Aula do dia 14 de dezembro de 2023

Autor: Rodrigo Bissacot Proença
Transcrito para LaTeXpor: Lucas Amaral Taylor

14 de dezembro de 2023

Definição

Temos que $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função injetora, dizemos que f é **homeomorfismo sobre a imagem quando**:

$$g : f(x) = Y \to \mathbb{R} \text{ é contínua}$$

$$y = f(x) \mapsto g(y) = x$$

Observação: x é único, pois f é injetora.

Notação: para $g = f^-1$.

Exemplo de função contínua injetora com inversa descontínua

$$f : [0, 1) \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & \text{se} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

é contínua e é **injetora**

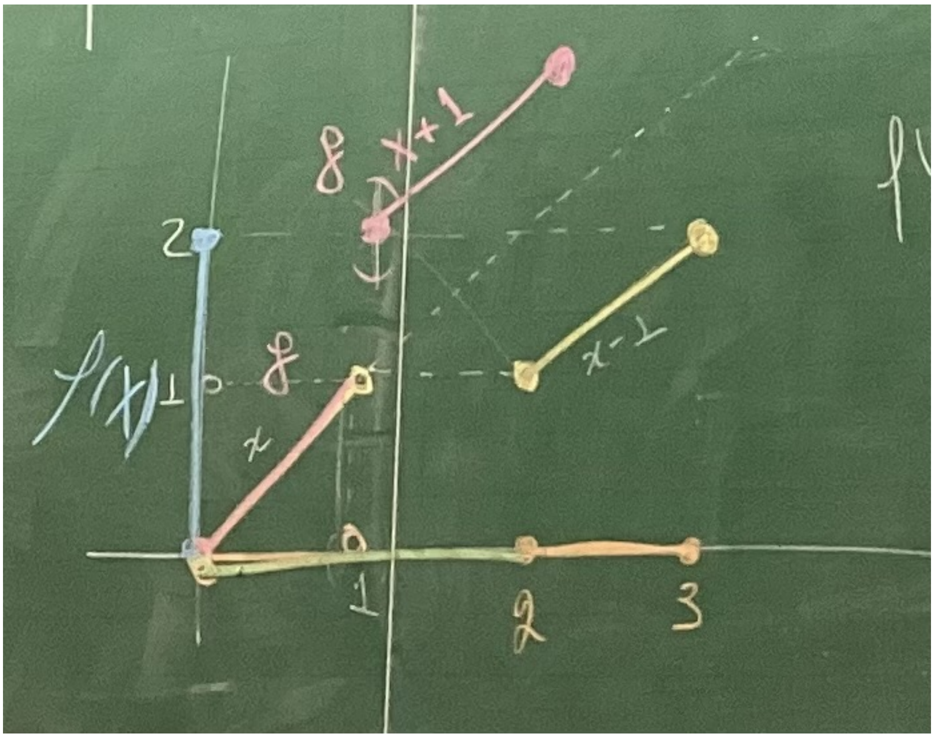

Figura 1: Gráfico das funções

Note que o conjunto imagem de f é dado por:

$$\text{Im}f = f(X) = f\left([0,1] \cup [2,3]\right) = [0,2]$$

$$f^{-}1 = g : [0,2] \to X = [0,1) \cup [2,3]$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & \text{se } \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Exercício Mostre que g é descontínua em 1. **Dica:** $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Observações:

1. Outra maneira de ver que g não é contínua é que $g\left([0,2]\right) = [0,1) \cup [2,3]$ **Ou seja, g não leva intervalo em intervalo**

2. Note que o domínio de X de f **não é compacto** e não é um intervalo.

Funções contínuas em compactos

Proposição

Seja $K \subseteq \mathbb{R}$ **compacto**. Se $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, então $f(K)$ é compacto.

Observação: Vale para espaços métricos

Prova

Usaremos a caracterização de compactidade vida sequências.

Seja $(y_n)_n$ uma sequência em $f(K)$.

A mostrar: existe $(y_n)_n$ tal que $\lim\limits_{K \to +\infty} y_{n_k} = y \in f(K)$

$$y_n \in f(K) \forall n \in \mathbb{N}$$

Isso implica que:

$$\exists x_n \in K \text{ tal que } f(x_n) = y_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies (x_n)_n \text{ é uma sequência em } K$$

Como K é compacto, temos que $\exists (x_{n_k})_k$ uma subsequência de $(x_n)_n$ tal que $\lim\limits_{K \to +\infty} x_{n_k} = x \in K$.

Como f é contínua, segue que:

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(K)$$

Provamos que: Dada uma sequência em $f(k)$, existe uma subsequência $(y_{n_k})_k$ tal que:

$$\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(K)$$

Logo, $f(K)$ é compacto.

Corolário (usado na lista 03)

Se K é um compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua entáo f assume máximo e mínimo em K. Ou seja, existem x_0 e x_1 em K tais que:

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \ , \ \forall x \in K$$

Prova

K é compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua implica $f(K)$ é compacto. Se $f(K)$ é compacto, então $f(K)$ é fechado e limitado. Se $f(K)$ é limitado, então existem $\inf f(K)$ e $\sup f(K) \in \mathbb{R}$.

A mostrar: $y_1 = \sup f(K) \in f(K)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \exists x_0 \in K \text{ tal que } y_1 - \frac{1}{n} < f(x_n) < y_1$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_1 \Longrightarrow y_1 \in \overline{f(K)} = f(K)$$

Observação: $f(K)$ é fechado

$$y_1 = \sup f(K) \in f(K) \Longrightarrow \exists x_1 \in K \text{ tal que } f(x_1) = y_1$$

Exercício: Mostrar que:

$$\inf f(K) = \min f(K) = f(x_0) \text{ para algum } x_0 \in K$$

Corolário

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com f contínua. Então:

$$f([a, b] = [c, d] = [f(x_0), f(x_1)]$$

Função contínua leva intervalos fechados e limitados em intervalos fechados e limitados

Lembre-se que ***Intervalo fechado e limitado*** *é* ***compacto***

Exemplo

$$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f\left([a, +\infty)\right) = \left(0, \frac{1}{a}\right]$$

Mas não é verdade que funções contínuas levam intervalos fechados em intervalos fechados

Teorema

$k \subseteq \mathbb{R}$ é compacto então $f : Kto\mathbb{R}$ é contínua e injetora é **homeo** sobre a imagem.

Ou seja,

$$g = f^{-1} \cdot f(K) \to K$$

$$y = f(x) \mapsto g(y) = x$$

é contínua.

Prova: Usando a caracterização de continuidade via sequências:

Dado $y \in f(K)$, queremos mostrar que g é contínua em y.

$$y \in f(K) \iff \exists x_0 \in K \text{ tal que } f(x_0) = y_0$$

Devemos mostrar que, para qualquer $(y_n)_n$ em $f(K)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0)$$

Uma maneira de mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0)$ é mostrar que toda subsequência convergente $(g(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ para $g(y_0)$. Isso implica que a sequência de $(g(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem um **único valor de aderência**.

$$\implies \liminf_{n\to\infty} \inf g(y_n) = \limsup_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0)$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0)$$

Note que $g : f(K) \to K$. Portanto, qualquer sequência $g\left(g(y_n)\right)_n$ em K é limitada. Logo, $(g(y_n))_{\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge.