

## Projeto 4: Controle dinâmico de manipuladores

Lucas Barra de Aguiar Nunes

3 de março de 2022

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Controle P-PI</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Controle por Torque Computado</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Simulações</b>	<b>8</b>
4.1	Teste 1 . . . . .	8
4.2	Teste 2 . . . . .	10
4.3	Teste 3 . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>14</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Esse relatório se dedica a desenvolver estratégias de controle sobre a equação dinâmica de um manipulador planar 2R. O modelo utilizado é o mostrado em [2], ilustrado na figura 1.1 com dinâmica dada de acordo com a equação 1.1. Dois métodos de controle serão abordados nesse trabalho: Controle P-PI e controle por torque computado ou linearização por realimentação.

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 50\cos(\theta_2) + 110.001 & 25\cos(\theta_2) + 22.6 \\ 25\cos(\theta_2) + 22.6 & 32.5 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} -25\dot{\theta}_2\sin(\theta_2) & -25\sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 25\dot{\theta}_1\sin(\theta_2) & 0 \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} 249.5\cos(\theta_1 + \theta_2) + 798.4\cos(\theta_1) \\ 249.5\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \\ M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + G &= \tau \end{aligned} \tag{1.1}$$

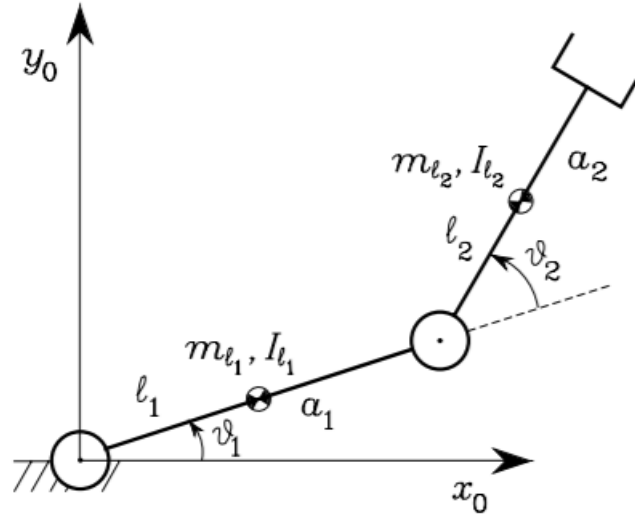


Figura 1.1: Diagrama do manipulador planar 2R abordado. O vetor do ângulo das juntas será tratado como  $\theta$ .

## Capítulo 2

### Controle P-PI

Nessa primeira abordagem, procura-se aplicar um controle linear usual ao ignorar as não linearidades do sistema, tratando-as como perturbações em um sistema linear. A interpretação do sistema como linear é mostrada na equação 2.3. Nesse caso, separamos a matriz  $M$  em uma matriz constante  $\bar{M}$  e outra variável ( $\Delta M$ ). Devido as não linearidades, quando a velocidade de  $\theta$  for baixa, a perturbação será desprezível.

$$M(\theta) = \bar{M} + \Delta M(\theta) \quad (2.1)$$

$$\tau = \bar{M}\ddot{\theta} + \Delta M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + G \quad (2.2)$$

$$\tau = \bar{M}\ddot{\theta} + d \quad (2.3)$$

Quando  $\dot{\theta} \rightarrow 0$  Temos  $d \rightarrow 0$

Ao se desprezar as perturbações, temos um sistema integrador duplo do torque  $\tau$  ao ângulo das juntas  $\theta$ , Para realizar o controle dessa dinâmica, propões-se um controle P-PI. O controle PI forma uma malha interna que controla a velocidade do sistema enquanto o proporcional está na malha externa controlando a posição de  $\theta$ . Além disso, adiciona-se um ganho a aceleração desejada para ajustar a dinâmica da aceleração real do sistema. Ao final, obtém-se o diagrama na figura 2.1.

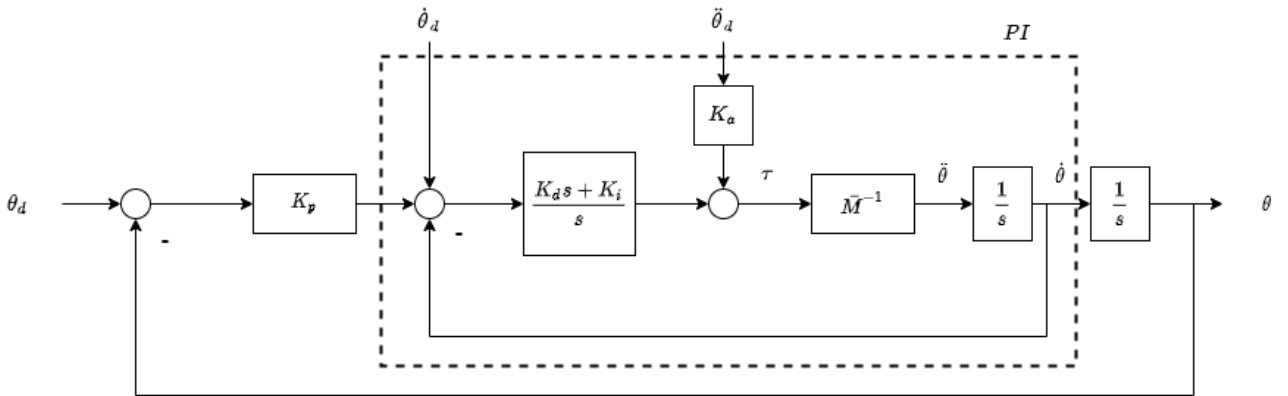


Figura 2.1: Diagrama do controle P-PI.

Os requisitos do sistema são uma resposta similar a um sistema de segunda ordem com  $\omega_n = 5$  e  $\zeta = 1$ , cujos pólos do polinômio desejado  $P_D(s)$  podem ser calculados pela equação 2.4 retirada de [1]. Dessa forma, a dinâmica do sistema deve ser redigida por um pólo em -5.

$$P_D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (2.4)$$

$$P_D(s) = (s + 5)^2 \quad (2.5)$$

A proposta de controle é fazer um ajuste do PI para a malha interna com um ganho alto e pólos mais distantes de -5 de forma que o ganho  $K_p$  possa fazer um ajuste fino para que o pólo mais próximo da origem seja -5. Para o ganho do PI foi definido o polinômio em 2.7.

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_d} = G_{in}(s) = \frac{\bar{M}^{-1}(K_D s + K_i)}{\mathcal{I}s^2 + \bar{M}^{-1}K_D s + \bar{M}^{-1}K_i} \quad (2.6)$$

$$P_D^{in}(s) = (s + 10)(s + 50) \quad (2.7)$$

$$K_D = 60\bar{M} \quad (2.8)$$

$$= \begin{pmatrix} 6600.1 & 1356 \\ 1356 & 744 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$K_i = 500\bar{M} \quad (2.10)$$

$$= \begin{pmatrix} 55001 & 11300 \\ 11300 & 6200 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$G_{in}(s) = \frac{60\mathcal{I}s + 500\mathcal{I}}{\mathcal{I}s^2 + 60\mathcal{I}s + 500\mathcal{I}} \quad (2.12)$$

Como todas as matrizes do polinômio em  $G_{in}(s)$  são múltiplas da identidade, definimos a matriz  $K_p$  como múltipla da identidade e aplicamos o lugar das raízes para o cálculo do ganho proporcional para o polinômio desejado, obtendo a figura 2.2.

$$\frac{\theta}{\theta_d} = G_{out}(s) = \frac{K_p G_{in}(s)}{\mathcal{I}s + K_p G_{in}(s)} \quad (2.13)$$

$$K_p = 5.67\mathcal{I} \quad (2.14)$$

$$P(s) = (s + 5.03)(s + 41.33)(s + 13.64)\mathcal{I} \quad (2.15)$$

No final, computamos o valor de  $K_a$  de forma que o sistema siga a aceleração desejada e encontramos o valor dado em 2.17.

$$\frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}_d} = \frac{\bar{M}^{-1}K_a}{\mathcal{I}s^2 + 60\mathcal{I}s + 500\mathcal{I}} \quad (2.16)$$

$$K_a = \bar{M} \quad (2.17)$$

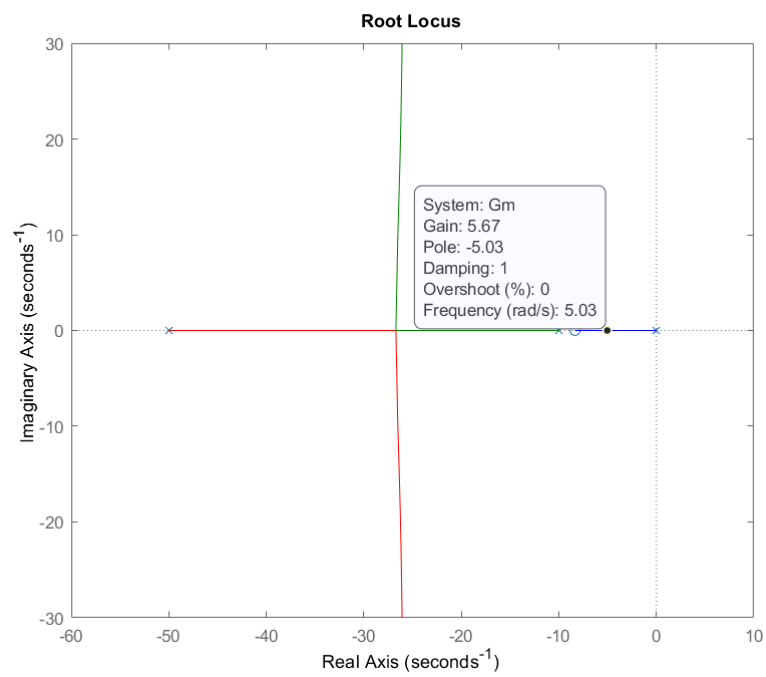


Figura 2.2: Lugar das raízes para o cálculo de  $K_p$ .

## Capítulo 3

# Controle por Torque Computado

Nessa abordagem, o sistema completo, considerando suas não linearidades, será levado em conta para o projeto. A estratégia de controle consiste em realimentar as partes não lineares de forma a linearizar o sistema, transformando-o em uma dinâmica linear de segunda ordem para o erro de rastreamento como mostra a equação 3.5 e o diagrama em 3.1.

$$M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + G = \tau \quad (3.1)$$

$$\tau = M(u + \ddot{\theta}_d) + C\dot{\theta} + G \quad (3.2)$$

$$u = K_p\tilde{\theta} + K_D\dot{\tilde{\theta}} \quad (3.3)$$

$$\tilde{\theta} = \theta_d - \theta \quad (3.4)$$

$$\ddot{\tilde{\theta}} + K_D\dot{\tilde{\theta}} + K_p\tilde{\theta} = 0 \quad (3.5)$$

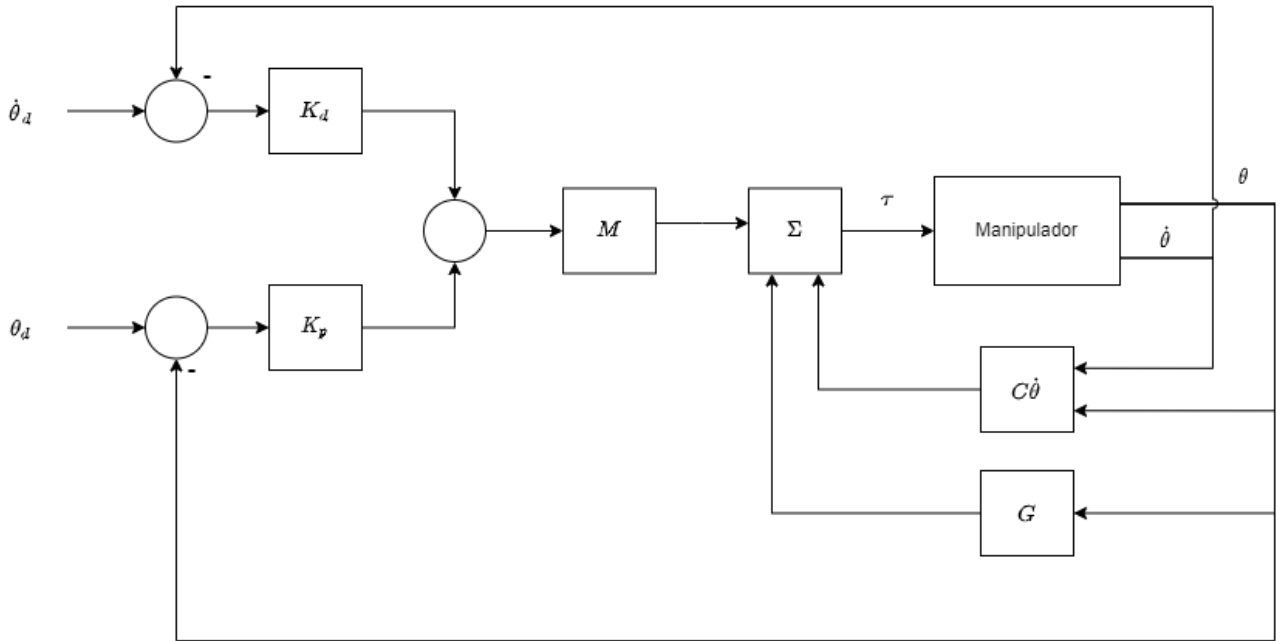


Figura 3.1: Diagrama do controle por torque computado.

Igualando ao sistema de segunda ordem em 2.4, obtém-se os ganhos derivativo e proporcional.

$$\mathcal{I}s^2 + K_D s + K_p = \mathcal{I}s^2 + 2\zeta\omega_n \mathcal{I}s + \omega_n^2 \mathcal{I} \quad (3.6)$$

$$K_D = 2\zeta\omega_n \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$K_p = \omega_n^2 \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$



## Capítulo 4

# Simulações

Para as simulações foram testadas 3 trajetórias todas no formato das equações 4.1, 4.2 e 4.3, porém, com valores de  $\omega$  distintos. Os valores de  $\omega$  são mudados para evidenciar que quando a velocidade de  $\theta$  é elevada ( $\omega$  elevado), as não linearidades não são mais desprezíveis e o controle linear falha.

$$\theta_d = \begin{pmatrix} -0.75\cos(\omega_1 t) - 0.75 \\ -0.75\cos(\omega_2 t) + 3.75 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\dot{\theta}_d = \begin{pmatrix} 0.75\omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ 0.75\omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$\ddot{\theta}_d = \begin{pmatrix} 0.75\omega_1^2 \cos(\omega_1 t) \\ 0.75\omega_2^2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

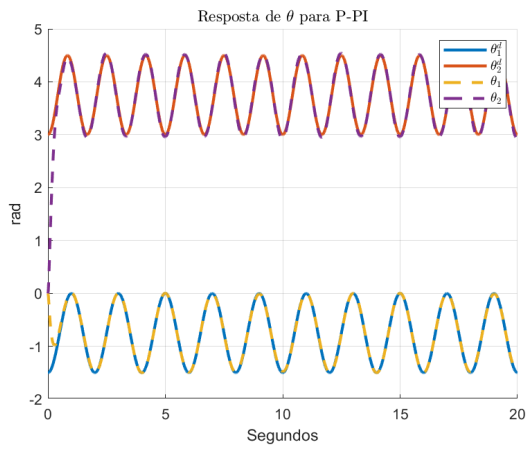
$$(4.4)$$

### 4.1 Teste 1

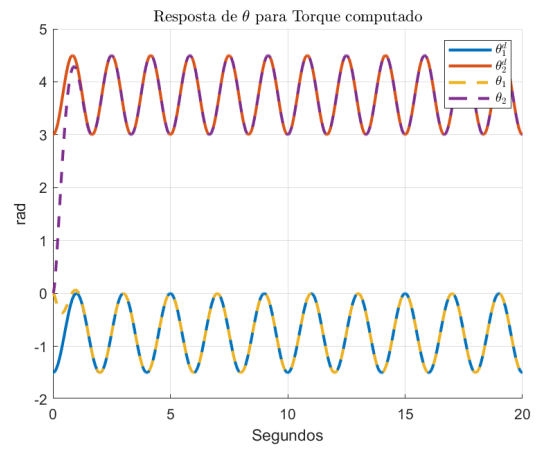
Os valores de omega utilizados foram:

$$\omega = \begin{pmatrix} \pi \\ 1.2\pi \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Nas figuras a seguir é possível ver que, em ambos os controles, as trajetórias são rastreadas perfeitamente, porém, o controle P-PI apresenta sobresaltos elevados nas derivadas de  $\theta$ . Esse comportamento é esperado, pois os ganhos desse controle são elevados, fazendo com que o controle responda mais intensamente, fortalecendo as não linearidades e gerando essa resposta, por mais que o modelo linear não possua pólos com componente imaginária.

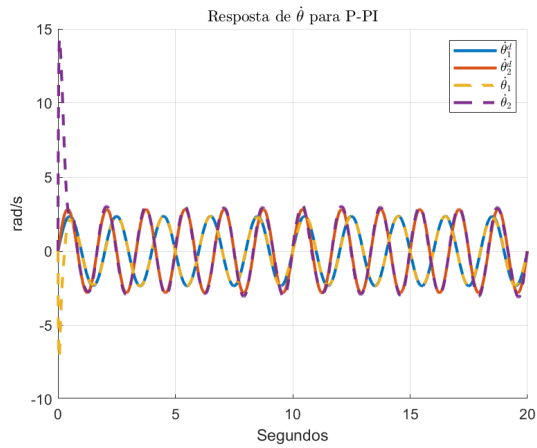


(a) Controle P-PI

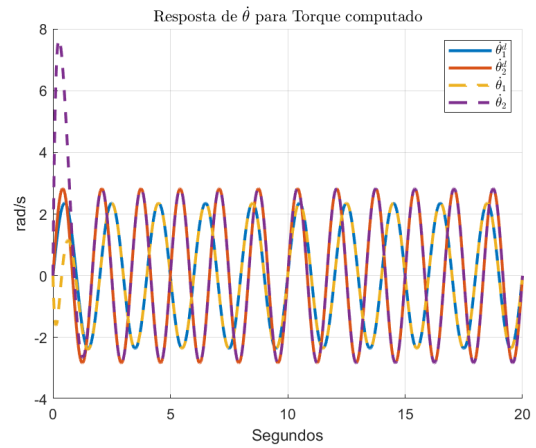


(b) Controle por Torque computado

Figura 4.1: Rastreamento da trajetória no teste 1 para controles distintos. O sobrescrito d indica o valor desejado e a variável sem o sobrescrito, o valor do sistema.



(a) Controle P-PI



(b) Controle por Torque computado

Figura 4.2: Rastreamento da velocidade da trajetória no teste 1 para controles distintos. O sobrescrito d indica o valor desejado e a variável sem o sobrescrito, o valor do sistema.

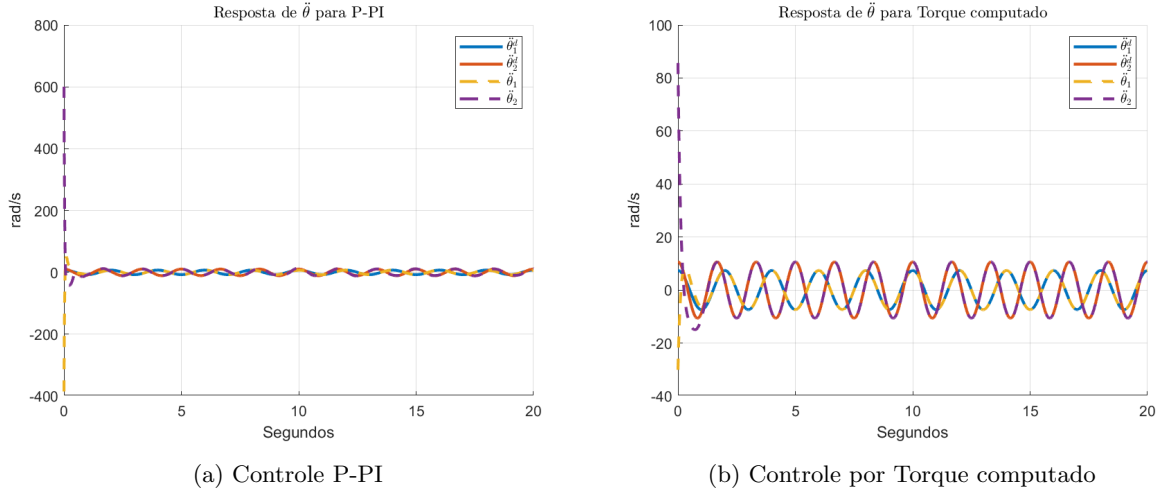


Figura 4.3: Rastreamento da aceleração da trajetória no teste 1 para controles distintos. O sobrescrito d indica o valor desejado e a variável sem o sobrescrito, o valor do sistema.

## 4.2 Teste 2

Os valores de omega utilizados foram:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0.5\pi \\ 0.6\pi \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Os resultados desse teste são similares aos do teste 1, como a velocidade é menor, a aproximação linear não impede o rastreamento.

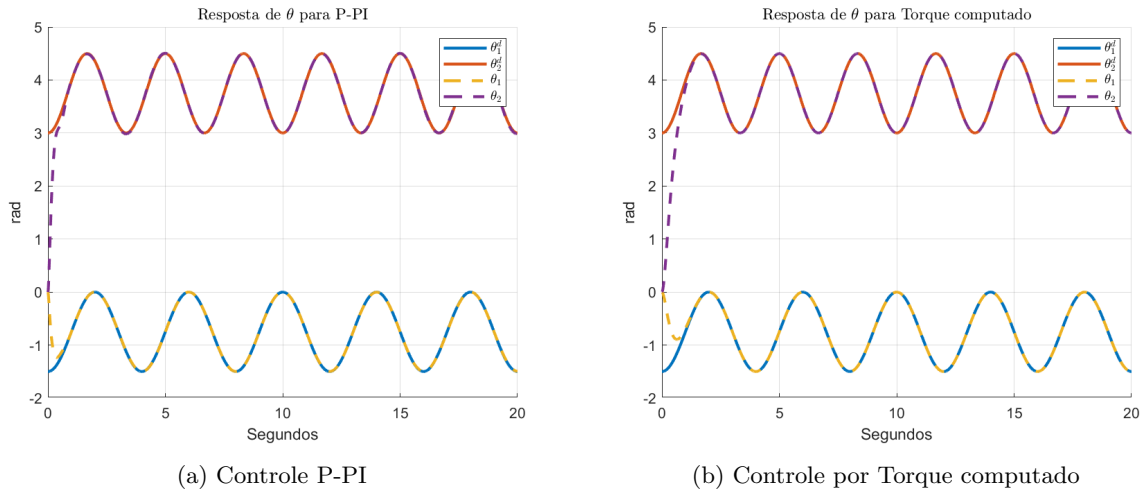
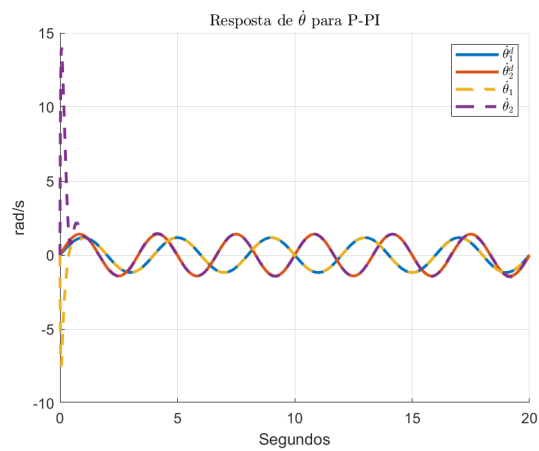
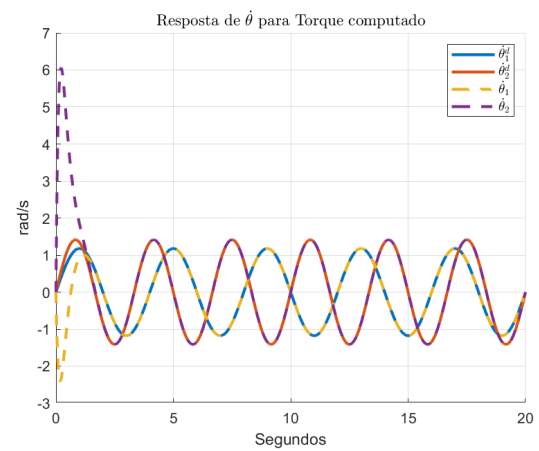


Figura 4.4: Rastreamento da trajetória no teste 2 para controles distintos. O sobrescrito d indica o valor desejado e a variável sem o sobrescrito, o valor do sistema.

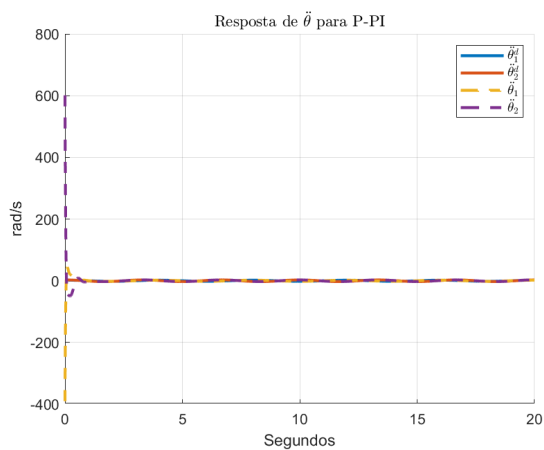


(a) Controle P-PI

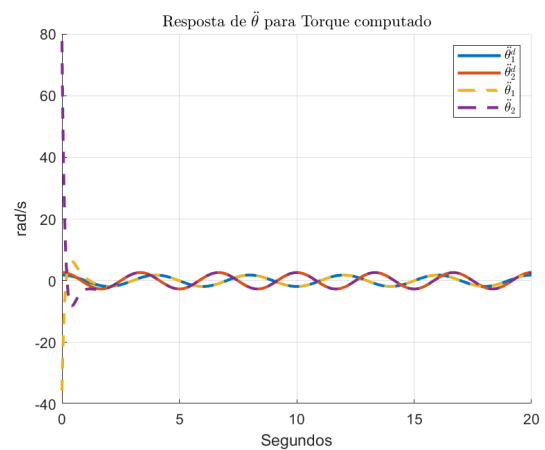


(b) Controle por Torque computado

Figura 4.5: Rastreamento da velocidade da trajetória no teste 2 para controles distintos. O sobrescrito d indica o valor desejado e a variável sem o sobrescrito, o valor do sistema.



(a) Controle P-PI



(b) Controle por Torque computado

Figura 4.6: Rastreamento da aceleração da trajetória no teste 2 para controles distintos. O sobrescrito d indica o valor desejado e a variável sem o sobrescrito, o valor do sistema.

### 4.3 Teste 3

Os valores de omega utilizados foram:

$$\omega = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 3.6\pi \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Nesse caso, devido ao  $\omega$  elevado, as não linearidades desprezadas como perturbações em 2.3 não são desprezíveis e agem de forma a impedir que o sistema rastreie a trajetória no controle P-PI. No método do torque computado esse problema não ocorre pois essa estratégia considera todas as características do sistema, rastreando perfeitamente.

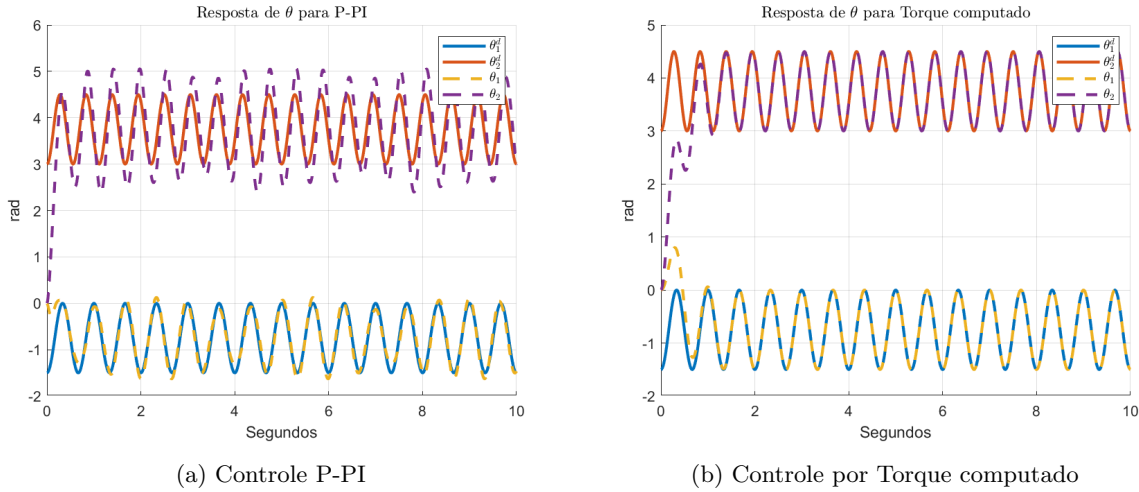


Figura 4.7: Rastreamento da trajetória no teste 3 para controles distintos. O sobrescrito d indica o valor desejado e a variável sem o sobrescrito, o valor do sistema.

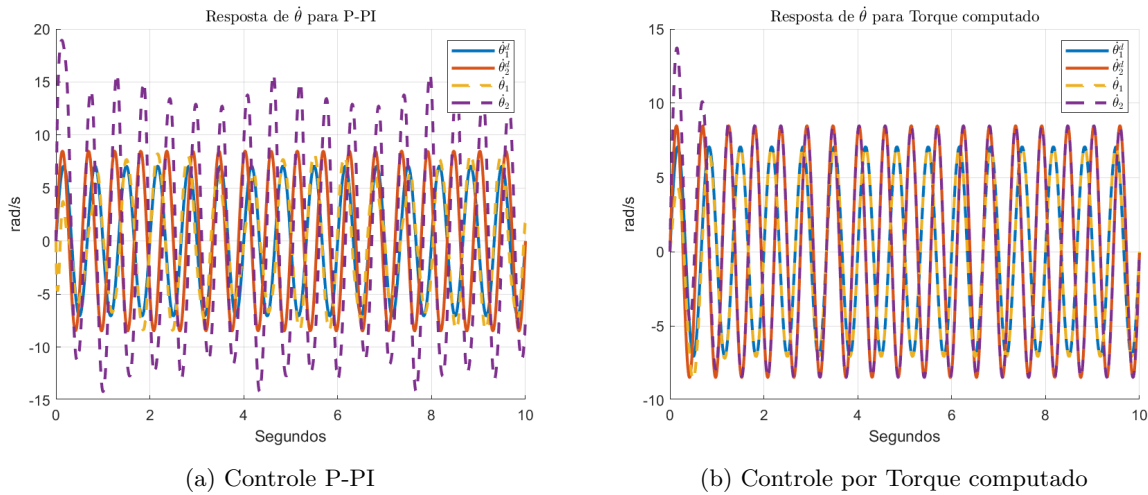
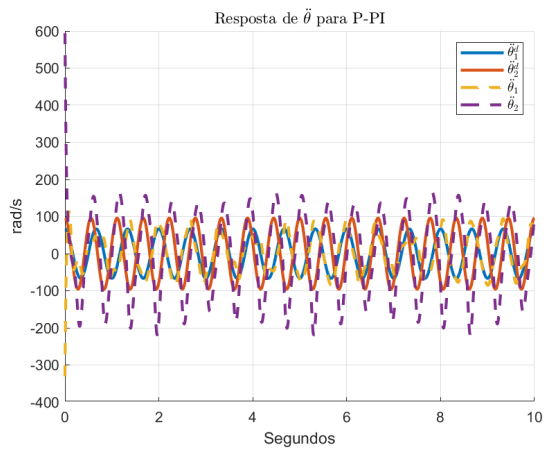
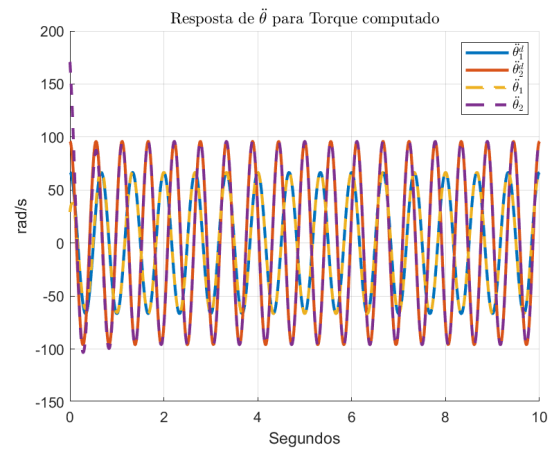


Figura 4.8: Rastreamento da velocidade da trajetória no teste 3 para controles distintos. O sobrescrito d indica o valor desejado e a variável sem o sobrescrito, o valor do sistema.



(a) Controle P-PI



(b) Controle por Torque computado

Figura 4.9: Rastreamento da aceleração da trajetória no teste 3 para controles distintos. O sobrescrito d indica o valor desejado e a variável sem o sobrescrito, o valor do sistema.

## Capítulo 5

# Conclusões

Nesse trabalho procurou-se analisar duas estratégias de controle distintas para manipuladores robóticos. Ao usar como referência um manipulador planar 2R, um controle linear mais simples P-PI foi comparado com um controle não linear por Torque computado. A diferença de desempenho entre as duas estratégias pode ser vista ao observar nos resultados que a aproximação a um sistema linear para uso do P-PI falha quando a frequência da trajetória e, consequentemente sua velocidade, são elevadas. A outra estratégia, em contrapartida, possibilita que trajetórias mais complexas sejam rastreadas.

# Bibliografia

- [1] Goodwin G., Graebe S. e Salgado M. *Control System Design*. 2000. Cap. 4, p. 77.
- [2] Siciliano B. et al. *Robotics: Modelling, planning and control*. Springer Verlag, 2009. Cap. 7, pp. 265–277.