Aflevering 9

Lucas Bagge

To beholder er forbundne med rør, som i figur 2. Beholder A rummer 300 l og beholder B 100 l. Som udgangspunkt er der 90 g salt i beholder A og 30 g salt i beholder B. Der tilføjes 30,0 l/min rent vand igennem rør a og der flyder 15,0 l/min blanding igennem rør b.

(a) Hvor meget blanding skal flyde igennem rør c per minut, hvis mængden af væske i A skal være konstant? Hvor meget skal flyde ud igennem rør d, for at mængden af væske i B er konstant?

(b) Gør rede for at saltmængderne $y_0(t)$ i A og $y_1(t)$ i B opfylder systemet

$$y_0'(t) = -0{,}15y_0(t) + 0{,}15y_1(t),$$
$$y_1'(t) = 0{,}15y_0(t) - 0{,}45y_1(t).$$

(c) Forklar hvordan egenværdier og egenvektorer for koefficientmatricen for systemet kan beregnes.

(d) Forklar hvordan løsninger $y_0(t)$ og $y_1(t)$ bestemmes af disse egenværdier, egenvektorer og startdata.

(e) I python bestem $y_0(t)$ og $y_1(t)$, plot begge funktioner mod t. Plot også $y_0(t)$ mod $y_1(t)$. Hvad er grænseværdien for $y_1(t)/y_0(t)$ når $t \to \infty$?

Andrew Swann

a) Definer

I den første del af opgaven skal vi komme frem til hvor meget der kan flyde igennem rør c per minut og det samme for rør d således at mængden af væske i respektiv A og B er konstant.

I beholder A er der **300 L** væske blandet op med **90g** salt. Derfor modtager A altså i alt:

$$65\ l/min$$

For at opretholde en konstant mængde væske vil jeg derfor mene at der så skal flyde **65 l/min** ud af rør c.

Den samme ræssonoment bruger jeg til rør d. Altså at beholder B modtager 65 l/min fra c og der forlader 15 l/min gennem rør b. Der for må der i d være:

$$d = 65\ l/min - 15\ l/min = 50\ l/min$$

Altså forlader der 50 l/min for at mængden af væske er konstant i beholder B.

b)

For opgave b skal vi gøre rede for at saltmængderne i A og B kan opskrives gennem følgende system:

$$y_0'(t) = \underbrace{-0.15y_0(t)}_{\text{a}} + \underbrace{0.15y_1(t)}_{\text{b}}$$

$$y_1'(t) = \underbrace{0.15y_0(t)}_{\text{c}} - \underbrace{0.45y_1(t)}_{\text{d}}$$

Her kan vi løse følgende (da vi kender hvad der skal være i hver beholder)

$$\frac{a\ l/min}{300\ l} = 0.15\ l$$

$$a = 300 * 0.15 = -45$$

a svarer til hvad beholder A mister af salt per minut.

Vi kan bekræfte at b skal være 0.15 ved at kigge på oplysning fra opgaven da vi kan se at der tilføjes $15(t_1(t)/100)$ gram salt per minut. Derfor kan vi sige at det første system er opfyldt med ovenstående ligning.

Den samme øvelse kan vi gøre med $y_1'(t)$.

$$\frac{c\ l/min}{300} = 0.15$$
$$c = 45$$

Således passer det med at der skal forlade 45 l/min fra c. Når det passer vil vi have at beholder B modtager $0.15y_0(t)$ gram salt per minut.

For at beregne d så skal vi kombiner de to strømme hvor beholder B mister væske fra, nemlig b og d. Vi kender b = 15 l/min, mens vi ikke kender d.

$$\frac{15 + d}{100} = 0.45$$

$$15 + d = 45$$

$$d = 30$$

Altså vil det sige at der flyder 30 l/min salt ud af rør d.

Når det gælder så vil saltmængderne i y_0 og y_1 være opfyldt.

c)

Her skal vi forklare hvordan egenværdier og egenvektorer for koefficientmatricen kan beregnes.

Vi kan starte med at opskrive systemet op i vektor notation som er vist ved ligning 22.2 i note sættet:

$$A = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.15 \\ 0.15 & -0.45 \end{bmatrix}$$

Hvor begyndelseværdier er angivet ved mængden af salt:

$$y(0) = \begin{bmatrix} 90 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Egenværiderne og egenvektor kan beregnes ved at regne det karakteristik polynomium og herved check om A er diagonaliserbar.

opskriv det karakteristik polynomium

$$det = \begin{bmatrix} -0.15 - \lambda & 0.15 \\ 0.15 & -0.45 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 0.6\lambda + 0.045$$

Som har rødderne:

$$\frac{-0.6 + -\sqrt{0.6^2 - 4 * 1 * 0.045}}{2 * 1}$$
$$\text{med egenværdierne;} \quad -0.512, \ -0.089$$

Matricen er en 2 x 2 matrix og vi har to forskellig rødde så A er diagonaliserbar.

Hvorefter vi kan beregne egenvektor for hver egenværdier. Her benytter jeg mig af et cas værkstøj til disse udregninger.

Her får jeg en egenvektor til $v_0 = (2.41, 1)$ og $v_1 = (-0.4142, 1)$

Hermed har jeg udfra det karakteristiske polynomium og det faktum at A er diagonaliserbar fundet frem til egenværdierne og egenvektorerne.

d)

Her skal vi nu bestemme en løsning.

Løsnigen kan beregnes ved at opsætte et ligning system som følger proposition 22.2.

Den manuelle beregning vil jeg foretage her og i opgave e skal de regnes i python.

For en løsning benytter vi os af proposition 22.2:

$$y(t) = c_0 \begin{bmatrix} 2.41 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0.512t} + c_1 \begin{bmatrix} -0.4141 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0.089t}$$

Her kan vi bestemme konstanterne c0 go c1 ud fra begyndelsesdata. Ved t =0 har vi

$$y(0) = c_0 \begin{bmatrix} 2.41 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -0.4141 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Som har løsningen $c_1 = 36.267$ og $c_2 = -6.267$

e)

De sidste par trin i d skal jeg også gøre i python og derved bestemme $y_0(t)$ og $y_1(t)$.

```
import numpy as np

A = np.array([
  [2.41, -0.41],
  [1, 1]])

B = np.array([
  [90],
  [30]])

np.linalg.inv(A).dot(B)
```

```
## array([[36.27659574],
##        [-6.27659574]])
```

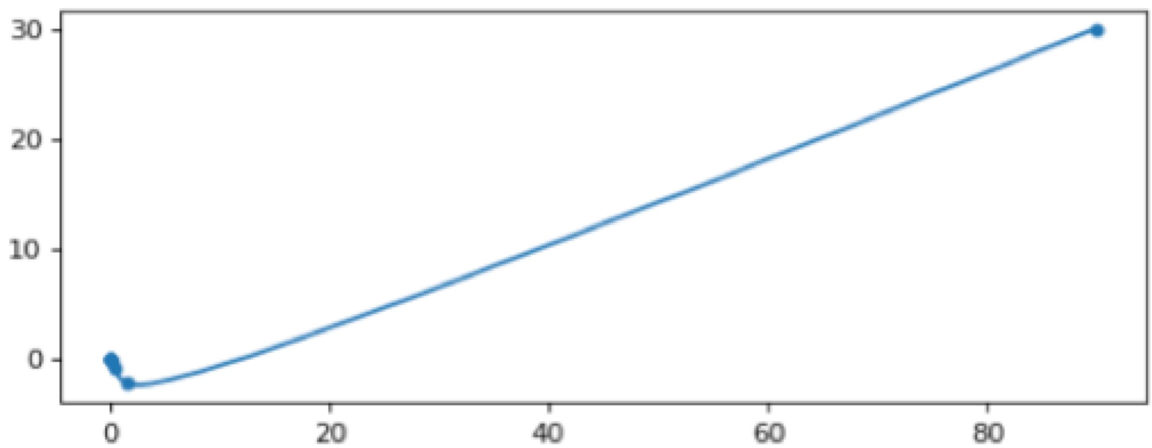
Som er vores løsnign som jeg også løste til slut i d.

Skrevet på formel har vi

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = 36.27 \begin{bmatrix} 2.41 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0.512t} - 6.27 \begin{bmatrix} -0.41 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0.089t}$$

```
#import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
v0 = np.array([2.41, 1.0])[:, np.newaxis]
v1 = np.array([-0.41, 1.0])[:, np.newaxis]
lambda0 = -0.512
lambda1 = -0.089
t = np.linspace(0, 100, 100)
løsning = (36.27 * v0 * np.exp(lambda0 * t) - 6.27 * v1 * np.exp(lambda1 * t))

#fig, ax = plt.subplots()
#ax.set_aspect('equal')
#ax.plot(*løsning,marker='o', markevery=10, markersize=4)
#plt.show()
```



Som er vores plot af løsningen.

Til slut skal vi kommenter på hvad der når grænseværiden gå mod uendelig. I eksemplet vi så på timen gik den mod nul. Ud fra mit plot ser det umiddelbart ud til at det bare bevæger sig til en stor værdi.