

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL
COM HABILITAÇÃO EM MÉTODOS MATEMÁTICOS

**Uma abordagem estocástica para modelos
rápidos-lentos**

Lucas Amaral Taylor

MONOGRAFIA FINAL
MAP 2429 — TRABALHO DE
FORMATURA EM MATEMÁTICA APLICADA

Supervisor: Prof. Dr. Breno Raphaldini Ferreira da Silva

São Paulo
2025

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

*Na verdade, na verdade vos digo que, se o
grão de trigo, caindo na terra, não morrer,
fica ele só; mas se morrer, dá muito fruto.*

João 12:24

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao professor Breno Raphaldini Ferreira da Silva pela ótima orientação, cativantes desafios e generosa confiança em todo processo. Além disso, gostaria de agradecer ao apoio do professor Honghu Liu por sua contribuição no desenvolvimento deste trabalho.

Estendo meu agradecimento a todos os professores da graduação que me proporcionaram uma nova forma de entender o mundo, da compreensão de fenômenos físicos à processos abstratos. Foi um privilégio estar presente nas aulas cativantes e ter contato com ideias tão belas e absolutamente maravilhosas.

Quero também agradecer à minha mãe e meu pai por todo apoio incondicional durante este período tão importante, às amizades que o BMAC ofereceu pelo caminho, em especial Julio, Gustavo e Matheus, e aos demais amigos sempre presentes.

Por fim, é necessário voltar ao começo, professor Mauricio Osca Souza Pereira, ou “Phalkon”, obrigado pelas histórias do IME foram elas que me trouxeram até aqui.

Resumo

Lucas Amaral Taylor. **Uma abordagem estocástica para modelos rápidos-lentos.**

Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

O presente trabalho tem como objetivo estudar a aproximação de sistemas dinâmicos rápidos-lentos por meio de equações diferenciais estocásticas, com ênfase no modelo de Lorenz 80. A análise inclui a formulação determinística do modelo, a introdução de incertezas através de ruídos estocásticos e a comparação entre simulações determinísticas e estocásticas. Como principal referência metodológica, este trabalho segue a abordagem proposta por [CHEKROUN *et al.* \(2021\)](#).

Palavras-chave: Equações diferenciais estocásticas. Modelo de Lorenz 80. Sistemas dinâmicos rápidos-lentos.

Abstract

Lucas Amaral Taylor. **A stochastic approach to fast-slow models.** Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

This undergraduated thesis aims to study the approximation of fast-slow dynamic systems using stochastic differential equations, with an emphasis on the Lorenz 80 model. The analysis includes the deterministic formulation of the model, the introduction of uncertainties through stochastic noise, and the comparison between deterministic and stochastic simulations. As its main methodological reference, this paper follows the approach proposed by [CHEKROUN *et al.* \(2021\)](#).

Keywords: Stochastic differential equations. Lorenz 80 model. Fast-slow dynamical systems.

Listas de figuras

1.1	Diagrama do modelo de água-rasa adaptado	6
1.2	Evolução temporal das variáveis x_1 , y_1 e z_1 para $f_1 = 0.1$. À esquerda, de 1 dia e à direita de 50 dias.	11
1.3	Projeções do modelo L80 para $f_1 = 0.3027$	12
2.1	Simulação do preço de uma ação a partir da EDE (2.3)	19
3.1	Evolução temporal das variáveis x_1 , y_1 e z_1 para $f_1 = 0.1$. À esquerda, simulação curta (1 dia). À direita, simulação longa (50 dias).	22
3.2	Histogramas e comparações das simulações para $f_1 = 0.1$. Acima, histogramas individuais: à esquerda, simulação curta (1 dia); à direita, simulação longa (50 dias). Em destaque (abaixo), a sobreposição das densidades. . .	23

Listas de tabelas

Sumário

Introdução	1
1 O modelo de Lorenz 80 determinístico	3
1.1 Introdução	3
1.2 Breves considerações sobre geofísica	3
1.3 Apresentação do modelo	4
1.4 O modelo de água-rasa	5
1.5 Construção dos modelos	6
1.6 Comparação entre os modelos	9
1.7 Simulações	10
1.7.1 Parâmetros	10
1.7.2 Evolução das variáveis de índice 1	11
1.7.3 Projeções bidimensionais	11
2 Introdução às equações diferenciais estocásticas	13
2.1 Motivação	13
2.2 Considerações estatísticas	14
2.3 Equações diferenciais estocásticas	15
2.3.1 Processo de Wiener	16
2.3.2 Integral estocástica	17
2.4 Simulação de uma equação diferencial estocástica	19
3 Aproximação de sistemas determinísticos	21
3.1 Exemplo simplificado	21
A Considerações matemáticas	25
A.1 Decomposição de Helmholtz	25
B Programas	27

B.1	Lorenz 80 determinístico	27
B.2	Simulação de mercado de ações	29
B.3	Ruído caótico rápido	30
C	Formalismo Mori-Zwanzig	33
C.1	Introdução	33
C.2	Motivação	33
C.3	Preliminares	34
C.3.1	Convertendo sistemas de EDO não lineares como sistemas de EDPs lineares	34
C.3.2	Notação de semigrupo	34
C.3.3	Polinômios Hermitianos	36
C.4	Mori-Zwanzig	36
C.4.1	Construção	36
C.4.2	Análise termo a termo	38

Referências

41

Introdução

Explicar geral do trabalho e motivações

Com o objetivo de organizar o desenvolvimento das ideias e facilitar a leitura, este trabalho está dividido em três capítulos e **três apêndices**.

O capítulo 1 apresenta o modelo de Lorenz 80 em sua formulação determinística. Nele, discutimos a motivação por trás do modelo, sua construção e simulações, com base no artigo original de [Edward N. LORENZ \(1980\)](#).

No capítulo 2, introduzimos o conceito de equações diferenciais estocásticas, abordando os fundamentos matemáticos necessários para sua formulação, além de propriedades teóricas e exemplos ilustrativos.

O capítulo 3 constitui o núcleo deste trabalho, onde realizamos simulações voltadas à aproximação de sistemas determinísticos por meio de ruído estocástico. Essa abordagem é aplicada ao modelo de Lorenz 80, agora sob a abordagem estocástica introduzida por [CHEKROUN et al. \(2021\)](#).

Complementam o texto **três apêndices**: no apêndice A, reunimos considerações matemáticas utilizadas ao longo do trabalho; no apêndice B, disponibilizamos o código-fonte das simulações; e, por fim, o apêndice C trata da construção e aplicação do formalismo de Mori-Zwanzig.

Por fim, conforme as boas práticas no uso responsável de inteligência artificial, o código utilizado neste trabalho foi produzido com auxílio da ferramenta *GitHub Copilot* e o texto foi aperfeiçoado com *Clarice.ai*.

Capítulo 1

O modelo de Lorenz 80 determinístico

1.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar o modelo determinístico Lorenz 80. Para isso, começamos, na seção 1.2, com uma introdução aos conceitos básicos de geofísica, a fim de familiarizar o leitor com os fundamentos dessa área. Em seguida, na seção 1.3, contextualizamos o modelo, discutindo os trabalhos que o precederam e as motivações por trás de sua formulação.

Na seção 1.4, introduzimos o modelo de água rasa, que serve de base para o desenvolvimento do Lorenz 80. A construção deste é detalhada na seção 1.5. Por fim, a seção 1.7 traz simulações computacionais realizadas com o modelo, acompanhadas de uma análise gráfica dos resultados.

1.2 Breves considerações sobre geofísica

Nesta seção, reunimos um breve glossário com os principais conceitos de geofísica que servem de base para a compreensão do modelo de Lorenz 80. Todas as definições expostas abaixo estão detalhadas em [VALLIS \(2017\)](#).

- **Convecção.** Convecção é um processo de transferência de calor que ocorre em fluidos. Esse fenômeno envolve o movimento do próprio fluido e a transferência energia térmica de uma região para outra.
- **Parâmetro de Coriolis.** A *força de Coriolis* é uma quasi-força (ou pseudo-força) que surge devido à rotação da Terra. Quando analisamos o movimento de um corpo em um referencial rotativo, esse corpo parece sofrer a ação de uma força que desvia sua trajetória. Esse desvio é quantificado pelo parâmetro de Coriolis, definido pela expressão:

$$f = 2\Omega \sin(\theta)$$

onde Ω representa a velocidade angular de rotação da Terra e θ é a latitude, ou seja, o ângulo entre a posição do ponto e o equador terrestre.

- **Número de Rossby.** O número de Rossby é a razão entre a magnitude da aceleração relativa e a aceleração de Coriolis. É aproximado por:

$$Ro \equiv \frac{U}{fL},$$

onde U é a magnitude aproximada da velocidade horizontal e L é uma escala de comprimento e f é o parâmetro de Coriolis.

- **Equilíbrio hidrostático.** Matematicamente, a equação do equilíbrio hidrostático é dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g, \quad (1.1)$$

onde: p é a pressão do fluido, z é a coordenada vertical, ρ_0 é a densidade constante do fluido e g é a aceleração da gravidade.

- **Conservação de massa.** Em um escoamento de fluido, a densidade pode variar de acordo com o tempo ou a posição. No entanto, a *quantidade total de massa* do fluido permanece constante. Esse princípio estabelece que a massa não pode ser criada nem perdida durante o movimento.
- **Equações quasi-geostróficas.** As equações quasi-geostróficas são equações amplamente usadas em estudos teóricos da atmosfera e oceano. Elas atendem as seguintes características:
 1. O número de Rossby é pequeno;
 2. A escala do movimento não é significativamente maior do que a escala de deformação;
 3. As variações no parâmetro de Coriolis são pequenas;
 4. As escalas de tempo são advectivas, ou seja, $T = L/U$.
- **Condições de Hardley.** circulação de Hadley é um padrão atmosférico típico da região entre o Trópico de Câncer e o Trópico de Capricórnio. Nessa faixa tropical, o ar quente sobe próximo ao equador, se desloca em altitude para latitudes maiores e desce, formando um ciclo convectivo. As condições que regem este sistema, será utilizado em nossa simulação como as condições ideias da atmosfera, referida como “condições de Hardley”.

1.3 Apresentação do modelo

Edward Norton Lorenz (1917-2008) foi um importante matemático e meteorologista responsável pela publicação de vários artigos com desenvolvimento de modelos na área de meteorologia e geofísica.

O mais famoso deles foi o artigo “*Deterministic Nonperiodic Flow*”, publicado em 1963 E. N. LORENZ (1963). Nele, Lorenz desenvolveu um modelo matemático simplificado para a convecção atmosférica, composto por três equações diferenciais ordinárias, expressas abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (1.2)$$

onde σ é o *número de Prandtl*, que regula a sensibilidade entre x e y ; ρ é o *número de Rayleigh*, associado à magnitude da convecção; e β está ligado à geometria da célula de convecção, influenciando a relação entre as taxas de x e z .

O modelo acima, conhecido como Lorenz 63, é um sistema determinístico desenvolvido para representar sistemas hidrodinâmicos ideais e dissipativos de força. O Lorenz 63 tornou-se amplamente conhecido por sua alta sensibilidade às condições iniciais – pequenas alterações nas variáveis x_0 , y_0 e z_0 podem levar a trajetórias completamente distintas no espaço de fases. Essa sensibilidade extrema é uma característica caótica do modelo.

Em 1980, Lorenz publica o artigo intitulado “*Attractor Sets and Quasi-Geostrophic Equilibrium*” (Edward N. LORENZ, 1980). Neste artigo, Lorenz apresenta a construção e a simulação de dois modelos distintos: o primeiro, é formado a partir das equações primitivas (PE) com nove EDOs (equações diferenciais ordinárias), derivado das equações de águas rasas com topografia e forçamento, enquanto o segundo é um modelo quasi-geostrófico (QG) com 3 EDOs, obtido ao descartar as variáveis associadas ao escoamento divergente x e seus termos correspondentes. O modelo PE contém tanto ondas gravitacionais rápidas quanto oscilações quasi-geostróficas lentas, enquanto o modelo QG mantém apenas estas últimas, em um quadro simplificado para atmosfera de latitudes médias.

1.4 O modelo de água-rasa

O modelo de água rasa descreve um fluido de densidade constante, em equilíbrio hidrostático, que pode ou não estar em rotação. Nele, a escala horizontal é significativamente maior que a profundidade. Esse fluido possui superfície livre e é limitado pelas bordas (VALLIS, 2017). No caso considerado, adotamos a versão de uma única camada.

Para a construção do modelo de água-rasa, consideramos a equação do equilíbrio hidrostático, expressa em (1.1). A partir das manipulações envolvendo os conceitos de momento e conservação de massa, detalhado em VALLIS (2017), obtemos as equações que descrevem o modelo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V + f \mathbf{k} \times V &= -g \nabla \eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta V) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Onde:

- t : tempo;
- \mathbf{r} : vetor de posição inicial;
- $V(t)$: Velocidade horizontal;
- $\eta(t)$: altura da superfície;
- \mathbf{k} : vetor da vertical.

1.5 Construção dos modelos

Nesta seção, apresentaremos a construção dos modelos apresentados no artigo [Edward N. LORENZ \(1980\)](#). Como dito anteriormente, o modelo é construído a partir das equações de água-rasa com algumas particularidades descritas a seguir.

Consideremos um fluido homogêneo e incompressível, ou seja, com densidade constante em todo o volume e volume invariável mesmo sob variações de pressão. O escoamento é predominantemente horizontal, descrito por uma velocidade $V(t, \mathbf{r})$ independente da altura, onde \mathbf{r} representa o vetor de posição inicial.

A componente vertical da velocidade é determinada pela continuidade de massa. A superfície livre do fluido está localizada na altura $H + z(t, \mathbf{r})$, onde H representa a profundidade média e a base se apoia sobre uma topografia variável $h(\mathbf{r})$. Temos também que $h(\mathbf{r})$ e $z(t, \mathbf{r})$ possuem média zero.

O sistema está sujeito à rotação planetária, com um parâmetro de Coriolis constante f . Tanto o campo de velocidades V quanto a elevação da superfície z sofrem dissipação difusiva, associada a movimentos de pequena escala: o termo v representa o coeficiente de difusão viscosa (dissipação de momento) e κ representa o coeficiente de difusão térmica. O modelo também inclui um termo de forçamento externo $F(\mathbf{r})$ e, por fim, adota-se a hipótese de equilíbrio hidrostático.

A partir da descrição acima, podemos construir o seguinte diagrama:

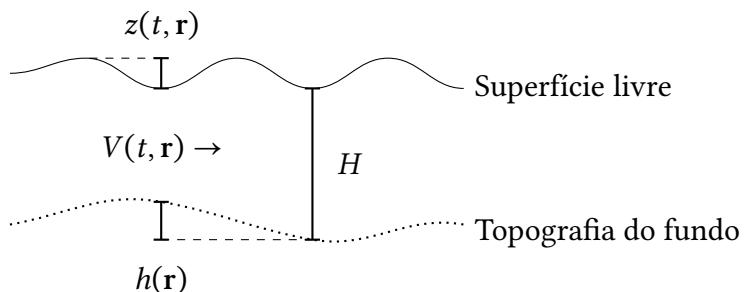


Figura 1.1: Diagrama do modelo de água-rasa adaptado

Além disso, o modelo de água-rasa adaptado é expresso por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(V \cdot \nabla) V - f \mathbf{k} \times V - g \nabla z + \nu \nabla^2 V \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(V \cdot \nabla)(z - h) - (H + z - h) \nabla \cdot V + \kappa \nabla^2 z + F \quad (1.5)$$

Onde:

- H : profundidade média do fluido;
- $h(\mathbf{r})$: variação da superfície topológica;
- $V(t, \mathbf{r})$: Velocidade horizontal;
- $z(t, \mathbf{r})$: altura da superfície;
- F : forças externas;
- κ : coeficiente de difusão viscosa;
- ν : coeficiente de difusão térmica;

Em seguida, aplicamos a *decomposição de Helmholtz*¹ à equação (1.4), escrevendo

$$V = \nabla \chi + \mathbf{k} \times \nabla \psi,$$

onde χ é o potencial de velocidade associado à parte divergente e ψ a função corrente associada à parte rotacional. Dessa forma, $\nabla^2 \chi$ representa a divergência e $\nabla^2 \psi$ a vorticidade. Substituindo essa decomposição obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 (\nabla \chi \cdot \nabla \chi) - \nabla \chi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) \times \mathbf{k} + \nabla^2 (\nabla \chi \cdot \nabla \psi \times \mathbf{k}) \\ &\quad + \nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla \psi) - \frac{1}{2} \nabla^2 (\nabla \psi \cdot \nabla \psi) + \nu \nabla^4 \chi + f \nabla^2 \psi - g \nabla^2 z, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla \chi) - \nabla \psi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) \times \mathbf{k} - f \nabla^2 \chi + \nu \nabla^4 \psi. \quad (1.7)$$

Analogamente, aplicando (1.5), temos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot [(z - h) \nabla \chi] - \nabla \psi \cdot \nabla (z - h) \times \mathbf{k} - H \nabla^2 \chi + \kappa \nabla^2 z + F. \quad (1.8)$$

Nosso objetivo é reduzir as equações (1.6)–(1.8) a um modelo de baixa ordem. Para isso, introduzimos três vetores adimensionais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que satisfazem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

e adotamos as permutações cíclicas

$$(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2).$$

¹Definição apresentada no apêndice A

Definimos então:

$$a_i = \alpha_i \cdot \alpha_i, \quad b_i = \alpha_j \cdot \alpha_k, \quad c = (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)^{1/2}.$$

Lorenz também apresenta uma forma alternativa, equivalente, mais conveniente para a implementação computacional:

$$b_i = \frac{1}{2}(a_i - a_j - a_k), \quad c_i = c.$$

Escolhido um comprimento característico L , construímos três funções ortogonais:

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \cos\left(\alpha_i \cdot \frac{\mathbf{r}}{L}\right),$$

para as quais valem, por exemplo:

$$\begin{aligned} L^2 \nabla^2 \phi_i &= -a_i \phi_i, \\ L^2 \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_k &= -\frac{1}{2} b_{ik} \phi_i + \dots, \\ L^2 \nabla \cdot (\phi_j \nabla \phi_k) &= \frac{1}{2} b_{jk} \phi_i + \dots, \\ L^2 \phi_j \cdot \nabla \phi_k \times \mathbf{k} &= -\frac{1}{2} c_{jk} \phi_i + \dots, \end{aligned}$$

onde os termos omitidos são múltiplos de cosenos. Com essas funções, expandimos as variáveis em série e introduzimos escalas adimensionais:

$$\begin{aligned} t &= f^{-1} \tau, \\ \chi &= 2L^2 f^2 \sum_i x_i \phi_i, \\ \psi &= 2L^2 f^2 \sum_i y_i \phi_i, \\ z &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i z_i \phi_i, \\ h &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i h_i \phi_i, \\ F &= 2L^2 f^2 g^{-1} \sum_i F_i \phi_i. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Substituindo as equações de (1.9) em (1.6)–(1.8), e projetando sobre a base $\{\phi_i\}$, obtemos finalmente o modelo PE de baixa ordem, composto de nove equações diferenciais ordinárias:

$$a_i \frac{dx_i}{d\tau} = a_i b_i x_i x_k - c(a_i - a_k)x_i y_k + c(a_i - a_j)y_i x_k - 2c^2 y_i y_k - \nu_0 a_i^2 x_i + a_i y_i - a_i z_i, \tag{1.10}$$

$$a_i \frac{dy_i}{d\tau} = -a_i b_k x_i y_k - a_i b_i y_i x_k + c(a_k - a_i)y_i y_k - a_i x_i - \nu_0 a_i^2 y_i, \tag{1.11}$$

$$\frac{dz_i}{d\tau} = -b_k x_i(z_k - h_k) - b_i(z_i - h_i)x_k + c y_i(z_k - h_k) - c(z_i - h_i)y_k + g_0 a_i x_i - \kappa_0 a_i z_i + F_i. \tag{1.12}$$

As variáveis x_i representam os modos divergentes do escoamento, associados às ondas de gravidade; as variáveis y_i correspondem aos modos rotacionais (vorticidade), ligados às oscilações quasi-geostróficas; e as variáveis z_i funcionam como variáveis auxiliares acopladas ao sistema. Na classificação em relação à variáveis rápidas e lentas, temos que: x_i corresponde as variáveis rápidas, enquanto y_i e z_i correspondem as variáveis lentas.

Na construção do modelo QG, começamos desprezando todos os termos não lineares, assim como aqueles que envolvem as variáveis x , incluindo a derivada temporal, na equação (1.10). Fazemos o mesmo com os termos não lineares ou topográficos que dependem de x nas equações (1.11) e (1.12). Por fim, eliminamos as variáveis x e z , obtendo ao modelo QG apresentado a seguir:

$$(a_i g_0 + 1) \frac{dy_i}{d\tau} = g_0 c(a_k - a_j)y_j y_k - a_i(a_i g_0 v_0 + \kappa_0)y_i - ch_k y_j + ch_j y_k + F_i, \quad (1.13)$$

1.6 Comparação entre os modelos

É importante destacar que, para apresentação, optei por realizar a comparação entre os modelos tomando apenas a base como critério. Nas seções finais do artigo [Edward N. LORENZ, 1980](#), há uma análise detalhada sobre a estrutura do atrator e sua relação com a variedade invariante, incluindo suas propriedades qualitativas.

Primeiro, consideraremos um modelo dissipativo forçado genérico:

$$\frac{dw_i}{dt} = \sum_{j,k}^N a_{ijk} w_j w_k - \sum_j^N b_{ij} w_j + c_i. \quad (1.14)$$

Nele, definimos

$$A = \sum_{i,j,k}^N a_{ijk} w_i w_j w_k, \quad B = \sum_{i,j}^N b_{ij} w_i w_j > 0, \quad C = \sum_i^N c_i w_i, \quad R^2 = \sum_i^N w_i^2.$$

O termo A é um polinômio cúbico que representa as interações não lineares entre as componentes do sistema, B é um polinômio quadrático que representa a dissipação, C é um polinômio linear associado ao forçamento externo e R é a norma euclidiana ao quadrado, representando a energia total. Além disso, definimos A_1 e C_1 como os máximos de A e C , e B_1 como o mínimo de B .

Os modelos analisados em [Edward N. LORENZ \(1980\)](#) devem satisfazer algumas condições. A primeira é a condição de dissipação:

$$B_1^2 - 4A_1C_1 > 0. \quad (1.15)$$

A segunda é uma restrição sobre os coeficientes do sistema,

$$a_{ijk} = 0 \quad \text{se} \quad j = 1 \quad \text{e} \quad k = i,$$

e, por fim, temos a condição de volume zero: a taxa de variação do volume satisfaz

$$\frac{dV}{dt} = -V \sum_{i=1}^N b_{ii}, \quad (1.16)$$

o que implica que o volume diminui exponencialmente ao longo do tempo devido à dissipação do sistema.

A equação (1.16) mostra que, como B é positivo definido, o volume V tende a zero quando o tempo avança. Isso implica que a dinâmica do sistema se restringe progressivamente a regiões de menor volume no espaço de fase. Qualquer superfície inicial S gera uma sequência S_1, S_2, \dots , cada uma com volume menor que a anterior, até que, no limite, a sucessão de superfícies converge para um subconjunto de dimensão inferior, caracterizando um atrator dissipativo.

Relacionando esse modelo genérico aos modelos construídos, destacam-se dois casos. No modelo QG, a energia total é aproximadamente conservada pelos termos quadráticos, e a dissipação introduzida pelos processos de difusão atua de modo análogo ao termo dissipativo de (1.14), de forma que o atrator possui volume zero. Já no modelo PE, embora a energia total não seja exatamente conservada, se $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ for suficientemente pequeno, a condição (1.15) é satisfeita. Nesse caso, as trajetórias permanecem limitadas e o atrator também apresenta volume zero.

1.7 Simulações

Nesta seção, expor os resultados gráficos das simulações do Lorenz 80 determinístico com o objetivo de apresentar ao leitor o comportamento do modelo visualmente, bem como exibir características e propriedades do modelo.

Para as simulações utilizamos a linguagem *Python*, em particular, bibliotecas *scipy*, *numpy* e *pandas*. O código utilizado está no apêndice B.1.

Apresentaremos dois tipos de simulação: a primeira trata-se da evolução das variáveis x_1 , y_1 e z_1 em relação ao tempo e a segunda são as projeções bidimensionais das variáveis y : $y_3 \times y_2$, $y_1 \times y_3$ e $y_1 \times y_2$.

1.7.1 Parâmetros

Os parâmetros fixos nos dois tipos de simulação: $\kappa = \nu = \frac{1}{48}$, $g_0 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $h_1 = -1$ e $h_2 = h_3 = f_2 = f_3 = 0$.

O único parâmetro que não será igual nas duas simulações será o valor de f_1 . Nas simulações referentes à evolução das variáveis de índice 1, tomamos $f_1 = 0.1$ e nas projeções bidimensionais, tomamos $f_1 = 0.3027$. A escolha de f_1 é uma escolha sensível que muda totalmente o comportamento do sistema, tanto que a escolha de f_1 no modelo Lorenz 80 é tema de alguns artigos científicos posteriores a Edward N. LORENZ (1980).

1.7.2 Evolução das variáveis de índice 1

Tomamos $f_1 = 0.1$ e as condições iniciais são:

$$x_i = y_i = z_i = 0.1, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Para tais valores, obtivemos os seguintes resultados:

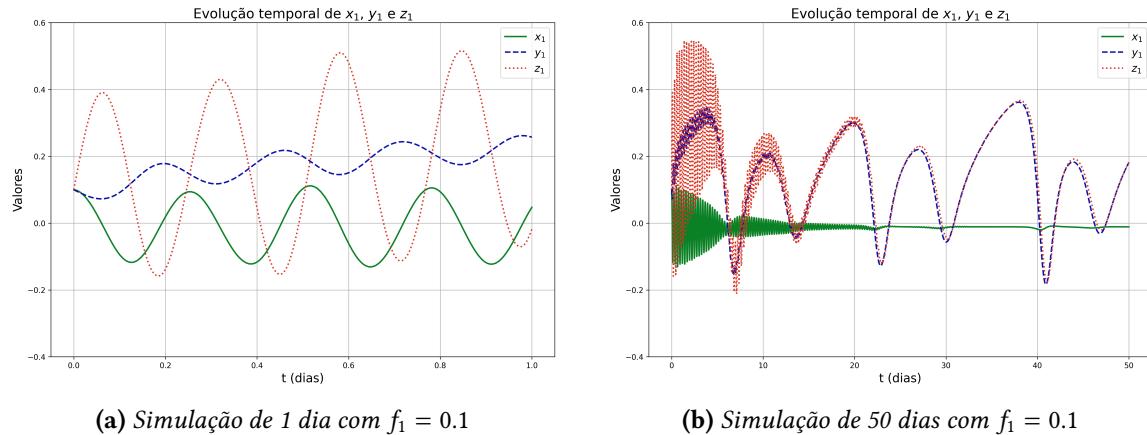


Figura 1.2: Evolução temporal das variáveis x_1 , y_1 e z_1 para $f_1 = 0.1$. À esquerda, de 1 dia e à direita de 50 dias.

Inicialmente, no primeiro dia de simulação (figura 1.2a), observa-se que a variável x_1 apresenta amplitude superior à de y_1 , mas inferior à de z_1 . Além disso, seu período é ligeiramente menor que o das demais variáveis. Esse comportamento reflete a natureza de x_1 como uma variável rápida, associada às oscilações do tipo onda gravitacional.

Na figura 1.2b, após 50 dias de simulação, nota-se uma redução significativa da amplitude de x_1 , acompanhada por oscilações mais rápidas e de menor intensidade. Isso é consistente com a dissipação progressiva das ondas gravitacionais, um efeito esperado devido à presença de termos dissipativos no modelo.

Com relação às variáveis lentas y_1 e z_1 , percebe-se na figura 1.2a que z_1 possui a maior amplitude, enquanto y_1 apresenta a menor. Ambas têm períodos semelhantes. Já na figura 1.2b, observa-se que y_1 e z_1 passam a exibir comportamento oscilatório sincronizado, com amplitudes mais próximas.

Esse acoplamento dinâmico evidencia a convergência das trajetórias do sistema para o atrator, que no contexto do modelo. Essa convergência e sincronização indicam que, ao longo do tempo, a solução do sistema se aproxima de um regime dominado por oscilações de baixa frequência e mais regulares enquanto as componentes associadas a modos rápidos (como x_1) são dissipadas (Edward N. LORENZ, 1980).

1.7.3 Projeções bidimensionais

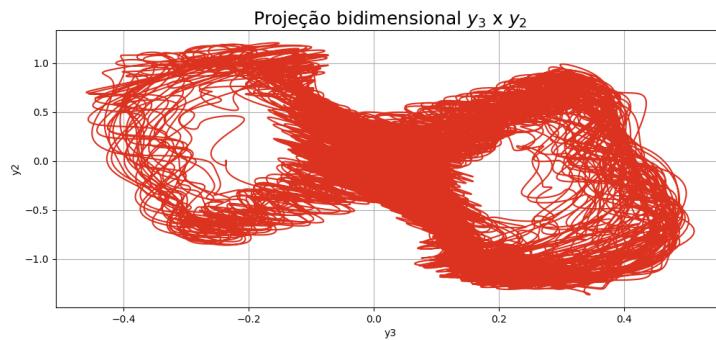
Para as projeções bidimensionais, utilizamos $f_1 = 0.3027$ e as variáveis iniciais com as condições de Hardley expressas matematicamente abaixo:

$$y_1 = \frac{f_1}{a_1 v_0 \cdot (1 + a_1 g_0)}, \quad x_1 = -v_0 a_1 y_1 \quad \text{e} \quad z_1 = y_1$$

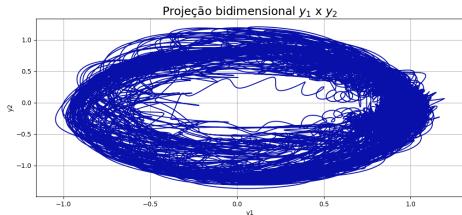
Com pequenas perturbações em y_2 e z_2 :

$$y_2 = -1 \times 10^{-5} \quad \text{e} \quad z_2 = 1 \times 10^{-5},$$

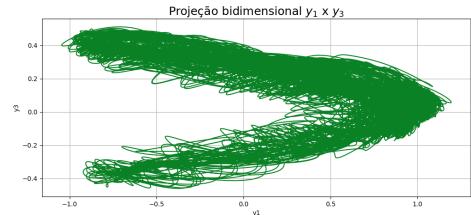
e as demais variáveis foram fixadas em zero. As simulações foram realizadas ao longo de 400 dias, sendo descartados os 10% iniciais dos dados, correspondentes à fase transitória em que o sistema ainda está evoluindo até se ajustar ao formato do atrator. Assim, obtiveram-se os seguintes resultados:



(a) Projeção no plano (y_3, y_2)



(b) Projeção no plano (y_1, y_2)



(c) Projeção no plano (y_1, y_3)

Figura 1.3: Projeções do modelo L80 para $f_1 = 0.3027$.

O principal objetivo destas simulações projetadas bidimensionalmente é evidenciar o comportamento de atrator caótico característico do sistema. Note que, através da imagem, pode-se evidenciar a aperiodicidade do sistema, junto com o fato de que não há um ponto de convergência quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, vale ressaltar também que, dado que o sistema é sensível às condições iniciais, especialmente ao valor de f_1 , temos que os valores que constituem o atrator nesta condição não se repetem se as condições iniciais forem distintas. Por fim, ponto importante é que as trajetórias permanecem confinadas em uma região limitada do espaço de fases, não divergindo para o infinito.

Capítulo 2

Introdução às equações diferenciais estocásticas

Neste capítulo, faremos uma introdução às equações diferenciais estocásticas (EDEs). Iniciaremos na Seção 2.1 com a apresentação de um problema motivador, que nos ajudará a entender a necessidade e a utilidade das EDEs. Na sequência, na Seção 2.2, reuniremos algumas definições estatísticas fundamentais que serão utilizadas ao longo do texto.

Em seguida, na Seção 2.3, discutiremos os principais conceitos que compõem uma EDE e sua solução — como o movimento browniano (também conhecido como processo de Wiener) e a definição de integral estocástica. Também abordaremos, ainda que brevemente, o teorema de existência e unicidade para esse tipo de equação.

Por fim, com base em todas essas considerações, retornaremos ao problema motivador inicial e realizaremos uma simulação computacional utilizando a linguagem Julia, com foco na biblioteca SciML: Open Source Software for Scientific Machine Learning.

As principais referências utilizadas neste capítulo são: [EVANS \(2014\)](#) e [PAVLIOTIS \(2014\)](#).

2.1 Motivação

Para iniciar a introdução às equações diferenciais estocásticas (EDEs), vamos apresentar a motivação para o seu estudo. Começamos com uma equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $t > 0$, $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um vetor suave, e $\mathbf{x}(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa a trajetória do sistema ao longo do tempo. O sistema (2.1) é classificado como determinístico, pois, uma vez conhecida a condição inicial, a trajetória do sistema é totalmente determinada, conforme garante o Teorema de Existência e Unicidade.

Contudo, suponha que desejamos modelar a evolução de um fenômeno sujeito a

incertezas. Em outras palavras, queremos aplicar o mesmo princípio das equações diferenciais ordinárias a um processo aleatório. Para isso, utilizamos as equações diferenciais estocásticas. Esse tipo de equação é definido como:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\xi(t) \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $X(t) \in \mathbb{R}^d$, $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, e $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d \times m}$. Usamos a notação $\xi(t) = \frac{dW}{dt}$ para denotar (de forma formal) a derivada do movimento Browniano em \mathbb{R}^m , ou seja, um processo de ruído branco — um vetor Gaussiano generalizado, de média zero.

Como exemplo motivador para o uso de EDEs, consideremos a evolução do preço de uma ação na bolsa de valores ao longo do tempo. Esse preço é influenciado por diversos fatores externos, o que introduz um grau de incerteza quanto ao seu comportamento futuro. Assim, podemos modelá-lo por meio de uma EDE:

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \\ S(0) = s_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Nessa equação, $\frac{dS}{S}$ representa a variação relativa do preço da ação ao longo do tempo; μ é uma constante que representa a taxa média de crescimento; e σ expressa a volatilidade, ou seja, a incerteza associada aos diversos fatores que influenciam no preço.

Antes de continuar com esse exemplo, apresentaremos a base teórica necessária para a formulação da equação (2.3), bem como suas propriedades.

2.2 Considerações estatísticas

Primeiramente, é importante destacar que parte das definições apresentadas nesta seção fazem uso da teoria da medida no contexto da teoria das probabilidades. Embora esses conceitos não sejam abordados neste trabalho, o leitor interessado em se aprofundar no tema pode recorrer a [EVANS \(2014\)](#), que oferece uma excelente (e rápida) introdução ao assunto.

Definição 2.1 (Processo Estocástico). *Uma coleção $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ de variáveis aleatórias é chamada de processo estocástico.*

Definição 2.2 (Filtração). *Seja $W(\cdot)$ um processo estocástico. Denotamos por $\mathcal{W}(t) := \sigma(W(s) : 0 \leq s \leq t)$ a σ -álgebra gerada por W até o tempo t , isto é, o conjunto de todos os eventos observáveis do processo até esse instante.*

Dizemos que uma família $\mathcal{F}(\cdot)$ de σ -álgebras $\subseteq \mathcal{U}$ é uma filtração (com respeito a $W(\cdot)$) se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{F}(s)$ para todo $t \geq s \geq 0$;

2. $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{W}(t)$ para todo $t \geq 0$;
3. $\mathcal{F}(t)$ é independente de $\mathcal{W}^+(t) := \sigma(W(u) - W(t) : u > t)$ para todo $t \geq 0$.

Definição 2.3 (\mathcal{F} -mensurabilidade). Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade. Dizemos que uma função

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é \mathcal{F} -mensurável se, para todo boreiano $B \subseteq \mathbb{R}^n$, a pré-imagem

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

pertence a \mathcal{F} .

Definição 2.4 (Martingale). Seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ uma filtração definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, e seja $\{\mathcal{M}_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo adaptado a \mathcal{F}_t , com $\mathcal{M}_t \in L^1(0, T)$. Dizemos que \mathcal{M}_t é uma martingala em relação a \mathcal{F}_t se

$$\mathbb{E}[\mathcal{M}_t | \mathcal{F}_s] = \mathcal{M}_s \quad \forall t \geq s.$$

2.3 Equações diferenciais estocásticas

Dadas as considerações estatísticas, passemos para a construção da equação (2.1), reproduzida novamente a seguir:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t)) \xi(t), \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

A solução $X(\cdot)$ é então expressa como:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dW_s. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) possui uma solução bem definida, garantida pelo Teorema de Existência e Unicidade para equações diferenciais estocásticas, cuja demonstração completa pode ser consultada em EVANS (2014). Esse resultado possui papel fundamental, assim como no caso das equações diferenciais ordinárias, pois assegura não apenas que uma solução existe, mas que ela é única dadas as condições iniciais especificadas. Tal garantia é essencial para que a modelagem estocástica tenha validade teórica e aplicação prática.

Para que o sistema (2.3) esteja completamente definido, ainda é necessário esclarecer dois elementos fundamentais: a natureza do ruído $\xi(t)$ e a interpretação da integral estocástica $\int_0^t f(s, X(s)) dW_s$. Nesta seção, abordaremos em detalhes esses dois conceitos, explorando suas definições formais e principais propriedades, a fim de justificar rigorosamente a formulação do modelo estocástico apresentado.

2.3.1 Processo de Wiener

Desenvolvimento histórico

Um dos elementos fundamentais para o estudo de equações diferenciais estocásticas é o *movimento browniano*. Trata-se de um fenômeno físico que envolve o estudo do movimento de grãos de pólen suspensos na água.

Historicamente, o problema foi inicialmente proposto e estudado por Robert Brown entre 1826 e 1827. Em seus estudos, Brown observou que a trajetória das partículas era irregular e que o movimento de duas partículas distintas parecia ser independente. Em 1905, Albert Einstein retomou o problema, relacionando-o à equação da difusão.¹

Finalmente, na década de 1920, o fenômeno foi formalizado matematicamente por Norbert Wiener. Essa formalização é crucial para a definição rigorosa do movimento browniano, tanto que outra forma de referir-se a ele é *processo de Wiener* – forma que utilizaremos a fim de diferenciar do problema físico original.

Definição e propriedades

Definição 2.5. Um processo estocástico real, denotado por $W(\cdot)$ é chamado de processo de Wiener padrão quando satisfaz as seguintes propriedades:

1. $W(0) = 0$, quase certamente;
2. Para todo $t \geq s \geq 0$, tem-se que $W(t) - W(s) \sim \text{Normal}(0, t - s)$;
3. $W(\cdot)$ possui incrementos independentes, isto é, para $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, as variáveis aleatórias

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}) \text{ são independentes.}$$

(EVANS, 2014)

A função densidade de probabilidade do processo de Wiener padrão unidimensional, definido como $W(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, é dada por:

$$f(x; t, s) = (2\pi(t - s))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t - s)}\right).$$

No caso do processo de Wiener padrão n -dimensional, $W(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde cada componente $W_i(t)$, com $i = 1, \dots, n$, é um processo de Wiener unidimensional independente, a função densidade do vetor gaussiano aleatório $W(t) - W(s)$ é dada por:

$$g(\mathbf{x}; t, s) = (2\pi(t - s))^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2(t - s)}\right).$$

As principais propriedades do processo de Wiener padrão são:

¹ Detalhes em EVANS (2014)

1. **Reescalonamento.** Para cada $c > 0$, defina $X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} W(ct)$. Então $(X_t, t \geq 0) = (W_t, t \geq 0)$.
2. **Translação.** Para cada $c > 0$, $W_{c+t} - W_c$, $t \geq 0$, é um processo de Wiener que é independente de W_u , $u \in [0, c]$.
3. **Reversão no tempo.** Defina $X_t = W_{1-t} - W_1$, $t \in [0, 1]$. Então $(X_t, t \in [0, 1]) = (W_t, t \in [0, 1])$.
4. **Inversão.** Seja X_t , $t \geq 0$, definido por $X_0 = 0$, $X_t = t W(1/t)$. Então $(X_t, t \geq 0) = (W_t, t \geq 0)$.

(PAVLIOTIS, 2014)

2.3.2 Integral estocástica

Nesta seção, vamos definir uma integral estocástica, representada genericamente abaixo:

$$I(t) = \int_0^t f(s) dW_s. \quad (2.5)$$

Para definir o que significa uma integral estocástica, seguiremos a abordagem de EVANS (2014). A partir dela, definiremos a integral de Itô e suas propriedades, além de mencionar a integral de Stratonovich conforme apresentada por PAVLIOTIS (2014).

Inicialmente, é importante destacar que EVANS (2014) introduz a definição de $\int_0^t f(\cdot) dW$ em três etapas: primeiro, quando $f(\cdot)$ é uma função determinística simples (constante por partes); em seguida, quando $f(\cdot)$ é determinística geral em $L^2([0, T])$; e, por fim, quando $f(\cdot)$ é um processo estocástico adaptado mais geral.

Embora todos os casos estejam bem definidos, focaremos apenas neste último, aquele em que $f(\cdot)$ é um processo estocástico adaptado, por ser o mais relevante para os nossos objetivos. Essa escolha também se justifica pelo fato de PAVLIOTIS (2014) adotar abordagem semelhante, ainda que de forma menos detalhada.

Assumiremos, portanto, que f pertence a $L^2([0, t] \times \Omega)$, isto é:

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t f(s)^2 ds \right) < \infty. \quad (2.6)$$

Além disso, assumimos que o integrando $f(t)$ é \mathcal{F}_t -mensurável, onde \mathcal{F}_t é a filtragem gerada pelo movimento browniano $W(t)$. No nosso contexto, a partir da definição 2.2, isso significa que f depende apenas da informação disponível até o instante t , ou, de forma equivalente, não depende do futuro.

Dadas essas considerações em relação à função f , voltemos à equação (2.5). Primeiro, tomamos um intervalo $[0, T]$, sem seguida, definimos uma partição P deste intervalo:

$$P := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}.$$

Para $0 \leq \lambda \leq 1$ fixado e P uma partição de $[0, T]$, definimos

$$\tau_k := (1 - \lambda)t_k + \lambda t_{k+1} \quad k = 0, \dots, m - 1. \quad (2.7)$$

Para a partição P e para $0 \leq \lambda \leq 1$, definimos

$$\sum_{k=0}^{m-1} f(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

A partir do conceito de aproximação de Riemann, tomamos $m \rightarrow \infty$ e podemos definir a integral $I(t)$ da seguinte forma:

$$I(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} f(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)). \quad (2.8)$$

Temos que a definição de (2.8) depende da escolha de $\lambda \in [0, 1]$ em (2.7). Se $\lambda = 0$, obtemos a integral estocástica de Itô:

$$I_I(t) := \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K-1} f(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = \int_0^t f(s) dW_s.$$

Se tomarmos $\lambda = \frac{1}{2}$. definimos a integral estocástica de Stratonovich:

$$I_S(t) := \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K-1} f\left(\frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})\right)(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = \int_0^t f(s) \circ dW_s.$$

Ambas são duas formas diferentes de abordar a mesma questão, porém cada uma contém suas vantagens. Em relação a forma de Itô, temos que

1. Valem as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^t f(s) dW_s\right) &= 0 \\ \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t f(s) dW_s\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t f^2(s) ds\right) \end{aligned}$$

2. I_s é um *martingale* (vide definição 2.4)

(EVANS, 2014)

Em relação a forma de Stratonovich, temos as seguintes vantagens:

1. A regra da cadeia usual é válida.
2. As soluções de EDEs são estáveis em relação a mudanças nos termos aleatórios.

(EVANS, 2014)

2.4 Simulação de uma equação diferencial estocásticas

Dadas as considerações teóricas, voltaremos ao problema motivador.

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \\ S(0) = s_0, \end{cases}$$

Aplicando a regra da cadeia de Itô, temos que a solução do problema é dada por:

$$S(t) = s_0 \cdot \exp \left(\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} t \right) \right)$$

Dada toda teoria exposta, sabemos que o resultado está bem definido. Mais que isso, a partir dele podemos realizar uma simulação computacional utilizando a biblioteca *SciML: Open Source Software for Scientific Machine Learning* ([RACKAUCKAS e NIE, 2017](#)). O código-fonte correspondente pode ser consultado no Apêndice B.2.

Para a simulação, adotamos os seguintes parâmetros: $\mu = 0,05$, representando uma taxa de crescimento anual; $\sigma = 1,0$, quantificando a volatilidade do mercado no período considerado; e um passo de tempo de $\frac{1}{365 \cdot 24}$, o que corresponde à variação por hora dos preços. Estabelecemos ainda o preço inicial da ação em R\$ 12,00. Com base nesses parâmetros, obtivemos o gráfico a seguir:



Figura 2.1: Simulação do preço de uma ação a partir da EDE (2.3)

Vale destacar que: por se tratar de um fenômeno aleatório, temos que diferentes simulações geram diferentes resultados. Contudo, nas simulações computacionais, é possível definir o valor de uma *seed* garantindo reproduzibilidade do código.

Capítulo 3

Aproximação de sistemas determinísticos

3.1 Exemplo simplificado

A seguir, apresentemos um exemplo retirado de [PAVLIOTIS e STUART \(2008\)](#) de uma aproximação de um sistema determinístico para um sistema estocástico. Tal exemplo é relevante, pois trata-se de uma abordagem simplificada do que vamos realizar com o modelo de Lorenz 80.

O exemplo trata-se de um movimento browniano, assim como apresentado em na seção ?? acoplado ao sistema Lorenz 63 apresentado em 1.2 a partir das variáveis $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$. O exemplo em questão é expresso por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - x^3 + \frac{\lambda}{\varepsilon} y_2, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{10}{\varepsilon^2} (y_2 - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon^2} (28y_1 - y_2 - y_1 y_3), \\ \frac{dy_3}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon^2} (y_1 y_2 - \frac{8}{3} y_3). \end{aligned} \tag{3.1}$$

EXEMPLIFICAR POR QUE PODEMOS APROXIMAR

Podemos aproximar o modelo para sua versão estocástica forma de Itô:

$$\frac{dX}{dt} = X - X^3 + \sigma \frac{dW}{dt}, \tag{3.2}$$

Onde σ é expresso por:

$$\sigma^2 = 2\lambda^2 \int_0^\infty \frac{1}{T} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \psi^s(y) \psi^{t+s}(y) ds \right) dt. \tag{3.3}$$

A partir das equações apresentadas, podemos realizar simulações computacionais. Novamente, as simulações foram realizadas com o uso da biblioteca *SciML* ([RACKAUCKAS e NIE, 2017](#)) e os programas que geraram os dados estão no apêndice B.

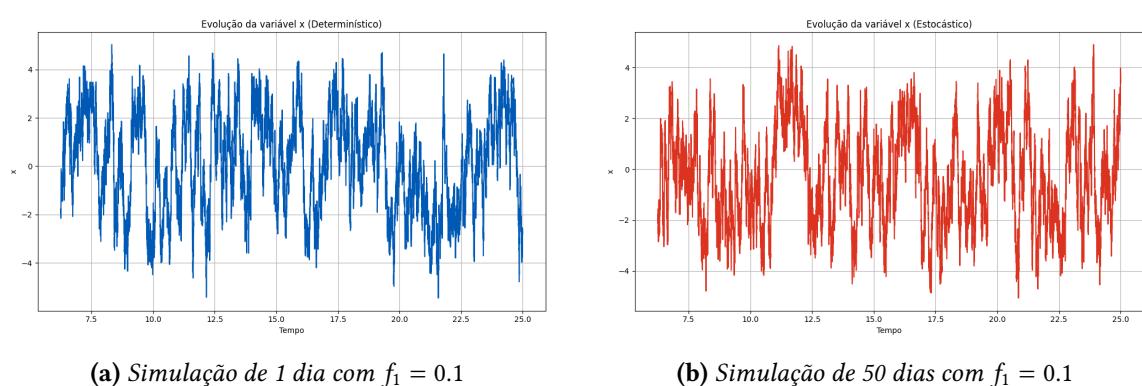


Figura 3.1: Evolução temporal das variáveis x_1 , y_1 e z_1 para $f_1 = 0.1$. À esquerda, simulação curta (1 dia). À direita, simulação longa (50 dias).

3.1 | EXEMPLO SIMPLIFICADO

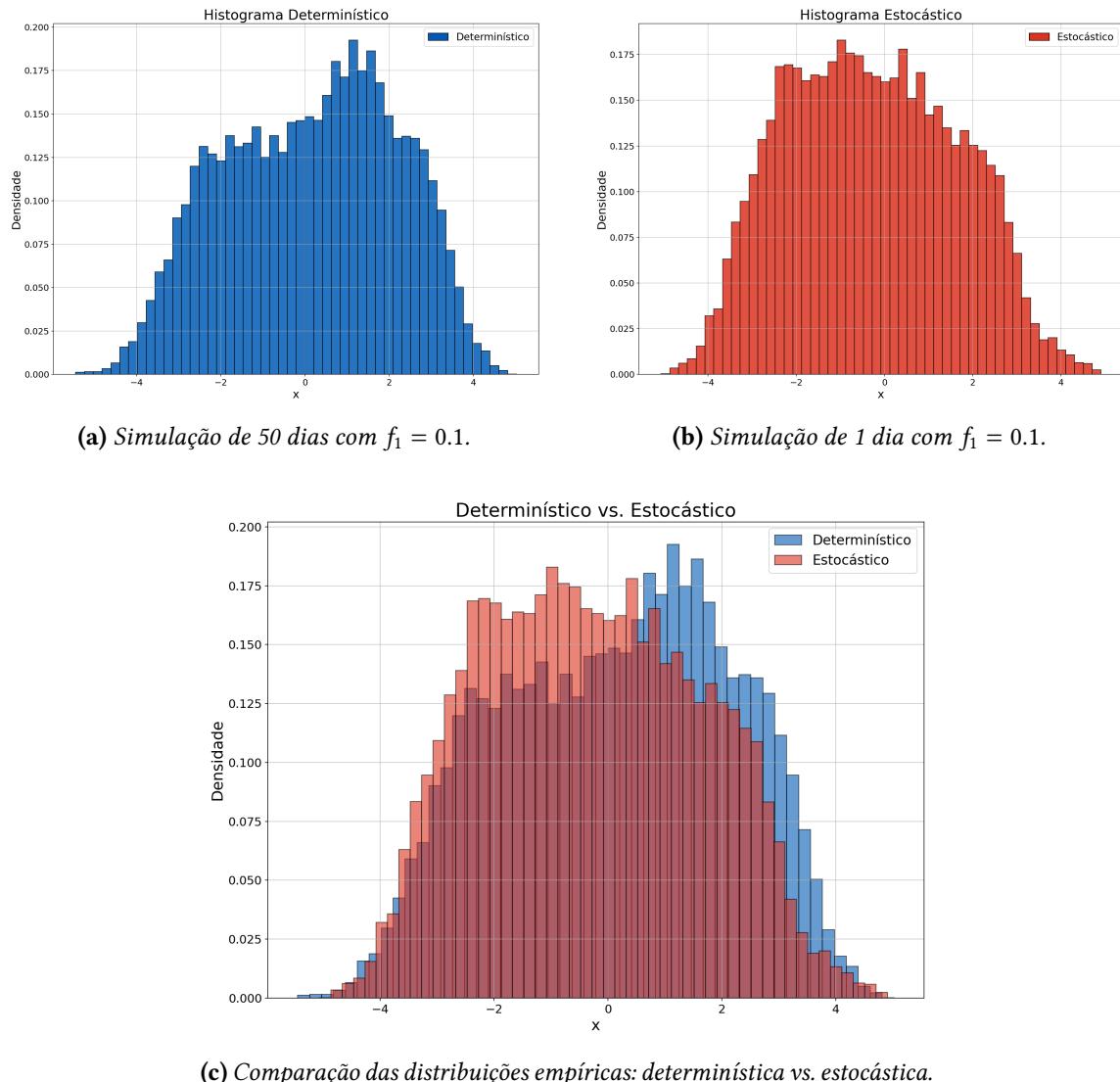


Figura 3.2: Histogramas e comparações das simulações para $f_1 = 0.1$. Acima, histogramas individuais: à esquerda, simulação curta (1 dia); à direita, simulação longa (50 dias). Em destaque (abaixo), a sobreposição das densidades.

Apêndice A

Considerações matemáticas

A.1 Decomposição de Helmholtz

Apêndice B

Programas

B.1 Lorenz 80 determinístico

```

1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_ivp
3 import pandas as pd
4 from pathlib import Path
5
6 a = [1, 1, 3]
7 b = [
8     0.5 * (a[0] - a[1] - a[2]),
9     0.5 * (a[1] - a[2] - a[0]),
10    0.5 * (a[2] - a[0] - a[1]),
11 ]
12 c = np.sqrt(b[0]*b[1] + b[1]*b[2] + b[2]*b[0])
13
14 h = [-1, 0, 0]
15 f = [0.3027, 0, 0]
16 g_0 = 8
17 kappa_0 = 1 / 48
18 nu_0 = kappa_0
19
20 def pe_model(t, u):
21     x = u[0:3]
22     y = u[3:6]
23     z = u[6:9]
24     dx = np.zeros(3)
25     dy = np.zeros(3)
26     dz = np.zeros(3)
27     for i in range(3):
28         j = (i + 1) % 3
29         k = (i + 2) % 3
30         dx[i] = (
31             a[i] * b[i] * x[j] * x[k]

```

```

32             - c * (a[i] - a[k]) * x[j] * y[k]
33             + c * (a[i] - a[j]) * y[j] * x[k]
34             - 2 * c**2 * y[j] * y[k]
35             - nu_0 * (a[i]**2) * x[i]
36             + a[i] * y[i]
37             - a[i] * z[i]
38         ) / a[i]
39         dy[i] = (
40             -a[k] * b[k] * x[j] * y[k]
41             - a[j] * b[j] * y[j] * x[k]
42             + c * (a[k] - a[j]) * y[j] * y[k]
43             - a[i] * x[i]
44             - nu_0 * (a[i]**2) * y[i]
45         ) / a[i]
46         dz[i] = (
47             -b[k] * x[j] * (z[k] - h[k])
48             - b[j] * (z[j] - h[j]) * x[k]
49             + c * y[j] * (z[k] - h[k])
50             - c * (z[j] - h[j]) * y[k]
51             + g_0 * a[i] * x[i]
52             - kappa_0 * a[i] * z[i]
53             + f[i]
54         )
55     return np.concatenate([dx, dy, dz])
56
57 def simulate(x0, y0, z0, days):
58     initial_u = np.concatenate([x0, y0, z0])
59     t_final = days * 8
60     t_span = (0, t_final)
61     sol = solve_ivp(pe_model, t_span, initial_u, method="RK45", atol=1
62                     e-8, rtol=1e-6)
63     return sol.t / 8, sol.y[:3].T, sol.y[3:6].T, sol.y[6:].T
64
65 days = 400
66
67 # HARDLEY
68 y1 = f[0]/(a[0]*nu_0*(1+a[0]*g_0))
69 x1 = -nu_0*a[0]*y1
70 z1 = y1
71
72
73 x0 = [x1, 0, 0]
74 y0 = [y1, -(10 ** (-5)), 0]
75 z0 = [z1, 10 ** (-5), 0]
76
77 """
78 # DEFAULT
79

```

B.2 | SIMULAÇÃO DE MERCADO DE AÇÕES

```

80 x0 = [0.1,0.1,0.1]
81 y0 = [0.1,0.1,0.1]
82 z0 = [0.1,0.1,0.1]
83 """
84
85 t, x, y, z = simulate(x0, y0, z0, days)
86
87 x = np.asarray(x)
88 y = np.asarray(y)
89 z = np.asarray(z)
90 t = np.squeeze(np.asarray(t))
91
92 df = pd.DataFrame(
93     {
94         "time": t,
95         "x1": x[:, 0],
96         "x2": x[:, 1],
97         "x3": x[:, 2],
98         "y1": y[:, 0],
99         "y2": y[:, 1],
100        "y3": y[:, 2],
101        "z1": z[:, 0],
102        "z2": z[:, 1],
103        "z3": z[:, 2],
104    }
105 )
106
107 BASE = Path(__file__).resolve().parent
108 DATADIR = BASE / "data"
109 DATADIR.mkdir(parents=True, exist_ok=True)
110 out_file = DATADIR / "f03027d400_cond_hardley.csv"
111 df.to_csv(out_file, index=False)
112
113 print(f"CSV salvo em: {out_file}")

```

Programa B.1: Simulação do modelo Lorenz 80 determinístico

B.2 Simulação de mercado de ações

```

1 using DifferentialEquations, DataFrames, CSV
2 import StochasticDiffEq as SDE
3
4 f(u,p,t) = mu*u
5 g(u,p,t)= sigma
6 dt = 1/(365*24)
7 mu = 0.05
8 sigma = 1.0
9 tspan = (0.0, 1.0)

```

```

10 u0= 12
11 prob = SDEProblem(f,g,u0,tspan, seed=13865062)
12 sol = SDE.solve(prob, EM(), dt = dt);
13
14 df = DataFrame(t = sol.t, x = sol.u)
15 cd(@__DIR__)
16 CSV.write("data/stock_market.csv", df)
17 println("Dados salvos em: data/stock_market.csv")

```

Programa B.2: Simulação da evolução de preço de mercado de ações

B.3 Ruído caótico rápido

```

1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 from scipy.integrate import solve_ivp
4 from pathlib import Path
5
6 eps = 0.01
7 lam = 1.0
8
9 def rhs(t, u):
10     x, y1, y2, y3 = u
11     dx = x - x**3 + (lam/eps) * y2
12     dy1 = (10 / eps**2) * (y2 - y1)
13     dy2 = (1 / eps**2) * (28*y1 - y2 - y1*y3)
14     dy3 = (1 / eps**2) * (y1*y2 - (8/3)*y3)
15     return [dx, dy1, dy2, dy3]
16
17 t0, tf = 0.0, 25.0
18 x0 = 0.1
19 y0_vals = [1e-2, 1e-2, 1e-2]
20 y0 = [x0] + y0_vals
21 t_eval = np.arange(t0, tf, 1e-3)
22
23 sol = solve_ivp(rhs, (t0, tf), y0, method="RK45", t_eval=t_eval, rtol
24 =1e-4, atol=1e-6)
25
26 x_vals = sol.y[0]
27 y2_vals = sol.y[2]
28
29 BASE = Path(__file__).resolve().parent if "__file__" in globals() else
30 Path("."))
31 DATADIR = BASE / "data"
32 DATADIR.mkdir(parents=True, exist_ok=True)
33 df = pd.DataFrame({"t": sol.t, "y2": y2_vals, "x": x_vals})
34 df.to_csv(DATADIR / "deterministico.csv", index=False)

```

```
34 print(f"Dados salvos em: {DATADIR / 'deterministico.csv'}")
```

Programa B.3: Simulação do modelo determinístico

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import os
4
5 def sigma_from_y2(y2, dt, lam=1.0):
6     y = y2 - np.mean(y2)
7     n = len(y)
8     nfft = n
9     fy = np.fft.rfft(y, n=nfft)
10    ac = np.fft.irfft(fy * np.conj(fy), n=nfft)[:n] / np.arange(n, 0,
-1)
11    sigma2 = abs(2 * lam**2 * dt * np.sum(ac))
12    return np.sqrt(max(sigma2, 0.0))
13
14
15 csv_path = os.path.join(os.path.dirname(__file__), "data", "deterministico.csv")
16 df = pd.read_csv(csv_path)
17 dt = df["t"][1] - df["t"][0]
18 sigma = sigma_from_y2(df["y2"].to_numpy(), dt)
19 print("σ =", sigma)
```

Programa B.4: Cálculo do σ

```
1 using DifferentialEquations, Plots, DataFrames, CSV, Random
2
3
4 sigma = 7.879942813768798
5 x0 = 0.1
6 tspan = (0.0, 25.0)
7
8 f1(X, p, t) = X - X^3
9 f2(X, p, t) = p
10
11 prob = SDEProblem(f1, f2, x0, tspan, sigma)
12 solucao_estocastico = solve(prob, EM(), dt = 1e-3, seed = 13865062)
13
14 df = DataFrame(t = solucao_estocastico.t, x = solucao_estocastico.u)
15 cd(@_DIR__)
16 CSV.write("data/estocastico.csv", df)
17 println("Dados estocásticos salvos em: data/estocastico.csv")
```

Programa B.5: Simulação sistema estocástico

Apêndice C

Formalismo Mori-Zwanzig

C.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos o formalismo de Mori-Zwanzig (MZ). Para isso iniciamos com uma breve discussão sobre o formalismo MZ e sua importância no contexto deste trabalho (seção C.2). Em seguida, revisamos conceitos matemáticos fundamentais para sua formulação, como o operador de Liouville, a notação de semigrupos e os polinômios hermitianos (seção C.3). Por fim, na seção C.4, desenvolvemos o formalismo passo a passo, analisando cada termo de forma detalhada.

Como referência utilizamos o trabalho do matemático Alexandre J. Chorin: **CHORIN, HALD e KUPFERMAN (2000)**, **CHORIN, HALD e KUPFERMAN (2002)** e, principalmente, **CHORIN e HALD (2013)**.

C.2 Motivação

O método de Mori-Zwanzig, desenvolvido por Robert Walter Zwanzig e Hajime Mori na segunda metade do século XX, é utilizado em sistemas hamiltonianos. Esse método consiste em classificar as variáveis do sistema em duas categorias: “resolvidas” e “não resolvidas”. As variáveis resolvidas são aquelas cujos comportamentos e valores são bem conhecidos, enquanto as não resolvidas são aquelas para as quais não se possui informações diretas. Para substituir essas variáveis não resolvidas, o método introduz termos estocásticos, denominados ruídos (*noise*), além de um termo de amortecimento (*damping*), também conhecido como termo de memória (*memory term*). Essa abordagem permite que o comportamento do sistema de interesse seja preservado de maneira adequada, mesmo sem conhecer completamente as variáveis não resolvidas.

O principal objetivo do artigo de **CHEKROUN et al. (2021)** é simplificar o modelo de Lorenz 80, preservando seu comportamento. Para isso, utilizaremos o método de Mori-Zwanzig, que é uma abordagem física-estatística aplicável em sistemas como o L80. Dada a relevância deste método para o trabalho de **CHEKROUN et al. (2021)**, optamos por incluir uma introdução ao formalismo de Mori-Zwanzig, a fim de proporcionar uma melhor

compreensão de sua aplicação no contexto do modelo de Lorenz 80 e permitir uma base teórica sólida para eventuais explorações.

C.3 Preliminares

C.3.1 Convertendo sistemas de EDO não lineares como sistemas de EDPs lineares

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) dado por:

$$\frac{d}{dt}\varphi(x, t) = R(\varphi(x, t)), \quad \varphi(x, 0) = x, \quad (\text{C.1})$$

onde R é uma função não linear, φ é uma função dependente do tempo, e R , φ e x podem assumir dimensões infinitas, sendo formados pelos vetores R_i , φ_i e x_i , respectivamente.

A partir disso, podemos definir o *Operador de Liouville* associado à equação (C.1) como:

$$L = \sum_i R_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{C.2})$$

Utilizando o *Operador de Liouville*, podemos transformar o sistema de EDOs não lineares em um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) lineares da forma:

$$u_t = Lu, \quad u(x, 0) = g(x) \quad (\text{C.3})$$

A solução desse sistema existe, é única, e é dada por:

$$u(x, t) = g(\varphi(x, t)) \quad (\text{C.4})$$

Portanto, temos que a equação (C.3) é bem definida.¹

C.3.2 Notação de semigrupo

Tomemos X um conjunto não vazio, dotado de uma operação binária $*$, ou seja, $X \times X \rightarrow X$, que satisfaz a propriedade de associatividade:

$$(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in X.$$

A notação de semigrupo oferece uma forma compacta e eficiente de representar soluções para equações diferenciais, particularmente as parciais ou de evolução.

Considere o operador Δ definido por:

$$\Delta\psi = \psi_{xx}, \quad \text{onde } \psi \text{ é uma função suave.}$$

¹ Detalhes da demonstração podem ser encontrados em CHORIN e HALD (2013, p. 181-182)

Agora, considere a equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} - kv = 0, \quad v(0) = v_0,$$

cuja solução é bem conhecida: $v(t) = v_0 e^{kt}$.

De forma análoga, considere a equação do calor:

$$v_t - \frac{1}{2}\Delta v = 0, \quad v(x, 0) = \varphi(x),$$

onde v_t é a derivada de v em relação ao tempo e $\varphi(x)$ é a condição inicial. Em vez de resolver diretamente, expressamos a solução utilizando a notação de semigrupo:

$$v(t) = e^{\frac{1}{2}t\Delta} \varphi.$$

Aqui, $E^{\frac{1}{2}t\Delta}$ é um operador semigrupo gerado pela operação de difusão (pelo operador Δ). Ele é aplicado à condição inicial $\varphi(x)$, e a solução $v(t)$ descreve a evolução temporal de $v(x, t)$ ao longo do tempo t . Essa notação permite representar soluções de equações diferenciais de maneira compacta, explorando a estrutura associativa da operação de semigrupo. Especificamente, ela satisfaz a propriedade de composição:

$$e^{\frac{1}{2}(t+s)\Delta} = e^{\frac{1}{2}t\Delta} e^{\frac{1}{2}s\Delta}.$$

Dada a notação de semigrupo apresentada anteriormente, aplicamos esta notação à equação (C.4):

$$e^{tL} g(x) = g(\varphi(x, t)) \tag{C.5}$$

Note que $E^{tL}x$ não representa uma avaliação direta de E^{tL} , mas sim a ação do operador E^{tL} sobre o vetor formado pelos componentes x_i . Além disso, a função g comuta com a variação temporal das condições iniciais de x_i .

Vale destacar que g é uma função independente do tempo em relação às variáveis que descrevem o sistema físico, e sua variação ocorre exclusivamente devido à mudança dessas variáveis ao longo do tempo. Assim, a equação (C.3) pode ser expressa como:

$$Le^{tL} = e^{tL}L \tag{C.6}$$

Essa mesma relação se aplica a matrizes: sejam A e B duas matrizes, então a seguinte identidade é válida:

$$\exp(t(A + B)) = \exp(tA) + \int_0^t \exp((t-s)(A + B)) B \exp(sA) ds \tag{C.7}$$

Esta equação, conhecida como *Fórmula de Duhamel* ou *fórmula de Dyson*, é bem definida.

C.3.3 Polinômios Hermitianos

Primeiramente, definimos o produto interno como:

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} u(x)v(x) dx \quad (\text{C.8})$$

Os polinômios $p_n(x)$ e $p_m(x)$ são ortonormais em relação a esse produto interno (C.8) quando satisfazem a seguinte condição:

$$\langle p_n, p_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} p_n(x)p_m(x) dx = \delta_{nm},$$

em que δ_{nm} é o delta de Kronecker, que apresenta as propriedades:

1. **Ortogonalidade:** Para $n \neq m$, os polinômios são ortogonais, ou seja, o produto interno entre eles é nulo:

$$\langle p_n, p_m \rangle = 0 \quad \text{quando} \quad n \neq m$$

2. **Normalização:** Para $n = m$, os polinômios são normalizados, de modo que o produto interno é igual a 1:

$$\langle p_n, p_n \rangle = 1$$

No caso n -dimensional, o produto interno se generaliza para:

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2}\right) u(x)v(x) dx_1 \dots dx_n$$

De forma mais geral, se $H(q, p)$ é um Hamiltoniano, é possível definir uma família de polinômios nas variáveis q e p que sejam ortonormais com respeito à densidade canônica $Z^{-1}e^{-H/T}$. Os polinômios que satisfazem essa condição ainda são chamados de *polinômios hermitianos*.

Por fim, para o formalismo de Mori-Zwanzig, consideraremos um espaço n -dimensional Γ com uma densidade de probabilidade dada. Dividiremos as coordenadas em dois tipos: \hat{x} e \tilde{x} . Seja g uma função de x ; então $\mathbb{P}g = \mathbb{E}[g | \hat{x}]$ é uma projeção ortogonal sobre o subespaço das funções de \hat{x} . Temos que essa projeção gera um subespaço de polinômios hermitianos que são funções de \hat{x} e projetando sobre esses polinômios.

C.4 Mori-Zwanzig

C.4.1 Construção

Tomemos novamente o sistema (C.1), reproduzido abaixo:

$$\frac{d}{dt} \varphi(x, t) = R(\varphi(x, t)), \quad \varphi(x, 0) = x,$$

Lembremos que a equação é composta por componentes de dimensão n . Dentre essas n componentes, definimos as primeiras m componentes de φ , com $m < n$, como as variáveis de interesse. Em seguida, classificamos $\hat{\varphi}$ como as variáveis “resolvidas” e $\tilde{\varphi}$ como as variáveis “não resolvidas”:

$$\varphi = (\hat{\varphi}, \tilde{\varphi}), \quad \hat{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m), \quad \tilde{\varphi} = (\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n)$$

O mesmo vale para x e R : $x = (\hat{x}, \tilde{x})$ e $R = (\hat{R}, \tilde{R})$. A partir das variáveis resolvidas, buscamos criar previsões para o modelo de interesse, utilizando as soluções de uma parte da equação.

Com base no *Operador de Liouville* e na *notação de semigrupo*, podemos reescrever as componentes de $\hat{\varphi}$ como²:

$$\hat{\varphi}_j(x, t) = e^{tL}x_j, \quad 1 \leq j \leq m$$

Ainda na notação de semigrupo, a equação dessas componentes é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tL}x_j = L e^{tL}x_j = e^{tL}Lx \tag{C.9}$$

A partir da *projeção ortogonal* introduzida na seção anterior, definimos \mathbb{P} como a projeção dada por: $\mathbb{P}g(x) = \mathbb{E}[g|\hat{x}]$. Assumimos que, no instante $t = 0$, conhecemos a densidade conjunta de todas as variáveis x , mas apenas os dados iniciais \hat{x} são conhecidos. A densidade das variáveis em \tilde{x} é, então, a densidade conjunta de todas as variáveis x com \hat{x} fixado. Assim, \mathbb{P} é uma projeção sobre um espaço de funções com variáveis fixas e, portanto, independente do tempo.

As projeções $\mathbb{P}\hat{\varphi}(t) = \mathbb{E}[\hat{\varphi}(t)|\hat{x}]$ são de nosso maior interesse, pois estimam o comportamento do sistema a partir de um conjunto reduzido de variáveis.

Definindo $\mathbb{Q} = I - \mathbb{P}$ e considerando que as seguintes propriedades são válidas para quaisquer projeções ortogonais:

1. $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$;
2. $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q}$;
3. $\mathbb{P}\mathbb{Q} = 0$.

Podemos reescrever a equação (C.9) como:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tL}x_j = e^{tL}\mathbb{P}Lx_j + e^{tL}\mathbb{Q}Lx_j \tag{C.10}$$

Utilizando agora a *fórmula de Dyson*, com $A = \mathbb{Q}L$ e $B = \mathbb{Q}L$, obtemos:

$$e^{tL} = e^{t\mathbb{Q}L} + \int_0^t e^{(t-s)L}\mathbb{P}Le^{s\mathbb{Q}L} ds \tag{C.11}$$

² Note que cada componente depende de **todos** os valores de x . Portanto, se \tilde{x} for aleatório, então $\hat{\varphi}$ também será.

Pela linearidade da equação de Liouville e a partir das equações (C.10) e (C.11), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tL} x_j = e^{tL} \mathbb{P} L x_j + e^{tQ^L} Q L x_j + \int_0^t e^{(t-s)L} \mathbb{P} L e^{sQ^L} Q L x_j ds \quad (\text{C.12})$$

A equação acima expressa a *equação de Mori-Zwanzig*.

C.4.2 Análise termo a termo

O primeiro termo é dado por:

$$e^{tL} \mathbb{P} L x_j \quad (\text{C.13})$$

Observe que:

$$L x_j = \sum_i R_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) x_j = R_j(x)$$

Portanto,

$$\mathbb{P} L x_j = \mathbb{E}[R_j(x) | \hat{x}] \quad \text{Note que esta é uma função exclusivamente de } \hat{x}.$$

Com isso, podemos concluir que:

$$e^{tL} \mathbb{P} L x_j = \bar{R}_j(\hat{\phi}(x, t))$$

Mais do que isso: o primeiro termo representa a dinâmica própria do sistema nas variáveis resolvidas. Além disso, trata-se de um termo markoviano, pois depende apenas do estado atual do sistema no tempo t .

Para o segundo termo, definimos:

$$w_j = e^{tQ^L} Q L x_j$$

Por definição, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_j(x, t) = Q L w_j(x, t), \quad (\text{C.14})$$

$$w_j(x, 0) = Q L x_j = (I - \mathbb{P}) R_j(x) = R_j(x) - \mathbb{E}[R_j | \hat{x}]. \quad (\text{C.15})$$

Note que $w_j(x, 0) = Q L x_j = R_j(x) - \mathbb{E}[R_j(x) | \hat{x}]$ representa a *parte flutuante* da variável $R_j(x)$, ou seja, o componente imprevisível dado \hat{x} . Essa parte evolui de acordo com as *dinâmicas ortogonais*, de modo que $\mathbb{P} w_j(x, t) = 0$ para todo t , mantendo o termo como um ruído puramente não resolvido ao longo do tempo.

Mais especificamente, o subespaço do ruído (*noise subspace*) é formado pelas componentes das funções que são ortogonais às funções de \hat{x} , geralmente, isso corresponde

a termos que dependem de \tilde{x} .

O terceiro termo, dado por:

$$\int_0^t e^{(t-s)L} \mathbb{P} L e^{sQL} Q L x_j$$

é classificado como o termo de memória (*memory term*), já que este envolve a integração de quantidades que dependem de estados anteriores ao atual.

Tomemos que \mathbb{P} seja projetado na extensão dos polinômios hermitianos $H - 1, H_2, \dots$ com argumentos em \hat{x} . Assim, para dada função ψ , temos que: $\mathbb{P}\psi = \sum(\psi, H_k)H_k$, assim, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} L e^{sQL} Q L x_j &= \mathbb{P} L (\mathbb{P} + Q) e^{sQL} Q L x_j \\ &= \mathbb{P} L Q e^{sQL} Q L x_j \\ &= \sum_k \langle L Q e^{sQL} Q L x_j, H_k(\hat{x}) \rangle H_k(\hat{x}). \end{aligned}$$

O produto interno é definido como um valor esperado com respeito à densidade de probabilidade inicial. Vamos assumir que L é antissimétrico, ou seja, $(u, Lv) = -(Lu, v)$, então:

$$\begin{aligned} \langle L Q e^{sQL} Q L x_j, H_k(\hat{x}) \rangle &= -(Q e^{sQL} Q L x_j, LH_k) \\ &= -(e^{sQL} Q L x_j, Q L H_k). \end{aligned}$$

Tanto $Q L x_j$ quanto $Q L H_k$ estão no subespaço de ruído, e $\mathbb{E}^{sQL} Q L x_j$ é uma solução no tempo s da equação de dinâmica ortogonal com dados no subespaço de ruído; $P L e^{sQL} Q L x_j$ é então uma **soma de covariâncias temporais de ruídos**.

Referências

- [CHEKROUN *et al.* 2021] Mickaël D. CHEKROUN, Honghu LIU e James C. McWILLIAMS. “Stochastic rectification of fast oscillations on slow manifold closures”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 118.48 (nov. de 2021). ISSN: 1091-6490. DOI: [10.1073/pnas.2113650118](https://doi.org/10.1073/pnas.2113650118). URL: <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.2113650118> (citado nas pgs. [iii](#), [v](#), [1](#), [33](#)).
- [CHORIN e HALD 2013] Alexandre J. CHORIN e Ole H. HALD. *Stochastic Tools in Mathematics and Science*. Springer New York, 2013. ISBN: 9781461469803. DOI: [10.1007/978-1-4614-6980-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6980-3) (citado nas pgs. [33](#), [34](#)).
- [CHORIN, HALD e KUPFERMAN 2000] Alexandre J. CHORIN, Ole H. HALD e Raz KUPFERMAN. “Optimal prediction and the mori-zwanzig representation of irreversible processes”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 97.7 (2000), pp. 2968–2973. DOI: [10.1073/pnas.97.7.2968](https://doi.org/10.1073/pnas.97.7.2968) (citado na pg. [33](#)).
- [CHORIN, HALD e KUPFERMAN 2002] Alexandre J. CHORIN, Ole H. HALD e Raz KUPFERMAN. “Optimal prediction with memory”. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 166.3 (2002), pp. 239–257. ISSN: 0167-2789. DOI: [10.1016/S0167-2789\(02\)00446-3](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(02)00446-3) (citado na pg. [33](#)).
- [EVANS 2014] Lawrence C. EVANS. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. Providence, RI: American Mathematical Society, jan. de 2014 (citado nas pgs. [13](#)–[18](#)).
- [E. N. LORENZ 1963] E. N. LORENZ. “Deterministic nonperiodic flow”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2 (1963), pp. 130–141. DOI: [10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2) (citado na pg. [5](#)).
- [Edward N. LORENZ 1980] Edward N. LORENZ. “Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 37.8 (ago. de 1980), pp. 1685–1699. ISSN: 1520-0469. DOI: [10.1175/1520-0469\(1980\)037<1685:asaqge>2.0.co;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1980)037<1685:asaqge>2.0.co;2) (citado nas pgs. [1](#), [5](#), [6](#), [9–11](#)).
- [PAVLIOTIS 2014] Grigorios A. PAVLIOTIS. *Stochastic Processes and Applications: Diffusion Processes, the Fokker-Planck and Langevin Equations*. Springer New York, 2014. ISBN: 9781493913237. DOI: [10.1007/978-1-4939-1323-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1323-7) (citado nas pgs. [13](#), [17](#)).

- [PAVLIOTIS e STUART 2008] Grigoris A. PAVLIOTIS e Andrew STUART. *Multiscale Methods: Averaging and Homogenization*. Springer New York, 2008. ISBN: 9780387738291. doi: [10.1007/978-0-387-73829-1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-73829-1) (citado na pg. 21).
- [RACKAUCKAS e NIE 2017] Christopher RACKAUCKAS e Qing NIE. “DifferentialEquations.jl – a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in Julia”. *Journal of Open Research Software* 5.1 (2017) (citado nas pgs. 19, 22).
- [VALLIS 2017] Geoffrey K. VALLIS. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*. Cambridge University Press, jun. de 2017. ISBN: 9781107588417. doi: [10.1017/9781107588417](https://doi.org/10.1017/9781107588417) (citado nas pgs. 3, 5).