Aflevering 8

Lucas Bagge

a)
Vi vil bestemme det karakteristisk polynomium;

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda$$

Som er det ønskede resultat.

b)
Faktoriser udtrykket

$$-\lambda(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0$$

Det giver os tre løsninger:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$$

c)
For at afgøre om skalaren λ er en egenværdi, så kan vi benytte os af **proposition 21.2** I b har vi udregnet den karakteristik ligning og fundet frem til der er 3 egenværdier, hvor det gælder $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Derfor har A ikke andre egenværdier.

d)

For at finde en basis bestående af egenvektor for A så skal vi benytte os af proposition 21.5. Den fortæller os at vi med tilsvarende egenværdier og egenvektor kan konstruer en basis beståenden af egenvektorer således de er lineært uafhængig.
I besvarelse af denne opgave benytter jeg mig af opstående og eksempel 21.4

Finder egenvektor hvor vi starter med $\lambda_1 = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1-2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finder echelon form:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Herefter skal vi løse

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løser det og vi får egenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det samme gør vi for $\lambda_3 = 0$, men går ikke igennem de samme udregninger som før, men opskriver bare egenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Således er basisen:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e)

V er vores egenvektor matrice:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λ er en diagonal matrice hvor diagonalen består af vores egenværdier.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Således kan vi skrive ud i formlen $V\Lambda V^{-1}$ og se vi får vores A matrice.

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

f)

Lad M være en kvadratisk matrix. Beregn power af A ved matrix multiplikation

$$A^k = AA\ldots A \text{ Hvor AA..A=k}$$

Hvor vi kan bruge diagonaliserting til at beregne A^k

$$A^k = (V\Lambda V^{-1})^k = V\Lambda V^{-1} V\Lambda V^{-1} .. V\Lambda V^{-1} = V\Lambda^K V^{-1}$$