Numerisk Lineær Algebra F2021
Opgavesæt 11

Opgave 11.1. Bestem standardmatrixrepræsentationen (SMR) for de følgende lineære afbildninger L. Brug dette til at angive en basis for $\ker L$ og en basis for $\operatorname{im} L$.

(a) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L(x, y) = (2x, 3y, x - y)$.
(b) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L(x, y) = (0, 0, 0)$.
(c) $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $L(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0 - x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$.

Opgave 11.2. Bestem koordinatvektorerne af punktet $p = (1, -1, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ mht. til hver af de følgende baser.

(a) $E\colon (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)$.
(b) $F\colon (1/2, -1/2, 1/2, -1/2), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0), (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}),$
$(1/2, -1/2, -1/2, 1/2)$.

Angiv koordinatskiftsmatricen fra E til F, og bekræft at dette giver den korrekte relation mellem koordinatvektorerne af p mht. E og hhv. F.

Opgave 11.3. Betragt den lineære afbildning $L\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$, hvor P_2 er vektorrummet, som består af polynomier af grad højst 2, givet ved

$$L(p) = (p(0), p(1), p(2)).$$

Bestem matricen A af L mht. baserne $E\colon x^2, x, 1$ af P_2 og standardbasen $F\colon (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$ af $\mathbb{R}^3$. Vis at A er invertibel. Hvad kan du nu sige om $\ker L$ og $\operatorname{im} L$?

Opgave 11.4. Lad `cols = 5` og lad a være Vandermondematricen for tallene

```
1.0, 0.5, -1.0, 0.1, 0.7.
```

Afgør i python om søjlerne af a udgør en basis for $\mathbb{R}^5$ eller ej. Gør det samme for den transponerede `a.T`.

Opgave 11.5. Betragt den øvre triangulær matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vis at 6, 2 og -1 er egenværdier for A, og bestem tilhørende egenvektorer. Vis desuden at

$$(A - 6I_3)(A - 2I_3)(A + I_3) = 0_3. \tag{11.1}$$

Gøre rede for, at for en generel øvretriangulær matrix er indgangerne på diagonalen netop matricens egenværdier. Er sådan en matrix nødvendigvis diagonaliserbar? Opfylder den en ligning af typen (11.1)?

Afleveringsopgave 8

Dette er en individuel opgave. Opgaveløsning afleveres i blackboard som én pdf fil under "Upload af afleveringsopgaver > Aflevering 8". Afleveringsfristen bestemmes af din instruktor, men ligger i eller lidt efter uge 17.

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda I_3)$ af A.
(b) Vis at 0 og 2 er egenværdier for A.
(c) Har A andre egenværdier?
(d) Bestem en basis af $\mathbb{R}^3$, som består af egenvektorer for A.
(e) Skriv $A = V\Lambda V^{-1}$ for passende V og diagonal Λ.
(f) Brug del (e) til at bestemme A^k for alle k.

Andrew Swann