Numerisk Lineær Algebra F2021
Notesæt 19

Andrew Swann

14. april 2021

Sidst ændret: 14. april 2021.
Versionskode: d12caa0.

Indhold

Indhold **1**

Figurer **1**

19 Koordinater **2**

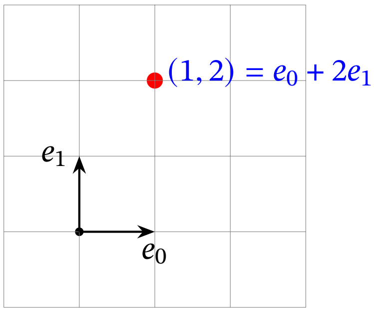
19.1 Basis . . . 4
19.2 Koordinater . . . 6
19.3 Koordinatskift . . . 8
19.4 Baser for nul- og søjlerum af en matrix . . . 9
19.5 Dimension . . . 11

Python indeks **12**

Indeks **12**

Figurer

19.1 Standardkoordinater . . . 2



Figur 19.1: Standardkoordinater.

19.2 Drejet ortogonal koordinatsystem 3
19.3 Generel lineært koordinatsystem 3

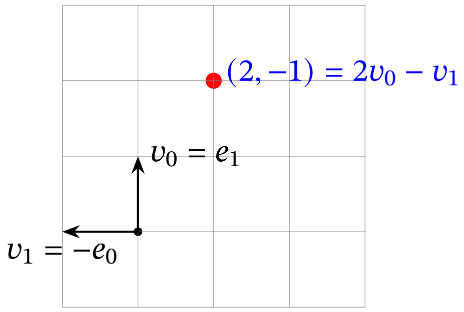
19 Koordinater

Lad os betragter et punkt i planen, som i figur 19.1. Med hensyn til det sædvanlige koordinatsystem, har punktet koordinater $(1, 2) = e_0 + 2e_1$. Dette siger, at vi kan bevæge os fra origo til punktet ved at gå langs en kopi af e_0 og derefter langs to kopier af e_1. På denne måde er det parret e_0, e_1, der bestemmer koordinaterne af vores punkt.

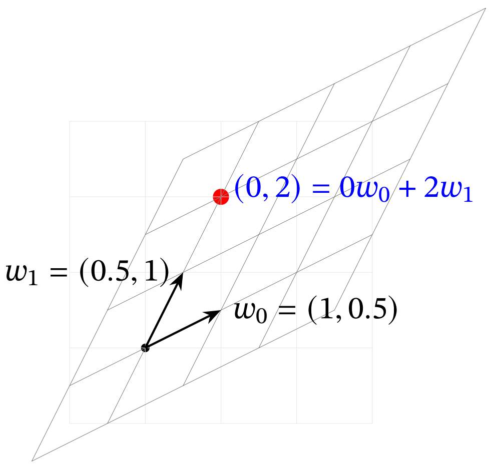
I figur 19.2 kikker vi på det samme punkt, men erstatter parret e_0, e_1 med parret $v_0 = e_1, v_1 = -e_0$. Da $e_0 + 2e_1 = -v_1 + 2v_0 = 2v_0 + (-1)v_1$, kommer vi fra origo til punktet ved at bevæge os langs to kopier af v_0 og derefter langs en kopi af $-v_1$. Med hensyn til v_0, v_1 har vores punkt koordinater $(2, -1)$.

Figur 19.3 viser det samme punktet, men nu arbejder vi ud fra vektorparret w_0, w_1, hvor $w_0 = (1{,}0, 0{,}5)$ og $w_1 = (0{,}5, 1{,}0)$. Da $e_0 + 2e_1 = 2w_1 = 0w_0 + 2w_1$, har vores punkt koordinater $(0, 2)$ i koordinatsystemet bestemt af w_0, w_1.

Vi ser at det samme punkt har forskellige beskrivelser afhængig af hvilke vektorpar vi bruger til at danne koordinater. Hvilke par vektorer må vi bruger? Her i planen er det rimelig klart at begge vektor skal være forskellig fra 0 og at de må ikke være parallelle. Dette er faktisk også tilstrækkeligt. I højere dimensioner er der lidt flere krav der skal stilles: disse dækkes af begrebet »basis«, som vi vil nu studere.



Figur 19.2: Drejet ortogonal koordinatsystem.



Figur 19.3: Generel lineært koordinatsystem.

19.1 Basis

Lad os lige huske et par definitioner vi har mødt før. Først er en samling vektorer $v_0, \dots, v_{n-1}$ lineært uafhængig hvis

$$s_0 v_0 + s_1 v_1 + \cdots + s_{k-1} v_{k-1} = 0 \quad \text{medfører} \quad s_0 = 0 = s_1 = \cdots = s_{k-1}.$$

Rummet udspændt af disse vektorer er $\operatorname{Span}\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, som består af alle lineære kombinationer

$$s_0 v_0 + s_1 v_1 + \cdots + s_{k-1} v_{k-1}$$

for alle skalarer s_i.

Definition 19.1. En samling vektorer $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ er en *basis E for V* hvis

(a) $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ er lineært uafhængig, og

(b) $\operatorname{Span}\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\} = V$.

I $\mathbb{R}^n$ har vi nogle gode værktøj for at tjekke om en samling vektorer er faktisk en basis.

Proposition 19.2. *Lad $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ være en samling vektorer i $\mathbb{R}^n$, og sæt $A = \begin{bmatrix} v_0 \mid v_1 \mid \dots \mid v_{n-1} \end{bmatrix}$. Så er $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis ligningssystemet*

$$Ax = b$$

en entydig løsning for hvert $b \in \mathbb{R}^n$.

Dette tvinger $k = n$ for en basis af $\mathbb{R}^n$.

Bevis. Husk at $Ax = x_0 v_0 + x_1 v_1 + \cdots + x_{k-1} v_{k-1}$. Fra dette kan vi bemærke to ting.

(i) At betingelsen (a), at samlingen er lineært uafhængig, er ens betydende med at $Ay = 0$ har $y = 0$, som entydig løsning.

(ii) At betingelsen (b), at samlingen udspænder $V = \mathbb{R}^n$, er ens betydende med at $Ax = b$ har mindst en løsning.

Antag at $Ax = b$ har en entydig løsning for hvert b. At vi har en løsning for hvert b, giver (ii) at samlingen udspænder $\mathbb{R}^n$. Tages $b = 0$, har vi en entydig løsning $x = 0$. Så fra (i) har vi at samlingen er også lineært uafhængig. Dermed er samlingen en basis for $\mathbb{R}^n$.

Omvendt hvis samlingen er en basis, har vi fra (ii) eksistens af løsninger til $Ax = b$ for hvert b, og ved fra (i) at løsningen er entydigt i tilfældet $b = 0$.

Vi mangler så at vise, at for vilkårlig b er løsningen til $Ax = b$ entydig. Antag at vi har to løsninger x og z for samme b. Så $Ax = b$ og $Az = b$. Så har vi $A(x - z) = Ax - Az = b - b = 0$. Da $Ay = 0$ har kun løsningen $y = 0$, konkluderer vi at $x - z = 0$. Dette siger at $x = z$, så løsningen på $Ax = b$ er entydig.

For at vise at $k = n$, udelukker vi de andre muligheder.

Hvis $k > n$, så har A flere søjler end pivotelementer. Det betyder at systemet $Ax = b$ med $b = 0$ har frie variabler, og dermed er løsninger ikke entydig. Så samlingen er ikke lineært uafhængig, og dermed ikke en basis.

Hvis $k < n$, er der flere rækker i A end pivotelementer. Vi kan derfor finde b så at $Ax = b$ er ikke konsistent. Så har systemet ingen løsning i dette tilfælde, og dermed at b ikke ligger i $\operatorname{Span}\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Dvs. $\operatorname{Span}\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\} \neq V$, så samlingen er ikke en basis. □

Eksempel 19.3. Standard basis for $\mathbb{R}^n$ er $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$. For at se at dette er en basis, bemærk at den tilsvarende matrix A er I_n. Men systemerne $I_n x = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, har altid den entydige løsning $x = b$, så søjlerne af I_n udgør en basis for $\mathbb{R}^n$. △

I tilfældet hvor vi har n vektorer i $\mathbb{R}^n$ er der nu mange forskellige måder at afgøre om de udgør en basis.

Proposition 19.4. *Givet $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ i $\mathbb{R}^n$ sæt $A = \begin{bmatrix} v_0 \mid v_1 \mid \dots \mid v_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Så er udsagnet*

(a) *$v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$*

ækvivalent med hver af de følgende

(b) *hver søjle af A er en pivotsøjle,*
(c) *A er invertibel,*
(d) *Gram-Schmidt på $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ kan gennemføres til at give en ortogonal samling bestående af n vektorer.*

Bevis. Når vi har n vektorer i $\mathbb{R}^n$ er matricen A kvadratisk. Derfor er hvert søjle en pivotsøjle hvis og kun hvis der er ingen frie variabler. Dette er ens betydende med at $Ax = b$ har altid en entydig løsning, så proposition 19.4 giver at samlingen er en basis. Dermed er del (a) ækvivalent med del (b).

Hvis A er invertibel har $Ax = b$ den entydige løsning $x = A^{-1}b$, så $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ er en basis. Omvendt, hvis vi har del (a), så er der entydige løsninger $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ til ligningerne $Aw_i = e_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Vi kan sætte $B =$

$\left[w_0 \mid w_1 \mid \dots \mid w_{n-1}\right]$ og ser at

$$AB = \left[Aw_0 \mid Aw_1 \mid \dots \mid Aw_{n-1}\right] = \left[e_0 \mid e_1 \mid \dots \mid e_{n-1}\right] = I_n.$$

Det følger fra sætning 7.2 at A er invertibel, med invers $A^{-1} = B$. Vi har så del (c).

Hvis Gram-Schmidt processen kan ikke gennemføres, er det fordi en vektor er en lineær kombination af de forrige. Vektorerne er dermed ikke lineært uafhængig og den første betingelse for basis er ikke opfyldt. Omvendt hvis Gram-Schmidt processen kan gennemføres, er enhver vektor i $\mathbb{R}^n$ en lineær kombination af de ortogonale vektorer konstrueret, og dermed en lineær kombination af de oprindelige vektorer. Det følger at $Ax = b$ har altid en løsning, så hver række indeholder et pivotelement. Men A er kvadratisk, så hvert søjler også indeholder et pivotelement. Dette giver ækvivalens af del (d) med de andre udsagn. □

Eksempel 19.5. For (2×2)-matricer, kan vi tjekke invertibilitet via determinanten. Så f.eks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

har determinant $1 \times 1 - 0{,}5 \times 0{,}5 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \neq 0$, giver at matricen er invertibel, og dermed at søjlerne udgør en basis for $\mathbb{R}^2$. △

19.2 Koordinater

Lad $E\colon v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ være en basis for et vektorrum V. Enhver vektor $b \in V$ kan skrives som

$$b = x_0 v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_{n-1} v_{n-1} \tag{19.1}$$

for nogle skalarer x_i, da definition 19.1(b) sikrer en løsning. Disse skalarer er endda entydig, som konsekvens af definition 19.1(a): hvis $z_0, \dots, z_{n-1}$ er en anden løsning, har vi

$$\begin{aligned} 0 = b - b &= (x_0 v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_{n-1} v_{n-1}) - (z_0 v_0 + z_1 v_1 + \dots + z_{n-1} v_{n-1}) \\ &= (x_0 - z_0) v_0 + (x_1 - z_1) v_1 + \dots + (x_{n-1} - z_{n-1}) v_{n-1}. \end{aligned}$$

Men lineært uafhængighed giver nu at $x_i - z_i = 0$ for alle i. Dvs. $z_i = x_i$ for alle i, og løsningen er entydig.

Definition 19.6. Lad $E\colon v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ være en basis for V. En vektor $b \in V$ har *koordinatvektor* $[b]_E$ mht. E givet ved

$$[b]_E = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix},$$

hvor $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ er den entydig løsning til (19.1).

Eksempel 19.7. Betragt den følgende basis for $\mathbb{R}^2$, $E\colon v_0, v_1$, hvor

$$v_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dette er en basis, da matricen $\left[\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ har determinant $3 \times 2 - (-1) \times 1 = 6 + 1 = 7 \neq 0$.

Lad os bestemmer koordinatvektoren for $b = (1, -1)$ med hensyn til basen E. Vi skal løse

$$x_0 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

som er det samme som at løse det lineære ligningssystem

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dette kan gøres vi rækkeoperationer på den tilsvarende udvidede matrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim_{R_0 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim_{R_1 \to R_1 - 3R_0} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \end{array}\right]$$
$$\sim_{R_1 \to (-1/7)R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4/7 \end{array}\right] \sim_{R_0 \to R_0 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & -4/7 \end{array}\right],$$

så $x_0 = 1/7$, $x_1 = -4/7$ og

$$[b]_E = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ -4/7 \end{bmatrix}.$$

△

19.3 Koordinatskift

Når vi har to forskellige baser for det samme vektorrum, vil man gerne vide hvordan de tilhørende koordinater er relaterede til hinanden. Lad os begynde med at kikker på skift af koordinater i vektorrummet $\mathbb{R}^n$.

Lad $E\colon v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$, og sæt $A = \begin{bmatrix} v_0 \mid v_1 \mid \ldots \mid v_{n-1} \end{bmatrix}$. Så er koordinatvektoren $x = [b]_E$ løsningen til systemet

$$Ax = b.$$

Dette er det samme som

$$[b]_E = x = A^{-1}b. \tag{19.2}$$

Hvis $F\colon w_0, \ldots, w_{n-1}$ er en anden basis, sætter vi $B = \begin{bmatrix} w_0 \mid w_1 \mid \ldots \mid w_{n-1} \end{bmatrix}$. Så er koordinatvektoren af b mht. F givet på tilsvarende måde ved

$$[b]_F = B^{-1}b. \tag{19.3}$$

Kombinerer vi ligningerne (19.2) og (19.3), får vi

$$[b]_F = B^{-1}A[b]_E,$$

som giver relationen mellem de to koordinatvektorer for b. Der er derfor naturligt at kalde matricen $S = B^{-1}A$ for *koordinatskiftsmatricen* fra E til F.

Bemærkning 19.8. Det følger at $A = I_n^{-1}A$ er koordinatskiftsmatricen fra E til standardbasen $e_0, \ldots, e_{n-1}$. Desuden har vi at $A^{-1} = A^{-1}I_n$ er koordinatskiftsmatricen fra standardbasen $e_0, \ldots, e_{n-1}$ to E ◇

Lad os nu kikke på et vektorrum af polynomier. For at være konkret, lad være V vektorrummet af polynomier af grad højst 2. Et typisk element i V er så et polynomium

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

med a, b, c skalarer.

Én basis for V er $E\colon x^2, x, 1$. Vores polynomium p kan skrives, som en lineær kombination af basis elementer fra E via

$$p(x) = ax^2 + bx + c1.$$

Dette giver koordinatvektoren

$$[p]_E = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

af p mht. E.

En anden basis for V er $F\colon\ 3x^2-1, 2x+2, 3$. Lad os først beregne koordinatskiftet fra F til E. Vi har

$$\begin{aligned}
[3x^2-1]_E &= (3,0,-1),\\
[2x+2]_E &= (0,2,2),\\
[3]_E &= (0,0,3).
\end{aligned}$$

Hvis $[p]_F = (r,s,t)$, betyder dette at

$$p(x) = r(3x^2-1) + s(2x+2) + t(3).$$

Vi har så

$$\begin{aligned}
[p]_E &= r[3x^2-1]_E + s[2x+2]_E + t[3]_E\\
&= \Big[[3x^2-1]_E \;\Big|\; [2x+2]_E \;\Big|\; [3]_E \Big] \begin{bmatrix} r\\ s\\ t \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\\ s\\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} [p]_F.
\end{aligned}$$

Dette betyder at koordinatskiftsmatricen S fra F til E er

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

dvs. S er matricen hvis søjlerne er koordinatvektorerne mht. E for basiselementerne af F. Koordinatskiftsmatricen den omvendte vej, fra E til F, er nu S^{-1}, som kan beregnes til at være

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

19.4 Baser for nul- og søjlerum af en matrix

Lad os betragte matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denne matrix har reduceret echelonform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

så dens pivotsøjler er søjler 0, 2 og 3, og i ligningssystemet $Ax = b$ er x_1 og x_4 frie variabler. For enhver x er Ax en lineær kombination af pivotsøjlerne. Så vektorerne

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

som er pivotsøjlerne 0, 2, 3 af A, udspænder $S(A)$. Dette er også en basis for $S(A)$: Betingelsen at en lineær kombination af disse søjler er 0, er det samme som $Ax = 0$ hvor $x \in \mathbb{R}^5$ har formen $x = (x_0, 0, x_2, x_3, 0)$. Men fra echelonformen, ser vi at dette giver $x_0 = 0 = x_2 = x_3$, så $x = 0$, og søjlerne er dermed lineært uafhængig. Dermed har vi at pivotsøjlerne udgør en basis for $S(A)$.

Lad os nu betragter nulrummet $N(A)$ af A. Dette består af alle løsninger $x \in \mathbb{R}^5$ til $Ax = 0$. Fra den reducerede echelonform af A har vi at ligningssystemet $Ax = 0$ er ækvivalent med

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 - 2x_4 &= 0, \\ x_2 + x_4 &= 0, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Som vi har bemærket før er de frie variabler x_1 og x_4. Så den generelle løsning til $Ax = 0$ er

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_4 \\ x_1 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Derfor udspænder disse to vektorer $(-1, 1, 0, 0, 0), (2, 0, -1, 0, 1)$ nulrummet for A. Dette par er også lineært uafhængig: I hver vektor er der et 1-tal i pladsen der svarer til den tilsvarende frie variabel, og i de andre vektorer er der et 0-tal. Så en lineær kombination af disse vektorer kan kun give 0 hvis de tilsvarende frie variabler er 0, dvs. hvis alle koefficienter er 0. De to vektorer udgør derfor en basis for $N(A)$ er $(-1, 1, 0, 0, 0), (2, 0, -1, 0, 1)$.

Tilsvarende overvejelser for en generel matrix giver

Proposition 19.9. *Lad A være en $(m \times n)$-matrix. Så udgør pivotsøjlerne af A en basis for søjlerummet $S(A)$.*

Hvis A har r pivotsøjler, så er der $n-r$ frie variabler $x_{i_0}, \dots, x_{i_{n-r-1}}$ for systemet $Ax = 0$. En basis for nulrummet $N(A)$, gives for $j = 0, \dots, n-r-1$ af de løsninger til $Ax = b$ hvor $x_{i_j} = 1$ og de øvrige $x_{i_k} = 0$. □

19.5 Dimension

Definition 19.10. Antallet af elementer i en basis for V kaldes *dimensionen* $\dim V$ af V.

I eksemplet lige før har vi så

$$\dim S(A) = 3 \quad \text{og} \quad \dim N(A) = 2.$$

Som direkte konsekvens af proposition 19.9 har vi

Proposition 19.11. *For $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ er $\dim S(A)$ lige med antallet af pivotsøjler i A og $\dim N(A)$ lige med antallet af frie variabler i $Ax = 0$. Det følger at*

$$\dim S(A) + \dim N(A) = n.$$

Bevis. Proposition 19.9 giver

$$\text{antal pivotsøjler} + \text{antal frie variabler} = n$$

og resultater følger. □

Python indeks

Indeks

B
basis, 4

D
dimension, 11

K
koordinatskiftsmatrix, 8
koordinatvektor, 7

M
matrix
  koordinatskift, 8