Aula do dia 18 de dezembro de 2023

Autor: Rodrigo Bissacot Proença

Transcrito para LaTeXpor: Lucas Amaral Taylor

20 de dezembro de 2023

Nota: Cheguei atrasado, não tenho as anotações do início da aula

Teorema

$K \subseteq \mathbb{R}$, K é compacto $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Então f é uniformemente contínua. **Exemplo:** $K = [-, 1]$ e $f(x) = x^2$. Então f é uniformemente contínua

Prova

Exercício Tente fazer uma prova direta usando coberturas

Suponhamos f seja contínua em K e não seja uniformemente contínua. Ou seja, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n \in K$ e $y_n \in K$ tais que:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0, \, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como K é compacto e $x_n \in K \forall n \in \mathbb{N}$. Como k é sequencialmente compacto, temos:

$$\exists \left(x_{n_k}\right)_k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \in K$$

Agora, para cada sequência (y_{n_k}) também em K implica que $\exists \left(y_{n_l}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ de $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $y_0 \in K$ tal que $\lim\limits_{l \to \infty} y_{n_{k_l}} = y_0 \in K$.

Conclusão: As duas subsequências com a sequência de índices $(n_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$, $\left(y_{n_{k_l}}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ e $\left(y_{n_{k_l}}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ convergem. Logo, $\lim\limits_{l \to \infty} x_{n_{k_l}} = x_0 \in K$ e $\lim\limits_{l \to \infty} y_{n_{k_l}} = y_0 \in K$

Nota: Não consegui copiar a tempo, quem quiser adicionar este trecho, adicione no Github. Continuando...

Temos:

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_l} = \lim_{y_{n_l}} = x_0$$

Além disso

$$|f(x_{n_l} - f(y_{n_l}| \geq \varepsilon_0$$

O que é um absurdo. Como f é contínua $\lim_{l\to\infty} f(x_{n_l}) - f(x_0)$ e $\lim_{l\to\infty} f(y_{n_l}) - f(x_0)$

Exemplo: $X = [0, +\infty)$

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Então f é uniformemente contínua. Temos:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right) \cdot |x - y| \leq |x - y|$$

Caso 1: Se pelo menos um dos valores (x ou y) está em $J = [1, +\infty)$ $\left[\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1\right]$. Dado $\varepsilon > 0$. Para o caso (1), tome $\varepsilon_1 = \varepsilon > 0$. No caso (2), $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$, $f|_{[0,1]}$ é uniformemente contínua, pois $[0, 1]$ é compacto/ Assim, $\exists \delta_2 = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$(x \in [0, 1], y \in [0, 1] \text{ e } |x - y| < \delta_2) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Tome: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Limites

Definição

$X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que **o limite de f quando x tende a x_0** é igual a $L \in \mathbb{R}$ quando:

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$$

Tal que;

$$(x \in X \wedge 0 < |x - x_0| < \delta) \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Notação

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Exercício: Mostre que $x_0 \in X'$e $f : X \to \mathbb{R}$. Então, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ se, e somente se, para todo $(x_n)_{n \to \infty}$ com $x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $x_n \neq x_0$ $\forall n$ e $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ **Existe, pois** $x_0 \in X'$ vale $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Disso, segue as seguintes propriedades: $x \in X'$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, tal que $M, L \in \mathbb{R}$.

Então:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$