Aflevering 4

a)

Betragt vektorerne

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ -1{,}0 \\ 1{,}0 \\ -1{,}0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}0 \\ 1{,}0 \\ 1{,}0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2{,}0 \\ 0{,}0 \\ -2{,}0 \\ 0{,}0 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^4$.

(a) Dan Grammatricen for v_0, v_1, v_2 og bekræft at denne samling vektorer er ortogonal.

```
import numpy as np
v0 = np.array([1.0, -1.0, 1.0, -1.0])
v1 = np.array([1.0,  1.0, 1.0,  1.0])
v2 = np.array([2.0,  0.0,-2.0,  0.0])
V = np.vstack([v0, v1, v2])
G1 =  V @ V.T

print('G=\n', G1)
```

```
## G=
##  [[4. 0. 0.]
##  [0. 4. 0.]
##  [0. 0. 8.]]
```

Når vi har et sæt af vektorer og vi vil vurdere om de er ortogonale, så skal Gram matricen indgange udover diagonalen være nul, som er tilfældet i ovenstående.

b)

(b) Beregn projektionen Px af

$$x = \begin{bmatrix} 3,0 \\ 2,0 \\ 1,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

langs v_0, v_1, v_2.

Til en start opskriver jeg x.

```
x = np.array([3., 2., 1., 0.])
```

Herefter bestemmes normel.

```
v0_norm = np.linalg.norm(v0)
v1_norm = np.linalg.norm(v1)
v2_norm = np.linalg.norm(v2)
```

Nu kan vi således bestemme projektion af x langs v0.

```
prov0 = (np.dot(v0, x) / v0_norm**2) * v0
prov1 = (np.dot(v1, x) / v1_norm**2) * v1
prov2 = (np.dot(v2, x) / v2_norm**2) * v2
Px = prov0 + prov1 + prov2
print("Px =\n", Px)
```

```
## Px =
##  [3. 1. 1. 1.]
```

c)

(c) Bekræft at $v_3 := x - Px$ er ortogonal til v_0, v_1 og v_2.

```
v3 = np.round(x - Px)

print("v3 og v0 er ortogonale da deres indre produkt er", np.dot(v0,v3))
```

```
## v3 og v0 er ortogonale da deres indre produkt er 0.0
```

```
print("v3 og v0 er ortogonale da deres indre produkt er", np.dot(v1,v3))
```

```
## v3 og v0 er ortogonale da deres indre produkt er 0.0
```

```
print("v3 og v0 er ortogonale da deres indre produkt er", np.dot(v2,v3))
```

```
## v3 og v0 er ortogonale da deres indre produkt er 0.0
```

d)

(d) Brug v_0, v_1, v_2, v_3 til at bestemme en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$.

En Ortonormal basis er hvor alle vektor er en enhedsvektor med længden 1. En andem måde man kan sige det på er de er blevet normaliseret.

Desuden er de også ortogonale til hinanden, som vi så i c.

Udover de allerede to egenskaber ved en ortonormal så vil et ortonormal basis også være lineær uafhængig.

Så for at besvarer d, skal vi egentlig bare dele med længden af de respektive vektor, da vi allerede har vist ortogonalitet i opgave c.

```
V = np.vstack([v0 / v0_norm, v1 / v1_norm, v2 / v2_norm, v3/np.linalg.norm(v3)])
print(V, '\n')
```

```
## [[ 0.5        -0.5         0.5        -0.5       ]
##  [ 0.5         0.5         0.5         0.5       ]
##  [ 0.70710678  0.         -0.70710678  0.        ]
##  [ 0.          0.70710678 -0.         -0.70710678]]
```

```
print(np.round(V.T @ V))
```

```
## [[1. 0. 0. 0.]
##  [0. 1. 0. 0.]
##  [0. 0. 1. 0.]
##  [0. 0. 0. 1.]]
```

SÅ har vi en ortonormal basis og vi ser vi får samme diagonal som i opgave a.