $\lambda = 1$, apresente gráficos para as aproximações nos instantes $t = 0$, 0.25, 2 e 10. Calcule o erro entre a aproximação em $t = 2$ e a condição inicial e o erro entre a aproximação em $t = 10$ e a aproximação inicial. O que você observa?

Use agora $h = 1/300$ e $\lambda = 1/2$. Como o espaçamento temporal diminuiu pela metade, espera-se uma aproximação melhor. Apresente os gráficos das aproximações em $t = 2$ e $t = 10$. O que você observa?

7 Considerações finais

Entregue o código fonte e um arquivo pdf com um relatório. Descreva instruções claras para rodar o seu programa, de modo que outra pessoa possa usá-lo. Para a elaboração do texto e dos exemplos, foram consultados os livros *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, de John C. Strikwerda, e *Numerical Analysis of Partial Differential Equations*, de S. H. Lui.