

Aflevering 8

Lucas Bagge

a)

Vi vil bestemme det karakteristisk polynomium;

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda$$

Som er det ønskede resultat.

b)

Faktoriser udtrykket

$$-\lambda(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0$$

Det giver os tre løsninger:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$$

c)

A har ikke andre egenverdier end 2 og 0.

d)

Finder egenvektor hvor vi starter med $\lambda_1 = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finder echelon form:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Herefter skal vi løse

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løser det og vi får egenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det samme gør vi for $\lambda_3 = 0$, men går ikke igennem de samme udregninger som før, men opskriver bare egenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Således er basisen:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e)

V er vores egenvektor matrice:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λ er en diagonal matrice hvor diagonalen består af vores egenverdier.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Således kan vi skrive ud i formen $V\Lambda V^{-1}$ og se vi får vores A matrice.

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

f)

Lad M være en kvadratisk matrix. Beregn power af A ved matrix multiplikation

$$A^k = AA \dots A \text{ Hvor } AA \dots A = k$$

Hvor vi kan bruge diagonalisering til at beregne A^k

$$A^k = (V\Lambda V^{-1})^k = V\Lambda V^{-1} V\Lambda V^{-1} \dots V\Lambda V^{-1} = V\Lambda^k V^{-1}$$