



Uma abordagem estocástica para modelos rápidos-lentos

Lucas Amaral Taylor

Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
(IME-USP)

Dezembro de 2025

Estrutura da apresentação

- ① Motivação
- ② Modelo L80 determinístico
- ③ Introdução à EDEs
- ④ Aproximações estocásticas
- ⑤ Conclusão

Por que estudar atmosfera?

- Segurança
- Economia
- Mudanças climáticas e variabilidade de longo prazo



Figure: Agência Estadual de Notícias do Estado do Paraná (AEN)

Como estudamos modelos atmosféricos?

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z. \end{cases}$$

Parâmetros utilizados: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$.

Condição inicial: $(x_0, y_0, z_0) = (1.0, 1.0, 1.0)$.

Atractor de Lorenz-63

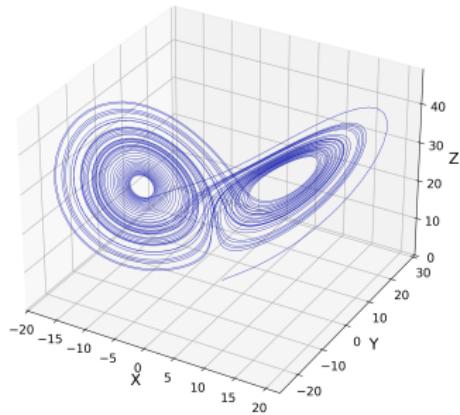


Figure: Modelo Lorenz-63

Motivação

O objetivo deste trabalho é estudar um modelo já consolidado, o Lorenz 80, e apresentar uma nova abordagem que preserve suas propriedades essenciais.

O que nos leva a estudar isso?

O modelo Lorenz 80

- O modelo Lorenz-80 é um modelo de baixa ordem que representa a interação entre ondas de Rossby (lentas, quasi-geostróficas) e ondas de gravidade (rápidas) na atmosfera.
- Trata-se de uma truncagem das equações de água-rasas válida para estudos em latitudes médias ($30\text{--}60^\circ$).

Diagrama do modelo de águas rasas adaptado

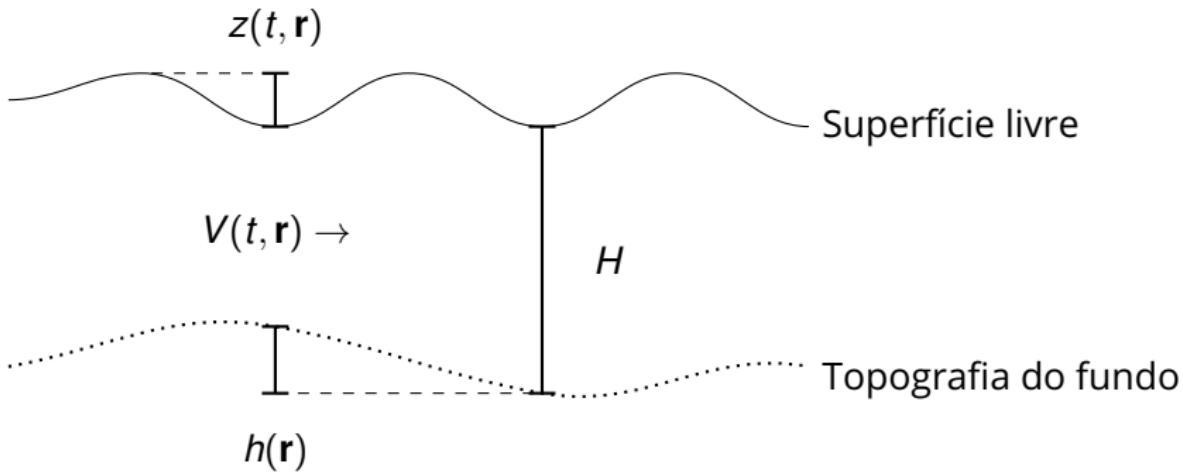


Figure: Diagrama do modelo de água-rasa adaptado

Modelo de água-rasa adaptado

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} - g \nabla z + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)(z - h) - (H + z - h)\nabla \cdot V + \kappa \nabla^2 z + F \quad (2)$$

Onde:

- H : profundidade média do fluido;
 - $h(\mathbf{r})$: variação da superfície topológica;
 - $V(t, \mathbf{r})$: velocidade horizontal;
 - $z(t, \mathbf{r})$: altura da superfície;
 - F : forças externas;
 - κ : coeficiente de difusão viscosa;
 - ν : coeficiente de difusão térmica;

Construção do modelo PE

Aplicando a *decomposição de Helmholtz* à equação (1), escrevemos

$$\mathbf{V} = \nabla\chi + \mathbf{k} \times \nabla\psi.$$

$\nabla\chi$ representa a parte divergente do escoamento, enquanto $\mathbf{k} \times \nabla\psi$ corresponde à parte rotacional

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 (\nabla\chi \cdot \nabla\chi) - \nabla\chi \cdot \nabla(\nabla^2\psi) \times \mathbf{k} + \nabla^2(\nabla\chi \cdot \nabla\psi \times \mathbf{k}) \\ &\quad + \nabla \cdot (\nabla^2\psi \nabla\psi) - \frac{1}{2} \nabla^2(\nabla\psi \cdot \nabla\psi) + \nu \nabla^4\chi + f \nabla^2\psi - g \nabla^2z, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla^2\psi \nabla\chi) - \nabla\psi \cdot \nabla(\nabla^2\psi) \times \mathbf{k} - f \nabla^2\chi + \nu \nabla^4\psi. \quad (4)$$

Construção do modelo PE

Analogamente, aplicando (2), temos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot [(z - h)\nabla \chi] - \nabla \psi \cdot \nabla(z - h) \times \mathbf{k} - H\nabla^2 \chi + \kappa \nabla^2 z + F. \quad (5)$$

A partir de agora, objetivo é reduzir as equações (3)–(5) a um modelo de baixa ordem

Construção do modelo PE

Introduzimos três vetores adimensionais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que satisfazem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

e adotamos as permutações cíclicas:

$$(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2).$$

Além disso, definimos:

$$\begin{cases} a_i &= \alpha_i \cdot \alpha_i \\ b_i &= \frac{1}{2}(a_i - a_j - a_k) \\ c_i &= c \end{cases}$$

Construção do modelo PE

Escolhido um comprimento característico L , definimos:

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \cos\left(\frac{\alpha_i \cdot \mathbf{r}}{L}\right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Obs.: as funções ϕ_i são modos de Fourier (cossenos). Essas funções satisfazem:

$$L^2 \nabla^2 \phi_i = -a_i \phi_i, \quad L^2 \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_k = -\frac{1}{2} b_{ik} \phi_i + \dots$$

Expandimos as variáveis nesses três modos e introduzimos escalas adimensionais:

$$\begin{aligned} t &= f^{-1} \tau, & \chi &= 2L^2 f^2 \sum_{i=1}^3 x_i \phi_i, \\ \psi &= 2L^2 f^2 \sum_{i=1}^3 y_i \phi_i, & z &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_{i=1}^3 z_i \phi_i, \\ h &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_{i=1}^3 h_i \phi_i, & F &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_{i=1}^3 F_i \phi_i. \end{aligned} \tag{6}$$

Construção do modelo PE

Substituindo as equações do *slide* anterior em (3)–(5), e projetando sobre a base $\{\phi_i\}$, obtemos finalmente o modelo PE de baixa ordem, composto de nove equações diferenciais ordinárias:

$$a_i \frac{dx_i}{d\tau} = a_i b_i x_i x_k - c(a_i - a_k) x_i y_k + c(a_i - a_j) y_i x_k - 2c^2 y_i y_k - \nu_0 a_i^2 x_i + a_i y_i - a_i z_i, \quad (7)$$

$$a_i \frac{dy_i}{d\tau} = -a_i b_k x_i y_k - a_i b_i y_i x_k + c(a_k - a_i) y_i y_k - a_i x_i - \nu_0 a_i^2 y_i, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{d\tau} = & -b_k x_i (z_k - h_k) - b_i (z_i - h_i) x_k + c y_i (z_k - h_k) - c(z_i - h_i) y_k + g_0 a_i x_i \\ & - \kappa_0 a_i z_i + F_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Construção do modelo QG

- Partimos das equações do modelo PE. Desprezamos todos os **termos não lineares** e os termos que envolvem as variáveis x (incluindo suas derivadas temporais) em (7).
- Aplicamos o mesmo procedimento a (8) e (9), removendo:
 - termos não lineares, e
 - termos topográficos dependentes de x .
- Com essas aproximações, eliminamos as variáveis x_i e z_i , restando apenas a dinâmica das componentes y_i .

$$(a_i g_0 + 1) \frac{dy_i}{d\tau} = g_0 c(a_k - a_j) y_j y_k - a_i (a_i g_0 \nu_0 + \kappa_0) y_i - c h_k y_j + c h_j y_k + F_i.$$

Construção do modelo BE

- O modelo BE é obtido a partir de **truncamentos** das equações de vorticidade e divergência. O truncamento é expresso por:

$$a_i y_i - 2c^2 y_j y_k = a_i z_i.$$

Aplicando às equações do modelo PE e organizando algebricamente, introduzimos a função $\Phi(\mathbf{y})$ para obter uma forma compacta:

$$a_i \frac{dy_i}{d\tau} = -a_k b_k \Phi_j(\mathbf{y}) y_k - a_j b_j y_j \Phi_k(\mathbf{y}) + c(a_k - a_j) y_j y_k - a_i \Phi_i(\mathbf{y}) - \nu_0 a_i^2 y_i.$$

Simulação

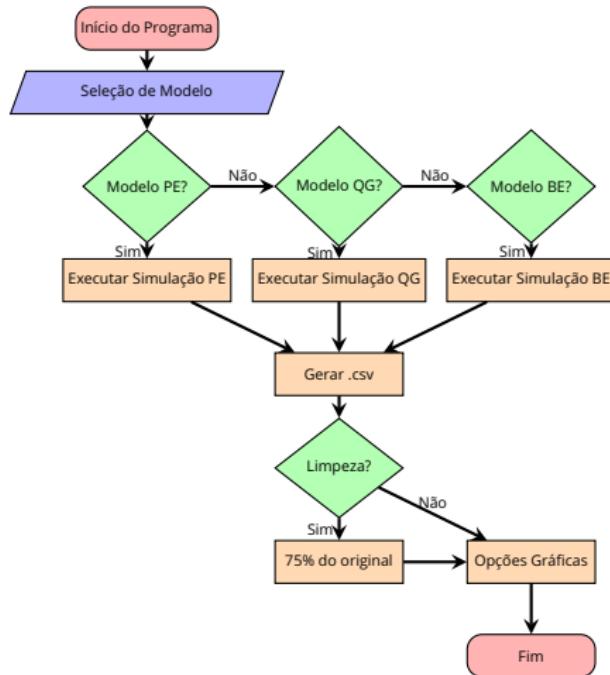


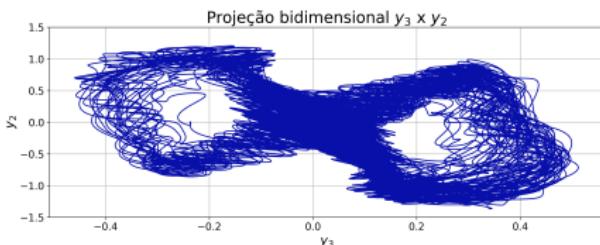
Figure: Fluxograma do Processo de Simulação

Simulação: Publicação no *Github*

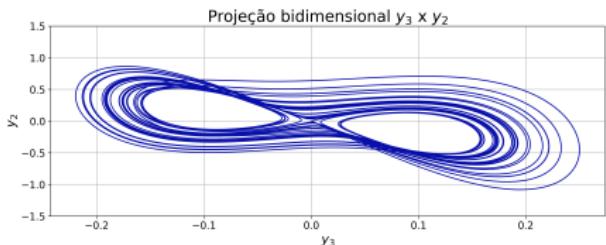


Simulação: Modelos PE, QG e BE — Projeção (y_3 , y_2)

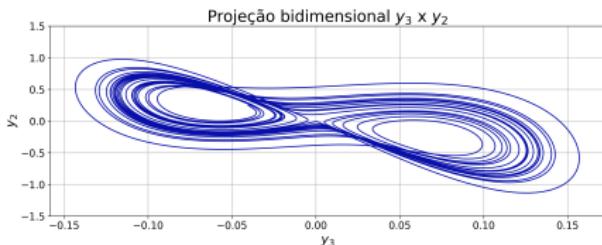
Usando as condições de Hardley como condição inicial, obtivemos:



(a) Modelo PE

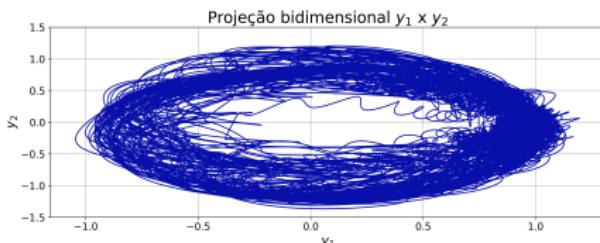


(b) Modelo QG

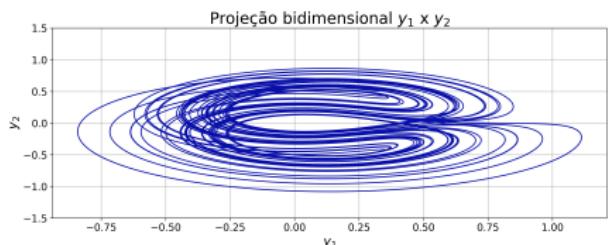


(c) Modelo BE

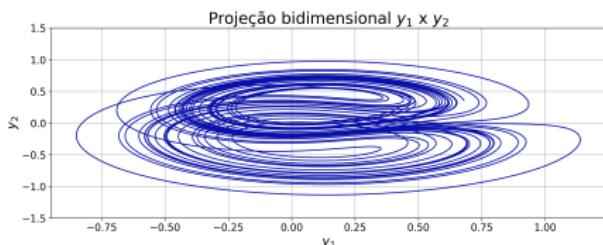
Simulação: Modelos PE, QG e BE — Projeção (y_1, y_2)



(a) Modelo PE

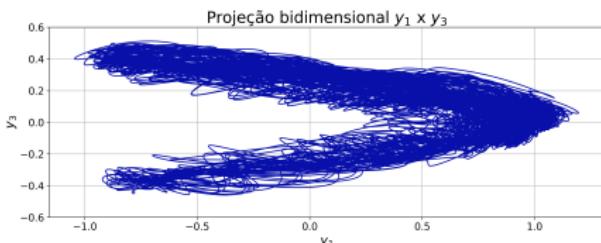


(b) Modelo QG

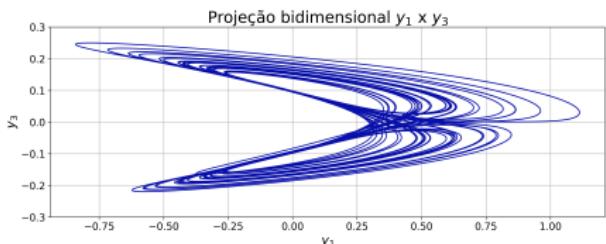


(c) Modelo BE

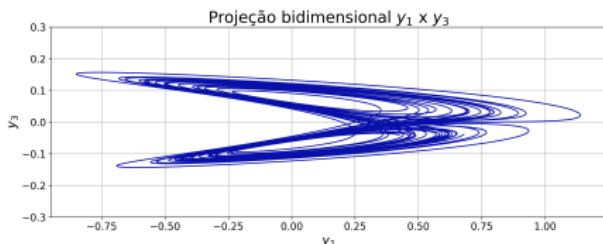
Simulação: Modelos PE, QG e BE — Projeção (y_1, y_3)



(a) Modelo PE



(b) Modelo QG



(c) Modelo BE

Lorenz BE-SLO: Simulação e comparação

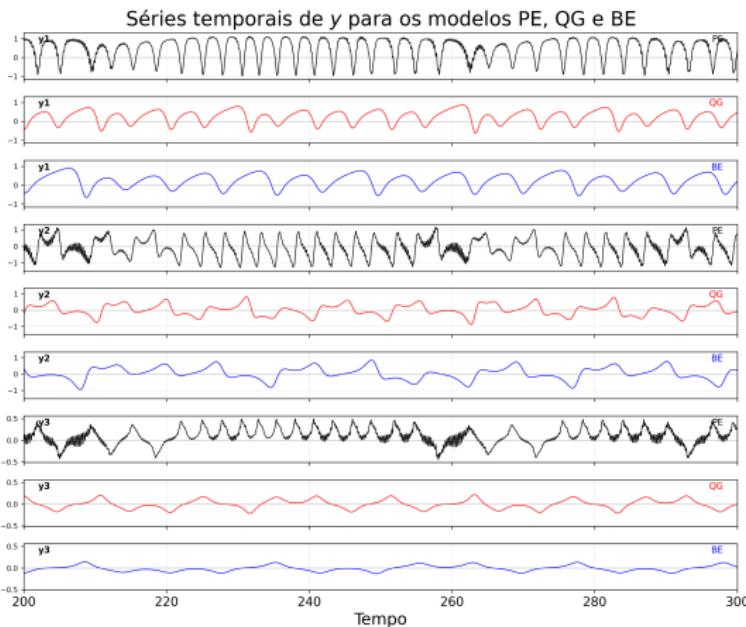


Figure: Comparação das séries temporais de y para os modelos PE, QG e BE

Motivação

Tomemos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = x_0, \end{cases} \quad (10)$$

Uma vez conhecida a condição inicial, a trajetória do sistema é totalmente determinada, conforme garante o Teorema de Existência e Unicidade

Pergunta: Como expressar um fenômeno sujeito a incertezas?

Equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))dW_t \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (11)$$

- **Variável aleatória:** $X(t) \in \mathbb{R}^d$;
 - **Termo de drift:** $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$;
 - **Termo de difusão:** $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d \times m}$;
 - **Ruído branco**¹: $dW_t \in \mathbb{R}^m$

¹Formalmente, a derivada do movimento Browniano

Exemplo real



Figure: Evolução do valor de mercado da PETR4²

²Retirado do site investidor10.com.br em 08/12/2025

Usando uma EDE para expressar a evolução do preço de uma ação

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \\ S(0) = s_0, \end{cases} \quad S(t) = s_0 \cdot \exp \left(\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right).$$

onde μ representa a taxa de crescimento e σ quantifica a volatilidade do mercado

Simulação em *Julia*

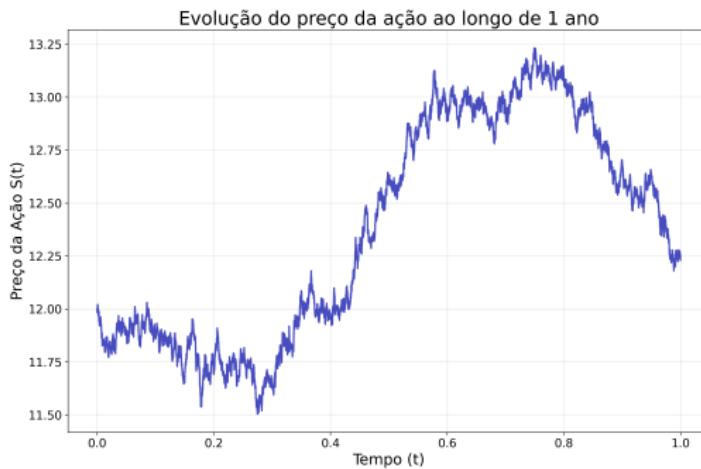


Figure: Simulação do valor de mercado uma ação com $\mu = 0.05$, $\sigma = 1.0$ e $S_0 = 12$

Fast chaotic noise: Apresentação do modelo

O exemplo a seguir, intitulado *Fast Chaotic Noise*, foi retirado de (Pavliotis and Stuart 2008) e é descrito pelo sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - x^3 + \frac{\lambda}{\varepsilon} y_2, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{10}{\varepsilon^2} (y_2 - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon^2} (28y_1 - y_2 - y_1 y_3), \\ \frac{dy_3}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon^2} (y_1 y_2 - \frac{8}{3} y_3).\end{aligned}\tag{12}$$

Fast chaotic noise: Propriedades do modelo

- $y^T = (y_1, y_2, y_3)$ segue o modelo de Lorenz-63.
- O fluxo Lorenz-63 é ergódico e sua medida SRB fornece as estatísticas no atrator (de volume zero).
- Pela centralização de (Pavliotis and Stuart 2008), o componente y_2 tem média zero.
- No limite $\varepsilon \rightarrow 0$, a dinâmica rápida induz ruído efetivo em x .

Fast chaotic noise: Aproximação estocástica

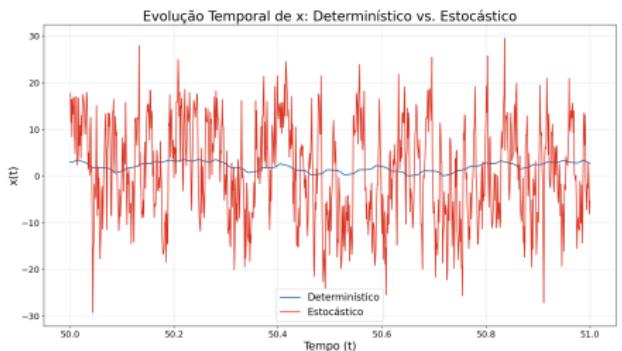
A partir dos fatos do *slide* anterior, temos:

$$dX_t = (X_t - X_t^3)dt + \sigma W_t, \quad (13)$$

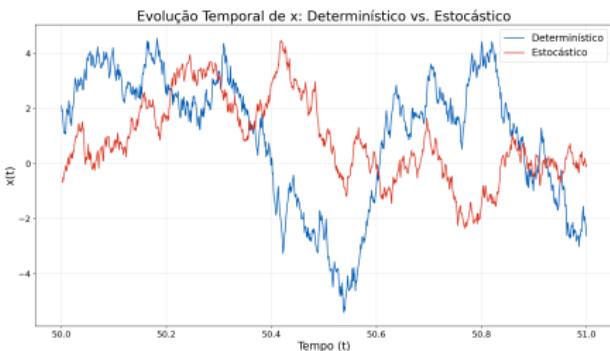
onde,

$$\sigma^2 = 2\lambda^2 \int_0^\infty \text{Cov}(y_2(0), y_2(s)) ds, \quad (14)$$

Fast chaotic noise: Comparação de série temporal

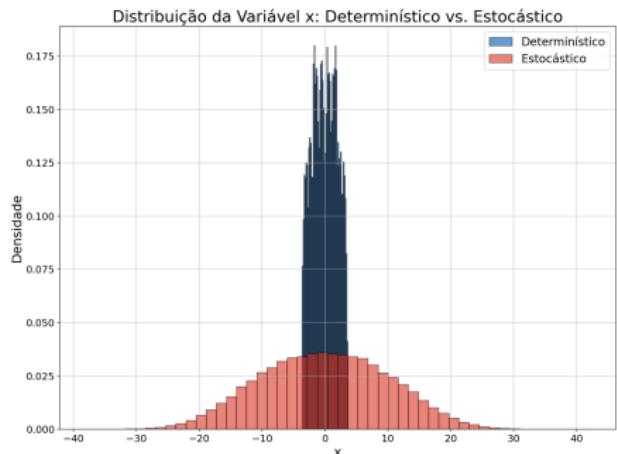


(a) Série temporal com $\varepsilon = 0.2$

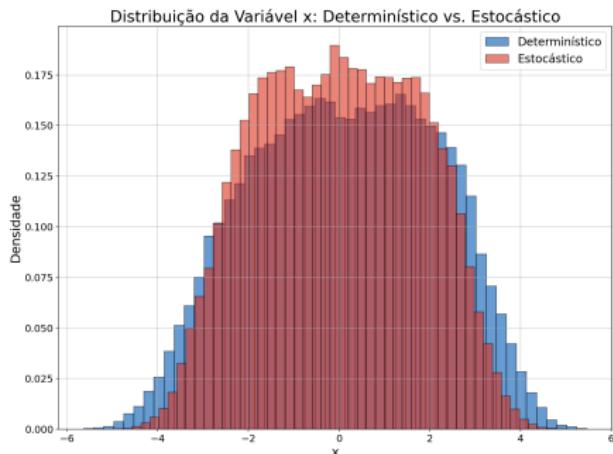


(b) Série temporal com $\varepsilon = 0.01$

Fast chaotic noise: Comparação de histogramas



(a) Histograma com $\varepsilon = 0.2$



(b) Histograma com $\epsilon = 0.01$

Lorenz 80 BE-SLO: Variedade

- Sistemas atmosféricos possuem variáveis com escalas rápidas (ondas de gravidade) e lentas (ondas de Rossby).
- Para equilibrar essas escalas, utiliza-se uma **variedade**: espaço onde o balanço rápido-lento é mantido.
- (Leith 1980) introduz o *slow manifold*, que filtra oscilações rápidas e aproxima o sistema ao regime QG.

Lorenz BE-SLO: *Optimal Parameterizing Manifold (OPM)*

- Considera-se uma medida invariante ergódica μ e a decomposição $E = E_c \oplus E_s$, onde E_c descreve as variáveis lentas e E_s as rápidas.
- O OPM é definido como a aplicação $\Psi : E_c \rightarrow E_s$ que melhor aproxima as variáveis rápidas no sentido quadrático:

$$\Psi^* = \arg \min_{\Psi} \int \|Y - \Psi(X)\|^2 d\mu, \quad \textbf{Tem solução única!}$$

- Em termos probabilísticos:

$$\Psi^*(X) = \mathbb{E}[Y | X],$$

isto é, o OPM fornece a melhor estimativa das rápidas condicionadas às lentas.

- BE \approx OPM (Chekroun, Liu, and McWilliams 2017).

Ressonâncias de Ruelle-Pollicott

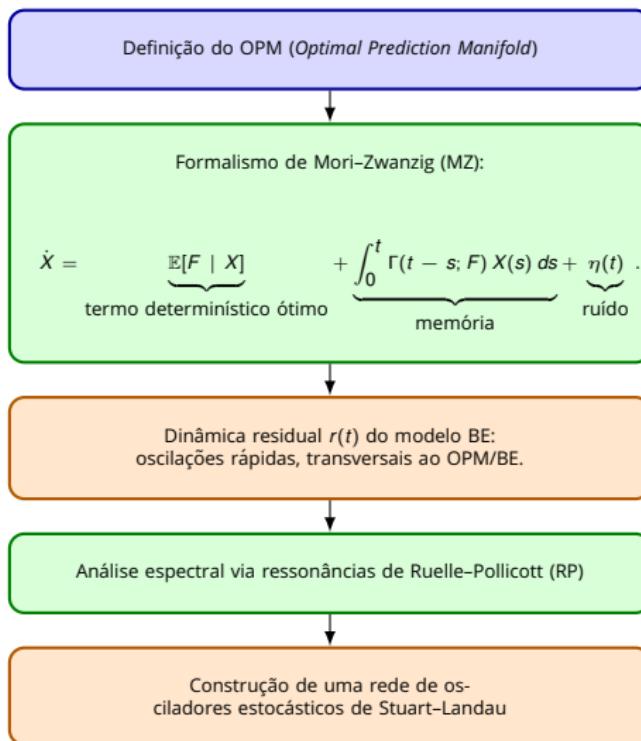
- As **ressonâncias de Ruelle-Pollicott (RP)** descrevem as taxas de decaimento e as frequências dos modos oscilatórios de um sistema dinâmico.
- Cada ressonância complexa fornece:
 - a **frequência** do modo, e
 - sua **taxa de amortecimento**.
- As RP permitem caracterizar a estrutura espectral da dinâmica, identificando escalas temporais e padrões de oscilação.

Lorenz BE-SLO: Oscilações de Stuart–Landau

- As oscilações estocásticas de Stuart–Landau são utilizadas em (Chekroun, Liu, and McWilliams 2021) para a geração do ruído.
- Inicialmente, considera-se a forma determinística das equações de Stuart–Landau, válida próximo a uma **bifurcação de Hopf**.
- Para modelar os efeitos de variabilidade não resolvida, introduzimos um termo estocástico, obtendo a versão estocástica do sistema.
- A equação de Stuart–Landau estocástica é dada por:

$$\frac{dz}{dt} = (\alpha + i\omega)z - \beta z|z|^2 + \sigma \frac{dW}{dt}.$$

Lorenz BE-SLO: Construção do modelo



Lorenz BE-SLO: Construção do modelo

Os termos $\eta(t)$ modelam o efeito das componentes rápidas do sistema por meio de uma rede de osciladores estocásticos de Stuart–Landau:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= (\alpha_1 + i\omega_1)\eta_1 - \beta_1\eta_1|\eta_1|^2 + \sum_{j \neq 1} c_{1j}\eta_j + \sum_{j=1}^3 Q_{1j} \dot{W}_t^j, \\ \dot{\eta}_2 &= (\alpha_2 + i\omega_1)\eta_2 - \beta_2\eta_2|\eta_2|^2 + \sum_{j \neq 2} c_{2j}\eta_j + \sum_{j=1}^3 Q_{2j} \dot{W}_t^j, \\ \dot{\eta}_3 &= (\alpha_3 + i\omega_2)\eta_3 - \beta_3\eta_3|\eta_3|^2 + \sum_{j \neq 3} c_{3j}\eta_j + \sum_{j=1}^3 Q_{3j} \dot{W}_t^j.\end{aligned}$$

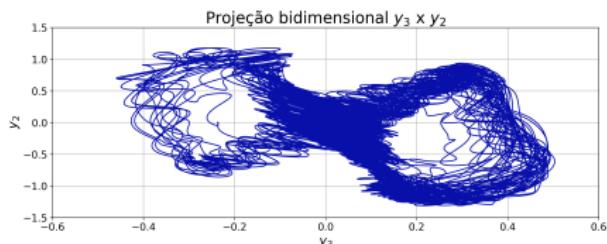
Os parâmetros são ajustados por regressão, e a matriz Q é escolhida de modo que QQ^\top reproduza a covariância do ruído.

Lorenz BE-SLO: Construção do modelo

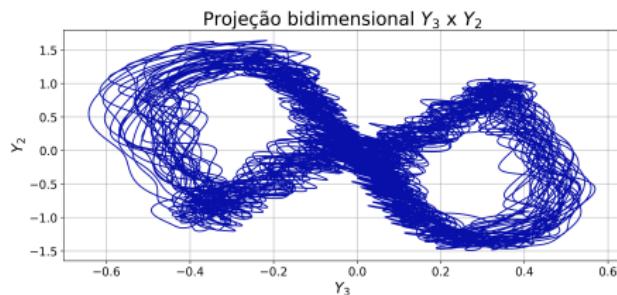
Com os ruídos definidos, podemos expressar o sistema BE-SLO como:

$$\begin{aligned}\frac{dY_i}{dt} = & -a_i^{-1} a_k b_k [\Phi_j(\mathbf{Y}) + \Re \eta_j(t)] Y_k \\ & - a_i^{-1} a_j b_j Y_j [\Phi_k(\mathbf{Y}) + \Re \eta_k(t)] \\ & + c a_i^{-1} (a_k - a_j) Y_j Y_k - [\Phi_i(\mathbf{Y}) + \Re \eta_i(t)] - \nu_0 a_i Y_i,\end{aligned}$$

Lorenz BE-SLO: Simulação e comparação



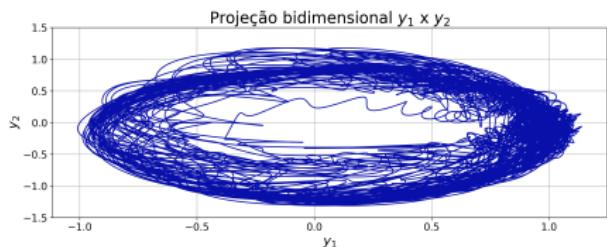
(a) Modelo PE



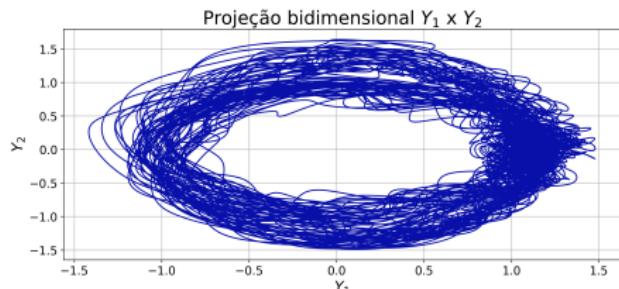
(b) Modelo BE-SLO

Figure: Comparação das projeções dos modelos PE e BE-SLO no plano (y_3, y_2)

Lorenz BE-SLO: Simulação e comparação



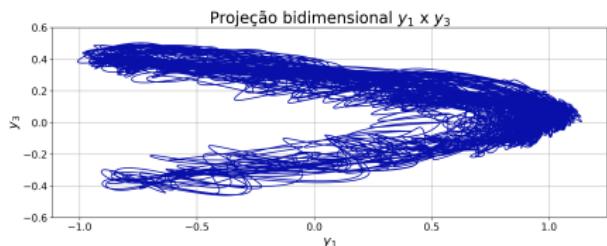
(c) PE: projeção no plano (y_1, y_2) .



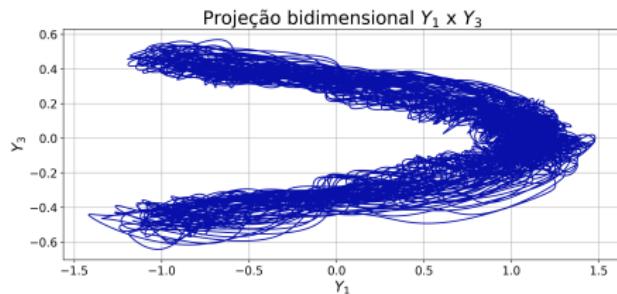
(d) BE-SLO: projeção no plano (y_1, y_2) .

Figure: Comparação das projeções dos modelos PE e BE-SLO no plano (y_1, y_2)

Lorenz BE-SLO: Simulação e comparação



(e) PE: projeção no plano (y_1, y_3) :



(f) BE-SLO: projeção no plano (y_1, y_3) .

Figure: Comparação das projeções dos modelos PE e BE-SLO no plano (y_1, y_3)

Lorenz BE-SLO: Simulação e comparação

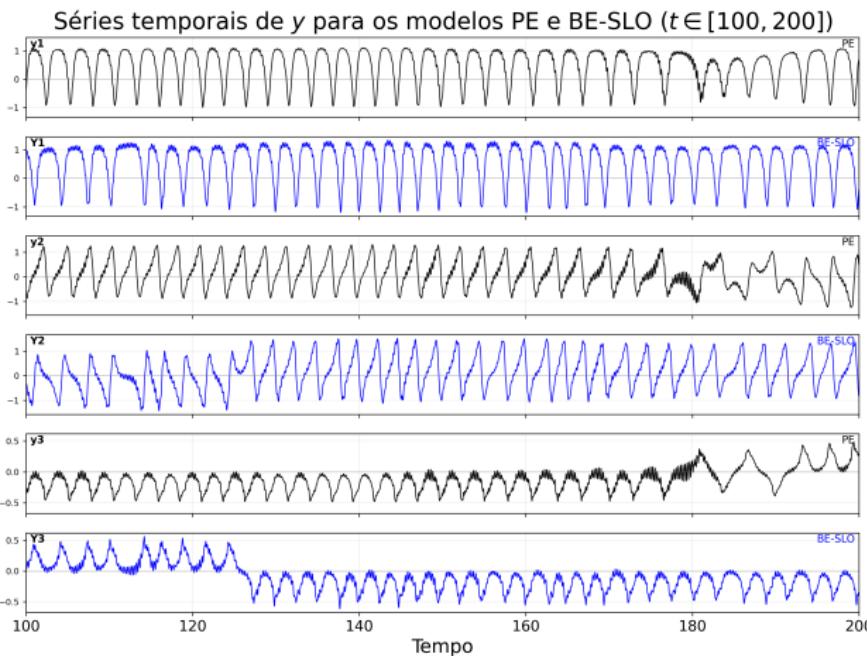


Figure: Comparação das séries temporais de y para os modelos PE e BE-SLO

Principais Referências

-  Chekroun, Mickaël D., Honghu Liu, and James C. McWilliams (June 2017). "The emergence of fast oscillations in a reduced primitive equation model and its implications for closure theories". In: *Computers & Fluids* 151, pp. 3–22.
 -  — (Nov. 2021). "Stochastic rectification of fast oscillations on slow manifold closures". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 118.48.
 -  Leith, C. E. (May 1980). "Nonlinear Normal Mode Initialization and Quasi-Geostrophic Theory". In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 37.5, pp. 958–968. ISSN: 1520-0469.
 -  Lorenz, Edward N. (Aug. 1980). "Attractor Sets and Quasi-Geostrophic Equilibrium". In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 37.8, pp. 1685–1699.
 -  Pavliotis, Grigoris A. and Andrew Stuart (2008). *Multiscale Methods: Averaging and Homogenization*. Springer New York.

Fim da apresentação!