# Numerisk Lineær Algebra F2021
# Notesæt 21

Andrew Swann

20. april 2021

Sidst ændret: 19. april 2021.
Versionskode: 8f81391.

## Indhold



## Figurer

# 21 Egenværdier og egenvektorer

## 21.1 Et første eksempel

Lad os kikke igen på eksempel 20.6. Problemet er styret af matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}98 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}97 \end{bmatrix}$$

og vi valgt en særlig basis $F\colon w_0 = (3,2), w_1 = (1,-1)$. Hvor kommer denne basis fra?

Lad os lige beregne $Aw_0$ og $Aw_1$:

$$\begin{aligned} Aw_0 &= \begin{bmatrix} 0{,}98 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = w_0 \\ Aw_1 &= \begin{bmatrix} 0{,}98 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}95 \\ -0{,}95 \end{bmatrix} = 0{,}95 w_1. \end{aligned}$$

Vi ser at i begge tilfælde har vi en ligning af formen

$$Aw_i = \lambda_i w_i, \tag{21.1}$$

hvor $\lambda_0 = 1$ og $\lambda_1 = 0{,}95$.

Dette giver at vi kan beregne effekten af $A$ på $b$ ved at skrive $b$, som lineær kombination af basisvektorerne $w_0, w_1$. Hvis $b = x_0 w_0 + x_1 w_1$, har vi

$$\begin{aligned} Ab = A(x_0 w_0 + x_1 w_1) &= x_0 A w_0 + x_1 A w_1 \\ &= x_0 w_0 + 0{,}95 x_1 w_1. \end{aligned}$$

Denne fremstilling gøre det nemt at gentage multiplikation med $A$ og at se en videreudvikling: Vi har

$$A^k w_i = \lambda_i^k w_i,$$

som fører til

$$\begin{aligned} A^k b = A^k(x_0 w_0 + x_1 w_1) &= x_0 A^k w_0 + x_1 A^k w_1 \\ &= x_0 w_0 + (0{,}95)^k x_1 w_1. \end{aligned}$$

For eksempel, da $(0{,}95)^k \to 0$ for $k \to \infty$, kan vi nu aflæse at $A^k b \to x_0 w_0$, så for alle startvektorer $b = x_0 w_0 + x_1 w_1$ får vi en fast grænsevektor $x_0 w_0$ for $A^k b$ når $k \to \infty$.

Det væsentlige i disse regnestykker er relationerne (21.1).

## 21.2 Definitioner og første regnemetoder

**Definition 21.1.** Lad $A$ være en kvadratisk matrix af størrelse $n \times n$. En skalar $\lambda$ er er *egenværdi* for $A$ hvis der findes en vektor $v$ med $v \neq 0$ således at

$$Av = \lambda v.$$

Vektoren $v \neq 0$ er så en *egenvektor* hørende til $\lambda$.

I eksemplet ovenfor har vi 2 egenværdier $\lambda_0 = 1$ og $\lambda_1 = 0{,}95$, med $w_0 = (3,2)$ en egenvektor hørende til $\lambda_0$ og $w_1 = (1,-1)$ en egenvektor hørende til $\lambda_1$.

Hvis $\lambda$ er en egenværdi for $A$ og $v \neq 0$ er en tilhørende egenvektor, så kan vi omskrive $Av = \lambda v$ til

$$(A - \lambda I_n)v = 0.$$

Vi ser så at $\lambda$ er en egenværdi for $A$ hvis og kun hvis $A - \lambda I_n$ er ikke invertibel. For $n = 2$, ved vi at en $(2 \times 2)$-matrix $B$ er invertibel hvis og kun hvis $\det B \neq 0$. Vi får så

**Proposition 21.2.** *En skalar $\lambda$ er en egenværdi for en $(n \times n)$-matrix $A$ hvis og kun hvis $A - \lambda I_n$ er ikke invertibel.*

*For $n = 2$, er $\lambda$ en egenværdi hvis og kun hvis*

$$\det(A - \lambda I_2) = 0.$$

□

*Eksempel* 21.3. Betragt $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 \times 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4. \end{aligned}$$

Hvis $\lambda$ er en egenværdi af $A$, har vi så $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$. Denne andengradsligning har løsninger

$$\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 1 \ \text{ og } \ 4.$$

For at finde tilhørende egenvektorer skal vi finde $v \neq 0$ således at $(A-\lambda I_2)v = 0$. Det kan vi godt gøre ved hjælp af rækkeoperationer.

Vi skal løse et lineært ligningssystem af formen $Bx = c$, med $c = 0$. Sædvanligvis ville vi stille en udvidet matrix $\left[B \mid c\right]$ op. Men når $c = 0$, forbliver den sidste søjle 0 under alle rækkeoperationer, og vi kan nøjes med at arbejde blot med $B$.

For $\lambda_0 = 1$, har vi

$$A - \lambda_0 I_2 = \begin{bmatrix} 3-1 & 1 \\ 2 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim_{R_1 \to R_1 - R_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hvis $v_0 = (x, y)$, siger dette reduktion at $2x+y = 0$, så en løsning er $v_0 = (1, -2)$.

For $\lambda_1 = 4$, beregnes

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 2 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim_{R_1 \to R_1 + 2R_0} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

For $v_1 = (x, y)$ har vi så ligningen $-x + y = 0$, dvs. $y = x$ og en løsning er $v_1 = (1, 1)$. △

Bemærk at $\det(A - \lambda I_2)$ er et andengradspolynomium. Dette kaldes det *karakteristiske polynomium* for $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Når vi skal bestemme en egenvektor $v$ hørende til $\lambda$, får vi et system med (mindst) et fri variabel. Dette bekræfter at matricen $A - \lambda I_n$ er ikke invertibel, dvs. at vi har fat i korrekte egenværdier. Det understreger også at egenvektorerne er ikke entydigt bestemt: hvis $v$ er en egenvektor for $A$ hørende til $\lambda$, så har vi $Av = \lambda v$; hvis $s \neq 0$ er en skalar, har vi nu $A(sv) = \lambda sv$, så $sv$ er også en egenvektor hørende til $\lambda$.

For $n > 2$, kan vi godt bestemme egenvektorer, som ovenfor, hvis vi er givet en eller flere egenværdier på forhånd.

*Eksempel* 21.4. Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeg påstår at $\lambda = 1$ er en egenværdi for $A$.

Dette kan bekræftes ved at kikke på $A - \lambda I_3$ og vise at $(A - \lambda I_3)v = 0$ har en løsning med $v \neq 0$.

Vi har

$$
\begin{aligned}
A - \lambda I_3 &= \begin{bmatrix} 3-1 & -1 & 2 \\ 1 & 2-1 & -1 \\ 4 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim_{R_0 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim_{R_1 \to R_1 - 2R_0} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim_{R_2 \to R_2 - 4R_0} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim_{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vi ser så at vi har en fri variabel, fra den sidste søjle, så $\lambda = 1$ er en egenværdi. En tilhørende egenvektor fås ved at sætte denne frie variable lige med 1, for eksempel. Det giver $v = (-1/3, 4/3, 1)$. Et alternativ valg er vektoren $3v = (-1, 4, 3)$. Begge er egenvektorer hørende til $\lambda = 1$. △

Senere vil vi begynde at se på metoder for at finde egenværdier generelt, men vi vil erfare i det næste afsnit at det er ikke altid et problem der tillader en løsning. Desuden er de første metoder vi kikker på ikke gode for numeriske beregninger.

Lad os begynde med at bemærke det følgende resultat.

**Proposition 21.5.** *Hvis $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ er forskellige egenværdier for $A$ og $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ er tilhørende egenvektorer, så er $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ lineært uafhængig.*

*Det følger at hvis en $(n \times n)$-matrix $A$ har $n$ forskellige egenværdier, så udgør de til hørende egenvektorer $v_0, \dots, v_{n-1}$ en basis.*

*Bevis.* Lad os kikke først på tilfældet $k = 2$. Antag at

$$x_0 v_0 + x_1 v_1 = 0. \tag{21.2}$$

Ganger vi matricen $A$ på denne ligning får vi fra $Av_i = \lambda_i v_i$ at

$$x_0 \lambda_0 v_0 + x_1 \lambda_1 v_1 = 0.$$

Trækker vi $\lambda_1$ gange ligning (21.2) fra, fås

$$x_0(\lambda_0 - \lambda_1) v_0 = 0.$$

Men $v_0 \neq 0$, så $x_0(\lambda_0 - \lambda_1) = 0$. Da vi har antaget at $\lambda_0 \neq \lambda_1$, får vi $x_0 = 0$. Ligning (21.2) er nu $x_1 v_1 = 0$. Men $v_1 \neq 0$, giver $x_1 = 0$. Så $x_0 = 0 = x_1$, og samlingen $v_0, v_1$ er lineært uafhængig.

Generelt hvis har vist at $v_0, \dots, v_{k-2}$ er lineært uafhængig, kan vi kikke på ligningen

$$x_0 v_0 + \dots + x_{k-2} v_{k-2} + x_{k-1} v_{k-1} = 0. \tag{21.3}$$

Ganger vi matricen $A$ på denne ligning får vi

$$x_0 \lambda_0 v_0 + \dots + x_{k-2} \lambda_{k-2} v_{k-2} + x_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} = 0.$$

Trækkes $\lambda_{k-1}$ ganger (21.3) fra, har vi

$$x_0(\lambda_0 - \lambda_{k-1}) v_0 + \dots + x_{k-2}(\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1}) v_{k-2} = 0.$$

Da $v_0, \dots, v_{k-2}$ er lineært uafhængig, fås $x_i(\lambda_i - \lambda_{k-1}) = 0$ for $i = 0, \dots, k-2$. Men $\lambda_i \neq \lambda_{k-1}$, så $x_i = 0$. Vi har tilbage $x_{k-1} v_{k-1} = 0$, så får også $x_{k-1} = 0$. Dermed er $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ lineært uafhængig. □

**Proposition 21.6.** *Hvis en $(n \times n)$-matrix $A$ har en basis $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ af egenvektorer, så kan $A$ skrives som*

$$A = V \Lambda V^{-1}, \tag{21.4}$$

*hvor* $V = \begin{bmatrix} v_0 \mid v_1 \mid \dots \mid v_{n-1} \end{bmatrix}$ *og*

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).$$

*Bevis.* Vi bemærker at

$$\begin{aligned} AV &= A\begin{bmatrix} v_0 \mid v_1 \mid \dots \mid v_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_0 \mid Av_1 \mid \dots \mid Av_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_0 v_0 \mid \lambda_1 v_1 \mid \dots \mid \lambda_{n-1} v_{n-1} \end{bmatrix} = V\Lambda. \end{aligned}$$

Da $V$ er en $(n \times n)$-matrix med lineært uafhængige søjler, er $V$ invertibel og ligning (21.4) følger. □

**Definition 21.7.** En matrix $A$ der kan skrives i formen (21.4) kaldes *diagonaliserbar*.

*Eksempel* 21.8. I eksempel 21.3 fandt vi at

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

har egenværdier 1 og 4 med tilhørende egenvektorer $(1, -2)$ hhv. $(1, 1)$. Det følger at

$$A = V \Lambda V^{-1}$$

med

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dette kan bekræftes ved

```
>>> import numpy as np
>>> v = np.array([[ 1.0, 1.0],
...               [-2.0, 1.0]])
>>> lambda_mat = np.diag([1.0, 4.0])
>>> v @ lambda_mat @ np.linalg.inv(v)
array([[3., 1.],
       [2., 2.]])
```

△

## 21.3 Andre eksempler

*Eksempel* 21.9. Betragt matricen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium er

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

Egenværdier er løsninger til $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Men $p$ har toppunkt i 1 og $p(1) = 4$, så $p$ har ingen rødder, som reel tal, og dermed $A$ har ingen egenværdier og ingen egenvektorer i $\mathbb{R}^2$.

Arbejder vi dog med komplekse skalarer, dvs. betragter vi $A$ som en matrix i $\mathbb{C}^{2\times 2}$, kan vi finde rødder via den sædvanlige formel

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

Lad os finde tilsvarende egenvektorer i $\mathbb{C}^2$ ved hjælp af python.

Først for $\lambda_0 = 1 + 2i$,

```
>>> import numpy as np

>>> a = np.array([[ 1.0, 2.0],
...                [-2.0, 1.0]])
>>> lambda_0 = 1.0 + 2.0j
>>> b = a - lambda_0 * np.eye(2)
>>> b
array([[ 0.-2.j,  2.+0.j],
       [-2.+0.j,  0.-2.j]])
>>> b[0, :] /= -2.0j
>>> b
array([[ 1.+0.j, -0.+1.j],
       [-2.+0.j,  0.-2.j]])
>>> b[1, :] += 2.0 * b[0, :]
>>> b
array([[ 1.+0.j, -0.+1.j],
       [ 0.+0.j,  0.+0.j]])
```

så $v_0 = (-i, 1)$ er en tilhørende egenvektor. For $\lambda_1 = 1 - 2i$, har vi

```
>>> lambda_1 = 1.0 - 2.0j
>>> c = a - lambda_1 * np.eye(2)
>>> c
array([[ 0.+2.j,  2.+0.j],
       [-2.+0.j,  0.+2.j]])
>>> c[0, :] /= 2.0j
>>> c
array([[ 1.+0.j,  0.-1.j],
       [-2.+0.j,  0.+2.j]])
>>> c[1, :] += 2.0 * c[0, :]
>>> c
array([[1.+0.j, 0.-1.j],
       [0.+0.j, 0.+0.j]])
```

og $v_1 = (i, 1)$ er en tilhørende egenvektor. Det følger at $v_0, v_1$ er en basis for $\mathbb{C}^2$ og at

$$A = V \Lambda V^{-1}$$

med
$$V = \begin{bmatrix} v_0 \mid v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix}.$$
Dette kan bekræftes i python

```
>>> v = np.array([[-1.j, 1.j],
...                [1.0,  1.0]])
>>> lambda_mat = np.diag([1.0+2.0j, 1.0-2.0j])
>>> v @ lambda_mat @ np.linalg.inv(v)
array([[ 1.+0.j,  2.+0.j],
       [-2.+0.j,  1.+0.j]])
```

△

*Eksempel* 21.10. Betragt matricen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Det karakteristiske polynomium er
$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2,$$
så det eneste egenværdi er $\lambda = 1$. Lad os finde de tilhørende egenvektorer. Vi har
$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
så enhver egenvektor er et multiplum af $v = (1, 0)$. Det følger at der findes ingen basis af $\mathbb{R}^2$ (eller af $\mathbb{C}^2$), som består af egenvektorer til $A$. △

## 21.4 Determinanter

For $(2 \times 2)$-matricer har vi at
$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} = a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10}$$

og at matricen $A$ er invertibel hvis og kun hvis dens $\det A \neq 0$. Denne definition kan udvides til $(n \times n)$-matricer på den følgende måde. Først for $(1 \times 1)$-matricer, sætter vi

$$\det \begin{bmatrix} a_{00} \end{bmatrix} = a_{00}.$$

For $n > 1$, og for $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$ definerer vi den *$(i, j)$'te undermatrix* $M_{ij}$, til at være den $((n-1) \times (n-1))$-delmatrix af $A$ der fås ved at slette hele række $i$ og hele søjle $j$ fra $A$. Dvs. at $M_{ij}$ er $A$ fraregnet rækken $A_{[i,:]}$ og søjle $A_{[:,j]}$.

*Eksempel* 21.11. For den følgende matrix $A$, bestemmer vi den $(1, 2)$'te undermatrix $M_{12}$ ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & -5 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -6 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{array}{rc} \begin{array}{r} \\ A_{[1,:]} \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & -5 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -6 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccccc} \phantom{-1} & \phantom{-1} & A_{[:,2]} & \phantom{-1} & \phantom{-1} \end{array} \end{array}$$

giver

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -6 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

I python kan dette undermatrix fås vi `np.delete`:

```
>>> import numpy as np
>>> a = np.array([[2.0, -1.0, 3.0, 4.0, 5.0],
...               [6.0, -2.0, -5.0, 2.0, -1.0],
...               [-1.0, 3.0, 0.0, -6.0, 3.0],
...               [4.0, 1.0, -3.0, -3.0, 2.0],
...               [5.0, 2.0, 1.0, -1.0, -2.0]])

>>> m12 = np.delete(np.delete(a, 1, 0), 2, 1)
>>> m12
array([[ 2., -1.,  4.,  5.],
       [-1.,  3., -6.,  3.],
       [ 4.,  1., -3.,  2.],
       [ 5.,  2., -1., -2.]])
```

Her sletter `np.delete(a, 1, 0)` række 1, og `np.delete(a, 2, 1)` sletter søjle 2. Det er den sidste argument til `np.delete` der bestemmer om der er taler om en række eller en søjle der skal slettes: 0 for rækker, 1 for søjler. △

Bemærk nu at for $n = 2$, har vi $M_{00} = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ og $M_{01} = \begin{bmatrix} a_{10} \end{bmatrix}$, så vi kan skrive

$$\det A = a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} = a_{00}\det(M_{00}) - a_{01}\det(M_{01}).$$

**Definition 21.12.** For $A$ en $(n \times n)$-matrix, $n > 1$, sætter vi *determinanten* til at være

$$\det A = a_{00}\det(M_{00}) - a_{01}\det(M_{01}) + \cdots + (-1)^{n-1}a_{0,n-1}\det(M_{0,n-1}),$$

hvor fortegnene er skiftevis $+, -, +, -, \cdots$.

*Eksempel* 21.13. Lad os beregne determinanten af en $(3 \times 3)$-matrix

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} &= 1 \times \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - (-1) \times \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + 2 \times \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= 1 \times (10 - (-8)) + 1 \times (15 - 2) + 2 \times (12 - (-2)) \\ &= 1 \times 18 + 1 \times 13 + 2 \times 14 \\ &= 59. \end{aligned}$$

△

**Sætning 21.14.** *For en kvadratisk matrix $A$ er $A$ invertibel hvis og kun hvis* $\det A \neq 0$.

Vi vil ikke give et bevis for dette (endnu), men sætningen har den følgende konsekvens:

**Proposition 21.15.** *For en $(n \times n)$-matrix $A$ er $\lambda$ en egenværdi for $A$ hvis og kun hvis*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

□

Polynomiet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ kaldes det *karakteristiske polynomium* for $A$.

## 21.5 Et andet eksempel

Lad os beregne egenværdier og egenvektorer for den følgende $(3 \times 3)$-matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vi finder først det karakteristiske polynomium

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 & 2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -6 & 6 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda)\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 6 & 5-\lambda \end{bmatrix} - 4\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 5-\lambda \end{bmatrix} + 2\det \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) - 4(5 - \lambda - 6) + 2(6 - 6\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2. \end{aligned}$$

Nu har vi et tredjegradspolynomium der skal løses. Dette er ikke så nemt, der findes en formel, men den er ikke helt lige til. Vi kan dog plotte funktionen

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.linspace(-2, 2, 100)
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, -x**3+2*x**2+x-2)
ax.axhline(0, color='black')    # tegn x aksen
```

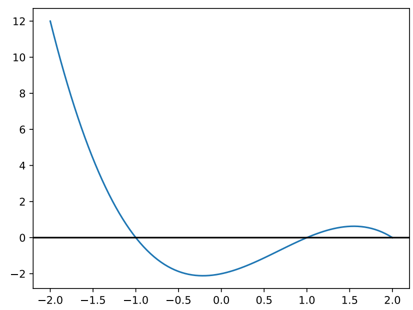
Vi ser fra plottet i figur 21.1 at der er rødder tæt på $\lambda = -1$, 1 og 2. Vi har faktisk

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 \\ &= -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2), \end{aligned}$$

så rødderne er netop $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$.

Vi kan nu finde tilsvarende egenvektorer. For $\lambda_0 = -1$,

$$A - \lambda_0 I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim_{R_0 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$




Figur 21.1: Tredjegradspolynomium.

giver $v_0 = (1, 0, 1)$. For $\lambda = 1$,

$$A - \lambda_1 I_3 = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og $v_1 = (1, 1, 0)$. Til sidst for $\lambda_2 = 2$,

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og $v_2 = (0, 1, -2)$.

Det følger at

$$A = V \Lambda V^{-1}$$

med

$$V = \begin{bmatrix} v_0 \mid v_1 \mid v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Som det kan ses er denne fremgangsmåde ikke velegnet til generelle numeriske eksempler. Den største forhindring ligger i at bestemme egenværdierne. Vi vil finde numeriske metoder senere der finder egenværdier og egenvektorer samtidigt.

# Python indeks



# Indeks