Resolução dos exercícios dados em sala (parte 1)

05 a 08 de dezembro de 2023

Lucas Amaral Taylor

10 de dezembro de 2023

Exercícios

1. Prove que, seja $X \neq \varnothing$, $X \subset M$ é limitado se, e somente se, diam $X < +\infty$. Ou seja, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\sup\{d(x,y); x \in X \text{ e } y \in X\} = L$$

Em particular, temos que:

$$d(x,y) \leqslant L \quad \forall x, y \in X.$$

Resolução

Como apresentado em aula, temos que outra maneira de dizer que um conjunto é limitado é mostrar que o diâmetro é finito, isto é:

$$\sup\{d(x,y) \ ; \ x \in X \text{ e } y \in X\} = L$$

($\Longrightarrow$) Vamos supor que X seja limitado.

Pela **Definição 2.5.9** de [1], um conjunto X é limitado em $\mathbb{R}$ quando existem um $a, b \in \mathbb{R}$ tal que para $\forall x \in X$, temos que: $a \leq x \leq b$. Ou seja, a distância de quaisquer dois pontos de X é limitada pela distância entre a e b, i. e., $d(x,y) \leq a - b$, incluindo o supremo. Logo, concluímos que:

$$X \text{ é limitado} \implies \text{diam } X < +\infty \tag{1}$$

($\Longleftarrow$) Vamos supor que diam $X < +\infty$.

Dizer que $\text{diam } X < +\infty$ é equivalente a afirmar que o diâmetro do conjunto é finito. Então, a partir desta informação, podemos dizer que existe um limite superior L, tal que $d(x, y) \leq L$. Logo, todos os pontos do conjunto X estão a uma distância finita um do outro.

Escolhendo um ponto $x \in X$, temos que, obrigatoriamente, todos os pontos de X estão contidos no intervalo $[x - L, x + L]$, o que respeita a definição de um conjunto limitado. Portanto:

$$\text{diam } X < +\infty \implies X \text{ é limitado} \tag{2}$$

A partir das expressões 1 e 2, concluímos que X é limitado $\iff$ $\text{diam } X < +\infty$

2. Seja $x_1, \ldots, x_n$ elementos distintos dois a dois $(x_i \neq x_j, \forall i \neq j)$ e $D = \max\limits_{1 \leq i < j \leq n} d(x_i, x_j)$. Tome $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_1(x_i)$. Mostre que $\text{diam } X \leq D + 2$.

   Resolução

   Primeiramente, temos que a distância de qualquer ponto que pertence a bola $B_1(x_i)$ em relação a seu centro é 1 para $\forall i \in \mathbb{N}$; $i \in [1, n]$. Pela definição que nos é apresentada, a distância dos centros das bolas $B_1(x_i)$ com $(x_i \neq x_j, \forall i \neq j)$ é dada pela seguinte expressão:

$$D = \max_{1 \leq i < j \leq n} d(x_i, x_j)$$

   Imaginemos um ponto $a \in B_1(x_i)$ e $b \in B_1(x_j)$, pela desigualdade triangular, temos:

$$d(a, b) \leq d(a, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, b)$$

   Substituindo pelos valores máximos, temos que:

$$d(a, b) \leq 1 + D + 1$$

$$\therefore d(a, b) \leq 2 + D$$

3. Mostre que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right) = (0, 1)$$

   Resolução

   Primeiramente, temos que para $\forall x \in (0, 1)$ haverá uma cobertura C_n a qual x pertença. Podemos fortalecer nossa argumentação utilizando a propriedade arquimediana dos Reais que afirma que existe um $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que: $\frac{1}{n} < x$, sendo $x \in \mathbb{R}^+$. Além disso, temos que a medida que n aumenta, $\frac{1}{n}$ tende a zero. Então, C_n abrange os números reais menores que 1, a medida que n cresce, a união de C_n aproxima-se cada vez mais próximo de 0, *grosso modo*, a união C_n vai completando o intervalo $(0, 1)$.

É importante destacar que: tanto o zero, tanto o um, não estão inclusos na união, pelo fato de que C_n ser constituído de conjuntos abertos. A partir desses fatos, temos que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right) = (0, 1)$$

Nota: Aos colegas, sugiro consulta de [2] página 123, exemplo 23.

4. Dado $x \in M$. Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$B_{\frac{1}{n}}(x) = \left\{y \in M; d(x, y) < \frac{1}{n}\right\}$$

$$\bar{B}_{\frac{1}{n}}(x) = \left\{y \in M \ ; \ d(x, y) \leqslant \frac{1}{n}\right\}$$

Mostre que:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_{\frac{1}{n}}(x) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bar{B}_{\frac{1}{n}}(x) = \{x\}$$

Resolução

Analisaremos primeiramente o caso para bolas abertas.

$$B_{\frac{1}{n}}(x) = \left\{y \in M; d(x, y) < \frac{1}{n}\right\} \tag{3}$$

A partir da definição 3, temos que uma bola aberta centrada em x de raio $\frac{1}{n}$ (com $n \in \mathbb{N}$) abrange pontos y tal que a distância $d(x, y)$ seja menor que o raio. A medida que n aumenta, o raio da bola diminui, visto que este é inversamente proporcional ao valor de n. Contudo, mesmo crescendo infinitamente, a distância $d(x, y)$ quando $y = x$ é $d(x, x) = 0$. *Grosso modo*, n pode crescer infinitamente, mas um ponto permanecerá igual independente de quão alto seja o valor de n, o centro da circunferência, x, será o mesmo. Logo, a partir desta lógica, temos que:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_{\frac{1}{n}}(x) = \{x\} \tag{4}$$

A mesma lógica é aplicável a bola fechada, expressa por:

$$\overline{B}_{\frac{1}{n}}(x) = \left\{y \in M \ ; \ d(x, y) \leq \frac{1}{n}\right\} \tag{5}$$

Porém, com uma distinção: quando a bola é aberta, o bordo não está incluso no conjunto; na bola fechada, o bordo está inclusivo. Pode-se inferir isto a partir da seguinte desigualdade expressa em 5:

$$d(x,y) \leq \frac{1}{n}$$

Em suma, a medida que n aumenta, o raio diminui, porém, o centro permanece o mesmo, logo:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x) = \{x\} \tag{6}$$

A partir das expressões 4 e 6, concluímos que:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_{\frac{1}{n}}(x) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x) = \{x\} \tag{7}$$

5. $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x \in M$

$$\bar{B}_{\frac{1}{n}}(x) = \left\{ y \in M \ ; d(x,y) \leq \frac{1}{n} \right\}$$

é fechado. Portanto, $A_N = B^c_{\frac{1}{n}}(x)$ é aberto

Resolução

Primeiramente, vamos interpretar uma bola fechada como um conjunto fechado B (podemos afirmar isso, pois esta afirmação provém do próprio enunciado).

Agora, imaginemos um ponto $x \notin B$, logo, temos que $x \in B^c$ como B é fechado, temos que $B = \overline{B}$, ou seja, x não é um ponto aderente de B. Consequentemente, temos que x é um ponto interior de B^c e, como B é fechado, temos que B^c é formado exclusivamente por pontos interiores, portanto, um conjunto aberto.

Feedback do professor 10.dez.23

Apesar disso, quis utilizar as definições de pontos interiores e pontos aderentes que aprendemos em sala. Eu poderia utilizá-las para a resolução deste exercício? Apesar disso, essas classificações são válidas para espaços métricos?

Pelo que me lembro eu já defini fazendo a observação que a definição acaba se tornando, trocando intervalos por bolas. Isso não é o problema pelo que estou vendo do seu material.

No exercício 04, sinto que apresentei mais a intuição da resolução do que a resolução em si. Alguma sugestão de como eu deveria complementar a minha resposta?

Sim, você não provou nada. Ficou argumentando de maneira intuitiva assim como a demonstração. Note que o que você precisa mostrar é uma igualdade entre conjuntos. Um é uma interseção, e o outro o conjunto $\{x\}$. Minha sugestão é que pense na forma. Primeiro argumente que x está na interseção, porque está em todas as bolas, isso você acho que tentou escrever, mas ficou confuso. Depois, você precisa mostrar que não tem mais nenhum ponto a. Pegue um y diferente de x e use que R é arquimediano, vai acabar concluindo que y não pode estar em todas as bolas. Parece que você tentou provar isso, mas não está escrito uma prova detalhada no seu material.

No caso da questão 5, acho que o problema é o enunciado mesmo. Nos termos fechado como sendo complementar de um aberto. Então, se você diz que a bola é fechada, não tem o que fazer no exercício. O que tem que provar é que a bola fechada é um conjunto fechado, ou que o complementar dela é um aberto. Suponho que tenha que reescrever o enunciado.

Referências

[1] Pereira, M. C., Mello, U. L., Oliveira, F. E., & Silva, B. C. F. (2021). *Notas introdutórias à Análise Real Volume 1*. São Paulo. Pró-Reitoria de Graduação da Universidade de São Paulo.

[2] LAGES LIMA, E. Curso de Análise vol.1. 15a edição ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. p. 320