Numerisk Lineær Algebra F2021
Notesæt 18

Andrew Swann

7. april 2021

Sidst ændret: 7. april 2021.
Versionskode: 20882ac.

Indhold

18 Lineære afbildninger og matricer

18.1 Lineære afbildninger

Et vektorrum V har to fundamentale operationer: sum $u+v$ og skalar multiplikation sv. En lineær transformation, eller lineær afbildning, er en funktion, der respekterer disse operationer.

Definition 18.1. En *lineær transformation* er en afbildning $L\colon V \to W$ fra et vektorrum V til et vektorrum W således at
(a) $L(u+v) = L(u) + L(v)$ og
(b) $L(sv) = sL(v)$
for alle $u, v \in V$ og alle skalarer s.

Eksempel 18.2. Afbildningen $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x) = 5x$ er lineær, da

$$L(x+y) = 5(x+y) = 5x + 5y = L(x) + L(y),$$
$$L(sx) = 5(sx) = s5x = sL(x)$$

for alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. △

Eksempel 18.3. Afbildningen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$ er *ikke* lineær. Dette vises bedst ved at finde konkrete elementer hvor den ene af del (a) eller del (b) i definition 18.1 holder ikke. For denne afbildning F kan vi kikke på del (a) ved $u = 1 = v$. Vi har

$$F(1+1) = F(2) = 4,$$
$$F(1) + F(1) = 1 + 1 = 2,$$

så

$$F(1+1) = 4 \neq 2 = F(1) + F(1)$$

og del (a) er ikke opfyldt. △

Eksempel 18.4. Lad V være rummet af funktioner $[-1,2] \to \mathbb{R}$, som er to gange differentiabel, og lad W være rummet af en gang differentiable funktioner på det samme interval. Så er afbildning

$$L\colon V \to W, \quad L(f) = f'$$

lineær. Dette er konsekvens af de almindelige regneregler for den afledte: $(f+g)' = f' + g'$ og $(cf)' = cf'$, for c konstant. △

Eksempel 18.5. Lad V være rummet af kontinuerte funktioner $[0,3] \to \mathbb{R}$. Så er afbildningerne

$$L\colon V \to V, \quad L(f) = \int_0^x f(t)\,dt,$$
$$M\colon V \to \mathbb{R}, \quad M(f) = \int_0^3 f(t)\,dt$$

begge lineære. Igen er dette konsekvens af standard regneregler for integraler: $\int_0^x f(t) + g(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt$, og $\int_0^x cf(t)\,dt = c\int_0^x f(t)\,dt$ for c konstant. △

Eksempel 18.6. Forholdet mellem elektrisk spænding V over og elektrisk strøm I igennem flere komponenter er lineær:

(a) Elektrisk modstand R:

$$I \mapsto V = RI, \quad V \mapsto I = \frac{1}{R}V;$$

(b) Elektrisk kondensator, kapacitans C:

$$I(t) \mapsto V(t) - V(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^t I(s)\,ds, \quad V(t) \mapsto I(t) = C\frac{dV}{dt};$$

(c) Induktionsspole, induktans L:

$$I(t) \mapsto V(t) = L\frac{dI}{dt}, \quad V(t) \mapsto I(t) - I(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^t V(s)\,ds.$$

Dette gør lineær algebra særligt relevant for analyse af elektriske kredsløb. △

Eksempel 18.7. $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}\right) = x_0 + 2x_1 + 3x_2 + \cdots + nx_{n-1}$$

er lineær. △

Eksempel 18.8. Givet $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$L(x) = Ax$$

er lineær, da

$$A(x+y) = Ax + Ay \quad \text{og} \quad A(sx) = sAx$$

$\triangle$

Bemærkning 18.9. Der skal noteres at notationen i definition 18.1 gemmer et par væsentlige detaljer. I del (a) er de to plustegn »+« fra forskellige vektorrum: den på den venstre side er sumoperationen i V; den på den højre side af ligningen er sumoperationen i W. Ligeledes er de to skalarmultiplikationer i del (b) fra V og henholdsvis W. $\diamond$

Eksempel 18.10. For V rummet af funktioner $[0,1] \to \mathbb{R}$, er afbildningen

$$f \mapsto f(0)$$

lineær, da

$$f + g \mapsto (f+g)(0) = f(0) + g(0)$$

og

$$sf \mapsto (sf)(0) = s\,f(0)$$

fra vores definition af operationerne i V. $\triangle$

Lad os fremhæve to væsentlige egenskaber af lineære afbildninger.

Proposition 18.11. *For $L\colon V \to W$ lineær gælder*

(*a*) $L(0) = 0$,

(*b*) $L(su + tv) = sL(u) + tL(v)$.

Bevis. For (a) har vi $L(0) = L(0v) = 0L(v) = 0$, hvor vi har brugt definition 18.1(b).

Del (b) følger fra brug af begge egenskaber af L: $L(su+tv) = L(su)+L(tv) = sL(u) + tL(v)$. $\square$

Eksempel 18.12. Det følger at $F(x) = x + 1$ er ikke lineær, da $F(0) = 1 \neq 0$. $\triangle$

Del (b) af proposition 18.11 giver mere generelt

$$\begin{aligned} &L(s_0v_0 + s_1v_1 + \dots + s_{k-1}v_{k-1}) \\ &\qquad = s_0L(v_0) + s_1L(v_1) + \dots + s_{k-1}L(v_{k-1}). \end{aligned} \tag{18.1}$$

18.2 Matrix af en lineær transformation

Eksempel 18.8 er faktisk typisk for lineære afbildninger $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Proposition 18.13. *For $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineær, definér $A = \begin{bmatrix} u_0 \mid u_1 \mid \dots \mid u_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ved*

$$u_j = L(e_j)$$

hvor $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ er den j'te standard basisvektor, med j'te indgang 1 og alle andre indgange 0.

Så gælder

$$L(x) = Ax \qquad \text{for alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 18.14. Matricen A i proposition 18.13 kaldes *den standard matrixrepræsentation* (SMR) af L.

Bevis for proposition 18.13. For $x \in \mathbb{R}^n$, har vi

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = x_0e_0 + x_1e_1 + \dots + x_{n-1}e_{n-1}$$

Ved brug af (18.1), får vi

$$\begin{aligned} L(x) &= L(x_0e_0 + x_1e_1 + \dots + x_{n-1}e_{n-1}) \\ &= x_0L(e_0) + x_1L(e_1) + \dots + x_{n-1}L(e_{n-1}) \\ &= x_0u_0 + x_1u_1 + \dots + x_{n-1}u_{n-1} \\ &= \begin{bmatrix} u_0 \mid u_1 \mid \dots \mid u_{n-1} \end{bmatrix} x = Ax. \end{aligned}$$

Dvs. $L(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$, som ønsket. □

Eksempel 18.15. $L((x, y)) = (2x - y, y + x, y - 2x)$ har

$$u_0 = L(e_0) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

og

$$u_1 = L(e_1) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Så L har SMR

$$A = \begin{bmatrix} u_0 \mid u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

△

18.3 Kombinationer af lineære afbildninger

Lineære afbildninger kan kombineres på forskellige vis til at danne nye lineære afbildninger. Dette betyder man kan bygge komplicerede lineære afbildninger op fra simple eksempler.

Proposition 18.16. *Hvis $L_0, L_1 \colon V \to W$ er lineære og s er en skalar, så er*

(a) $L_0 + L_1$ *og*

(b) sL_0

lineære transformationer.

Bevis. Husk at $(L_0 + L_1)(v)$ defineres til at være $L_0(v) + L_1(v)$. For del (a), har vi

$$\begin{aligned}(L_0 + L_1)(u + v) &= L_0(u + v) + L_1(u + v) = L_0(u) + L_0(v) + L_1(u) + L_1(v) \\ &= (L_0 + L_1)(u) + (L_0 + L_1)(v)\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}(L_0 + L_1)(sv) &= L_0(sv) + L_1(sv) = sL_0(v) + sL_1(v) \\ &= s(L_0(v) + L_1(v)) = s(L_0 + L_1)(v).\end{aligned}$$

Redegørelsen for del (b) er tilsvarende, med udgangspunkt i $(sL)(v) = s(L(v))$. □

Eksempel 18.17. Afbildninger $f \mapsto f'$ og $f \mapsto f(0)$ er lineære, så det følger at $f \mapsto 3f' - 2f(0)$ er også lineær. △

Proposition 18.18. *Hvis $L \colon V \to W$ og $M \colon U \to V$ er lineære afbildninger så er*

$$L \circ M \colon U \to W$$

lineær.

Bevis. Her er $(L \circ M)(u) = L(M(u))$. Vi har

$$\begin{aligned}(L \circ M)(u_0 + u_1) &= L(M(u_0 + u_1)) = L(M(u_0) + M(u_1)) \\ &= L(M(u_0)) + L(M(u_1)) = (L \circ M)(u_0) + (L \circ M)(u_1),\end{aligned}$$

og en tilsvarende begrundelse gælder for $(L \circ M)(su) = s(L \circ M)(u)$. □

Eksempel 18.19. Da $f \mapsto f'$ er lineære er $f \mapsto f'' = (f')'$ også lineær. △

18.4 Kerne og billedmængde

Lineære afbildninger bevarer de to fundamental operationer i vektorrum. Ligeledes er underrum også defineret ud fra disse to operationer. Dette fører til at lineære afbildninger sender underrum til underrum og at der er to særlige underrum, som en lineær afbildning giver anledning til.

Definition 18.20. Lad $L\colon V \to W$ være lineær. Så er *kernen* af L

$$\ker L = \{v \in V \mid L(v) = 0\},$$

mængden af alle vektorer i V, som L afbildninger i $0 \in W$.

Billedmængden af L er

$$\operatorname{im} L = L(V) = \{L(v) \mid v \in V\} \subset W$$

mængden af alle værdier af L.

Eksempel 18.21. For $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ med SMR A kender vi disse mængder i forvejen, blot med andre navne. Billedmængden er

$$\operatorname{im} L = S(A)$$

søjlerummet af A. Kernen

$$\ker L = N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

er rummet af løsninger til $Ax = 0$. Dette kaldes *nulrummet* af A. △

Proposition 18.22. *Lad $L\colon V \to W$ være lineær. Så er $\ker L \subset V$ et underrum af V og $\operatorname{im} L \subset W$ er et underrum af W.*

Bevis. Vi begynder med $\ker L$. Vi skal tjekke at de tre betingelser i definition 12.11 er opfyldt.

Først ser vi at $\ker L$ er ikke tom, da $L(0) = 0$ giver $0 \in \ker L$. Bemærk nu at $u, v \in \ker L$ betyder $L(u) = 0 = L(v)$. Da gælder

$$L(u + v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0,$$

som siger at $u + v \in \ker L$. Desuden har vi

$$L(sv) = sL(v) = s0 = 0$$

så $sv \in \ker L$. Dermed er $\ker L$ et underrum af V.

Diskussionen for billedrummet er tilsvarende, men kræver lidt andre overvejelser. Først $\operatorname{im} L$ er ikke tom da $L(0) = 0$ giver $0 \in \operatorname{im} L$. Vi har at $w, y \in \operatorname{im} L$ betyder at der findes $u, v \in V$ med $L(u) = w$ og $L(v) = y$. Da gælder

$$w + y = L(u) + L(v) = L(u + v),$$

som siger $w + y \in \operatorname{im} L$. Desuden har vi

$$sy = sL(v) = L(sv)$$

så $sy \in \operatorname{im} L$, og $\operatorname{im} L$ er et underrum af W. □

Eksempel 18.23. Lad P være projektion på $\operatorname{Span}\{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$ for $v_0, \dots, v_{k-1}$ ortonormal:

$$P(u) = \langle v_0, u\rangle v_0 + \langle v_1, u\rangle v_1 + \cdots + \langle v_{k-1}, u\rangle v_{k-1}$$

Vi har $\operatorname{im} P = \operatorname{Span}\{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$, da $P(v_i) = v_i$ medfører at $v_i \in \operatorname{im} P$, og da hvert element af $\operatorname{im} P$ er en lineær kombination af $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$.

Kernen $\ker P$ består af de $v \in V$ med $\langle v_i, v\rangle = 0$, for alle $i = 0, 1, \dots, k-1$. △

Python indeks

Indeks