Projeto 3: Modelagem do Pêndulo Rotativo Quanser

Lucas Barra de Aguiar Nunes

27 de fevereiro de 2022

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Esse relatório se dedica a deduzir um modelo dinâmico para o pêndulo invertido rotativo da Quanser Inc, como mostrado na figura 1.1. O sistema possui 2 juntas porém apenas a primeira, que fica perto da base, é atuada por um motor. Esse relatório é dividido em 3 partes. Na primeira, deduz-se o modelo dinâmico a partir da equação de Lagrange, na segunda, inclui-se os efeitos da dinâmica do motor e ao final, compara-se com dados obtidos experimentalmente.

Figura 1.1: Imagem do pêndulo invertido rotativo da Quanser Inc

Capítulo 2

Modelo dinâmico do robô

O sistema a ser analisado pode ser visto como um manipulador de 2 juntas e apenas a primeira é atuada. O primeiro elo (Elo 1) é um paralepípedo enquanto o segundo é um cilindro. Para suas juntas foi definido um sistema de coordenadas arbitrário como mostrado na figura 2.1. A partir desse sistema foi possível deduzir os vetores posição do sistema em 2.1 e suas relações, dadas no apêndice e utilizadas em 2.1.2 e 2.1.2.

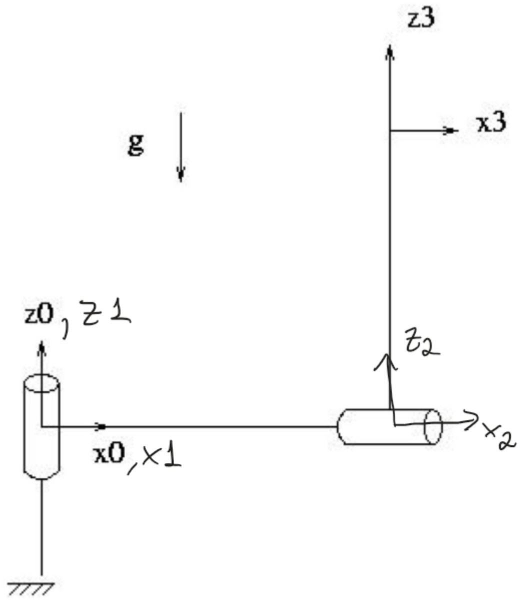

Figura 2.1: Diagrama das coordenadas do pêndulo

$$\begin{aligned}\vec{p}_{1,2} &= l_1 x_1 \\ \vec{rc}_1 &= \frac{l_1}{2} x_1 \\ \vec{rc}_2 &= \frac{l_2}{2} z_2\end{aligned} \tag{2.1}$$

Equação 2.1: Vetores posicao definidos a partir do sistema de coordenadas da figura 2.1. O vetor $\vec{p}_{i,j}$ é o vetor posição das coordenadas da junta i a junta j. O vetor $\vec{rc}_i$ é o vetor posicao da junta i até o centro de massa do elo i.

Para qualquer sistema mecânico, a equação diferencial que rede seus movimentos pode ser obtida pela equação de lagrange dada pela equação 2.2, na qual o lagrangiano é definido como a energia total do sistema. Nesse caso, foram consideradas energias cinéticas e potenciais. Ao simplificar esse sistema em função do ângulo das juntas θ, obtém-se uma equação diferencial no formato dado por 2.4. A seguir calcularemos os coeficientes dessa equação.

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \tag{2.2}$$

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta, \dot{\theta}) - P(\theta) \tag{2.3}$$

$$M(\theta)\ddot{(\theta)} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G = \tau \tag{2.4}$$

$$\tag{2.5}$$

2.1 Matriz M

A matriz M é referente a dinâmica de segunda ordem das juntas e é dado pela equação a seguir. O índice i se refere a junta i e ao elo que parte dessa junta. Dessa forma M_i é a matriz M que parte do elo i e J_i é o jacobiano referente a junta i. I_i^j é referente a inércia do elo i no ponto j no seu interior, quando $j = i$ é a inércia referente ao ponto onde a junta está conectada.

$$M = \Sigma M_i \tag{2.6}$$

$$M_i = J_i^* \bar{M}_i J_i = J_i^T \bar{M}_i J_i \tag{2.7}$$

$$\bar{M}_i = \begin{pmatrix} m_i \mathcal{I} & -m_i \vec{r}_{ci} X \\ m_i \vec{r}_{ci} X & I_i^i \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$J_i = \begin{pmatrix} \vec{h}_1 X \vec{p}_{1,i} & ... & \vec{h}_{(n-1)} X \vec{p}_{1,(n-1)} & 0 & ... & 0 \\ \vec{h}_1 & ... & \vec{h}_{(n-1)} & \vec{h}_i & ... & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

2.1.1 Inércias

Com as dimensões de cada elo dadas de acordo com a tabela 2.1, é possível calcular a inércia de cada um.

	Elo 1 (Paralelepípedo)	Elo 2 (Cilindo)
Comprimento(m)	0.187	0.34
Largura/Raio(mm)	38.0	6.5
Massa(kg)	1.56	0.15

Tabela 2.1: Dimensões dos elos.

O elo 1 possui base quadrada b e comprimento L. Devido a sua conexão à junta 1, esse elo irá girar ao redor do seu comprimento que, referente a junta 1, é o eixo x. Dessa forma, em relação ao seu centro de massa, obtemos o valor em 2.11. Como o elo é simétrico, o seu centro de massa fica no meio das suas 3 dimensões, logo, $||\vec{rc}_1|| = \frac{l}{2} = 0.0935$.

$$I^c = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & l^2 + b^2 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$I^c = \begin{pmatrix} 0.0602 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7586 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7586 \end{pmatrix} 10^{-3} kg/m^2 \tag{2.11}$$

O elo 2 possui base circular de raio r e comprimento L. Devido a sua conexão à junta 2, esse elo irá girar ao redor do seu comprimento que, referente a junta 2, é o eixo z. Dessa forma, em relação ao seu centro de massa, obtemos o valor em 2.13. Como o elo é simétrico, o seu centro de massa fica no meio das suas 3 dimensões, logo, $||\vec{r}c_2|| = \frac{l}{2} = 0.1700$.

$$I^c = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} 3r^2+L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2+L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6r^2 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

$$I^c = \begin{pmatrix} 1.4 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4 & 0 \\ 0 & 0 & 3.17e-3 \end{pmatrix} 10^{-3} kg/m^2 \tag{2.13}$$

2.1.2 M para a junta 1

Abaixo é possível ver o cálculo de M_1, as relações usadas na simplificação podem ser vistas no apêndice A.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & z_1^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1\mathcal{I} & -m_i\vec{r}_{c1}X \\ m_1\vec{r}_{c1}X & I_1^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} z_1^T I_1^1 z_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{zz}^c + m_1\frac{l_1^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0.0029 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

2.1.3 M para a junta 2

Abaixo é possível ver o cálculo de M_2, as relações usadas na simplificação podem ser vistas no apêndice A.

$$J_2 = \begin{pmatrix} z_1X\vec{p}_{1,2} & 0 \\ z_1 & x_2 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} (z_1X\vec{p}_1,2)^T & z_1^T \\ 0 & x_2^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_2\mathcal{I} & -m_i\vec{r}_{c2}X \\ m_2\vec{r}_{c2}X & I_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1X\vec{p}_{1,2} & 0 \\ z_1 & x_2 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

$$A = (z_1X\vec{p}_{1,2})^T[m_2(z_1X\vec{p}_1, 2 - \vec{rc}_2Xz_1)] - m_2z_1^T rc_2X((z_1X\vec{p}_1,2) + z_1^T I_2^2 z_1 \tag{2.21}$$

$$= m_2l_1^2 + z_1^T R_{12} I_2^c R_{12}^T z_1 - m_2 sin(\theta_2)\frac{l_2}{4} \tag{2.22}$$

$$B = -m_2(z_1X\vec{p}_1,2)^T(\vec{rc}_2Xx_2) - z_1^T I_2^2 x_2 \tag{2.23}$$

$$= -\frac{m_2cos(\theta_2)l_1l_2}{2} \tag{2.24}$$

$$C = m_2x_2^T[\vec{rc}_2X(z_1X\vec{p}_1,2)] + x_2^T I_2^2 z_1 \tag{2.25}$$

$$= -\frac{m_2cos(\theta_2)l_1l_2}{2} \tag{2.26}$$

$$D = x_2^T I_2^2 x_2 \tag{2.27}$$

$$= I_{xx}^c + \frac{m_2l_2^2}{4} \tag{2.28}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0.0188sin(\theta_2)^2 + 0.00525 & -0.00477cos(\theta_2) \\ -0.00477cos(\theta_2) & 0.00578 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

2.2 Matriz C

A matriz C considerada nesse modelo é referente as forças de corioli do sistema e é calculada de acordo com 2.31.

$$M_D(\theta,\dot{\theta}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial \theta_1}\dot{\theta} & \frac{\partial M}{\partial \theta_2}\dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

$$C(\theta,\dot{\theta}) = (M_D(\theta,\dot{\theta}) - \frac{1}{2}M_D^T(\theta,\dot{\theta}))\dot{\theta} \tag{2.31}$$

Substituindo

$$C(\theta,\dot{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0.00477\dot{\theta}_2 sin(\theta_2) + 0.0376\dot{\theta}_1 cos(\theta_2)sin(\theta_2) \\ -0.00238\dot{\theta}_2 sin(\theta_2) - 0.0188\dot{\theta}_1 cos(\theta_2)sin(\theta_2) & 0.00238\dot{\theta}_1 sin(\theta_2) \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

2.3 Vetor G

O vetor G se refere as forças gravitacionais que agem sobre os elos e é dado pela equação 2.39. Nela o vetor $\vec{p}^{\,c}_{0,i}$ representa o vetor posição do sistema 0 até o centro de massa do elo i.

$$g(\theta) = -\Sigma m_i \vec{g}^T \vec{p}^{\,c}_{0,i} \tag{2.33}$$

$$g(\theta) = -m_1\vec{g}^T\vec{rc}_1 - m_2\vec{g}^T(\vec{p}_{1,2} + \vec{rc}_2) \tag{2.34}$$

$$\vec{g}^T\vec{rc}_1 = 0 \tag{2.35}$$

$$\vec{g} = -gz_1 \tag{2.36}$$

$$g(\theta) = m_2 g(l_1 z_1^T x_1 + \frac{l_2}{2} z_1^T z_2) \tag{2.37}$$

$$g(\theta) = m_2 g\frac{l_2}{2}cos(\theta_2) \tag{2.38}$$

$$G(\theta) = \vec{\nabla} g \tag{2.39}$$

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g\frac{l_2}{2} sin(\theta_2) \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

Capítulo 3

Modelo dinâmico completo

Nessa etapa vamos desenvolver a dinâmica do motor DC que gera o torque necessário para o movimento das juntas e englobar na dinâmica do pêndulo de forma que ao final tenhamos uma diferencial em função da tensão no motor como entrada do sistema.

3.1 Motor DC

Para o Pêndulo Rotativo Quanser as constantes do sistema são dadas de acordo com a tabela 3.1.

Tensão Nominal	$12V$
Constante de Torque (K_m)	$0.00767N.m/A$
Reação de armadura (K_e)	$0.00767vV.s/rad$
Resistência de Armadura (R_a)	2.6Ω
Indutância de Armadura (L_a)	$0.18mH$
Inércia de Armadura (J_a)	$3.89e-7Kgm^2$
Redução (K_r)	70
Inércia das engrenagens (J_j)	$2.8e-6+2.27e-5+5e-7Kgm^2$

Tabela 3.1: Constantes do motor.

Em um motor controlado por armadura, temos que o seu torque (τ_m) é proporcional a corrente, dessa forma, podemos obter a dinâmica entre tensão e torque.

$$i_a = \frac{V_a - E_a}{Ra + L_a s} \tag{3.1}$$

$$\frac{L_a}{R_a} << 1 \tag{3.2}$$

$$i_a = \frac{V_a - E_a}{Ra} \tag{3.3}$$

$$\tau_m = K_m i_a \tag{3.4}$$

$$E_a = K_m \dot{\theta_m} \tag{3.5}$$

Substituindo

$$\tau_m = \frac{K_m}{R_a} V_a - \frac{K_m^2}{R_a} \dot{\theta_m} \tag{3.6}$$

$$\tag{3.7}$$

Como existe uma redução por um sistema de engrenagens, o torque que o manipulador recebe não é diretamente τ_m, assim, é necessário levar em conta essa redução e a inércia do sistema de engrenagens e do próprio motor. Ao aplicar as relações de redução, obtemos a dinâmica em 3.15 no espaço das juntas.

$$\tau_1 = K_r \tau_m \tag{3.8}$$
$$\theta_m = K_r \theta_1 \tag{3.9}$$
$$J_T := J_j + (K_r^2) J_a \tag{3.10}$$
$$\tau_1 = K_r \tau_m - J_T \ddot{\theta_1} \tag{3.11}$$
$$\tau_m = \frac{K_m}{R_a} V_a - \frac{K_m^2}{R_a} \dot{\theta_m} \tag{3.12}$$
$$\tau_1 = \frac{K_r K_m}{R_a} V_a - \frac{K_m^2 K_r^2}{R_a} \dot{\theta_1} - J_T \ddot{\theta_1} \tag{3.13}$$
$$\text{Seja } M_m \ddot{\theta_1} + C_m \dot{\theta_1} = V_m \vec{V_a} - \tau \tag{3.14}$$
$$\begin{pmatrix} J_T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ddot{\theta} + \begin{pmatrix} \frac{K_m^2 K_r^2}{R_a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\theta} = \begin{pmatrix} \frac{K_r K_m}{R_a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{V_a} - \tau \tag{3.15}$$

3.2 Equação motor e manipulador

Somando 2.4 com 3.15, obtemos a dinâmica final entre tensão e juntas do manipulador.

$$(M + M_m)\dot{\theta} + (C + C_m)\dot{\theta} + G = V_m \vec{V_a} \tag{3.16}$$
$$\begin{pmatrix} 0.0188 sin(\theta_2)^2 + 0.00962 & -0.00477 cos(\theta_2) \\ -0.00477 cos(\theta_2) & 0.00578 \end{pmatrix} \ddot{\theta_1} + \tag{3.17}$$
$$\begin{pmatrix} 0.111 & 0.00477\dot{\theta}_2 sin(\theta_2) + 0.0376\dot{\theta}_1 cos(\theta_2) sin(\theta_2) \\ -0.00238\dot{\theta}_2 sin(\theta_2) - 0.0188\dot{\theta}_1 cos(\theta_2) sin(\theta_2) & 0.00238\dot{\theta}_1 sin(\theta_2) \end{pmatrix} \dot{\theta_1} + \tag{3.18}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \frac{l_2}{2} sin(\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2065 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{V_a} \tag{3.19}$$

Capítulo 4

Simulações

Para avaliar o modelo teórico desenvolvido até esse ponto, as equações 2.4 e 3.15 foram implementadas no matlab via simulink. A implementação pode ser vista aqui. O processo de avaliação se deu realizando as mesmas operações no pendulo real em laboratório, medindo o ângulo das juntas e comprando o resultado obtido pelas simulações. Os resultados podem ser vistos nas figuras a seguir.

Em uma primeira análise, é claro que os gráficos de dados experimentais e simulados não são iguais. Na figura 4.1 os dados experimentais oscilam enquanto os simulados são estáveis em zero. A distinção, entretanto, é comparável. O ponto incial em zero é um ponto de equilíbrio instável, qualquer valor fora do nulo, seja ele tao proximo quanto seja de zero, é instável e leva o sistema a responder, facneod com que ele se afaste desse equilíbrio. No caso da simulação, como não há ruídos ou qualquer pertubação, o sistema consegue se manter perfeitamente em zero e não oscila, porém, em um caso real isso não é possível. Imprecisões e pertubações no ambiente não permitem colocar o pendulo em zero perfeitamente e nem mantê-lo nesse ponto e, consequentemente, o sistema oscila até $\theta_2 = \pi rad$, posição do pendulo em equilíbrio estável.

Na figura 4.2 existe uma distinção nas simulações quanto a estabilidade do sistema. Nos dados experimentais existe uma oscilação descrescente enquanto na simulação a oscilação é constante. Tal efeito ocorre devido a atritos. No instante inicial dos dados experimentais é possível ver que não existe uma resposta instantânea das juntas, elas apresentam certa constância como consequência da resistência do atrito até oscilarem. O atrito dissipa a energia do sistema e ele estabiliza. Como as energias consideradas no modelo do lagrangiano em 2.3 foram apenas as energias cinéticas e potencial, o sistema simulado oscila indeterminadamente.

Por último, na figura 4.3 ambos os resultados oscilam e estabilizam no mesmo ponto. O efeito de estabilização no modelo simulado ocorre pois, nesse caso, o motor está acoplado ao sistema do pendulo. Devido a reação de armadura oposta ao movimento das juntas, quando a junta 1 oscila, a armadura gera um torque na direção oposta ao movimento até que o sistema se estabiliza em $\theta_2 = \pi rad$. No entando, como ainda existe atrito no modelo experimental e não no simulado, as oscilações descrescem diferentemente em frequências distintas.

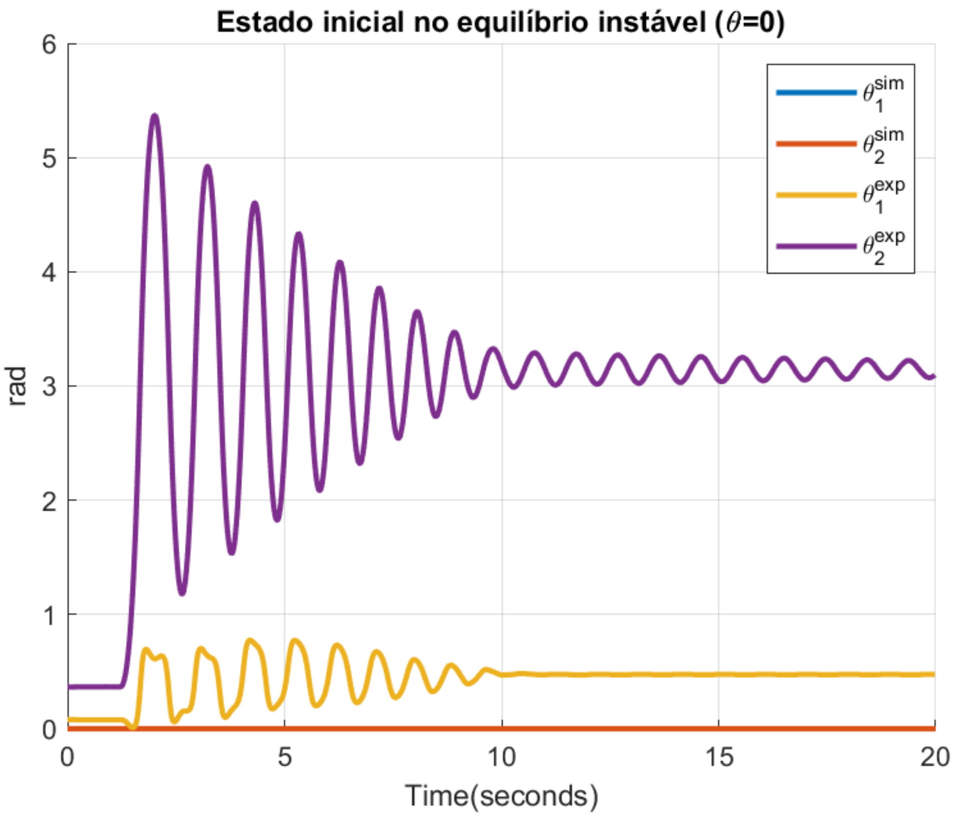

Figura 4.1: Teste 1 - Variação de θ em função do tempo quando o pendulo, desconectado do motor, é solto da vertical. Para isso foi utilizada a equação 2.4 com entradas em zero. Os valores experimentais possuem sobrescrito "exp"e os simulados "sim".

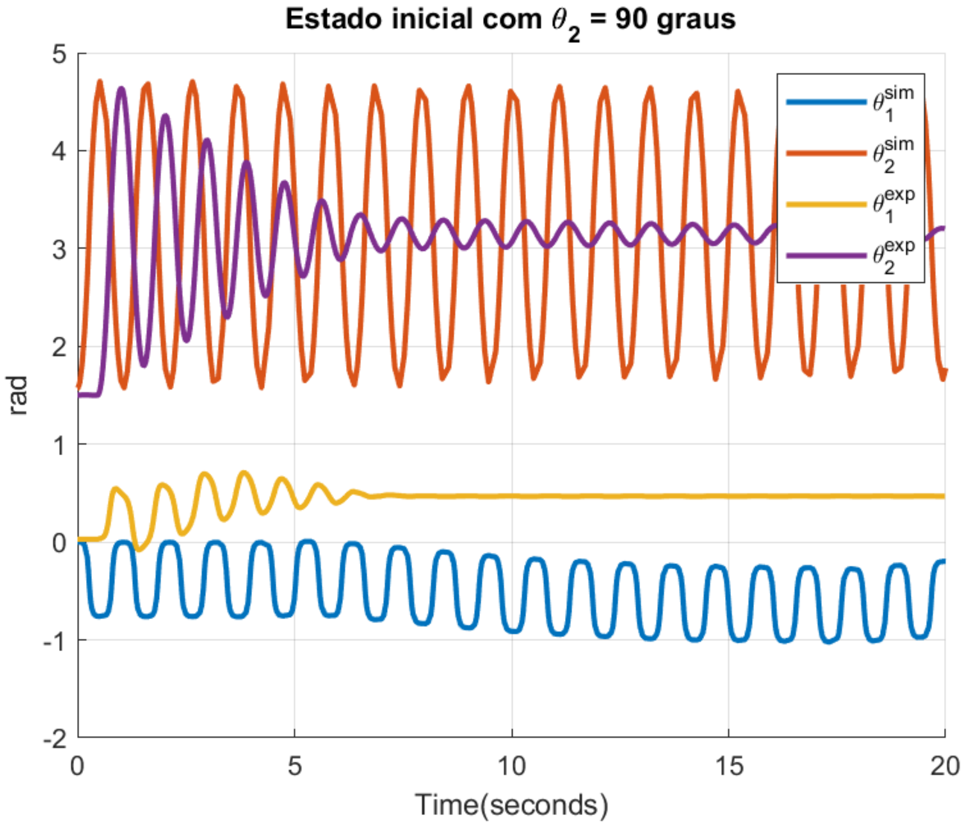

Figura 4.2: Teste 2 - Variação de θ em função do tempo quando o pendulo, desconectado do motor, é solto na horizontal ($\theta_2 = 90^o$). Para isso foi utilizada a equação 2.4 com entradas em zero. Os valores experimentais possuem sobrescrito "exp"e os simulados "sim".

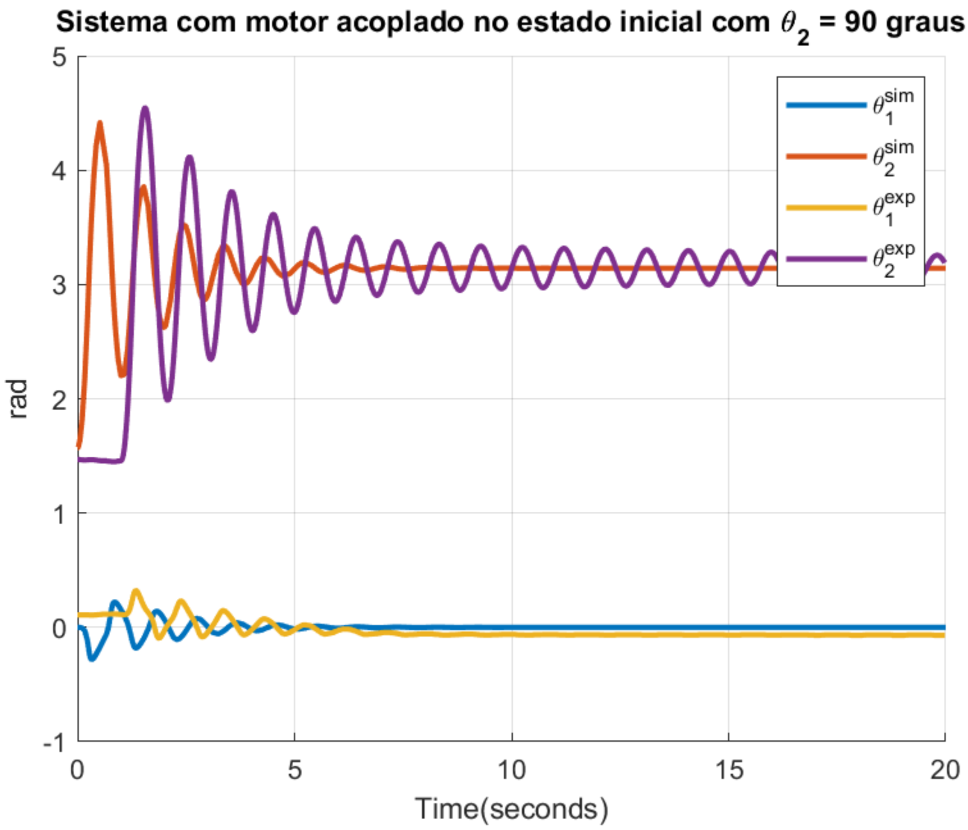

Figura 4.3: Teste 3 - Variação de θ em função do tempo quando o pendulo, conectado ao motor, é solto na horizontal ($\theta_2 = 90^o$). Para isso foi utilizada a equação 3.15 com entradas em zero. Os valores experimentais possuem sobrescrito "exp"e os simulados "sim".

Capítulo 5

Conclusões

Esse relatório decorreu sobre a modelagem de robôs por meio de um pêndulo invertido levando em conta os motores que estão acoplados a suas juntas. Em comparação a dados simulados, pode-se ver efeitos de atrito e de reação de armadura do motor que alteram o comportamento do sistema.

Apêndice A

Relações úteis

$$z_1^T x_2 = 0 \tag{A.1}$$
$$y_1^T y_2 = z_1^T z_2 = cos(\theta_2) \tag{A.2}$$
$$z_1 X \vec{p}_{1,2} = l_1 y_1 \tag{A.3}$$
$$\vec{rc}_2 X z_1 = -\frac{l_2}{2} sin(\theta_2) x_1 \tag{A.4}$$
$$\vec{rc}_2 X y_1 = -\frac{l_2}{2} cos(\theta_2) x_1 \tag{A.5}$$
$$\vec{rc}_2 X x_2 = \frac{l_2}{2} y_2 \tag{A.6}$$
$$z_1^2 = R_{12}^T z_1^1 \tag{A.7}$$
$$I_i^i = I_i^c - m_i(\vec{rc}_i \vec{rc}_i^T - ||\vec{rc}_i||^2 \mathcal{I}) \tag{A.8}$$
$$z_1^T I_2^2 z_1 = z_1^T I_2^c z_1 - m(z_1^T \vec{rc}_1)^2 + m_1 ||\vec{rc}_1||^2 \tag{A.9}$$
$$= I_{zz}^c + m_1 \frac{l_1^2}{4} \tag{A.10}$$
$$\alpha^T I_i^i \beta = 0 \qquad \text{quando } \alpha^T \beta = 0 \tag{A.11}$$