

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
BACHARELADO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL  
COM HABILITAÇÃO EM MÉTODOS MATEMÁTICOS

**Uma abordagem estocástica para modelos  
rápidos-lentos**

Lucas Amaral Taylor

MONOGRAFIA FINAL  
MAP 2429 — TRABALHO DE  
FORMATURA EM MATEMÁTICA APLICADA

Supervisor: Prof. Dr. Breno Raphaldini Ferreira da Silva

São Paulo  
2025

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0  
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

*Na verdade, na verdade vos digo que, se o  
grão de trigo, caindo na terra, não morrer,  
fica ele só; mas se morrer, dá muito fruto.*

*João 12:24*



[illegible]



# Resumo

Lucas Amaral Taylor. **Uma abordagem estocástica para modelos rápidos-lentos.**  
Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

escrever

**Palavras-chave:** Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.





# Abstract

Lucas Amaral Taylor. **A stochastic approach to fast-slow models**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

escrever

**Keywords:** Keyword1. Keyword2. Keyword3.



## Lista de figuras

1.1	Diagrama do modelo de água-rasa adaptado . . . . .	6
1.2	Evolução temporal das variáveis $x_1$ , $y_1$ e $z_1$ para $f_1 = 0.1$ . À esquerda, simulação curta (1 dia). À direita, simulação longa (50 dias). . . . .	11
1.3	Projeções do modelo L80 para $f_1 = 0.3027$ . . . . .	12
2.1	Evolução temporal das variáveis $x_1$ , $y_1$ e $z_1$ para $f_1 = 0.1$ . À esquerda, simulação curta (1 dia). À direita, simulação longa (50 dias). . . . .	17
2.2	Histogramas e comparações das simulações para $f_1 = 0.1$ . Acima, histogramas individuais: à esquerda, simulação curta (1 dia); à direita, simulação longa (50 dias). Em destaque (abaixo), a sobreposição das densidades. . .	18

## Lista de tabelas



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 O modelo de Lorenz 80 determinístico</b>	<b>3</b>
1.1 Introdução . . . . .	3
1.2 Breves considerações sobre geofísica . . . . .	3
1.3 Apresentação do modelo . . . . .	4
1.4 O modelo de água-rasa . . . . .	5
1.5 Construção dos modelos . . . . .	6
1.6 Comparação entre os modelos . . . . .	9
1.7 Simulações . . . . .	10
1.7.1 Parâmetros . . . . .	10
1.7.2 Evolução das variáveis de índice 1 . . . . .	11
1.7.3 Projeções bidimensionais . . . . .	11
<b>2 Introdução às equações diferenciais estocásticas</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	13
2.2 Motivação . . . . .	13
2.3 Considerações estatísticas . . . . .	14
2.4 Equações diferenciais estocásticas . . . . .	14
2.4.1 Processo de Wiener . . . . .	14
2.4.2 Integral estocástica . . . . .	16
2.4.3 Existência e unicidade das soluções . . . . .	16
2.5 Exemplo . . . . .	16
<b>3 Formalismo Mori-Zwanzig</b>	<b>19</b>
3.1 Introdução . . . . .	19
3.2 Motivação . . . . .	19
3.3 Preliminares . . . . .	20

3.3.1	Convertendo sistemas de EDO não lineares como sistemas de EDPs lineares . . . . .	20
3.3.2	Notação de semigrupo . . . . .	20
3.3.3	Polinômios Hermitianos . . . . .	22
3.4	Mori-Zwanzig . . . . .	22
3.4.1	Construção . . . . .	22
3.4.2	Análise termo a termo . . . . .	24
<b>A</b>	<b>Programas</b>	<b>27</b>
A.1	Código do modelo Lorenz 80 determinístico . . . . .	27
A.2	Exemplo do capítulo 02 . . . . .	29
<b>B</b>	<b>Considerações matemáticas</b>	<b>33</b>
B.1	Decomposição de Helmholtz . . . . .	33
	<b>Referências</b>	<b>35</b>
	<b>Índice remissivo</b>	<b>37</b>

# Introdução

Lorem





# Capítulo 1

## O modelo de Lorenz 80 determinístico

### 1.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar o modelo determinístico Lorenz 80. Para isso, começamos, na seção 1.2, com uma introdução aos conceitos básicos de geofísica, a fim de familiarizar o leitor com os fundamentos dessa área. Em seguida, na seção 1.3, contextualizamos o modelo, discutindo os trabalhos que o precederam e as motivações por trás de sua formulação.

Na seção 1.4, introduzimos o modelo de água rasa, que serve de base para o desenvolvimento do Lorenz 80. A construção deste é detalhada na seção 1.5. Por fim, a seção 1.7 traz simulações computacionais realizadas com o modelo, acompanhadas de uma análise gráfica dos resultados.

### 1.2 Breves considerações sobre geofísica

Nesta seção, reunimos um breve glossário com os principais conceitos de geofísica que servem de base para a compreensão do modelo de Lorenz 80. Todas as definições expostas abaixo estão detalhadas em [VALLIS \(2017\)](#).

- **Convecção.** Convecção é um processo de transferência de calor que ocorre em fluidos, como líquidos e gases. Esse fenômeno envolve o movimento do próprio fluido e a transferência energia térmica de uma região para outra.
- **Parâmetro de Coriolis.** A *força de Coriolis* é uma quasi-força (ou pseudo-força) que surge devido à rotação da Terra. Quando analisamos o movimento de um corpo em um referencial rotativo, esse corpo parece sofrer a ação de uma força que desvia sua trajetória. Esse desvio é quantificado pelo parâmetro de Coriolis, definido pela expressão:

$$f = 2\Omega \sin(\theta)$$

onde  $\Omega$  representa a velocidade angular de rotação da Terra e  $\theta$  é a latitude, ou seja, o ângulo entre a posição do ponto e o equador terrestre.

- **Número de Rossby.** O número de Rossby é a razão entre a magnitude da aceleração relativa e a aceleração de Coriolis. É aproximado por:

$$Ro \equiv \frac{U}{fL},$$

onde  $U$  é a magnitude aproximada da velocidade horizontal e  $L$  é uma escala de comprimento e  $f$  é o parâmetro de Coriolis.

- **Equilíbrio hidrostático.** Matematicamente, a equação do equilíbrio hidrostático é dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g, \quad (1.1)$$

onde:  $p$  é a pressão do fluido,  $z$  é a coordenada vertical,  $\rho_0$  é a densidade constante do fluido e  $g$  é a aceleração da gravidade.

- **Conservação de massa.** Em um escoamento de fluido, a densidade pode variar de acordo com o tempo ou a posição. No entanto, a *quantidade total de massa* do fluido permanece constante. Esse princípio estabelece que a massa não pode ser criada nem perdida durante o movimento.
- **Equações quasi-geostróficas.** As equações quasi-geostróficas são equações amplamente usadas em estudos teóricos da atmosfera e oceano. Elas atendem as seguintes características:
  1. O número de Rossby é pequeno;
  2. A escala do movimento não é significativamente maior do que a escala de deformação;
  3. As variações no parâmetro de Coriolis são pequenas;
  4. As escalas de tempo são advectivas, ou seja,  $T = L/U$ .
- **Condições de Hardley.** circulação de Hadley é um padrão atmosférico típico da região entre o Trópico de Câncer e o Trópico de Capricórnio. Nessa faixa tropical, o ar quente sobe próximo ao equador, se desloca em altitude para latitudes maiores e desce, formando um ciclo convectivo. As condições que regem este sistema, será utilizado em nossa simulação como as condições ideais da atmosfera, referida como “condições de Hardley”.

### 1.3 Apresentação do modelo

Edward Norton Lorenz (1917-2008) foi um importante matemático e meteorologista responsável pela publicação de vários artigos com desenvolvimento de modelos na área de meteorologia e geofísica.

O mais famoso deles foi o artigo “*Deterministic Nonperiodic Flow*”, publicado em 1963 [E. N. LORENZ \(1963\)](#). Nele, Lorenz desenvolveu um modelo matemático simplificado para a convecção atmosférica, composto por três equações diferenciais ordinárias, expressas abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (1.2)$$

onde  $\sigma$  é o *número de Prandtl*, que regula a sensibilidade entre  $x$  e  $y$ ;  $\rho$  é o *número de Rayleigh*, associado à magnitude da convecção; e  $\beta$  está ligado à geometria da célula de convecção, influenciando a relação entre as taxas de  $x$  e  $z$ .

O modelo acima, conhecido como Lorenz 63, é um sistema determinístico desenvolvido para representar sistemas hidrodinâmicos ideais e dissipativos de força. O Lorenz 63 tornou-se amplamente conhecido por sua alta sensibilidade às condições iniciais — pequenas alterações nas variáveis  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$  podem levar a trajetórias completamente distintas no espaço de fases. Essa sensibilidade extrema é uma característica caótica do modelo.

Em 1980, Lorenz publica o artigo intitulado “*Attractor Sets and Quasi-Geostrophic Equilibrium*” ([Edward N. LORENZ, 1980](#)). Neste artigo, Lorenz apresenta a construção e a simulação de dois modelos distintos: o primeiro, é formado a partir das equações primitivas (PE) com nove EDOs (equações diferenciais ordinárias), derivado das equações de águas rasas com topografia e forçamento, enquanto o segundo é um modelo quasi-geostrófico (QG) com 3 EDOs, obtido ao descartar as variáveis associadas ao escoamento divergente  $x$  e seus termos correspondentes. O modelo PE contém tanto ondas gravitacionais rápidas quanto oscilações quasi-geostróficas lentas, enquanto o modelo QG mantém apenas estas últimas, em um quadro simplificado para atmosfera de latitudes médias.

## 1.4 O modelo de água-rasa

O modelo de água rasa descreve um fluido de densidade constante, em equilíbrio hidrostático, que pode ou não estar em rotação. Nele, a escala horizontal é significativamente maior que a profundidade. Esse fluido possui superfície livre e é limitado pelas bordas ([VALLIS, 2017](#)). No caso considerado, adotamos a versão de uma única camada.

Para a construção do modelo de água-rasa, consideramos a equação do equilíbrio hidrostático, expressa em (1.1). A partir das manipulações envolvendo os conceitos de momento e conservação de massa, detalhado em [VALLIS \(2017\)](#), obtemos as equações que descrevem o modelo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + f\mathbf{k} \times V &= -g\nabla\eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta V) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Onde:

- $t$ : tempo;
- $\mathbf{r}$ : vetor de posição inicial;
- $V(t)$ : Velocidade horizontal;
- $\eta(t)$ : altura da superfície;
- $\mathbf{k}$ : vetor da vertical.

## 1.5 Construção dos modelos

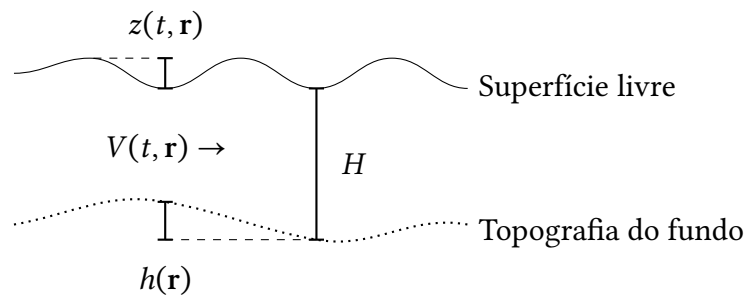
Nesta seção, apresentaremos a construção dos modelos apresentados no artigo [Edward N. LORENZ \(1980\)](#). Como dito anteriormente, o modelo é construído a partir das equações de água-rasa com algumas particularidades descritas a seguir.

Consideremos um fluido homogêneo e incompressível, ou seja, com densidade constante em todo o volume e volume invariável mesmo sob variações de pressão. O escoamento é predominantemente horizontal, descrito por uma velocidade  $V(t, \mathbf{r})$  independente da altura, onde  $\mathbf{r}$  representa o vetor de posição inicial.

A componente vertical da velocidade é determinada pela continuidade de massa. A superfície livre do fluido está localizada na altura  $H + z(t, \mathbf{r})$ , onde  $H$  representa a profundidade média e a base se apoia sobre uma topografia variável  $h(\mathbf{r})$ . Temos também que  $h(\mathbf{r})$  e  $z(t, \mathbf{r})$  possuem média zero.

O sistema está sujeito à rotação planetária, com um parâmetro de Coriolis constante  $f$ . Tanto o campo de velocidades  $V$  quanto a elevação da superfície  $z$  sofrem dissipação difusiva, associada a movimentos de pequena escala: o termo  $\nu$  representa o coeficiente de difusão viscosa (dissipação de momento) e  $\kappa$  representa o coeficiente de difusão térmica. O modelo também inclui um termo de forçamento externo  $F(\mathbf{r})$  e, por fim, adota-se a hipótese de equilíbrio hidrostático.

A partir da descrição acima, podemos construir o seguinte diagrama:



**Figura 1.1:** Diagrama do modelo de água-rasa adaptado

Além disso, o modelo de água-rasa adaptado é expresso por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)V - f\mathbf{k} \times V - g\nabla z + \nu \nabla^2 V \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)(z - h) - (H + z - h)\nabla \cdot V + \kappa \nabla^2 z + F \quad (1.5)$$

Onde:

- $H$ : profundidade média do fluido;
- $h(\mathbf{r})$ : variação da superfície topológica;
- $V(t, \mathbf{r})$ : Velocidade horizontal;
- $z(t, \mathbf{r})$ : altura da superfície;
- $F$ : forças externas;
- $\kappa$ : coeficiente de difusão viscosa;
- $\nu$ : coeficiente de difusão térmica;

Em seguida, aplicamos a *decomposição de Helmholtz*<sup>1</sup> à equação (1.4), escrevendo

$$V = \nabla \chi + \mathbf{k} \times \nabla \psi,$$

onde  $\chi$  é o potencial de velocidade associado à parte divergente e  $\psi$  a função corrente associada à parte rotacional. Dessa forma,  $\nabla^2 \chi$  representa a divergência e  $\nabla^2 \psi$  a vorticidade. Substituindo essa decomposição obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \nabla^2 (\nabla \chi \cdot \nabla \chi) - \nabla \chi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) \times \mathbf{k} + \nabla^2 (\nabla \chi \cdot \nabla \psi \times \mathbf{k}) \\ & + \nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla \psi) - \frac{1}{2} \nabla^2 (\nabla \psi \cdot \nabla \psi) + \nu \nabla^4 \chi + f \nabla^2 \psi - g \nabla^2 z, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla \chi) - \nabla \psi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) \times \mathbf{k} - f \nabla^2 \chi + \nu \nabla^4 \psi. \quad (1.7)$$

Analogamente, aplicando (1.5), temos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot [(z - h) \nabla \chi] - \nabla \psi \cdot \nabla (z - h) \times \mathbf{k} - H \nabla^2 \chi + \kappa \nabla^2 z + F. \quad (1.8)$$

Nosso objetivo é reduzir as equações (1.6)–(1.8) a um modelo de baixa ordem. Para isso, introduzimos três vetores adimensionais  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  que satisfazem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

e adotamos as permutações cíclicas

$$(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2).$$

<sup>1</sup> Definição apresentada no apêndice B

Definimos então:

$$a_i = \alpha_i \cdot \alpha_i, \quad b_i = \alpha_j \cdot \alpha_k, \quad c = (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)^{1/2}.$$

Lorenz também apresenta uma forma alternativa, equivalente, mais conveniente para a implementação computacional:

$$b_i = \frac{1}{2}(a_i - a_j - a_k), \quad c_i = c.$$

Escolhido um comprimento característico  $L$ , construímos três funções ortogonais:

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \cos\left(\alpha_i \cdot \frac{\mathbf{r}}{L}\right),$$

para as quais valem, por exemplo:

$$\begin{aligned} L^2 \nabla^2 \phi_i &= -a_i \phi_i, \\ L^2 \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_k &= -\frac{1}{2} b_{ik} \phi_i + \dots, \\ L^2 \nabla \cdot (\phi_j \nabla \phi_k) &= \frac{1}{2} b_{jk} \phi_i + \dots, \\ L^2 \phi_j \cdot \nabla \phi_k \times \mathbf{k} &= -\frac{1}{2} c_{jk} \phi_i + \dots, \end{aligned}$$

onde os termos omitidos são múltiplos de cossenos. Com essas funções, expandimos as variáveis em série e introduzimos escalas adimensionais:

$$\begin{aligned} t &= f^{-1} \tau, \\ \chi &= 2L^2 f^2 \sum_i x_i \phi_i, \\ \psi &= 2L^2 f^2 \sum_i y_i \phi_i, \\ z &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i z_i \phi_i, \\ h &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i h_i \phi_i, \\ F &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i F_i \phi_i. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Substituindo as equações de (1.9) em (1.6)–(1.8), e projetando sobre a base  $\{\phi_i\}$ , obtemos finalmente o modelo PE de baixa ordem, composto de nove equações diferenciais ordinárias:

$$a_i \frac{dx_i}{d\tau} = a_i b_i x_i x_k - c(a_i - a_k) x_i y_k + c(a_i - a_j) y_i x_k - 2c^2 y_i y_k - v_0 a_i^2 x_i + a_i y_i - a_i z_i, \tag{1.10}$$

$$a_i \frac{dy_i}{d\tau} = -a_i b_k x_i y_k - a_i b_i y_i x_k + c(a_k - a_i) y_i y_k - a_i x_i - v_0 a_i^2 y_i, \tag{1.11}$$

$$\frac{dz_i}{d\tau} = -b_k x_i (z_k - h_k) - b_i (z_i - h_i) x_k + c y_i (z_k - h_k) - c(z_i - h_i) y_k + g_0 a_i x_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i. \tag{1.12}$$

As variáveis  $x_i$  representam os modos divergentes do escoamento, associados às ondas de gravidade; as variáveis  $y_i$  correspondem aos modos rotacionais (vorticidade), ligados às oscilações quasi-geostróficas; e as variáveis  $z_i$  funcionam como variáveis auxiliares acopladas ao sistema. Na classificação em relação às variáveis rápidas e lentas, temos que:  $x_i$  corresponde às variáveis lentas, enquanto  $y_i$  e  $z_i$  correspondem às variáveis rápidas.

Na construção do modelo QG, começamos desprezando todos os termos não lineares, assim como aqueles que envolvem as variáveis  $x$ , incluindo a derivada temporal, na equação (1.10). Fazemos o mesmo com os termos não lineares ou topográficos que dependem de  $x$  nas equações (1.11) e (1.12). Por fim, eliminamos as variáveis  $x$  e  $z$ , obtendo ao modelo QG apresentado a seguir:

$$(a_i g_0 + 1) \frac{dy_i}{d\tau} = g_0 c(a_k - a_j) y_j y_k - a_i (a_i g_0 v_0 + \kappa_0) y_i - ch_k y_j + ch_j y_k + F_i, \quad (1.13)$$

## 1.6 Comparação entre os modelos

É importante destacar que, para apresentação, optei por realizar a comparação entre os modelos tomando apenas a base como critério. Nas seções finais do artigo [Edward N. LORENZ, 1980](#), há uma análise detalhada sobre a estrutura do atrator e sua relação com a variedade invariante, incluindo suas propriedades qualitativas.

Primeiro, consideremos um modelo dissipativo forçado genérico:

$$\frac{dw_i}{dt} = \sum_{j,k}^N a_{ijk} w_j w_k - \sum_j^N b_{ij} w_j + c_i. \quad (1.14)$$

Nele, definimos

$$A = \sum_{i,j,k}^N a_{ijk} w_i w_j w_k, \quad B = \sum_{i,j}^N b_{ij} w_i w_j > 0, \quad C = \sum_i^N c_i w_i, \quad R^2 = \sum_i^N w_i^2.$$

O termo  $A$  é um polinômio cúbico que representa as interações não lineares entre as componentes do sistema,  $B$  é um polinômio quadrático que representa a dissipação,  $C$  é um polinômio linear associado ao forçamento externo e  $R$  é a norma euclidiana ao quadrado, representando a energia total. Além disso, definimos  $A_1$  e  $C_1$  como os máximos de  $A$  e  $C$ , e  $B_1$  como o mínimo de  $B$ .

Os modelos analisados em [Edward N. LORENZ \(1980\)](#) devem satisfazer algumas condições. A primeira é a condição de dissipação:

$$B_1^2 - 4A_1C_1 > 0. \quad (1.15)$$

A segunda é uma restrição sobre os coeficientes do sistema,

$$a_{ijk} = 0 \quad \text{se} \quad j = 1 \text{ e } k = i,$$

e, por fim, temos a condição de volume zero: a taxa de variação do volume satisfaz

$$\frac{dV}{dt} = -V \sum_{i=1}^N b_{ii}, \quad (1.16)$$

o que implica que o volume diminui exponencialmente ao longo do tempo devido à dissipação do sistema.

A equação (1.16) mostra que, como  $B$  é positivo definido, o volume  $V$  tende a zero quando o tempo avança. Isso implica que a dinâmica do sistema se restringe progressivamente a regiões de menor volume no espaço de fase. Qualquer superfície inicial  $S$  gera uma sequência  $S_1, S_2, \dots$ , cada uma com volume menor que a anterior, até que, no limite, a sucessão de superfícies converge para um subconjunto de dimensão inferior, caracterizando um atrator dissipativo.

Relacionando esse modelo genérico aos modelos construídos, destacam-se dois casos. No modelo QG, a energia total é aproximadamente conservada pelos termos quadráticos, e a dissipação introduzida pelos processos de difusão atua de modo análogo ao termo dissipativo de (1.14), de forma que o atrator possui volume zero. Já no modelo PE, embora a energia total não seja exatamente conservada, se  $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$  for suficientemente pequeno, a condição (1.15) é satisfeita. Nesse caso, as trajetórias permanecem limitadas e o atrator também apresenta volume zero.

## 1.7 Simulações

Nesta seção, expor os resultados gráficos das simulações do Lorenz 80 determinístico com o objetivo de apresentar ao leitor o comportamento do modelo visualmente, bem como exibir características e propriedades do modelo.

Para as simulações utilizamos a linguagem *Python*, em particular, bibliotecas *scipy*, *numpy* e *pandas*. O código utilizado está no apêndice A.

Apresentaremos dois tipos de simulação: a primeira trata-se da evolução das variáveis  $x_1$ ,  $y_1$  e  $z_1$  em relação ao tempo e a segunda são as projeções bidimensionais das variáveis  $y$ :  $y_3 \times y_2$ ,  $y_1 \times y_3$  e  $y_1 \times y_2$ .

### 1.7.1 Parâmetros

Os parâmetros fixos nos dois tipos de simulação:  $\kappa = \nu = \frac{1}{48}$ ,  $g_0 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_3 = 3$ ,  $h_1 = -1$  e  $h_2 = h_3 = f_2 = f_3 = 0$ .

O único parâmetro que não será igual nas duas simulações será o valor de  $f_1$ . Nas simulações referentes à evolução das variáveis de índice 1, tomamos  $f_1 = 0.1$  e nas projeções bidimensionais, tomamos  $f_1 = 0.3027$ . A escolha de  $f_1$  é uma escolha sensível que muda totalmente o comportamento do sistema, tanto que a escolha de  $f_1$  no modelo Lorenz 80 é tema de alguns artigos científicos posteriores a [Edward N. Lorenz \(1980\)](#).

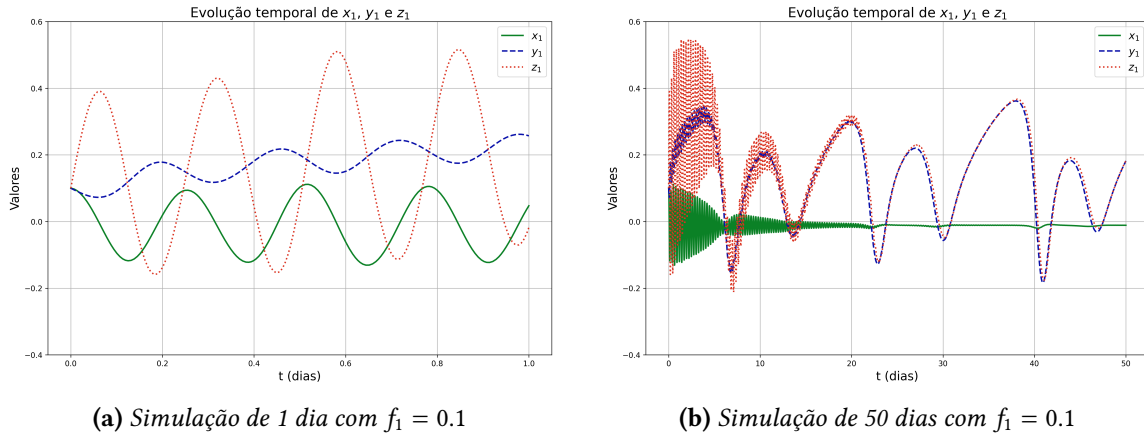


### 1.7.2 Evolução das variáveis de índice 1

Tomamos  $f_1 = 0.1$  e as condições iniciais são:

$$x_i = y_i = z_i = 0.1, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Para tais valores, obtivemos os seguintes resultados:



**Figura 1.2:** Evolução temporal das variáveis  $x_1$ ,  $y_1$  e  $z_1$  para  $f_1 = 0.1$ . À esquerda, simulação curta (1 dia). À direita, simulação longa (50 dias).

Na figura 1.2a, observa-se claramente a diferença no comportamento da variável lenta  $x_1$  em comparação com as variáveis rápidas  $y_1$  e  $z_1$ . A variável  $x_1$  apresenta uma amplitude menor em relação a  $z_1$  e oscila com um período mais longo do que  $y_1$  e  $z_1$ , evidenciando sua natureza lenta. Já a variável  $y_1$  exibe um comportamento intermediário: sua frequência é mais alta que a de  $x_1$ , mas ainda acompanha, em certa medida, a variabilidade de  $z_1$ , o que destaca a separação das escalas de tempo no sistema.

Na figura 1.2b, essa distinção entre variáveis rápidas e lentas se mantém, mas com algumas distinções. A variável  $x_1$  permanece praticamente centrada em zero ao longo de toda a série temporal, com sua amplitude diminuindo progressivamente — um indicativo claro do amortecimento das oscilações gravitacionais. Inicialmente,  $y_1$  e  $z_1$  apresentam amplitudes e períodos distintos; no entanto, com o passar do tempo, a amplitude de  $z_1$  também decresce, e seus períodos tornam-se cada vez mais próximos. No final da simulação, as duas variáveis praticamente oscilam em sincronia. Esse comportamento assintótico revela uma transição para um regime dominado por oscilações quase-geostróficas associadas a  $y_1$ , enquanto os modos gravitacionais representados por  $z_1$  se dissipam gradualmente.

### 1.7.3 Projeções bidimensionais

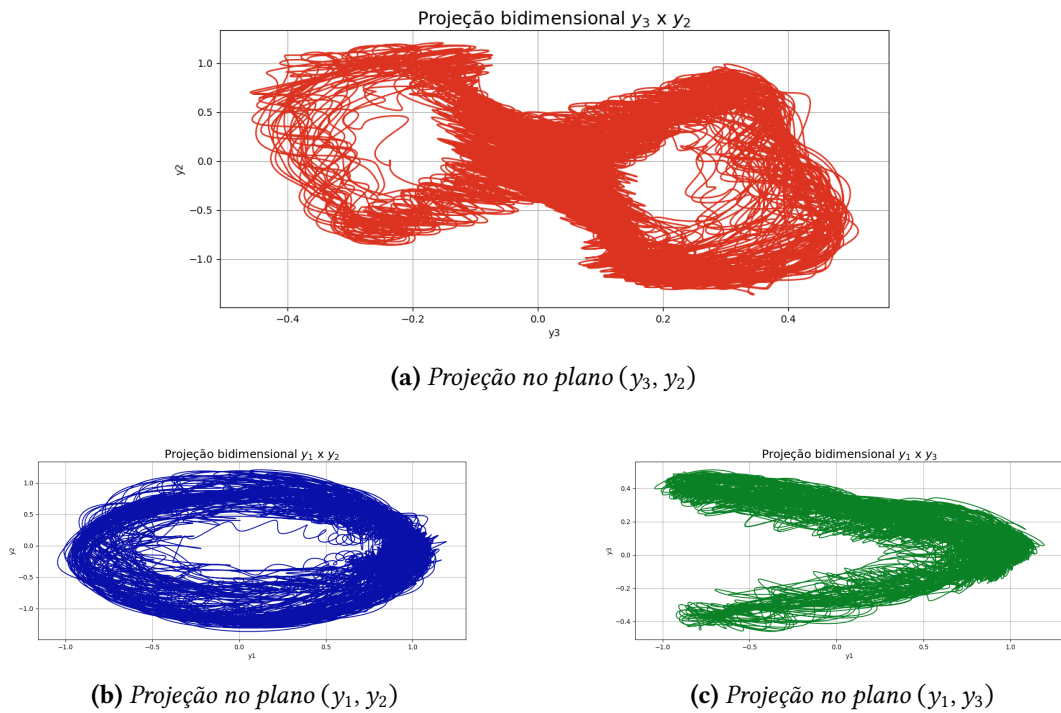
Para as projeções bidimensionais, utilizamos  $f_1 = 0.3027$  e as variáveis iniciais com as condições de Hardley expressas matematicamente abaixo:

$$y_1 = \frac{f_1}{a_1 v_0 \cdot (1 + a_1 g_0)}, \quad x_1 = -v_0 a_1 y_1 \quad \text{e} \quad z_1 = y_1$$

Com pequenas perturbações em  $y_2$  e  $z_2$ :

$$y_2 = -1 \times 10^{-5} \quad \text{e} \quad z_2 = 1 \times 10^{-5},$$

e as demais variáveis foram fixadas em zero. As simulações foram realizadas ao longo de 400 dias, sendo descartados os 10% iniciais dos dados, correspondentes à fase transitória em que o sistema ainda está evoluindo até se ajustar ao formato do atrator. Assim, obtiveram-se os seguintes resultados:



**Figura 1.3:** Projecções do modelo L80 para  $f_1 = 0.3027$ .

O principal objetivo destas simulações projetadas bidimensionalmente é evidenciar o comportamento de atrator caótico característico do sistema. Note que, através da imagem, pode-se evidenciar a aperiodicidade do sistema, junto com o fato de que não há um ponto de convergência quando  $t \rightarrow \infty$ . Além disso, vale ressaltar também que, dado que o sistema é sensível às condições iniciais, especialmente ao valor de  $f_1$ , temos que os valores que constituem o atrator nesta condição não se repetem se as condições iniciais forem distintas. Por fim, ponto importante é que as trajetórias permanecem confinadas em uma região limitada do espaço de fases, não divergindo para o infinito.

## Capítulo 2

# Introdução às equações diferenciais estocásticas

### 2.1 Introdução

### 2.2 Motivação

Para iniciar a introdução às equações diferenciais estocásticas (EDEs), vamos apresentar a motivação para o seu estudo. Começamos com uma equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $t > 0$ ,  $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um vetor suave, e  $\mathbf{x}(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  representa a trajetória do sistema ao longo do tempo. O sistema (2.1) é classificado como determinístico, pois, uma vez conhecida a condição inicial, a trajetória do sistema é totalmente determinada, conforme garante o Teorema de Existência e Unicidade.

Contudo, suponha que desejamos modelar a evolução de um fenômeno sujeito a incertezas. Em outras palavras, queremos aplicar o mesmo princípio das equações diferenciais ordinárias a um processo aleatório. Para isso, utilizamos as equações diferenciais estocásticas. Esse tipo de equação é definido como:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\xi(t) \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $X(t) \in \mathbb{R}^d$ ,  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ , e  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d \times m}$ . Usamos a notação  $\xi(t) = \frac{dW}{dt}$  para denotar (de forma formal) a derivada do movimento Browniano em  $\mathbb{R}^m$ , ou seja, um processo de ruído branco — um vetor Gaussiano generalizado, de média zero.

Como exemplo motivador para o uso de EDEs, consideremos a evolução do preço de

uma ação na bolsa de valores ao longo do tempo. Esse preço é influenciado por diversos fatores externos, o que introduz um grau de incerteza quanto ao seu comportamento futuro. Assim, podemos modelá-lo por meio de uma EDE:

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \\ S(0) = s_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Nessa equação,  $\frac{dS}{S}$  representa a variação relativa do preço da ação ao longo do tempo;  $\mu$  é uma constante positiva que representa a taxa média de crescimento; e  $\sigma$  expressa a volatilidade, ou seja, a incerteza associada aos diversos fatores que influenciam no preço.

Antes de continuar com esse exemplo, apresentaremos a base teórica necessária para a formulação da equação (2.3), bem como suas propriedades.

## 2.3 Considerações estatísticas

## 2.4 Equações diferenciais estocásticas

Dadas as considerações estatísticas, passemos para a construção da equação (2.2), reproduzida novamente a seguir:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t)) \xi(t), \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

A solução  $X(\cdot)$  é então expressa como

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dW_s. \quad (2.4)$$

Note que, dadas essas expressões, restam algumas definições fundamentais: a definição do ruído  $\xi(t)$ , a forma de se interpretar a integral estocástica  $\int_0^t f(s, X(s)) dW_s$  e a questão da existência (e unicidade) de soluções.

Nesta seção, exploraremos cada um desses conceitos, bem como suas propriedades, a fim de justificar rigorosamente a construção de (2.4).

### 2.4.1 Processo de Wiener

#### Desenvolvimento histórico

Um dos elementos fundamentais para o estudo de equações diferenciais estocásticas é o *movimento browniano*. Trata-se de um fenômeno físico que envolve o estudo do movimento de grãos de pólen suspensos na água.

Historicamente, o problema foi inicialmente proposto e estudado por Robert Brown entre 1826 e 1827. Em seus estudos, Brown observou que a trajetória das partículas era irregular e que o movimento de duas partículas distintas parecia ser independente. Em 1905, Albert Einstein retomou o problema, relacionando-o à equação da difusão.<sup>1</sup> Esse trabalho foi essencial para a comprovação da existência dos átomos e permitiu, alguns anos depois, que Jean Perrin determinasse experimentalmente a constante de Avogadro (EVANS, 2014).

Finalmente, na década de 1920, o fenômeno foi formalizado matematicamente por Norbert Wiener. Essa formalização é crucial para a definição rigorosa do movimento browniano, tanto que outra forma de referir-se a ele é *processo de Wiener* — forma que utilizaremos a fim de diferenciar do problema físico original.

### Definição

Um processo estocástico real, denotado por  $W(\cdot)$  é chamado de *processo de Wiener* padrão quando satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $W(0) = 0$ , quase certamente;
2. Para todo  $t \geq s \geq 0$ , tem-se que  $W(t) - W(s) \sim \text{Normal}(0, t - s)$ ;
3.  $W(\cdot)$  possui incrementos independentes, isto é, para  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , as variáveis aleatórias

$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  são independentes.

(EVANS, 2014)

A função densidade de probabilidade do processo de Wiener padrão unidimensional, definido como  $W(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , é dada por:

$$f(x; t, s) = (2\pi(t - s))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t - s)}\right).$$

No caso do processo de Wiener padrão  $n$ -dimensional,  $W(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde cada componente  $W_i(t)$ , com  $i = 1, \dots, n$ , é um processo de Wiener unidimensional independente, a função densidade do vetor gaussiano aleatório  $W(t) - W(s)$  é dada por:

$$g(\mathbf{x}; t, s) = (2\pi(t - s))^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2(t - s)}\right).$$

### Propriedades

As principais propriedades do processo de Wiener padrão são:

1. **Reescalonamento.** Para cada  $c > 0$ , defina  $X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} W(ct)$ . Então  $(X_t, t \geq 0) = (W_t, t \geq 0)$ .

---

<sup>1</sup> Detalhes em EVANS (2014)

2. **Translação.** Para cada  $c > 0$ ,  $W_{c+t} - W_c$ ,  $t \geq 0$ , é um processo de Wiener que é independente de  $W_u$ ,  $u \in [0, c]$ .
3. **Reversão no tempo.** Defina  $X_t = W_{1-t} - W_1$ ,  $t \in [0, 1]$ . Então  $(X_t, t \in [0, 1]) = (W_t, t \in [0, 1])$ .
4. **Inversão.** Seja  $X_t$ ,  $t \geq 0$ , definido por  $X_0 = 0$ ,  $X_t = tW(1/t)$ . Então  $(X_t, t \geq 0) = (W_t, t \geq 0)$ .

(PAVLIOTIS, 2014)

## 2.4.2 Integral estocástica

## 2.4.3 Existência e unicidade das soluções

## 2.5 Exemplo

A seguir, apresentemos um exemplo retirado de PAVLIOTIS e STUART (2008) de uma aproximação de um sistema determinístico para um sistema estocástico. Tal exemplo é relevante, pois trata-se de uma abordagem simplificada do que vamos realizar com o modelo de Lorenz 80.

O exemplo trata-se de um movimento browniano, assim como apresentado em na seção ?? acoplado ao sistema Lorenz 63 apresentado em 1.2 a partir das variáveis  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ . O exemplo em questão é expresso por:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= x - x^3 + \frac{\lambda}{\varepsilon} y_2, \\
 \frac{dy_1}{dt} &= \frac{10}{\varepsilon^2} (y_2 - y_1), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon^2} (28y_1 - y_2 - y_1 y_3), \\
 \frac{dy_3}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon^2} (y_1 y_2 - \frac{8}{3} y_3).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

### EXEMPLIFICAR POR QUE PODEMOS APROXIMAR

Podemos aproximar o modelo para sua versão estocástica forma de Itô:

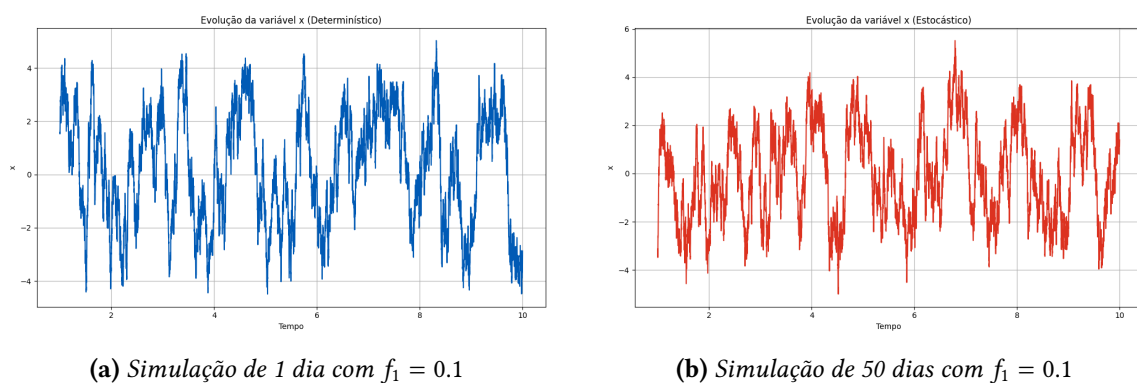
$$\frac{dX}{dt} = X - X^3 + \sigma \frac{dW}{dt}, \tag{2.6}$$

Onde  $\sigma$  é expresso por:

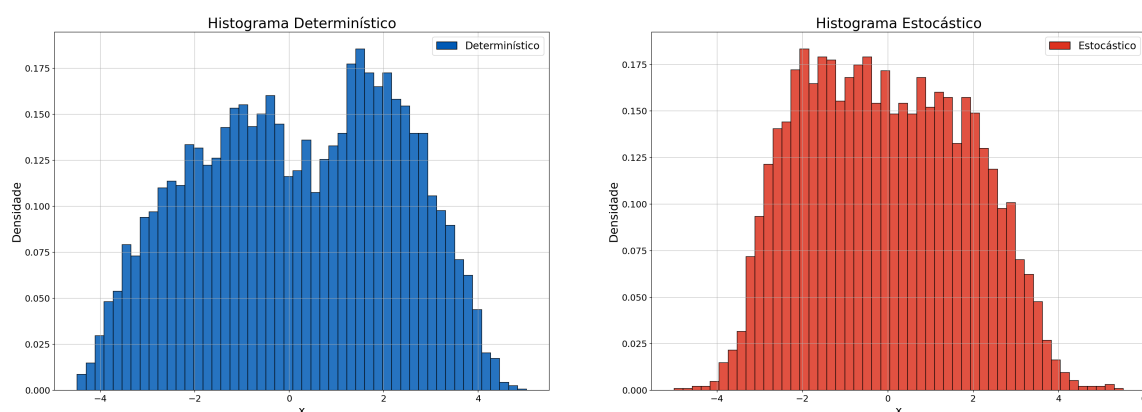
$$\sigma^2 = 2\lambda^2 \int_0^\infty \frac{1}{T} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \psi^s(y) \psi^{t+s}(y) ds \right) dt. \tag{2.7}$$

A partir das equações apresentadas, podemos realizar simulações computacionais. Novamente, as simulações foram realizadas com o uso da biblioteca SciML (RACKAUCKAS e

NIE, 2017) e os programas que geraram os dados estão no apêndice A.

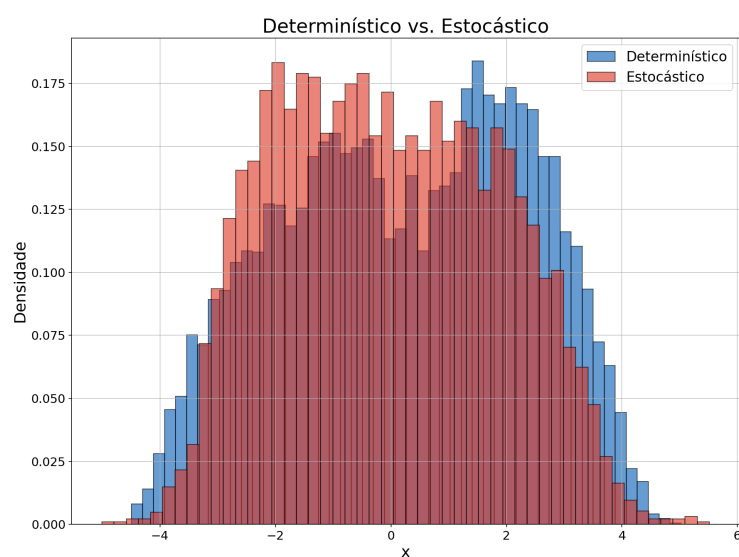


**Figura 2.1:** Evolução temporal das variáveis  $x_1$ ,  $y_1$  e  $z_1$  para  $f_1 = 0.1$ . À esquerda, simulação curta (1 dia). À direita, simulação longa (50 dias).



(a) Simulação de 50 dias com  $f_1 = 0.1$ .

(b) Simulação de 1 dia com  $f_1 = 0.1$ .



(c) Comparação das distribuições empíricas: determinística vs. estocástica.

**Figura 2.2:** Histogramas e comparações das simulações para  $f_1 = 0.1$ . Acima, histogramas individuais: à esquerda, simulação curta (1 dia); à direita, simulação longa (50 dias). Em destaque (abaixo), a sobreposição das densidades.



## Capítulo 3

# Formalismo Mori-Zwanzig

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos o formalismo de Mori-Zwanzig (MZ). Para isso iniciamos com uma breve discussão sobre o formalismo MZ e sua importância no contexto deste trabalho (seção 3.2). Em seguida, revisamos conceitos matemáticos fundamentais para sua formulação, como o operador de Liouville, a notação de semigrupos e os polinômios hermitianos (seção 3.3). Por fim, na seção 3.4, desenvolvemos o formalismo passo a passo, analisando cada termo de forma detalhada.

Como referência utilizamos o trabalho do matemático Alexandre J. Chorin: [CHORIN, HALD e KUPFERMAN \(2000\)](#), [CHORIN, HALD e KUPFERMAN \(2002\)](#) e, principalmente, [CHORIN e HALD \(2013\)](#).

### 3.2 Motivação

O método de Mori-Zwanzig, desenvolvido por Robert Walter Zwanzig e Hajime Mori na segunda metade do século XX, é utilizado em sistemas hamiltonianos. Esse método consiste em classificar as variáveis do sistema em duas categorias: “resolvidas” e “não resolvidas”. As variáveis resolvidas são aquelas cujos comportamentos e valores são bem conhecidos, enquanto as não resolvidas são aquelas para as quais não se possui informações diretas. Para substituir essas variáveis não resolvidas, o método introduz termos estocásticos, denominados ruídos (*noise*), além de um termo de amortecimento (*damping*), também conhecido como termo de memória (*memory term*). Essa abordagem permite que o comportamento do sistema de interesse seja preservado de maneira adequada, mesmo sem conhecer completamente as variáveis não resolvidas.

O principal objetivo do artigo de [CHEKROUN \*et al.\* \(2021\)](#) é simplificar o modelo de Lorenz 80, preservando seu comportamento. Para isso, utilizaremos o método de Mori-Zwanzig, que é uma abordagem física-estatística aplicável em sistemas como o L80. Dada a relevância deste método para o trabalho de [CHEKROUN \*et al.\* \(2021\)](#), optamos por incluir uma introdução ao formalismo de Mori-Zwanzig, a fim de proporcionar uma melhor

compreensão de sua aplicação no contexto do modelo de Lorenz 80 e permitir uma base teórica sólida para eventuais explorações.

### 3.3 Preliminares

#### 3.3.1 Convertendo sistemas de EDO não lineares como sistemas de EDPs lineares

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) dado por:

$$\frac{d}{dt}\varphi(x, t) = R(\varphi(x, t)), \quad \varphi(x, 0) = x, \quad (3.1)$$

onde  $R$  é uma função não linear,  $\varphi$  é uma função dependente do tempo, e  $R$ ,  $\varphi$  e  $x$  podem assumir dimensões infinitas, sendo formados pelos vetores  $R_i$ ,  $\varphi_i$  e  $x_i$ , respectivamente.

A partir disso, podemos definir o *Operador de Liouville* associado à equação (3.1) como:

$$L = \sum_i R_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.2)$$

Utilizando o *Operador de Liouville*, podemos transformar o sistema de EDOs não lineares em um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) lineares da forma:

$$u_t = Lu, \quad u(x, 0) = g(x) \quad (3.3)$$

A solução desse sistema existe, é única, e é dada por:

$$u(x, t) = g(\varphi(x, t)) \quad (3.4)$$

Portanto, temos que a equação (3.3) é bem definida.<sup>1</sup>

#### 3.3.2 Notação de semigrupo

Tomemos  $X$  um conjunto não vazio, dotado de uma operação binária  $*$ , ou seja,  $X \times X \rightarrow X$ , que satisfaz a propriedade de associatividade:

$$(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in X.$$

A notação de semigrupo oferece uma forma compacta e eficiente de representar soluções para equações diferenciais, particularmente as parciais ou de evolução.

Considere o operador  $\Delta$  definido por:

$$\Delta\psi = \psi_{xx}, \quad \text{onde } \psi \text{ é uma função suave.}$$

<sup>1</sup> Detalhes da demonstração podem ser encontrados em CHORIN e HALD (2013, p. 181-182)

Agora, considere a equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} - kv = 0, \quad v(0) = v_0,$$

cujas solução é bem conhecida:  $v(t) = v_0 e^{kt}$ .

De forma análoga, considere a equação do calor:

$$v_t - \frac{1}{2}\Delta v = 0, \quad v(x, 0) = \varphi(x),$$

onde  $v_t$  é a derivada de  $v$  em relação ao tempo e  $\varphi(x)$  é a condição inicial. Em vez de resolver diretamente, expressamos a solução utilizando a notação de semigrupo:

$$v(t) = e^{\frac{1}{2}t\Delta} \varphi.$$

Aqui,  $E^{\frac{1}{2}t\Delta}$  é um operador semigrupo gerado pela operação de difusão (pelo operador  $\Delta$ ). Ele é aplicado à condição inicial  $\varphi(x)$ , e a solução  $v(t)$  descreve a evolução temporal de  $v(x, t)$  ao longo do tempo  $t$ . Essa notação permite representar soluções de equações diferenciais de maneira compacta, explorando a estrutura associativa da operação de semigrupo. Especificamente, ela satisfaz a propriedade de composição:

$$e^{\frac{1}{2}(t+s)\Delta} = e^{\frac{1}{2}t\Delta} e^{\frac{1}{2}s\Delta}.$$

Dada a notação de semigrupo apresentada anteriormente, aplicamos esta notação à equação (3.4):

$$e^{tL}g(x) = g(\varphi(x, t)) \quad (3.5)$$

Note que  $E^{tL}x$  não representa uma avaliação direta de  $E^{tL}$ , mas sim a ação do operador  $E^{tL}$  sobre o vetor formado pelos componentes  $x_i$ . Além disso, a função  $g$  comuta com a variação temporal das condições iniciais de  $x_i$ .

Vale destacar que  $g$  é uma função independente do tempo em relação às variáveis que descrevem o sistema físico, e sua variação ocorre exclusivamente devido à mudança dessas variáveis ao longo do tempo. Assim, a equação (3.3) pode ser expressa como:

$$Le^{tL} = e^{tL}L \quad (3.6)$$

Essa mesma relação se aplica a matrizes: sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes, então a seguinte identidade é válida:

$$\exp(t(A + B)) = \exp(tA) + \int_0^t \exp((t-s)(A + B)) B \exp(sA) ds \quad (3.7)$$

Esta equação, conhecida como *Fórmula de Duhamel* ou *fórmula de Dyson*, é bem definida.

### 3.3.3 Polinômios Hermitianos

Primeiramente, definimos o produto interno como:

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} u(x)v(x) dx \quad (3.8)$$

Os polinômios  $p_n(x)$  e  $p_m(x)$  são ortonormais em relação a esse produto interno (3.8) quando satisfazem a seguinte condição:

$$\langle p_n, p_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} p_n(x)p_m(x) dx = \delta_{nm},$$

em que  $\delta_{nm}$  é o delta de Kronecker, que apresenta as propriedades:

1. **Ortogonalidade:** Para  $n \neq m$ , os polinômios são ortogonais, ou seja, o produto interno entre eles é nulo:

$$\langle p_n, p_m \rangle = 0 \quad \text{quando } n \neq m$$

2. **Normalização:** Para  $n = m$ , os polinômios são normalizados, de modo que o produto interno é igual a 1:

$$\langle p_n, p_n \rangle = 1$$

No caso  $n$ -dimensional, o produto interno se generaliza para:

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2}\right) u(x)v(x) dx_1 \dots dx_n$$

De forma mais geral, se  $H(q, p)$  é um Hamiltoniano, é possível definir uma família de polinômios nas variáveis  $q$  e  $p$  que sejam ortonormais com respeito à densidade canônica  $Z^{-1}e^{-H/T}$ . Os polinômios que satisfazem essa condição ainda são chamados de *polinômios hermitianos*.

Por fim, para o formalismo de Mori-Zwanzig, consideraremos um espaço  $n$ -dimensional  $\Gamma$  com uma densidade de probabilidade dada. Dividiremos as coordenadas em dois tipos:  $\hat{x}$  e  $\tilde{x}$ . Seja  $g$  uma função de  $x$ ; então  $\mathbb{P}g = \mathbb{E}[g \mid \hat{x}]$  é uma projeção ortogonal sobre o subespaço das funções de  $\hat{x}$ . Temos que essa projeção gera um subespaço de polinômios hermitianos que são funções de  $\hat{x}$  e projetando sobre esses polinômios.

## 3.4 Mori-Zwanzig

### 3.4.1 Construção

Tomemos novamente o sistema (3.1), reproduzido abaixo:

$$\frac{d}{dt}\varphi(x, t) = R(\varphi(x, t)), \quad \varphi(x, 0) = x,$$

Lembremos que a equação é composta por componentes de dimensão  $n$ . Dentre essas  $n$  componentes, definimos as primeiras  $m$  componentes de  $\varphi$ , com  $m < n$ , como as variáveis de interesse. Em seguida, classificamos  $\hat{\varphi}$  como as variáveis “resolvidas” e  $\tilde{\varphi}$  como as variáveis “não resolvidas”:

$$\varphi = (\hat{\varphi}, \tilde{\varphi}), \quad \hat{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m), \quad \tilde{\varphi} = (\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n)$$

O mesmo vale para  $x$  e  $R$ :  $x = (\hat{x}, \tilde{x})$  e  $R = (\hat{R}, \tilde{R})$ . A partir das variáveis resolvidas, buscamos criar previsões para o modelo de interesse, utilizando as soluções de uma parte da equação.

Com base no *Operador de Liouville* e na *notação de semigrupo*, podemos reescrever as componentes de  $\hat{\varphi}$  como<sup>2</sup>:

$$\hat{\varphi}_j(x, t) = e^{tL} x_j, \quad 1 \leq j \leq m$$

Ainda na notação de semigrupo, a equação dessas componentes é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tL} x_j = L e^{tL} x_j = e^{tL} L x_j \quad (3.9)$$

A partir da *projeção ortogonal* introduzida na seção anterior, definimos  $\mathbb{P}$  como a projeção dada por:  $\mathbb{P}g(x) = \mathbb{E}[g|\hat{x}]$ . Assumimos que, no instante  $t = 0$ , conhecemos a densidade conjunta de todas as variáveis  $x$ , mas apenas os dados iniciais  $\hat{x}$  são conhecidos. A densidade das variáveis em  $\tilde{x}$  é, então, a densidade conjunta de todas as variáveis  $x$  com  $\hat{x}$  fixado. Assim,  $\mathbb{P}$  é uma projeção sobre um espaço de funções com variáveis fixas e, portanto, independente do tempo.

As projeções  $\mathbb{P}\hat{\varphi}(t) = \mathbb{E}[\hat{\varphi}(t)|\hat{x}]$  são de nosso maior interesse, pois estimam o comportamento do sistema a partir de um conjunto reduzido de variáveis.

Definindo  $\mathbb{Q} = I - \mathbb{P}$  e considerando que as seguintes propriedades são válidas para quaisquer projeções ortogonais:

1.  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ ;
2.  $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q}$ ;
3.  $\mathbb{P}\mathbb{Q} = 0$ .

Podemos reescrever a equação (3.9) como:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tL} x_j = e^{tL} \mathbb{P} L x_j + e^{tL} \mathbb{Q} L x_j \quad (3.10)$$

Utilizando agora a *fórmula de Dyson*, com  $A = \mathbb{Q}L$  e  $B = \mathbb{Q}L$ , obtemos:

$$e^{tL} = e^{t\mathbb{Q}L} + \int_0^t e^{(t-s)L} \mathbb{P} L e^{s\mathbb{Q}L} ds \quad (3.11)$$

<sup>2</sup> Note que cada componente depende de **todos** os valores de  $x$ . Portanto, se  $\tilde{x}$  for aleatório, então  $\hat{\varphi}$  também será.

Pela linearidade da equação de Liouville e a partir das equações (3.10) e (3.11), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tL} x_j = e^{tL} \mathbb{P} L x_j + e^{t\mathbb{Q}L} \mathbb{Q} L x_j + \int_0^t e^{(t-s)L} \mathbb{P} L e^{s\mathbb{Q}L} \mathbb{Q} L x_j ds \quad (3.12)$$

A equação acima expressa a *equação de Mori-Zwanzig*.

### 3.4.2 Análise termo a termo

O primeiro termo é dado por:

$$e^{tL} \mathbb{P} L x_j \quad (3.13)$$

Observe que:

$$L x_j = \sum_i R_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) x_j = R_j(x)$$

Portanto,

$$\mathbb{P} L x_j = \mathbb{E}[R_j(x) | \hat{x}] \quad \text{Note que esta é uma função exclusivamente de } \hat{x}.$$

Com isso, podemos concluir que:

$$e^{tL} \mathbb{P} L x_j = \bar{R}_j(\hat{\varphi}(x, t))$$

Mais do que isso: o primeiro termo representa a dinâmica própria do sistema nas variáveis resolvidas. Além disso, trata-se de um termo markoviano, pois depende apenas do estado atual do sistema no tempo  $t$ .

Para o segundo termo, definimos:

$$w_j = e^{t\mathbb{Q}L} \mathbb{Q} L x_j$$

Por definição, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_j(x, t) = \mathbb{Q} L w_j(x, t), \quad (3.14)$$

$$w_j(x, 0) = \mathbb{Q} L x_j = (I - \mathbb{P}) R_j(x) = R_j(x) - \mathbb{E}[R_j | \hat{x}]. \quad (3.15)$$

Note que  $w_j(x, 0) = \mathbb{Q} L x_j = R_j(x) - \mathbb{E}[R_j(x) | \hat{x}]$  representa a *parte flutuante* da variável  $R_j(x)$ , ou seja, o componente imprevisível dado  $\hat{x}$ . Essa parte evolui de acordo com as *dinâmicas ortogonais*, de modo que  $\mathbb{P} w_j(x, t) = 0$  para todo  $t$ , mantendo o termo como um ruído puramente não resolvido ao longo do tempo.

Mais especificamente, o subespaço do ruído (*noise subspace*) é formado pelas componentes das funções que são ortogonais às funções de  $\hat{x}$ , geralmente, isso corresponde

a termos que dependem de  $\tilde{x}$ .

O terceiro termo, dado por:

$$\int_0^t e^{(t-s)L} P L e^{sQL} Q L x_j$$

é classificado como o termo de memória (*memory term*), já que este envolve a integração de quantidades que dependem de estados anteriores ao atual.

Tomemos que  $P$  seja projete na extensão dos polinômios hermitianos  $H - 1, H_2, \dots$  com argumentos em  $\hat{x}$ . Assim, para dada função  $\psi$ , temos que:  $P\psi = \sum (\psi, H_k) H_k$ , assim, temos:

$$\begin{aligned} P L e^{sQL} Q L x_j &= P L (P + Q) e^{sQL} Q L x_j \\ &= P L Q e^{sQL} Q L x_j \\ &= \sum_k \langle L Q e^{sQL} Q L x_j, H_k(\hat{x}) \rangle H_k(\hat{x}). \end{aligned}$$

O produto interno é definido como um valor esperado com respeito à densidade de probabilidade inicial. Vamos assumir que  $L$  é antissimétrico, ou seja,  $(u, Lv) = -(Lu, v)$ , então:

$$\begin{aligned} (L Q e^{sQL} Q L x_j, H_k(\hat{x})) &= -(Q e^{sQL} Q L x_j, L H_k) \\ &= -(e^{sQL} Q L x_j, Q L H_k). \end{aligned}$$

Tanto  $Q L x_j$  quanto  $Q L H_k$  estão no subespaço de ruído, e  $E^{sQL} Q L x_j$  é uma solução no tempo  $s$  da equação de dinâmica ortogonal com dados no subespaço de ruído;  $P L e^{sQL} Q L x_j$  é então uma **soma de covariâncias temporais de ruídos**.





# Apêndice A

## Programas

### A.1 Código do modelo Lorenz 80 determinístico

```

1  import numpy as np
2  from scipy.integrate import solve_ivp
3  import pandas as pd
4  from pathlib import Path
5
6  a = [1, 1, 3]
7  b = [
8      0.5 * (a[0] - a[1] - a[2]),
9      0.5 * (a[1] - a[2] - a[0]),
10     0.5 * (a[2] - a[0] - a[1]),
11 ]
12 c = np.sqrt(b[0]*b[1] + b[1]*b[2] + b[2]*b[0])
13
14 h = [-1, 0, 0]
15 f = [0.1, 0, 0]
16 g_0 = 8
17 kappa_0 = 1 / 48
18 nu_0 = kappa_0
19
20 def pe_model(t, u):
21     x = u[0:3]
22     y = u[3:6]
23     z = u[6:9]
24     dx = np.zeros(3)
25     dy = np.zeros(3)
26     dz = np.zeros(3)
27     for i in range(3):
28         j = (i + 1) % 3
29         k = (i + 2) % 3
30         dx[i] = (
31             a[i] * b[i] * x[j] * x[k]

```

```

32         - c * (a[i] - a[k]) * x[j] * y[k]
33         + c * (a[i] - a[j]) * y[j] * x[k]
34         - 2 * c**2 * y[j] * y[k]
35         - nu_0 * (a[i] ** 2) * x[i]
36         + a[i] * y[i]
37         - a[i] * z[i]
38     ) / a[i]
39     dy[i] = (
40         -a[k] * b[k] * x[j] * y[k]
41         - a[j] * b[j] * y[j] * x[k]
42         + c * (a[k] - a[j]) * y[j] * y[k]
43         - a[i] * x[i]
44         - nu_0 * (a[i] ** 2) * y[i]
45     ) / a[i]
46     dz[i] = (
47         -b[k] * x[j] * (z[k] - h[k])
48         - b[j] * (z[j] - h[j]) * x[k]
49         + c * y[j] * (z[k] - h[k])
50         - c * (z[j] - h[j]) * y[k]
51         + g_0 * a[i] * x[i]
52         - kappa_0 * a[i] * z[i]
53         + f[i]
54     )
55     return np.concatenate([dx, dy, dz])
56
57 def simulate(x0, y0, z0, days):
58     initial_u = np.concatenate([x0, y0, z0])
59     t_final = days * 8
60     t_span = (0, t_final)
61     sol = solve_ivp(pe_model, t_span, initial_u, method="RK45", atol=1
62                     e-8, rtol=1e-6)
63     return sol.t / 8, sol.y[:3].T, sol.y[3:6].T, sol.y[6:].T
64
65 days = 8
66 """
67 # HARDLEY
68 y1 = f[0]/(a[0]*nu_0*(1+a[0]*g_0))
69 x1 = -nu_0*a[0]*y1
70 z1 = y1
71
72
73 x0 = [x1, 0, 0]
74 y0 = [y1, -(10 ** (-5)), 0]
75 z0 = [z1, 10 ** (-5), 0]
76 """
77
78 # DEFAULT
79

```

```

80 x0 = [0.1,0.1,0.1]
81 y0 = [0.1,0.1,0.1]
82 z0 = [0.1,0.1,0.1]
83 t, x, y, z = simulate(x0, y0, z0, days)
84
85 x = np.asarray(x)
86 y = np.asarray(y)
87 z = np.asarray(z)
88 t = np.squeeze(np.asarray(t))
89
90 df = pd.DataFrame(
91     {
92         "time": t,
93         "x1": x[:, 0],
94         "x2": x[:, 1],
95         "x3": x[:, 2],
96         "y1": y[:, 0],
97         "y2": y[:, 1],
98         "y3": y[:, 2],
99         "z1": z[:, 0],
100        "z2": z[:, 1],
101        "z3": z[:, 2],
102    }
103 )
104
105 BASE = Path(__file__).resolve().parent
106 DATADIR = BASE / "data"
107 DATADIR.mkdir(parents=True, exist_ok=True)
108 out_file = DATADIR / "python01.csv"
109 df.to_csv(out_file, index=False)
110
111 print(f"CSV salvo em: {out_file}")

```

## A.2 Exemplo do capítulo 02

```

1 using DifferentialEquations, ModelingToolkit, Plots, BenchmarkTools,
   CSV, DataFrames
2
3 @independent_variables t
4 @variables x(t)=0.1 y1(t)=0.01 y2(t)=0.01 y3(t)=0.01
5 @parameters ε=0.01 λ=1.0
6 D = Differential(t)
7
8 eqs = [
9     D(x) ~ x - x^3 + (λ/ε) * y2,
10    D(y1) ~ (10 / ε^2) * (y2 - y1),
11    D(y2) ~ (1 / ε^2) * (28*y1 - y2 - y1*y3),
12    D(y3) ~ (1 / ε^2) * (y1*y2 - (8/3)*y3)

```

```

13 ]
14
15 @mtkbuild sys = ODESystem(eqs, t)
16
17 tspan = (0.0, 1.0)
18 prob = ODEProblem(sys, [], tspan)
19 solucao_deterministico = solve(prob, Tsit5(), reltol=1e-6, abstol=1e
    -7, saveat=1e-3)
20
21 x_vals = solucao_deterministico[x]
22 y2_vals = solucao_deterministico[y2]
23
24 df = DataFrame(t = solucao_deterministico.t, y2 = y2_vals, x = x_vals)
25 cd(@__DIR__)
26 CSV.write("data/deterministico.csv", df)

```

**Programa A.1:** *Modelo determinístico browniano acoplado*

```

1 using DataFrames, Plots, CSV, Statistics, StatsBase, DSP
2
3 cd(@__DIR__)
4 df = CSV.read("data/deterministico.csv", DataFrame)
5
6 y2_vals = df[:, 2]
7 t_vals = df[:, 1]
8 Δt = 1e-3
9
10 y2_centered = y2_vals .- mean(y2_vals)
11
12 acor = xcorr(y2_centered; scaling = :coeff)
13 n = length(y2_centered)
14 acor_pos = acor[n:end] # lags ≥ 0
15
16 λ = 1.0
17
18 σ² = 2 * λ² * sum(acor_pos) * Δt
19 σ = sqrt(σ²)
20
21 println(σ)

```

**Programa A.2:** *Cálculo do sigma*

```

1 using DifferentialEquations, Plots
2
3 sigma = 8.880502080440465
4 x0 = 0.1
5 tspan = (0.0, 1.0)
6
7 f1(X, p, t) = X - X³
8 f2(X, p, t) = p

```

```
9
10 W = WienerProcess(0.0, 0.0)
11 prob = SDEProblem(f1, f2, x0, tspan, sigma; noise = W)
12 solucao_estocastico = solve(prob, EM(), dt = 1e-3)
13
14 df = DataFrame(t = solucao_estocastico.t, x = solucao_estocastico.u)
15 cd(@__DIR__)
16 CSV.write("data/estocastico.csv", df)
```

**Programa A.3:** *Modelo estocastico browniano acoplado*



## **Apêndice B**

### **Considerações matemáticas**

#### **B.1 Decomposição de Helmholtz**





## Referências

- [CHEKROUN *et al.* 2021] Mickaël D. CHEKROUN, Honghu LIU e James C. McWILLIAMS. “Stochastic rectification of fast oscillations on slow manifold closures”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 118.48 (nov. de 2021). ISSN: 1091-6490. DOI: [10.1073/pnas.2113650118](https://doi.org/10.1073/pnas.2113650118). URL: <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.2113650118> (citado na pg. 19).
- [CHORIN e HALD 2013] Alexandre J. CHORIN e Ole H. HALD. *Stochastic Tools in Mathematics and Science*. Springer New York, 2013. ISBN: 9781461469803. DOI: [10.1007/978-1-4614-6980-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6980-3) (citado nas pgs. 19, 20).
- [CHORIN, HALD e KUPFERMAN 2000] Alexandre J. CHORIN, Ole H. HALD e Raz KUPFERMAN. “Optimal prediction and the mori–zwanzig representation of irreversible processes”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 97.7 (2000), pp. 2968–2973. DOI: [10.1073/pnas.97.7.2968](https://doi.org/10.1073/pnas.97.7.2968) (citado na pg. 19).
- [CHORIN, HALD e KUPFERMAN 2002] Alexandre J. CHORIN, Ole H. HALD e Raz KUPFERMAN. “Optimal prediction with memory”. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 166.3 (2002), pp. 239–257. ISSN: 0167-2789. DOI: [10.1016/S0167-2789\(02\)00446-3](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(02)00446-3) (citado na pg. 19).
- [EVANS 2014] Lawrence C. EVANS. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. Providence, RI: American Mathematical Society, jan. de 2014 (citado na pg. 15).
- [E. N. LORENZ 1963] E. N. LORENZ. “Deterministic nonperiodic flow”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2 (1963), pp. 130–141. DOI: [10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2) (citado na pg. 5).
- [Edward N. LORENZ 1980] Edward N. LORENZ. “Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 37.8 (ago. de 1980), pp. 1685–1699. ISSN: 1520-0469. DOI: [10.1175/1520-0469\(1980\)037<1685:asaqge>2.0.co;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1980)037<1685:asaqge>2.0.co;2) (citado nas pgs. 5, 6, 9, 10).
- [PAVLIOTIS 2014] Grigorios A. PAVLIOTIS. *Stochastic Processes and Applications: Diffusion Processes, the Fokker-Planck and Langevin Equations*. Springer New York, 2014. ISBN: 9781493913237. DOI: [10.1007/978-1-4939-1323-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1323-7) (citado na pg. 16).

- [PAVLIOTIS e STUART 2008] Grigorios A. PAVLIOTIS e Andrew STUART. *Multiscale Methods: Averaging and Homogenization*. Springer New York, 2008. ISBN: 9780387738291. DOI: [10.1007/978-0-387-73829-1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-73829-1) (citado na pg. 16).
- [RACKAUCKAS e NIE 2017] Christopher RACKAUCKAS e Qing NIE. “DifferentialEquations.jl—a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in Julia”. *Journal of Open Research Software* 5.1 (2017) (citado na pg. 16).
- [VALLIS 2017] Geoffrey K. VALLIS. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*. Cambridge University Press, jun. de 2017. ISBN: 9781107588417. DOI: [10.1017/9781107588417](https://doi.org/10.1017/9781107588417) (citado nas pgs. 3, 5).

# Índice remissivo

Captions, *veja* Legendas

Código-fonte, *veja* Floats

Equações, *veja* Modo matemático

Figuras, *veja* Floats

Floats

    Algoritmo, *veja* Floats, ordem

Fórmulas, *veja* Modo matemático

Inglês, *veja* Língua estrangeira

Palavras estrangeiras, *veja* Língua es-  
trangeira

Rodapé, notas, *veja* Notas de rodapé

Subcaptions, *veja* Subfiguras

Sublegendas, *veja* Subfiguras

Tabelas, *veja* Floats

Versão corrigida, *veja* Tese/Dissertação,  
versões

Versão original, *veja* Tese/Dissertação,  
versões