

Numerisk Lineær Algebra F2021

Notesæt 22

Andrew Swann

21. april 2021

Sidst ændret: 21. april 2021.
Versionskode: 7dc3be3.

Indhold

Indhold	1
Figurer	1
22 Differentialligninger	2
22.1 Førsteordenssystemer	2
22.2 Komplekse egenverdier	7
22.3 Højere ordens lineære differentialligninger	12
Python indeks	16
Indeks	16

Figurer

22.1 Beholdere forbudne med rør	5
22.2 Saltmængden i beholder A mod beholder B	8
22.3 Elektrisk kredsløb	10
	1

22.4 Løsningen til kredsløb	12
22.5 System med klods og fjedre	13

22 Differentialligninger

En væsentlig anvendelse af egenverdier og egenvektorer er til løsninger af lineære differentialligninger. Problemer for generelle lineære differentialligninger kan omskrives til lineære systemer af førsteordens differentialligninger, så det er disse systemer vi begynder med.

22.1 Førsteordenssystemer

Lad os begynde med en konkret førsteordensdifferentialligning for én ukendt funktion $y(t)$:

$$y'(t) = ay(t), \quad (22.1)$$

hvor a er en given konstant. Funktionen $y(t) = ce^{at}$ har

$$y'(t) = \frac{d}{dt}(ce^{at}) = cae^{at} = ay(t),$$

så er en løsning til (22.1).

To ting skal bemærkes. Hvis $y(t) = ce^{at}$ og en startværdi $y(t_0) = r_0$ er givet, så har vi en entydig løsning for c , givet ved $ce^{at_0} = r_0$, dvs. $c = r_0e^{-at_0}$. Desuden hvis $z(t)$ er en anden løsning til (22.1), så kan vi betragte $w(t) = z(t)e^{-at}$, som opfylder

$$w'(t) = \frac{d}{dt}(z(t)e^{-at}) = z'(t)e^{-at} - az(t)e^{-at} = (z'(t) - az(t))e^{-at} = 0$$

for alle t . Det følger at $w(t)$ er konstant, og dermed at $z(t) = ce^{at}$ for en konstant c . Vi har så følgende resultat:

Proposition 22.1. *Alle løsninger $t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ til differentialligningen (22.1) har formen $y(t) = ce^{at}$ med c konstant. Løsninger er entydigt bestemt af en begyndelsesværdi $y(t_0) = r_0$. \square*

Et *førsteordenssystem af lineære differentiaalligninger* er et system af formen

$$\begin{aligned}y_0'(t) &= a_{00}y_0(t) + a_{01}y_1(t) + \cdots + a_{0,n-1}y_{n-1}(t), \\y_1'(t) &= a_{10}y_0(t) + a_{11}y_1(t) + \cdots + a_{1,n-1}y_{n-1}(t), \\&\vdots \\y_{n-1}'(t) &= a_{n-1,0}y_0(t) + a_{n-1,1}y_1(t) + \cdots + a_{n-1,n-1}y_{n-1}(t),\end{aligned}$$

med $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en kvadratisk matrix af konstanter. Her er der n ukendte funktioner $y_i(t)$.

Systemet kan skrives i vektornotation ved at sætte $y(t) = (y_0(t), \dots, y_{n-1}(t))$. Vi får

$$y'(t) = Ay(t). \quad (22.2)$$

Dette system er lineær, da for løsninger $y(t)$, $z(t)$ og konstanter a, b har vi at $ay(t) + bz(t)$ er også en løsning, jævnfor

$$(ay(t) + bz(t))' = ay'(t) + bz'(t) = aAy(t) + bAz(t) = A(ay(t) + bz(t)).$$

Hvis $A = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ er en diagonalmatrix, er systemet blot

$$\begin{aligned}y_0'(t) &= \lambda_0 y_0(t), \\y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t), \\&\vdots \\y_{n-1}'(t) &= \lambda_{n-1} y_{n-1}(t),\end{aligned}$$

som er n kopier af (22.1). Det følger at løsningen i dette tilfælde er

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_0 e^{\lambda_0 t} \\ c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t} \end{bmatrix} \\&= c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_0 t} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_{n-1} t} \\&= c_0 e_0 e^{\lambda_0 t} + c_1 e_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_{n-1} e_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t},\end{aligned}$$

for konstante c_0, c_1, \dots, c_{n-1} . Vektorerne i resultatet er standardbasisvektorerne e_0, \dots, e_{n-1} . For en diagonalmatrix $A = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ opfylder vektorerne e_i at $Ae_i = \lambda_i e_i$, dvs. de er egenvektorer for A .

Generelt hvis $v \in \mathbb{R}^n$ er en egenvektor for A med $Av = \lambda v$, har vi at $y(t) = cve^{\lambda t}$ løser (22.2):

$$y'(t) = \frac{d}{dt}(cve^{\lambda t}) = cv \frac{d}{dt}e^{\lambda t} = cv\lambda e^{\lambda t} = ce^{\lambda t}Av = A(cve^{\lambda t}) = Ay(t).$$

Fra linearitet følger det, at hvis v_0, v_1, \dots, v_{k-1} er egenvektorer for A med egenverdier $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$, så er

$$y(t) = c_0 v_0 e^{\lambda_0 t} + c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_{k-1} v_{k-1} e^{\lambda_{k-1} t},$$

med c_i konstant, en løsning til (22.2).

Proposition 22.2. Hvis A har en basis bestående af egenvektorer v_0, v_1, \dots, v_{n-1} med egenverdier $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ så er alle løsninger til (22.2) af formen

$$y(t) = c_0 v_0 e^{\lambda_0 t} + c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_{n-1} v_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t},$$

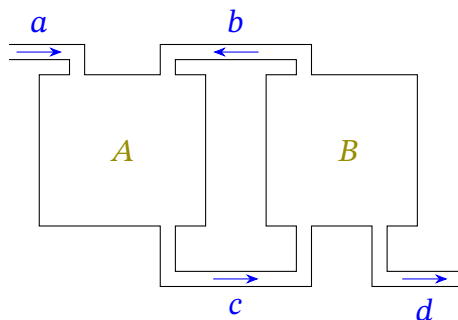
med c_i konstant. Givet en vektor af begyndelsesverdier $y(t_0) = r \in \mathbb{R}^n$, har (22.2) en entydig løsning, som opfylder med disse begyndelsesverdier.

Bevis. Ligningssystemet er $y' = Ay = V\Lambda V^{-1}y$, som er ækvivalent med $(V^{-1}y)' = \Lambda(V^{-1}y)$. Vi får også $(V^{-1}y)(t_0) = V^{-1}r$. Skrives $z(t) = V^{-1}y(t)$ har vi derfor at systemet er ækvivalent med $z' = \Lambda z$, med begyndelsesvektor $z(t_0) = V^{-1}r$. Da Λ er diagonal, har vi set ovenfor at eksistens og entydig følger nu fra tilfældet for $n = 1$, dvs. det følger fra proposition 22.1. \square

Eksempel 22.3. To beholdere A og B er forbundet med rør, som i figur 22.1. Som udgangspunkt indeholder A 200 l vand med 60 g salt, og B indeholder 200 l rent vand. Vandtilstand udvikler sig ved at der tilføjes 15 l/min rent vand via rør a , der flyder 5 l/min blanding i gennem rør b i den anviste retning, og der flyder 20 l/min i gennem rør c . Igennem rør d forlader 15 l/min saltvand. Hvor meget salt er der i hver beholder efter tid t ?

Vi sætter $y_0(t)$ til at være mængden af salt i A ved tid t min, og $y_1(t)$ til mængden af salt i B . For beholder A mistes der $20(y_0(t)/200) = y_0(t)/10$ gram salt per minut, og der tilføjes $5(y_1(t)/200) = y_1(t)/40$ gram salt per minut. Så

$$y_0'(t) = -\frac{1}{10}y_0(t) + \frac{1}{40}y_1(t).$$



Figur 22.1: Beholdere forbudne med rør.

For beholder B har vi

$$y_1'(t) = \frac{1}{10}y_0(t) - \frac{5+15}{200}y_1(t) = \frac{1}{10}y_0(t) - \frac{1}{10}y_1(t).$$

Så systemet er

$$y'(t) = Ay, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix},$$

med begyndelsesværdi

$$y(0) = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nu vi vil løse systemet. Det karakteristiske polynomium for A er

$$\det \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} - \lambda & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} - \lambda \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{10} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{10} \frac{1}{40} = \lambda^2 + \frac{1}{5}\lambda + \frac{3}{400},$$

som har rødder

$$\frac{-(1/5) \pm \sqrt{(1/25) - (3/100)}}{2} = \frac{-(1/5) \pm (1/10)}{2} = -\frac{1}{20}, -\frac{3}{20}$$

Matricen A er en (2×2) -matrix, og der to forskellige rødder, så A er diagonaliserbar.

For $\lambda_0 = -1/20$ har vi

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} - \lambda_0 & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} - \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så en egenvektor er $v_0 = (1, 2)$. For $\lambda_1 = -3/20$ har vi

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} - \lambda_1 & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og en egenvektor er $v_1 = (1, -2)$. Proposition 22.2 fortæller os så at løsningen har formen

$$y(t) = c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t/20} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-3t/20}.$$

Konstanterne c_0 og c_1 kan bestemmes ud fra vores begyndelsesdata. Ved $t = 0$ har vi

$$y(0) = c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix},$$

som har løsning $c_0 = c_1 = 30$. Så saltmængderne er givet ved

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = 30 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t/20} + 30 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-3t/20} = \begin{bmatrix} 30e^{-t/20} + 30e^{-3t/20} \\ 60e^{-t/20} - 60e^{-3t/20} \end{bmatrix}.$$

Da $e^{-t} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$, ser vi at løsningen går mod 0 når t vokser. Men $e^{-t/20}$ går langsommere mod 0 end $e^{-3t/20}$, så forholdet mellem $y_0(t)$ og $y_1(t)$ nærmer sig fordeling fra indgangerne i v_0 , dvs. 1 til 2.

Vi kan plotte $(y_0(t), y_1(t))$, og får figuren til venstre i figur 22.2. Punkterne bevæger langs kurven fra højre til venstre, og kurvens tangentretning nærmer sig v_0 efterhånden.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

v0 = np.array([1.0, 2.0])[:, np.newaxis]
v1 = np.array([1.0, -2.0])[:, np.newaxis]
lambda0 = -1.0 / 20.0
lambda1 = -3.0 / 20.0

t = np.linspace(0, 100, 100)
løsning = (30 * v0 * np.exp(lambda0 * t)
           + 30 * v1 * np.exp(lambda1 * t))

fig, ax = plt.subplots()
```

```
ax.set_aspect('equal')
ax.plot(*løsning,
        marker='o', markevery=10, markersize=4)
```

Vi kan også lave plots med andre startværdier.

```
v = np.hstack([v0, v1])

def sol(r0, r1, v, lambda0, lambda1, t):
    c = np.linalg.solve(v, np.array([r0, r1]))[:, np.newaxis])
    return (c[0] * v0 * np.exp(lambda0 * t)
            + c[1] * v1 * np.exp(lambda1 * t))

t = np.linspace(0, 100, 100)

marks = dict(marker='o', markevery=10, markersize=3)

fig, ax = plt.subplots()
ax.set_aspect('equal')
for s in np.linspace(10, 60, 6):
    ax.plot(*sol(s, 0, v, lambda0, lambda1, t), **marks)
    ax.plot(*sol(s, 60, v, lambda0, lambda1, t), **marks)
for s in np.linspace(10, 60, 6):
    ax.plot(*sol(0, s, v, lambda0, lambda1, t), **marks)
    ax.plot(*sol(60, s, v, lambda0, lambda1, t), **marks)
```

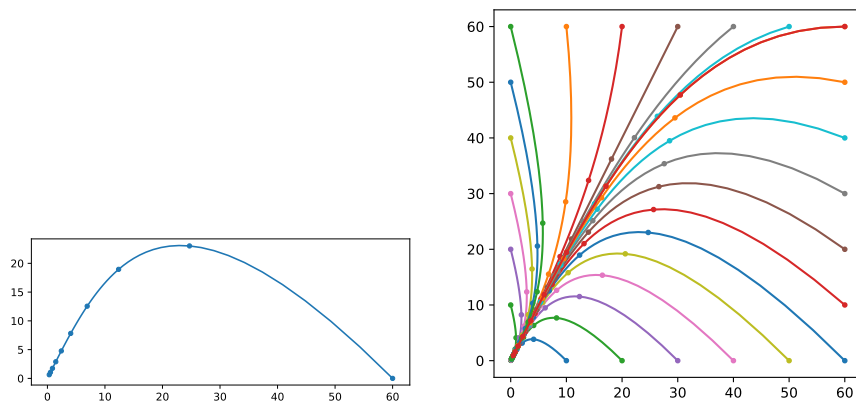
Disse visses til højre i figur 22.2.

△

22.2 Komplekse egenverdier

Selvom A har reelle indgange, kan egenverdierne godt være komplekse tal. Det har vi set i det forrige kapitel. Vi vil dog gerne følge metoden ovenfor. Så vi begynder med at kikke på ligning (22.1) i det komplekse tilfælde. Hvis $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, har vi brug for funktioner $t \mapsto y(t) \in \mathbb{C}$, der opfylder

$$y'(t) = \lambda y(t) = (a + ib)y(t).$$



Figur 22.2: Saltmængden i beholder A mod beholder B.

Heldigvis findes sådanne funktioner. Betragt

$$y(t) = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)).$$

Vi har

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))) \\ &= \left(\frac{d}{dt}(e^{at})\right)(\cos(bt) + i \sin(bt)) + e^{at} \frac{d}{dt}(\cos(bt) + i \sin(bt)) \\ &= ae^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) + e^{at}(-b \sin(bt) + ib \cos(bt)) \\ &= e^{at}((a \cos(bt) - b \sin(bt)) + i(a \sin(bt) + b \cos(bt))) \\ &= e^{at}(a + ib)(\cos(bt) + i \sin(bt)) \\ &= (a + ib)y(t), \end{aligned}$$

som er netop det vi ønsker.

Vi definerer $e^{\lambda t}$ for kompleks $\lambda = a + ib$ til at være

$$e^{\lambda t} = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)),$$

og kalder dette *den komplekse eksponentialfunktion*.

Vi har lige vist at

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

Ved hjælp af standard trigonometriske identiteter kan man desuden tjekke at

$$e^{\lambda+\mu} = e^{\lambda} e^{\mu}$$

for komplekse tal λ og μ . Så denne eksponentialfunktion for komplekse tal har mange af de samme egenskaber, som dem vi kender for reelle tal.

Bemærk at vi har nu den smukke *Eulers identitet*

$$e^{i\pi} = -1,$$

da $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + i0 = -1$.

Hvis $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ har en kompleks egen værdi $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ med egenvektor $v \in \mathbb{C}^n$, så har vi $Av = \lambda v$. Det følger at $\bar{\lambda} = a - ib$ er også en egen værdi for A over \mathbb{C} med egenvektor \bar{v} , da $\bar{A} = A$ giver

$$A\bar{v} = \bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}.$$

Så opfylder både $e^{\lambda t}v$ og $e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$ systemet $y' = Ay$. De er dog løsninger i \mathbb{C}^n .

For at få reelle løsninger kan vi skrive $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, og tilsvarende $v = w + iz$, med $w, z \in \mathbb{R}^n$. De følgende to lineære kombinationer af løsningerne $e^{\lambda t}v$ og $e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$,

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \frac{1}{2}(e^{\lambda t}v + e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}) = \operatorname{Re}(e^{\lambda t}v), \\ u_1(t) &= \frac{1}{2i}(e^{\lambda t}v - e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}) = \operatorname{Im}(e^{\lambda t}v), \end{aligned}$$

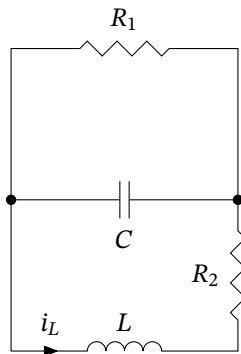
er løsninger til $y' = Ay$ i \mathbb{R}^n . Ved at bruge a, b og w, z , har vi $e^{\lambda t}v = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))(w + iz)$, og vi finder at

$$\begin{aligned} u_0(t) &= e^{at}(\cos(bt)w - \sin(bt)z), \\ u_1(t) &= e^{at}(\sin(bt)w + \cos(bt)z). \end{aligned}$$

Eksempel 22.4. Betragt kredsløbet i figur 22.3 med $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 0,8 \Omega$, $L = 0,4 \text{ H}$, $C = 0,1 \text{ F}$. Den elektriske strøm i_L igennem L og spændingsfaldet v_C opfylder systemet

$$\begin{bmatrix} i'_L(t) \\ v'_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_2/L & -1/L \\ 1/C & -1/(R_1 C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}.$$

Sættes $y(t) = (i_L(t), v_C(t))$, har vi



Figur 22.3: Elektrisk kredsløb.

$$y'(t) = Ay(t), \quad A = \begin{bmatrix} -2,0 & -2,5 \\ 10,0 & -2,0 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium for A , $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ har koefficienter

```
a = 1.0
b = -2 * (-2.0)
c = (-2.0) * (-2.0) - (-2.5) * (10.0)
print(a, b, c)
```

1.0 4.0 29.0

Den tilsvarende diskriminant Δ er

```
diskriminant = b**2 - 4 * a * c
print(diskriminant)
```

-100.0

som er negative. Det følger at en kompleks egen værdi er $(-b + i\sqrt{-\Delta})/(2a)$:

```
lambda_c = (-b + 1.0j * np.sqrt(-diskriminant))/(2 * a)
print(lambda_c)
```

(-2+5j)

Dvs. $\lambda = -2 + 5i$. Vi finder en tilsvarende egenvektor af formen $v = (z, 1)$:

```
a_mat = np.array([[-2.0, -2.5],
                  [10.0, -2.0]])
a_mat_c = a_mat - lambda_c * np.eye(2)
print(a_mat_c)
v_c = np.array([-a_mat_c[0,1]/a_mat_c[0,0],
                1.0])[0, np.newaxis]
print(v_c)
```

```
[[ 0. -5.j -2.5+0.j]
 [10. +0.j  0. -5.j]]
[[0.+0.5j]
 [1.+0.j  ]]
```

Dvs. $v = (i/2, 1)$. Dette giver de følgende komplekse løsninger

$$v e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} i/2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-2+5i)t}, \quad \bar{v} e^{\bar{\lambda} t} = \begin{bmatrix} -i/2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-2-5i)t}.$$

Da

$$v = \begin{bmatrix} i/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} =: w + iz,$$

er de tilsvarende reelle løsninger

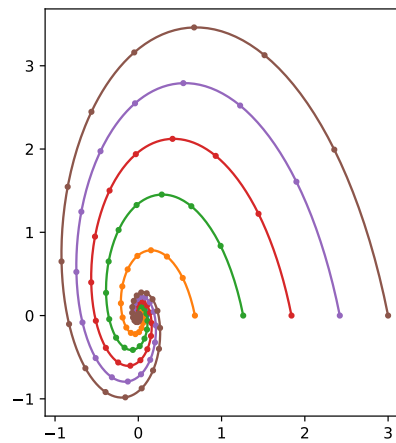
$$u_0(t) = e^{-2t} \left(\cos(5t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin(5t) \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -(1/2) \sin(5t) \\ \cos(5t) \end{bmatrix},$$

$$u_1(t) = e^{-2t} \left(\sin(5t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(5t) \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{-2t} \begin{bmatrix} (1/2) \cos(5t) \\ \sin(5t) \end{bmatrix}.$$

Den generelle løsning til systemer er så $y(t) = c_0 u_0(t) + c_1 u_1(t)$.

Givet begyndelsessværdierne $y(0) = (i_L(0), v_C(0))$, kan vi løse $y(0) = c_0(0, 1) + c_1(1/2, 0)$ for c_0, c_1 . Vi kan plotte disse løsninger som før

```
def sol_c(r0, r1, v_c, lambda_c, t):
    w = v_c.real
    z = v_c.imag
    v = np.hstack([w, z])
    a = lambda_c.real
```



Figur 22.4: Løsningen til kredsløb.

```

b = lambda_c.imag
c = np.linalg.solve(v, np.array([r0, r1]))[:, np.newaxis])
return (c[0] * np.exp(a*t)
        * (np.cos(b*t) * w - np.sin(b*t) * z)
        + c[1] * np.exp(a*t)
        * (np.sin(b*t) * w + np.cos(b*t) * z))

t = np.linspace(0, 4, 1000)

marks = dict(marker='o', markevery=20, markersize=3)

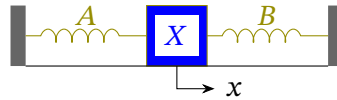
fig, ax = plt.subplots()
ax.set_aspect('equal')
for s in np.linspace(0.1, 3, 6):
    ax.plot(*sol_c(s, 0, v_c, lambda_c, t), **marks)

```

△

22.3 Højere ordens lineære differentiaalligninger

Højere ordens differentiaallinger kan omskrives til systemer af førsteordensligninger. Lad os vise dette for lineære differentiaalligninger af orden 2.



Figur 22.5: System med klods og fjedre.

Betragt

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y(t) \in \mathbb{R}. \quad (22.3)$$

Vi indfører nye funktioner $y_0(t)$ og $y_1(t)$ givet ved

$$y_0(t) = y(t), \quad y_1(t) = y'(t).$$

Ligning (22.3) kan nu skrives ved hjælp af $y_0(t)$, $y_1(t)$ og den første ordens afledede $y_1'(t)$:

$$y_1'(t) + ay_1(t) + by_0(t) = 0. \quad (22.4)$$

Husker vi definitionen på $y_1(t)$, får vi også en ligning for den første ordens afledede $y_0'(t)$:

$$y_0'(t) = y_1'(t) = y_1(t). \quad (22.5)$$

Ligninger (22.4) og (22.5) kan nu omskrives, som et førsteordenssystem

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= y_1(t), \\ y_1'(t) &= -by_0(t) - ay_1(t). \end{aligned}$$

Vi skriver dette i matrixform, som

$$\begin{bmatrix} y_0'(t) \\ y_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}. \quad (22.6)$$

Sådan et system kan nu løses ved hjælp af de metoder vi indførte tidligere i kapitlet.

Bemærk at en begyndelsesværdi for systemet (22.6) er en angivelse af $y_0(t_0) = y(t_0)$ og $y_1(t_0) = y'(t_0)$, dvs. en angivelse af y og dens første ordens afledede i tid t_0 . Derfor forventer vi at løsninger er entydigt bestemt af sådanne begyndelsesværdier.

Eksempel 22.5. Betragt figur 22.5 hvor en klods X af masse m er forbundet med fjedre A og B med fjederkonstanter k_A og k_B . Klodsen kan bevæge sig til venstre og til højre. Vi angiver dens position ved et vandret koordinat x_0 , som er 0 når X er i dens ligevægtsstilling, og er positiv når X bevæger sig til højre.

Bevægelsesligningerne følger fra Newtons anden lov, som siger

$$\text{masse} \times \text{acceleration} = \text{kraft}.$$

Fjeder A bidrager med en kraft $-k_A x(t)$: minus fortegnet skyldes at $x(t)$ måles til højre, men sammentrækningskraften er til venstre for $x(t)$ positiv. Ligeledes bidrager fjeder B med kraften $-k_B x(t)$: for $x(t)$ positiv, skubber fjedren klodsen til venstre. I alt får vi

$$mx''(t) = -k_A x(t) - k_B x(t) = -(k_A + k_B)x(t).$$

Lad os tage $m = 1$, $k_A = k_B = 1$. Vi sætter $y_0(t) = x(t)$ og $y_1(t) = x'(t)$ og får

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= x'(t) = y_1(t), \\ y_1'(t) &= x''(t) = -2x(t) = -2y_0(t). \end{aligned}$$

Så har vi et førsteordenssystem

$$\begin{bmatrix} y_0'(t) \\ y_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix},$$

dvs.

$$\begin{bmatrix} y_0'(t) \\ y_1'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \quad \text{med } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

For at løse systemet, beregne vi først det karakteristiske polynomium for koefficientmatricen A :

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2$$

Polynomiet har rødder $\pm i\sqrt{2} \in \mathbb{C}$. Nu finder vi en kompleks egenvektor v for $\lambda = i\sqrt{2}$:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sqrt{2} & 1 \\ -2 & -i\sqrt{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

giver en egenvektor $v = (1, i\sqrt{2}) \in \mathbb{C}^2$. Vi får en kompleks løsning $e^{\lambda t} v = e^{i\sqrt{2}t} (1, i\sqrt{2}) = (\cos(\sqrt{2}t) + i \sin(\sqrt{2}t))(1, i\sqrt{2})$. Fra afsnit 22.2 har vi at den

generelle løsning er nu en lineær kombination af de reelle og imaginære del af den komplekse løsning:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = c_0(\cos(\sqrt{2}t) \operatorname{Re}(v) - \sin(\sqrt{2}t) \operatorname{Im}(v)) \\ &\quad + c_1(\sin(\sqrt{2}t) \operatorname{Re}(v) + \cos(\sqrt{2}t) \operatorname{Im}(v)) \\ &= \begin{bmatrix} c_0 \cos(\sqrt{2}t) + c_1 \sin(\sqrt{2}t) \\ -c_0 \sin(\sqrt{2}t)\sqrt{2} + c_1 \cos(\sqrt{2}t)\sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Så vi har

$$x(t) = c_0 \cos(\sqrt{2}t) + c_1 \sin(\sqrt{2}t),$$

dvs. en svingning med svingningstid $2\pi/\sqrt{2} \approx 4,44$ s.

△

Python indeks

****** (unpack dictionary), [7](#)

M
markevery, [6](#)

Indeks

D
differentialligninger, [2](#)
førsteordenssystem, [3](#)

E
eksponentialfunktion, [2](#)
kompleks, [8](#)
Eulers identitet, [9](#)

K
kompleks tal
eksponentialfunktion, [8](#)