Aflevering 7

Lucas Bagge

8.42

Let X be a random variable with pdf $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, and $\theta > 0$. Consider H_0: $\theta = 1/2$ versus H_A: $\theta = 1/4$.

a) Derive the most powerful test using $\alpha = 0.05$.

b) Compute the power of this test.

derive the most powerful test using alpha = 0.05

I opgaven har vi givet X med pdf $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, hvor de respektive hypoteser er:

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2} \text{ og } H_1 : \theta = \frac{1}{4}$$

a)

I den første del af opgaven skal vi udlede **the most powerful test**, som er forholdsvis simple da vi det er simple hypoteser. Vi kan benytte os **Neyman Pearson** teorem 8.6.1, som fortæller os at forholdet mellem likelihoods skal være mindre end en konstant k. Da vi kun ser på en observation af X bliver det mere simpel:

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_\alpha)} = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}}{\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}}$$

Det reduceres til:

$$= 2x^{\frac{1}{4}}$$

Dermed er rejction regionen for the most powerful test:

$$2x^{\frac{1}{4}} \leq k$$

Alternativ kan vi skrive, grundet $2x^{\frac{1}{4}}$ er en konstant, k^* som en ny konstant

$$x < \frac{1}{16}k^4 = k^*$$

Nu skal vi finde k*, hvor vi gerne vil have

$$\alpha = \text{P(Type I error)} = \text{P(rejecting H0 when it is true)}$$

som skal være lig med 0.05. Dermed skal følgende holde:

$$\alpha = P(X < k^* \text{ når } \theta = \frac{1}{2}) = \int_0^{k^*} \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = [\sqrt{x}]_0^{k^*} = \sqrt{k^*} = 0.05$$

Hermed kan vi løse for k*

$$k^* = 0.0025$$

Det vil sige at forkastning regionen af the most powerful test for

$$H_0 : \theta = 1/2 H_1 : \theta = 1/4$$

under fordeling funktionen er:

$$x < 0.0025$$

b)

Herfra kan vi beregne power of the test:

$$\gamma = \int_0^{0.0025} \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} dx = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}} \approx 22.36\%$$