Numerisk Lineær Algebra F2021
Notesæt 23

Andrew Swann

3. maj 2021

Sidst ændret: 3. maj 2021.
Versionskode: 3ec3ba1.

Indhold

23 Matrixfaktorisering fra egenværdier

Egenværdier og egenvektorer giver anledning til forskellige matrixfaktorisering. Her vil vi kikke på nogle enkle betingelser der garanterer eksistens af sådanne faktoriseringer.

23.1 Eksistens af egenværdier

Polynomiet

$$p(x) = x^2 + 1$$

har ingen rødder i $\mathbb{R}$. Men tillader vi komplekse tal så har den to rødder $i, -i$ i $\mathbb{C}$. At man har bedre kontrol over eksistens af rødder over komplekse tal er indholdet i:

Sætning 23.1 (Algebraens fundamentalsætning). *Ethvert polynomium* $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ *har en rod i* $\mathbb{C}$. □

Givet en rod z_0, kan vi så skrive $p(x) = (x - z_0)q(x)$ med $q(x)$ er polynomium af grad $n - 1$ og anvender sætningen igen på $q(x)$. Vi får til sidst at $p(x)$ kan faktoriseres, som

$$p(x) = a_n(x - z_0)(x - z_1)\dots(x - z_{n-1})$$

for nogle $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Egenværdier er netop rødder til det karakteristiske polynomium $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, så vi får som konsekvens af sætning 23.1 at

Proposition 23.2. *Enhver matrix* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *har en egenværdi.* □

Dette siger for enhver $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ findes der en $\lambda \in \mathbb{C}$ og $v \in \mathbb{C}^n$, med $v \neq 0$, således at

$$Av = \lambda v.$$

Bemærk at vi kan altid erstatte v med $v/\|v\|_2$, og får dermed en egenvektor af længde 1, skulle det ønskes.

23.2 Determinant og egenværdier

Lad os noterer nogle egenskaber af determinanten og giver nogle simple konsekvenser for bestemmelse af egenværdier. For det første opfører determinanten sig godt i forhold til matrixmultiplikation.

Sætning 23.3. *For A og B $(n\times n)$-matricer gælder* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. □

Vi giver et bevis for sætningen senere, se afsnit 23.5, side 16. Her er en vigtig anvendelse.

Proposition 23.4. *For $A = VBV^{-1}$ har A og B det samme karakteristiske polynomium, og så de samme egenværdier.*

Bevis. Bemærk at sætning 23.3 giver

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA).$$

Det følger at

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_n) &= \det(VBV^{-1} - \lambda I_n) = \det(VBV^{-1} - V\lambda I_n V^{-1}) \\ &= \det(V(B - \lambda I_n)V^{-1}) = \det((B - \lambda I_n)V^{-1}V) \\ &= \det(B - \lambda I_n),\end{aligned}$$

dvs. at A og B har det samme karakteristiske polynomium. Da egenværdier er netop rødder af det karakteristiske polynomium, får vi det sidste påstand. □

Proposition 23.5. *For en øvre triangulær matrix*

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_{n-1} \end{bmatrix}$$

er

$$\det(B) = \lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$$

og $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ er egenværdierne af B.

Igen giver vi beviset senere, se afsnit 23.5, side 12. Lad os kikke på et eksempel.

Eksempel 23.6. Matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 2{,}6 \\ -8{,}4 & 10{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

har samme egenværdier som

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Men B er øvre triangulær, så egenværdierne i B er blot dens diagonale indgange. Dvs. $\lambda_0 = 6$ og $\lambda_1 = 5$. △

23.3 Unitære matricer og Schurdekomponeringen

Standardindreproduktet i $\mathbb{C}^n$ er

$$\langle u, v\rangle = \overline{v}^T u.$$

Som analog til ortogonale matricer i $\mathbb{R}^{n\times n}$ har vi følgende definition over $\mathbb{C}$.

Definition 23.7. En matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ er *unitær* hvis

$$\overline{U}^T U = I_n.$$

Bemærk at U er unitær hvis og kun hvis U er invertibel med

$$U^{-1} = \overline{U}^T.$$

Det følger at $U\overline{U}^T = I_n$ også.

For generel U, kan vi skrive $U = \begin{bmatrix} u_0 \mid u_1 \mid \dots \mid u_{n-1}\end{bmatrix}$, og danne en kompleks Grammatrix:

$$\overline{U}^T U = \begin{bmatrix} \overline{u_1}^T u_1 & \overline{u_1}^T u_2 & \dots & \overline{u_1}^T u_{n-1} \\ \overline{u_2}^T u_1 & \overline{u_2}^T u_2 & \dots & \overline{u_2}^T u_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{u_{n-1}}^T u_1 & \overline{u_{n-1}}^T u_2 & \dots & \overline{u_{n-1}}^T u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dette er den $(n\times n)$-matrix med (i,j)-indgang $\langle u_j, u_i\rangle$. Det følger at $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ er unitær hvis og kun hvis dens søjler $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ er ortonormal i $\mathbb{C}^n$.

Sætning 23.8 (Schurdekomponering)**.** *For enhver matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ findes der en unitær matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\overline{U}^T = U^{-1}$, således at $T = \overline{U}^T AU$ er øvre triangulær, dvs. $A = UT\overline{U}^T$.*

Bevis. Lad os først betragte tilfældet $n = 2$. Fra proposition 23.2 ved vi at matricen A har en egenværdi $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ og en egenvektor $u_0 \in \mathbb{C}^2$. Sættes $v_0 = u_0/\|u_0\|_2 = (z, w)$ fås en egenvektor af længde 1, så med $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

Vi kan nu finde en ortonormal basis for $\mathbb{C}^2$ ved at bruge v_0 og vektoren $v_1 = (-\overline{w}, \overline{z})$. Vi har $\|v_1\|_2^2 = |w|^2 + |z|^2 = 1$ og $\langle v_0, v_1\rangle = -wz + zw = 0$, så v_0, v_1 er ortonormal. Det følger at $U = \begin{bmatrix} v_0 \mid v_1\end{bmatrix}$ er en unitær matrix.

Da $Av_0 = \lambda_0 v_0$ og U er invertibel, har vi

$$\begin{aligned} AU &= A\big[v_0 \mid v_1\big] = \big[Av_0 \mid Av_1\big] = \big[\lambda_0 v_0 \mid x_1\big] = \big[v_0 \mid v_1\big] \begin{bmatrix} \lambda_0 & z_1 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix} \\ &= U \begin{bmatrix} \lambda_0 & z_1 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

hvor $x_1 = Av_1$ og $(z_1, w_1) = U^{-1}x_1$. Vi har så at

$$\overline{U}^T AU = \begin{bmatrix} \lambda_0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix},$$

en øvre triangulær, som ønsket.

For generel n, kan vi begynde på samme måde med en egenværdi λ_0 og en egenvektor v_0 af længde 1. Vi kan så brug Gram-Schmidt processen på $v_0, e_0, \dots, e_{n-1}$ til at finde en ortonormal basis $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ af $\mathbb{C}^n$. Sættes $U_0 = \big[v_0 \mid v_1 \mid \dots \mid v_{n-1}\big]$ har vi en unitær matrix.

Nu ser vi at

$$\begin{aligned} AU_0 &= A\big[v_0 \mid v_1 \mid \dots \mid v_{n-1}\big] = \big[Av_0 \mid Av_1 \mid \dots \mid Av_{n-1}\big] \\ &= \big[\lambda_0 v_0 \mid x_1 \mid \dots \mid x_{n-1}\big] = U_0(\overline{U}_0^T)\big[\lambda_0 v_0 \mid x_1 \mid \dots \mid x_{n-1}\big] \\ &= U_0 \begin{bmatrix} \lambda_0 & z_1 & \dots & z_{n-1} \\ 0 & b_{00} & \dots & b_{0,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n-2,0} & \dots & b_{n-2,n-2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

hvor i det sidste trin vi bruge at $\overline{v_i}^T v_0$ er 1, for $i = 0$, og 0 ellers. Matricen $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n-1 \times n-1}$ har mindre størrelse end A, så per induktion kan vi skrive $B = VS\overline{V}^T$ med $V = (v_{ij}) \in \mathbb{C}^{n-1\times n-1}$ unitær og $S = (s_{ij}) \in \mathbb{C}^{n-1\times n-1}$ øvre triangulær. Sættes

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_{00} & \dots & v_{0,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & v_{n-2,0} & \dots & v_{n-2,n-2} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T = \begin{bmatrix} \lambda_0 & z_1 & \dots & z_{n-1} \\ 0 & s_{00} & \dots & s_{0,n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & s_{n-2,n-2} \end{bmatrix},$$

har vi at U_1 er unitær, T er øvre triangulær og

$$AU_0 = U_0 U_1 T \overline{U_1}^T,$$

så

$$AU_0U_1 = U_0U_1T.$$

Men $U = U_0U_1$ er unitær: $\overline{U}^T U = \overline{U_0U_1}^T U_0U_1 = (\overline{U_0U_1})^T U_0U_1 = \overline{U_1}^T \overline{U_0}^T U_0U_1 = \overline{U_1}^T I_n U_1 = I_n$. Det følger at $AU = UT$, eller

$$T = \overline{U}^T AU,$$

som ønsket. □

23.4 Spektralsætningen

Vi kan få diagonaliseringsresultater hvis vi sætter ekstra krav på vores matrix. Vi giver først et resultat for reelle symetriske matricer, og derefter en version af samme resultat for visse komplekse matricer.

Sætning 23.9 (Spektralsætningen for reelle symmetriske matricer). *For $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisk findes der en ortogonal matrix $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ således at*

$$A = V\Lambda V^T$$

for en diagonal matrix $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Specielt er A diagonaliserbar med reelle egenværdier $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$.

Inden vi går i gang med beviset lad os kikke på et par eksempler.

Eksempel 23.10. Betragt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

som er symmetrisk. Dens karakteristiske polynomium er $p(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$, så de er to egenværdier $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = -1$.

Vi kikker efter egenvektorer. Først for λ_0:

$$A - \lambda_0 I_2 = \begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

giver alle egenvektorer $v_0 = (x, y)$ for λ_0 har $x = y$. Vi får en enhedsvektor ved at sætter f.eks. $x = 1 = y$ og dele derefter med normen:

$$v_0 = \frac{1}{\|(1,1)\|_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

For λ_1 har vi

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så kan tage

$$v_1 = \frac{1}{\|(1,-1)\|_2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Bemærk at $\langle v_0, v_1 \rangle = 0$, så

$$V = \begin{bmatrix} v_0 \mid v_1 \end{bmatrix}$$

er en ortogonal matrix, og vi har

$$A = V \Lambda V^T \qquad \text{med } \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

△

Eksempel 23.11. Betragt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

som er symmetrisk med karakteristisk polynomium

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - (-1)^2\big) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) \\ &= \lambda(2-\lambda)^2, \end{aligned}$$

så A har egenværdier 0 og 2.

For $\lambda = 0$, er

$$v_0 = \frac{1}{\|(0,1,1)\|_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

en egenvektor.

For $\lambda = 2$, har vi

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der er to frie variabler (x_0 og x_2), og dermed den generelle løsning er $v = (x_0, -x_2, x_2)$. Bemærk at alle disse vektorer er vinkelret på v_0. Sættes $x_0 = 1$, $x_2 = 0$, får vi en enhedsvektor

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi mangler nu kun en enhedsvektor v_2, som er både en egenvektor med egenværdi $\lambda = 2$ og er vinkelret på v_1. Egenvektorerne $v = (x_0, -x_2, x_2)$, som er vinkelret på v_1 har $x_0 = 0$ og så er generelt af formen $v = (0, -x_2, x_2)$. Ved at tage $x_2 = 1$ og dele med normen får vi en enhedsvektor

$$v_2 = \frac{1}{\|(0, -1, 1)\|_2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

Nu er v_0, v_1, v_2 en ortonormal samling af egenvektorer.

Sættes

$$V = \left[v_0 \mid v_1 \mid v_2 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

fås en ortogonal matrix med

$$A = V \Lambda V^T, \qquad \text{for } \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi bekræfter dette i python

```
import numpy as np

s = 1/np.sqrt(2.0)
v = np.array([[0.0, 1.0, 0.0],
              [s, 0, -s],
              [s, 0, s]])
egenværdier = np.array([0.0, 2.0, 2.0])

print(v @ np.diag(egenværdier) @ v.T)
```

```
[[ 2.  0.  0.]
 [ 0.  1. -1.]
 [ 0. -1.  1.]]
```

som er vores oprindelig matrix A. △

Lemma 23.12. *Hvis $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er symmetrisk, så har A en egenværdi $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Bevis. Vi betragter A som en kompleks matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, med $\overline{A} = A = A^T$. Proposition 23.2 giver at der findes en kompleks egenværdi $\lambda \in \mathbb{C}$. Lad $v \in \mathbb{C}^n$ være en tilhørende egenvektor, så $Av = \lambda v$ og $v \neq 0$.

Vi beregner $\overline{v}^T Av$ på to forskellige måder. Først har vi

$$\overline{v}^T Av = \overline{v}^T (Av) = \overline{v}^T \lambda v = \lambda \|v\|_2^2.$$

Desuden har vi

$$\overline{v}^T Av = (\overline{v}^T \overline{A}^T)v = (\overline{Av})^T v = (\overline{\lambda v})^T v = \overline{\lambda} \|v\|_2^2.$$

Disse to resultater må være ens, så vi har

$$\lambda \|v\|_2^2 = \overline{\lambda} \|v\|_2^2.$$

Men $v \neq 0$ medfører $\|v\|_2 \neq 0$, så vi kan dele med $\|v\|_2^2$ og få $\lambda = \overline{\lambda}$, Dette siger netop at $\lambda \in \mathbb{R}$. Nu er $\det(A - \lambda I_n) = 0$, så λ er en egenværdi for den reelle matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. □

Bevis for sætning 23.9. Vælg en egenværdi $\lambda_0 = \lambda \in \mathbb{R}$ for A. Lad $v = v_0 \in \mathbb{R}^n$ være en enhedsvektor med $Av_0 = \lambda_0 v_0$.

Vi kan finde en ortogonal matrix af formen $V_0 = \begin{bmatrix} v_0 \mid * \mid \dots \mid * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, med v_0, som den 0'te søjle. F.eks. man kan vælge en Householder matrix. Som i beviset for sætning 23.8, får vi

$$AV_0 = V_0 \begin{bmatrix} \lambda_0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}.$$

Da V_0 er ortogonal er $V^{-1} = V^T$ og det giver

$$A = V_0 \begin{bmatrix} \lambda_0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix} V_0^T.$$

Men A er symmetrisk, $A = A^T$, og

$$A^T = V_0 \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix} V_0^T.$$

Sammenlignes disse to udtryk, har vi

$$A = V_0 \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{00} & \dots & b_{0,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n-2,0} & \dots & b_{n-2,n-2} \end{bmatrix} V_0^T,$$

hvor $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$ med $B^T = B$. Da B er symmetrisk kan vi finde en ortogonal matrix V_1 således at

$$A = V_0V_1 \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{00} & \dots & c_{0,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n-3,0} & \dots & c_{n-3,n-3} \end{bmatrix} V_1^T V_0^T$$

med $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n-2}$ symmetrisk. Forsættes fås

$$A = V_0V_1\dots V_{n-1} \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} V_0^T V_1^T \dots V_{n-1}^T = V\Lambda V^T$$

med $V = V_0V_1\dots V_{n-1}$ ortogonal. □

Det tilsvarende resultat over komplekse tal bruger det følgende begreb: en matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ er *hermitisk* hvis $\overline{A}^T = A$. Beviserne ovenfor kan udvides til dette tilfælde og vi får

Sætning 23.13 (Spektralsætningen for hermitiske matricer)**.** *Hvis $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ er hermitisk, så er dens egenværdier reelle tal og der findes en unitær matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ således at*

$$A = U\Lambda\overline{U}^T.$$

□

23.5 Egenskaber af determinanter

I dette afsnit samler vi flere egenskaber af determinant og beviser nogle af de tidlige resultater vi har brugt. Et nøgle værktøj er at determinanter opfører sig godt i forhold til rækkeoperationer.

Proposition 23.14. *De følgende relationer gælder for determinanter af* $(n \times n)$*-matricer* A *og* B*, hvor* B *fås fra* A *via den pågældende rækkeoperation.*

(I) *Hvis* $A \sim_{R_i \leftrightarrow R_j} B$*,* $i \neq j$*, så er* $\det B = -\det A$.
(II) *Hvis* $A \sim_{R_i \to sR_i} B$*, så er* $\det B = s \det A$.
(III) *Hvis* $A \sim_{R_i \to R_i + tR_j} B$*, så er* $\det B = \det A$.

Bemærk at del (II) er gyldigt for alle skalarer s, men giver kun en elementær rækkeoperation hvis $s \neq 0$.

Vi har også

Proposition 23.15. *For* A *en* $(n \times n)$*-matrix er* $\det(A^T) = \det A$.

Dette giver at vi kan udvikle determinanter via deres først søjle i stedet for dens første række:

Korollar 23.16. *For* A *en* $(n \times n)$*-matrix gælder*

$$\det A = a_{00} \det(M_{00}) - a_{10} \det(M_{10}) + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1,0} \det(M_{n-1,0}).$$

Bevis. Der er intet at vise for $n = 1$. For $n > 1$, har vi fra definition 21.12

$$\det A = a_{00} \det(M_{00}) - a_{01} \det(M_{01}) + \cdots + (-1)^{n-1} a_{0,n-1} \det(M_{0,n-1}).$$

Lad os anvende den formel på $B = A^T$. Vi har $b_{ij} = a_{ji}$ og at M^B_{ij}, som fås fra B ved at slette række i og søjle j, er M^T_{ji}. Dette giver

$$\begin{aligned}
\det(A^T) &= \det B \\
&= b_{00} \det(M^B_{00}) - b_{01} \det(M^B_{01}) + \cdots + (-1)^{n-1} b_{0,n-1} \det(M^B_{0,n-1}) \\
&= a_{00} \det(M^T_{00}) - a_{10} \det(M^T_{10}) + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1,0} \det(M^T_{n-1,0}).
\end{aligned}$$

Men M_{ij} har størrelse $(n-1) \times (n-1)$, så per induktion er $\det(M^T_{ij}) = \det(M_{ij})$, og resultatet følger. □

Eksempel 23.17. Kombineret med proposition 23.14 giver korollar 23.16 en relativ praktisk måde at regne determinanter. For eksempel,

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&\quad =_{R_0\leftrightarrow R_1} -\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} =_{\substack{R_1\to R_1-2R_0 \\ R_3\to R_3+R_0}} -\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\
&\quad = -(1)\times\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} + 0\times\det(M_{10}) - 0\times\det(M_{20}) + 0\times\det(M_{30}) \\
&\quad =_{\substack{R_1\to R_1-2R_0 \\ R_2\to R_2-3R_0}} -\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & -2 & 19 \end{bmatrix} = -(1)\times\det\begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -2 & 19 \end{bmatrix} \\
&\quad = -(1\times 19 - 11\times(-2)) = -19-22 = -41.
\end{aligned}
$$

△

Bevis for proposition 23.5. Vi bruger korollar 23.16, til at udvikle via den første søjle:

$$
\begin{aligned}
\det B &= \lambda_0\det(M_{00}) - 0\times\det(M_{10}) + \cdots + (-1)^{n-1}0\times\det(M_{n-1,0}) \\
&= \lambda_0\det(M_{00}) = \lambda_0\det\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \lambda_0\lambda_1\det\begin{bmatrix} \lambda_2 & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} = \cdots = \lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}.
\end{aligned}
$$

For det karakteristiske polynomium har vi så

$$\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) &= \det \begin{bmatrix} \lambda_0 - \lambda & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_1 - \lambda & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_{n-1} - \lambda \end{bmatrix} \\
&= (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_1 - \lambda)\dots(\lambda_{n-1} - \lambda),
\end{aligned}$$

som ønsket. □

Bevis for proposition 23.14. Vi skal regne effekten af rækkeoperationer på determinanten.

Vi begynder med at vise del (I) for $R_0 \leftrightarrow R_1$. Vi definitionen

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{00} \det(M_{00}) - a_{01} \det(M_{01}) + \dots + (-1)^{n-1} a_{0,n-1} \det(M_{0,n-1}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_{0j} \det(M_{0j}).
\end{aligned}$$

Nu skal vi anvende denne definition på hvert M_{0j}. Lad $N_{ia;jb}$ være delmatricen af A størrelsen $(n-2) \times (n-2)$, som fås ved at slette rækker i og a samt søjler j og b fra A. Den første række i M_{0j} er $a_{10}, \dots, a_{1,j-1}, a_{1,j+1}, a_{1,n-1}$. Så har vi

$$\det(M_{0j}) = \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k a_{1k} \det(N_{01;jk}) - \sum_{\ell=j+1}^{n-1} (-1)^\ell a_{1\ell} \det(N_{01;j\ell}).$$

Bemærk at $N_{01;jb} = N_{01;bj}$, så for optræder $\det(N_{01;jk})$ to steder i $\det A$, fra leddene $a_{0j} \det(M_{0j})$ og $a_{0k} \det(M_{0k})$. Koefficienten af $\det(N_{01;jk})$ i $\det A$ er så

$$(-1)^j a_{0j} (-1)^k a_{1k} - (-1)^k a_{0k} (-1)^j a_{1j} = (-1)^{j+k} (a_{0j} a_{1k} - a_{0k} a_{1j}). \tag{23.1}$$

Når vi bytter række 0 med række 1 er $N_{01;jk}$ uændret, og (23.1) skifter fortegn. Dette giver denne version af del (I).

For at få del (I) generelt, bemærk først at for tilfældet $R_i \leftrightarrow R_{i+1}$ kan vi skrive $\det A$ som en sum af led af formen $(-1)^r a_{0p} a_{1q} \dots a_{i-1,t}$ gange determinanten af en kvadratisk undermatrix N af $A_{[i:,:]}$. Når vi bytter R_i med R_{i+1} bytter vi den 0'te og 1'te række af N, så $\det N \mapsto -\det N$. Det følger at $\det A \mapsto -\det A$.

For det generel tilfælde $R_i \leftrightarrow R_j$ med $i < j$ fås ved den følgende række af operationer af typen $R_k \leftrightarrow R_{k+1}$: ryk R_i trinvis ned til R_j, derefter ryk R_j trinvis optil R_i, som illustreres for $R_1 \leftrightarrow R_4$ ved

$$\begin{bmatrix} A_{[0,:]} \\ A_{[1,:]} \\ A_{[2,:]} \\ A_{[3,:]} \\ A_{[4,:]} \\ A_{[5,:]} \end{bmatrix} \sim_{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} A_{[0,:]} \\ A_{[2,:]} \\ A_{[1,:]} \\ A_{[3,:]} \\ A_{[4,:]} \\ A_{[5,:]} \end{bmatrix} \sim_{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} A_{[0,:]} \\ A_{[2,:]} \\ A_{[3,:]} \\ A_{[1,:]} \\ A_{[4,:]} \\ A_{[5,:]} \end{bmatrix}$$
$$\sim_{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} A_{[0,:]} \\ A_{[2,:]} \\ A_{[3,:]} \\ A_{[4,:]} \\ A_{[1,:]} \\ A_{[5,:]} \end{bmatrix} \sim_{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} A_{[0,:]} \\ A_{[2,:]} \\ A_{[4,:]} \\ A_{[3,:]} \\ A_{[1,:]} \\ A_{[5,:]} \end{bmatrix} \sim_{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} A_{[0,:]} \\ A_{[4,:]} \\ A_{[2,:]} \\ A_{[3,:]} \\ A_{[1,:]} \\ A_{[5,:]} \end{bmatrix}.$$

Hver af disse operationer skifter fortegnet på $\det A$. Det sker $(j-i)+(j-i-1)$ gange, da rækken i flyttes ned $j-i$ gange, og derefter række j, som er nu i plads $j-1$, flyttes op $j-i-1$ gange. Dette er et ulig antal fortegnsskift, så i alt har $\det A \mapsto -\det A$.

For del (II), har vi for $i = 0$, at

$$\begin{aligned} \det B &= (sa_{00}) \det(M_{00}) - (sa_{01}) \det(M_{01}) + \cdots + (-1)^{n-1}(sa_{n-1,0}) \\ &= s \det A. \end{aligned}$$

For generel i, er $A \sim_{R_i \to sR_i} B$ det samme som

$$A \sim_{R_0 \leftrightarrow R_i} A' \sim_{R_0 \to sR_0} A'' \sim_{R_0 \leftrightarrow R_i} B.$$

Under disse operationer har

$$\det A \mapsto -\det A \mapsto -s \det A \mapsto s \det A,$$

så $\det B = s \det A$.

For del (III), kikke vi først på tilfældet $i = 0$. Vi har

$$\begin{aligned} \det B = (a_{00} + ta_{j0}) \det(M_{00}) - (a_{01} + ta_{j1}) \det(M_{01}) \\ + \cdots + (-1)^{n-1}(a_{0,n-1} + ta_{j,n-1}) \det(M_{0,n-1}) \\ = \det A + t \det C, \end{aligned}$$

hvor C er A med række 0 erstattet af række j. Dvs. i C er række 0 og række j ens. Matricen C er uændret under $R_0 \leftrightarrow R_j$, men fra del (I) skifter dens determinant fortegn. Vi har så at $\det C = 0$, og har vist del (III) for $i = 0$.

For general i gør vi lige som i del (II), byt række i med række 0, udføre rækkeoperationen på række 0, og så byt række 0 tilbage til række i. Determinant skifter fortegn i alt to gange under den følge af operationer, så er uændret til sidst. Dette giver del (III). □

Husk at elementære rækkeoperationer kan udføres som matrixmultiplikation ved en elementær matrix, se proposition 7.11.

Lemma 23.18. *Hvis E er en elementærmatrix svarende til en elementær rækkeoperation, så er* $\det(EA) = \det(E)\det(A)$.

Bevis. Som i beviset overfor kan vi reducere til tilfældende hvor $i = 0$ og $j = 1$. Vores elementære matricer har så formen

$$E = \begin{bmatrix} E' & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix},$$

hvor E' er en elementær matrix af størrelse (2×2). Vi har $\det E = \det E'$, og for hver type rækkeoperation har vi de følgende determinanter.

Type (I):

$$E' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det E = \det E' = -1.$$

Type (II):

$$E' = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det E = \det E' = s.$$

Type (III):

$$E' = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det E = \det E' = 1.$$

Disse skaleringsfaktor er de samme, som giver ændringerne i $\det A$ i proposition 23.14, og vi har resultatet. □

Bevis for sætning 21.14. Vi skal vise at A er invertibel hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

A er en kvadratisk matrix, så den kan rækkereduceres til dens reduceret echelonform F. Køres disse operationer baglæns får vi A via rækkeoperationer fra F. Vi har så nogle elementære matricer $E_0, E_1, \dots, E_{k-1}$ således at

$$A = E_0 E_1 \dots E_{k-1} F. \tag{23.2}$$

Fra lemma 23.18 har vi

$$\det A = \det(E_0)\det(E_1)\dots\det(E_{k-1})\det(F).$$

Men hvert $\det(E_i)$ er forskellig fra 0, så $\det A = 0$ hvis og kun hvis $\det F = 0$.

Hvis F har en nulrække er A ikke invertibel. Vi har $\det F = 0$, så $\det A = 0$.

Hvis F ikke har en nulrække er alle søjle pivot søjle, A er invertibel og $F = I_n$. Det følge at $\det F \neq 0$ og så $\det A \neq 0$, som ønsket. □

Bevis for sætning 23.3. Vi vil vise at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Som i beviset før, skriv

$$A = E_0 E_1 \dots E_{k-1} F,$$

som produkt af elementære matricer E_i og en reduceret echelonmatrix F.

Vi påstår at $\det(FB) = \det(F)\det(B)$. Hvis $F = I_n$, så er $\det F = 1$, og lignen gælder. Hvis F er ikke I_n, er dens sidste række nul. Så er den sidste række af FB også nul, og FB er ikke invertibel, og dermed er $\det(FB) = 0 = \det(F)\det(B)$.

Nu har vi

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_0 E_1 \dots E_{k-1} F B) = \det(E_0 E_1 \dots E_{k-1})\det(FB)\\ &= \det(E_0 E_1 \dots E_{k-1})\det(F)\det(B) = \det(A)\det(B),\end{aligned}$$

som ønsket. □

Bevis for proposition 23.15. Skriv igen A i formen (23.2):

$$A = E_0 E_1 \dots E_{k-1} F.$$

Vi har nu

$$A^T = F^T E_{k-1}^T \dots E_1^T.$$

Vi bemærker at for hver type elementær matrix, har vi $\det(E_i^T) = \det(E_i)$ via direkte udregning.

For $F = I_n$ er $F^T = I_n$, så $\det(F^T) = \det F$.

Hvis $F \neq I_n$, er den sidste række af F nul, så den sidste søjle af F^T er nul. Dette betyder der er højst $n-1$ pivot søjle i F^T, så F^T er ikke invertibel, og $\det(F^T) = 0 = \det(F)$.

I begge tilfælde har vi $\det(F^T) = \det F$ og så

$$\begin{aligned}\det(A^T) &= \det(F^T E_{k-1} \dots E_1) = \det(F^T)\det(E_{k-1})\dots\det(E_1)\\ &= \det(E_1)\dots\det(E_{k-1})\det(F) = \det(E_1 \dots E_{k-1} F) = \det A,\end{aligned}$$

som ønsket. □

Python indeks

Indeks