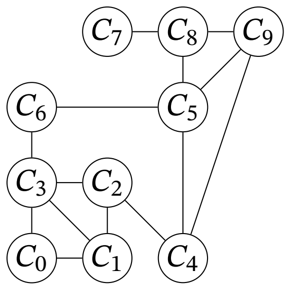
Numerisk Lineær Algebra F2021
Opgavesæt 13

Opgave 13.1. Søg for at du har stillet en ny opgave i »PeerWise«, og har svaret på andres opgaver. Mulige emner er fra hele kurset.

Husk at nogle af opgaverne fra PeerWise forventes at indgå i den skriftlige eksamen, som multiple-choice opgaver hvor man skal også give en begrundelse.

Opgave 13.2. Som i opgavesæt 3, betragt det følgende netværk af 10 computere:



Lad $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ være dens nabomatrix, så $a_{ij} = 1$ hvis computer C_i er forbundet direkte til computer C_j, og $a_{ij} = 0$ ellers. (Denne matrix er symmetrisk og har 0 på diagonalen.)

(a) I python brug potensmetoden til at estimere den største egenværdi λ_0 af A og en tilsvarende egenvektor v af længde 1 med positive indganger. Skriv gerne kode, der kun bruge én matrix-vektormultiplikation per løkke.

(b) Indgangerne i v måler hvor meget påvirkning den tilsvarende computer har i netværket. Brug v til at bestemme hvilke computer er vigtigst i dette netværk.

(c) Ved hjælp af `np.linalg.eig()` bestem hvor hurtigt man kan forventer potensmetoden at konvergere til at give v og λ_0 til machine epsilon.

(d) Beregn page rank for dette netværk, og sammenlign med del (b).

Opgave 13.3. For en kvadratisk $n \times n$-matrix A defineres e^A til at være

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots$$

(a) For

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

tjek at $A^4 = 0$ og beregn e^A.

(b) Hvis A er en diagonalmatrix $\operatorname{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ vis at e^A er $\operatorname{diag}(e^{\lambda_0}, e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2})$.

(c) Hvis to matricer A og B er relateret via $A = VBV^{-1}$, vis at $e^A = Ve^BV^{-1}$.

(d) Hvis A er diagonaliserbar med egenværdier $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, vis at e^A er diagonaliserbar med egenværdier $e^{\lambda_0}, e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_{n-1}}$.

(e) Ved et betragte Schurdekomponering af $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, bestem egenværdierne af e^A generelt.

Opgave 13.4. De første Fibonaccital er $0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \dots$ De er givet ved at

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \qquad \text{og} \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{for } n > 0.$$

(a) Sæt $y_k = \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{bmatrix}$, $k = 0, 1, \dots$, og vis at

$$y_k = Ay_{k-1} \quad \text{for alle } k > 0, \qquad \text{hvor } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

og dermed at $y_k = A^k y_0$.

(b) Vis at A er diagonaliserbar og bestem invertibel V og diagonal Λ, således at $A = V\Lambda V^{-1}$.

(c) Brug denne diagonalisering til at vise

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}), \qquad \text{hvor } \varphi = (1 + \sqrt{5})/2.$$

Opgave 13.5. Lad $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ være en symmetrisk matrix. Vi siger at A er *positiv definit* hvis for alle $v \in \mathbb{R}^n$ med $v \neq 0$, vi har $v^T Av > 0$.

(a) Vis at A er positiv definit hvis og kun hvis alle egenværdier λ for A opfylder $\lambda > 0$.

(b) Vis dermed at for positiv definit A er $\langle u, v\rangle := u^T Av$ et indre produkt på $\mathbb{R}^n$.

Afleveringsopgave 10

Dette er en individuel opgave. Opgaveløsning afleveres i blackboard som én pdf fil under "Upload af afleveringsopgaver > Aflevering 10". Afleveringsfristen bestemmes af din instruktor, men ligger i eller lidt efter uge 19.

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}45 \\ 0{,}25 & 0{,}45 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bekræft at A er symmetrisk og forklar hvorfor A er diagonaliserbar med kun reelle egenværdier.

(b) Det er givet at 1,0 er en egenværdi for A. Bestem de andre egenværdier for A.

(c) Angiv en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for A.

(d) Bestem en ortogonalmatrix V og en diagonalmatrix Λ således at

$$A = V \Lambda V^T.$$

(e) For

$$v = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

bestem grænsen af $A^k v$ for $k \to \infty$.

Andrew Swann