Numerisk Lineær Algebra F2021
Opgavesæt 12

Opgave 12.1. Søg for at du har stillet en ny opgave i »PeerWise«, og har svaret på andres opgaver. Mulige emner er fra hele kurset.

Husk at nogle af opgaverne fra PeerWise forventes at indgå i den skriftlige eksamen, som multiple-choice opgaver hvor man skal også give en begrundelse.

Opgave 12.2. Lad $u = (1, 2, 4)$, $v = (-1, 2, 1)$ og sæt $A = uv^T$.

(a) Bestem en basis for $N(A)$.
(b) Find 2 lineært uafhængige egenvektorer for A med egenværdi 0.
(c) Vis at u er egenvektor for A, og bestem dens egenværdi.
(d) Er A diagonaliserbar?

Opgave 12.3. Lad A være en (2×2)-matrix. Vis at det karakteristiske polynomium for A er lige med

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A)$$

hvor $\mathrm{Tr}(A) = a_{00} + a_{11}$ er sporet af A. Vis at egenværdierne λ_0, λ_1 for A opfylder

$$\lambda_0 + \lambda_1 = \mathrm{Tr}(A), \quad \lambda_0\lambda_1 = \det(A).$$

Diskutér mulige generalisering til større matricer.

Opgave 12.4. Antag at $A = V\Lambda V^{-1}$ er (3×3)-matrix, som er diagonaliserbar med egenværdier $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Vis at de følgende matricer er diagonaliserbar og bestem deres egenværdier

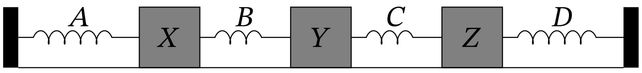
(a) $3A$,
(b) $2A - I_3$,
(c) A^2,
(d) $A^4 - 3A^3 + 2A^2 - A + 6I_3$.

Hvornår er A invertibel? Giv et kriterium bestemt af egenværdierne.

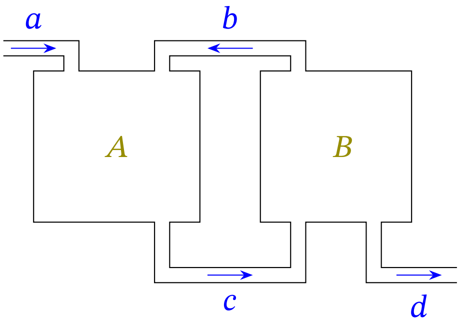
Opgave 12.5. (a) Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Bestem egenværdierne for A og ortonormal basis af egenvektorer.



Figur 1: System med klodser og fjedre



Figur 2: Beholdere forbudne med rør

(b) Løs begyndelsesværdiproblemet

$$y_0'(t) = -y_0(t) + 2y_1(t),$$
$$y_1'(t) = 2y_0(t) - y_1(t),$$
$$y_0(0) = 3, \quad y_1(0) = 1.$$

Plot løsningerne i python.

Opgave 12.6. Betragt systemet af klodser og fjedre i figur 1. Klodser X og Z har masse 4 kg, Y har masse 3 kg. Alle fjedre har fjederkonstant 10 N/m. Lad $x_X(t)$, $x_Y(t)$ og $x_Z(t)$ angiver hvor meget hver klods er rykket til højre fra dens ligevægtsposition. Bestemt et system af differentialligninger for systemet, og løs dette system når $x_X(0) = 0 = x_Y(0) = x_Z(0)$, $x_X'(0) = 1 = x_Y'(0) = x_Z'(0)$.

Afleveringsopgave 9

Dette er en individuel opgave. Opgaveløsning afleveres i blackboard som én pdf fil under "Upload af afleveringsopgaver > Aflevering 9". Afleveringsfristen bestemmes af din instruktor, men ligger i eller lidt efter uge 18.

To beholder er forbundne med rør, som i figur 2. Beholder A rummer 300 l og beholder B 100 l. Som udgangspunkt er der 90 g salt i beholder A og 30 g salt i beholder B. Der tilføjes 30,0 l/min rent vand igennem rør a og der flyder 15,0 l/min blanding igennem rør b.

(a) Hvor meget blanding skal flyde igennem rør c per minut, hvis mængden af væske i A skal være konstant? Hvor meget skal flyde ud igennem rør d, for at mængden af væske i B er konstant?

(b) Gør rede for at saltmængderne $y_0(t)$ i A og $y_1(t)$ i B opfylder systemet

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= -0{,}15y_0(t) + 0{,}15y_1(t), \\ y_1'(t) &= 0{,}15y_0(t) - 0{,}45y_1(t). \end{aligned}$$

(c) Forklar hvordan egenværdier og egenvektorer for koefficientmatricen for systemet kan beregnes.

(d) Forklar hvordan løsninger $y_0(t)$ og $y_1(t)$ bestemmes af disse egenværdier, egenvektorer og startdata.

(e) I python bestem $y_0(t)$ og $y_1(t)$, plot begge funktioner mod t. Plot også $y_0(t)$ mod $y_1(t)$. Hvad er grænseværdien for $y_1(t)/y_0(t)$ når $t \to \infty$?

Andrew Swann