Aula do dia 11 de dezembro de 2023

Autor: Rodrigo Bissacot Proença
Transcrito para LaTeX por: Lucas Amaral Taylor

11 de dezembro de 2023

Do exemplo da aula passada

Na aula passada, estávamos discutindo um exemplo muito importante apresentado a seguir:

$$x \longmapsto f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$(f : X \to \mathbb{R})$

f é descontínua em todos os pontos.

$$f \text{ é contínua em } x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ , } \exists \delta = \delta(x_0, \delta) > 0 \tag{1}$$

$$\text{tq } x \in X \text{ e } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Observação: Podemos omitir a expressão $x \in X$ *no caso de* $X = \mathbb{R}$

f ser descontínua em x_0 $(X \in \mathbb{R})$. Para realizar a demonstração, devemos **negar** 1.

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tq } \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in \mathbb{R} \text{ tq } |x_\delta - x_0| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon \tag{2}$$

Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$

1. Vamos mostrar que f é descontínua nos **racionais**.

   Seja $x_0 \in \mathbb{Q}$. Logo, $f(x_0) = \chi_{\mathbb{Q}}(x_0) = 1$. Sabemos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ *Irracionais são densos em* $\mathbb{R}$

Assim para cada $\delta > 0$, existe $x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tq $x_\delta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Donte, $|x_\delta - x_0|$ e, $f(x_\delta) - f(x_0)| = \chi_{\mathbb{Q}}(x_\delta) - \chi_{\mathbb{Q}}(x_0)||0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$

2. **Exercício:** $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Caracterização de continuidade via sequências

$X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Então:

f é contínua em x_0, se e somente se, para toda sequência $(x_n)_n$ tq ($x_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$) e $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, temos:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Observação: Em geral, esse fato é denotado por:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right)$$

(quando $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ e $x_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Prova

Temos:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ tq}$$

$$x \in X \text{ e } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$, pelo apresentado acima, existe $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ satisfazendo a expressão apresentada acima.

Seja $(x_n)_n$ uma sequência tq ($x_n \in X$, $\forall n$) e $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, para o $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ da definição de continuidade, existre $n_0 = n_0(\delta) = n_0(x_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq:

$$|x_n - x_0| < \delta \ , \forall n \geq n_0$$

Vale que:

$$x_n \in X \text{ e } |x_n - x_0| < \delta) \implies |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Provamos que:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(x, \varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $|f(x_n| - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

Sempre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ e $x_n \in X \forall n \in \mathbb{N}$

Ou seja, mostramos que se f é contínua em x_0. Então:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \land x_n \in X \quad \forall n \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

($\Longleftarrow$) Temos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \land x_n \in X \forall n \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \tag{3}$$

Queremos mostrar que:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , } \exists \delta > 0 \text{ tq } (x \in X \land |x - x_0| < \delta) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{4}$$

Professor apagou bem na hora que eu ia escrever. Quem tem ai, complete por favor

Conclusão Construímos $(x_n)_n$ tal que $x_n \in X$, $\forall n$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

$||f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

$\implies$ não é verdade que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Contradição, pois assumimos que vale 3.

Corolários

$X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$

1. Se f e g são contínuas em x_0 então $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas em x_0.

2. Como a função cosntante sempre é contínua, tomando $g = c$ com $c \in \mathbb{R}$ $c \cdot f$ é contínua em x_0.

3. Já sabemos que a função identidade, $f(x) = x$ é contínua em $x_0 \in X$, quaisquer que seja x_0 e X.

   Lembro: $f(x) = a \cdot x$ é contínua, faz $a = 1$

   Dessa forma, como produtoo, o produto por escalar e a soma de funções contínua seque que qualquer polinômio:

   $$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$$

é contínua em cada ponto de X.

4. Seja:

$$C(x) = \{f : X \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ é contínua em todos os pontos de } X\}$$

Então $C(X)$ é uma álgebra.

(a) $C(X)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;

(b) Posso multiplicar funções, etc.

Exercício: Mostre que $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ e $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua, usando ε e δ.

Permanência do sinal

Seja $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ função contínua em x_0. Suponha que $f(x_0) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in X \text{ e } |x - x_0| < \delta) \implies f(x) > 0$$

Prova: f é contínua em x_0. Tomo $\varepsilon = \frac{f(x)}{2} > 0$. Existe $\delta > 0$ tq $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$, temos $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x)}{2}$

$\exists \delta > 0$ tal que:

$$(x \in X \text{ e } |x - x_0| < \delta) \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x)}{2}$$

$$\iff f(x) \in \left(f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2}, f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}\right)$$

$$\iff f(x) \in \left(\frac{f(x)}{2}, \frac{3f(x)}{2}\right) \implies f(x) > 0 \ , \forall x \in X \text{ tq } x - x_0 < \delta$$

Exercício: $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua em x_0. Mostre que se $f(x_0) > c$, então existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $|x - x_0| < \delta$, temos $f(x) > c$.

Observação: Vale o mesmo para $f(x_0) < c$

Exercício Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Suponha que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $(x \in X \text{ e } |x - x_0| < \delta) \implies f(x) \neq g(x)$

Dica: Tome $h(x) = f(x) - g(x)$. Daí, $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \neq 0$. Separar em casos $h(x_0) > 0$ e $h(x_0) < 0$