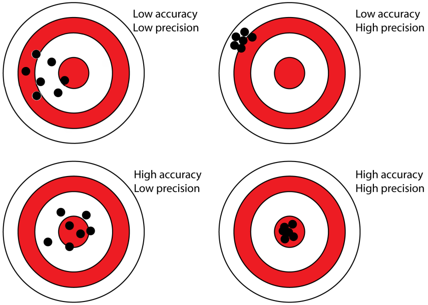
Matematisk Statistik

10. Forelæsning 04.03.2021

- Punktestimatorer fortsætter:
  - omparametrisering, Jensens ulighed
  - asymptotik.
- Områdeestimatorer

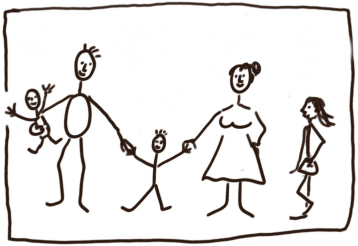


Omparametrisering

(se bogen: 6.3.5, Prop. 6.3.5)

Betragt en fordelingsfamilie med parameter θ.

I nogle situationer udtrykkes samme familien vha en anden parameter $\rho = h(\theta)$, hvor h er en **bijektiv** funktion.



$h(\Theta) = \{23, 45, 33, 39, 36\}$

Eksempel (R):

`rgamma(n, shape, rate = 1, scale = 1/rate).`

Parameteren "scale" kan bruges alternativt for "rate".

Proposition 6.3.5: Estimatorer kan genbruges i omparametriserede modeller.

$$\hat{\theta} \text{ er} \begin{cases} \text{ML-estimator} \\ \text{moment-estimator} \end{cases} \text{af } \theta \quad \Longrightarrow \quad \hat{\rho} = h(\hat{\theta}) \text{ er} \begin{cases} \text{ML-estimator} \\ \text{moment-estimator} \end{cases} \text{af } \rho$$

Omparametrisering og ML estimatorer: eksempler

Normalfordelingen kan parametriseres ved (μ, σ) frem for (μ, σ^2) — se den måde R gør det på, fx `rnorm(n, mean =` μ`, sd =` σ`)`.

ML estimatorer til σ^2 og σ er givet ved

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \implies \hat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma^2}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^{1/2}$$

Eksponentialfordelingen parametriseres nogle gange med skala $\beta = 1/\lambda$ frem for rate λ. Så skrives tætheden

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{som} \quad \tilde{f}(x;\beta) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}.$$

ML estimator til λ og $\beta = 1/\lambda$:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \implies \hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Hvis $\hat{\theta}$ er ML-estimator for θ, så er $g(\hat{\theta})$ også ML estimator for $g(\theta)$.

Hvis $\hat{\theta}$ er moment-estimator for θ, så er $g(\hat{\theta})$ også moment estimator for $g(\theta)$.

MEN..

Hvis $\hat{\theta}$ er en middelret estimator for θ, så er $g(\hat{\theta})$ generelt set *ikke* middelret for $g(\theta)$.

Jensens ulighed[a]

Lad g være en streng konveks funktion og X en ikke degenereret stokastisk variabel[b]. Så er

$$g(\mathrm{E}\,X) < \mathrm{E}\,g(X).$$

[a] Johan Jensen, 1908

[b] en stok. variabel kaldes degenereret, hvis den kun antager 1 værdi

 (se bogen: side 151)

Jensens ulighed betyder for en unbiased estimator $\hat{\theta}$, hvis g er streng konveks:

$$\mathrm{E}\, g(\hat{\theta}) > g(\theta).$$

Eksempel (MSRR, side 166): For Unif$[0,\beta]$ fordelingen er $\hat{\beta} = 2\bar{X}$ middelret. Men $(\hat{\beta})^2 = 4\bar{X}^2$ er ikke middelret for β^2:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[4\bar{X}^2] &= 4\,\mathrm{E}[\bar{X}^2] = 4(\mathrm{Var}[\bar{X}] + \mathrm{E}[\bar{X}]^2) \\ &= 4\left(\frac{\beta^2}{12n} + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right) = \beta^2 + \frac{\beta^2}{3n}\end{aligned}$$

Altså $\mathrm{E}[\hat{\beta}^2] > \beta^2$.

Asymptotisk normalitet af ML estimatorer

(se bogen: 6.3.6, ikke pensum)

Theorem 6.3.6:

maksimum likelihood estimatorer ofte er de bedste blandt alle centrale (= middelrette) estimatorer, i det de antager den minimale varians givet ved Cramér-Rao ulighed,

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{n\mathscr{I}(\theta)}, \quad \mathscr{I}(\theta) = \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial(\ln(f(X;\theta)))}{\partial\theta}\right)^2\right].$$

For store n må man desuden antage, at $\hat{\theta}_n$ er approksimativt normalfordelt.

Eksempel 6.19

Lad $X_1,\ldots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} f$ med $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, hvor $\theta > 0,\ 0 < x < 1$.

$$\log f(x;\theta) = \log\theta + (\theta-1)\log x$$

MLE estimator er $\hat{\theta}_n = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}$.

For store n er $\hat{\theta}_n \sim N(\theta, \theta^2/n)$.

☞ mere om dette i kurset Statistisk Teori