Material de apoyo Teórica XI

Temario

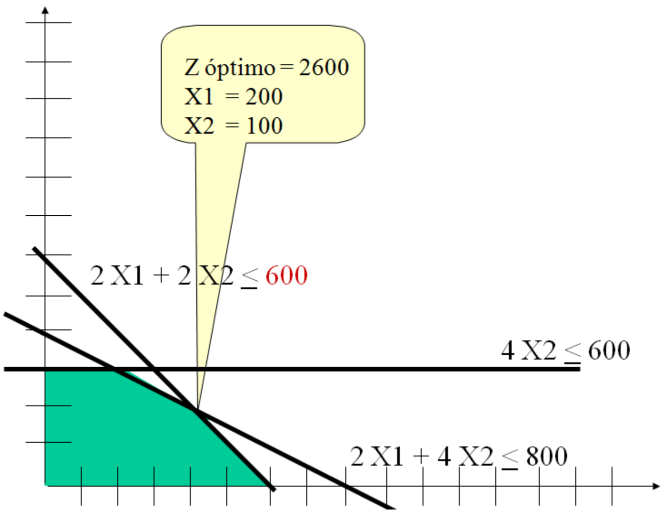
Análisis de sensibilidad

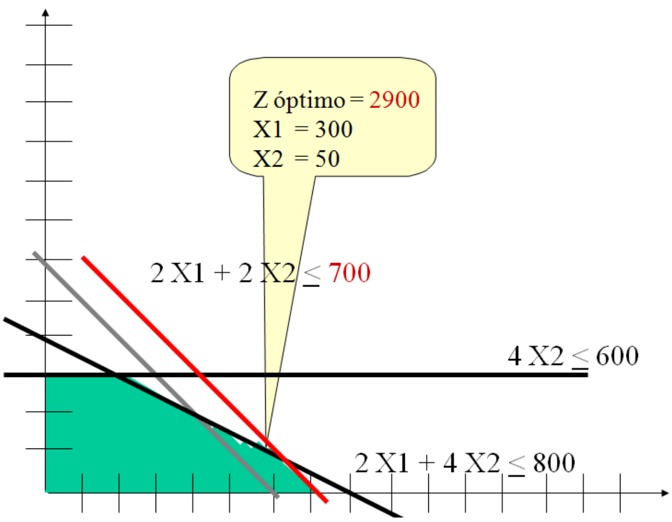
Modificaciones a la solución óptima

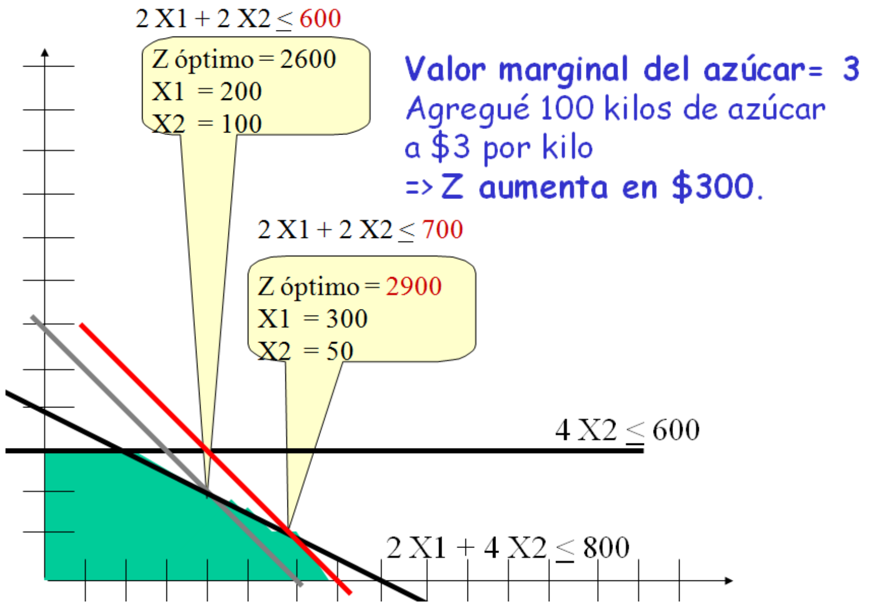
- Modificaciones a los bi
  - Rango de variación de un bi
- Problema Dual
- Gráfica de valor marginal

❷ Modificaciones a los b_i

Ahora vamos a ver qué pasa cuando cambia la disponibilidad de un recurso. Supongamos que conseguimos 100 kilos más de azúcar. ¿Seguirá siendo igual el valor marginal del recurso? Si conseguimos más cantidad convendría que sí, sino lo que pensamos que valía mucho, pasa a valer poco (o nada)

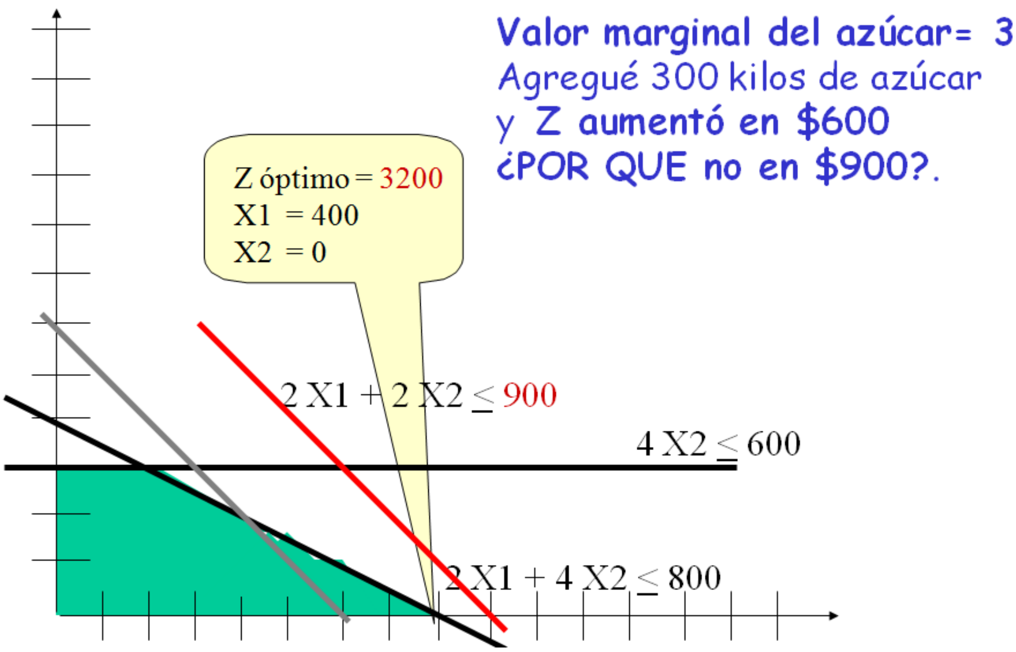






Como nos funcionó bien conseguir 100 kilos de azúcar (cada kilo nos aumentó el funcional en $3 que es el valor marginal del azúcar), vamos a intentar aumentar más la disponibilidad del azúcar.

Vamos a conseguir 300 kilos adicionales a los que teníamos en un principio (que eran 600). Lo que esperamos es que cada kilo aumente el funcional en $3, es decir que el Z pasará de valer 2600 a valer 3500



Lo que pasó fue que cuando conseguimos 200 kilos de azúcar llegamos al punto (400, 0) y al dejar de producir X2, no tenemos a quien quitarle

almidón para agregarlo al azúcar que nos regalaron y no podemos hacer más producto X1
Por lo tanto, los 100 kilos restantes nos sobran (observen que la recta queda afuera del poliedro) y tienen valor marginal cero

Sería bueno que pudiéramos saber hasta cuánto conseguir para que se mantenga el valor marginal de $3 para el recurso
Para saber eso tenemos que parametrizar el coeficiente de disponibilidad de azúcar (b_1) que actualmente vale 600
Si lo pudiéramos parametrizar podríamos hacer un trabajo parecido al que hicimos la clase anterior con los c_j

El problema es que en la tabla óptima que nosotros tenemos no figura la disponibilidad de azúcar (figuraba en la primera tabla en la columna B, pero ya cambiamos la base varias veces)
Entonces tenemos que pasar de la expresión común del problema (que se llama expresión primal o directa) a otra expresión del problema, en la cual podamos parametrizar los términos independientes, que se llama PROBLEMA DUAL

El problema Dual

Dado un primal de la forma:

$$A\,X \leq B$$
$$X \geq 0$$
$$\max\ C\,X$$

donde:

A(mxn) B(mx1) 0(nx1)
X(nx1) C(1xn)

Se define como su problema Dual:

$$Y\,A \geq C$$
$$Y \geq 0$$
$$\min\ \ Y\,B$$

donde:

Y(1xm) 0(1xm)

Relación entre Primal y Dual:

- El dual tiene una variable real por cada restricción del problema primal.
- El dual tiene tantas restricciones como variables reales tiene el primal.
- El dual de un problema de maximización es un problema de minimización y viceversa.
- Los coeficientes del funcional (costo o beneficio) del primal, son los términos independientes de las rest. del dual.
- Los términos independientes de las rest. del primal son los coeficientes del funcional del dual.
- Toda columna de coeficientes en el primal se transforma en una fila de coeficientes en el dual.
- El sentido de las desigualdades del primal es el inverso del dual.

Hagamos el planteo inicial del dual de nuestro problema de los helados:

Directo inicial:
$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600$
$0\ X1 + 4\ X2 \leq 600$
$2\ X1 + 4\ X2 \leq 800$
$MAX\ Z = 8\ X1 + 10\ X2$

Dual inicial:
$2\ Y1 + 0\ Y2 + 2\ Y3 \geq 8$
$2\ Y1 + 4\ Y2 + 4\ Y3 \geq 10$
$MIN\ Z = 600\ Y1 + 600\ Y2 + 800\ Y3$

Relación entre las variables del Directo y las del Dual:
Sobrante de azúcar X3 - Y1 Valor marginal del azúcar
Sobrante de crema X4 - Y2 Valor marginal de la crema
Sobrante de almidón X5 - Y3 Valor marginal del almidón

Latas de hel. de agua X1 - Y4 Costo de oportunidad h. de agua
Latas de hel. de crema X2 - Y5 Costo de oportunidad h. de crema

Observemos que las slack del directo se relacionan con las reales del dual y las reales del directo se relacionan con las slack del dual

Teorema fundamental de la dualidad:

Si el problema primal (o el dual) tiene una solución óptima finita, entonces el otro problema tiene una solución óptima finita y los valores de los dos funcionales son iguales.

Si cualquiera de los dos problemas tiene una solución óptima no acotada, entonces el otro problema no tiene soluciones posibles.

Teorema de la holgura complementaria.

Dados el problema primal y el dual correspondiente, siempre que en la k-ésima restricción de uno de ellos la variable de holgura o slack tome valor distinto de cero, entonces la k-ésima variable del otro problema desaparece de la base y, si la k-ésima variable de uno de los dos problemas es mayor que cero, en la k-ésima restricción del otro problema se verifica la igualdad (la variable slack o de holgura de esa restricción es igual a cero).

Consecuencia del teorema de la holgura complementaria:

Quiere decir que de cada par de variables directo-dual, una sola puede ser distinta de cero. Una sola de las dos está en la base de la tabla óptima de su problema.

0 = X3	Y1 = 3
200 = X4	Y2 = 0
0 = X5	Y3 = 1
200 = X1	Y4 = 0
100 = X2	Y5 = 0

Pero entonces, si el valor del Z del directo en el óptimo, es igual al valor del Z del dual en el óptimo y además el valor de las variables del dual es igual al valor del zj-cj de su variable relacionada en el directo, en base a la tabla óptima del directo tendríamos que poder armar la tabla óptima del dual.

Las variables que están en la base en la tabla óptima del dual son aquellas cuya variable relacionada en el directo no estaba en la base en la tabla óptima del directo. Es decir que en la base óptima del dual estarán Y1 e Y3, porque X3 y X5 no estaban en la base en la óptima del directo.

- El valor que toman las variables en la óptima del dual es igual al zj-cj de su variable relacionada del directo. Es decir que Y1 vale 3, Y3 vale 1 y las demás valen cero.

- Tenemos que verificar que el Z nos dé 2600
- Y podemos armar los vectores canónicos, que van a ser los vectores de Y1 e Y3, que son las variables que están en la base.

			600	600	800		
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3	1		0		
800	Y3	1	0		1		
		2600	0		0		

- El resto de los valores los vamos a sacar de los vectores no canónicos de la tabla óptima del directo, trasponiendo las columnas y cambiando el signo de los valores antes de pasarlos a la tabla del dual (les cambiamos el signo porque el dual opera con la identidad cambiada de signo, por ser un problema con restricciones de mayor o igual)
- Para saber dónde ubicar cada valor, colocamos en la tabla óptima del directo los nombres de las variables del dual relacionadas, debajo de cada columna y a la derecha de cada fila
- Hemos puesto un simbolito distinto en cada número para que se vea a dónde va a parar cada número de la tabla óptima del directo en la tabla óptima del dual.

TABLA OPTIMA DEL DIRECTO

			8	10				
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2	Y4
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2	Y5
0	X4	200	0	0	2	1	-2	Y2
		2600	0	0	3	0	1	
			Y4	Y5	Y1	Y2	Y3	

TABLA OPTIMA DEL DUAL

			600	600	800		
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		2600	0	-200	0	-200	-100

Aplicaciones lineales de los planteos duales.

- Análisis de sensibilidad de la solución óptima.
- Problema de transporte.
- Problema de asignación.
- Flujo en redes.
- Teoría de los juegos.
- Algoritmos de descomposición de problemas lineales de gran tamaño.

Modificaciones al problema original

❷ Modificaciones a los b_i

Ahora vamos a ver qué pasa cuando cambia la disponibilidad de un recurso. Es muy probable que no vayamos a fabricar la misma cantidad que antes. ¿Seguirá siendo igual el valor marginal del recurso? Si conseguimos más cantidad convendría que sí, sino lo que pensamos que valía mucho, pasa a valer poco (o nada)
Para analizar esto, necesitamos el DUAL

Cambios en los b_i

Se presenta la posibilidad de conseguir 100 kilos adicionales de almidón que son regalados por el dueño del restaurante "Fideo Fino", cliente de la heladería.

¿Vale la pena considerar esta posibilidad?

			600	600	900 ~~800~~		
600	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
900 ~~800~~	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		~~2600~~	0	~~-200~~	0	~~-200~~	~~-100~~
		2700		0*		-150	-150

Vemos que, como ningún zj-cj se hace mayor que cero (recordemos que estamos en un problema de mínimo, que es óptimo cuando todos los zj-cj son menores o iguales que cero), la tabla sigue siendo óptima.

Rango de variación de un b_i

Ahora queremos saber, para un determinado bi, dentro de qué rango puede variar su valor sin que la tabla óptima del dual deje de serlo.

			b1 ~~600~~	600	800		
b1 ~~600~~	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		~~2600~~ 800 + 3 b1	0	~~-200~~	0	~~-200~~	~~-100~~

$\boxed{-2\ b1 + 1600 - 600 \le 0}$

$\boxed{-\ b1 + 400 - 0 \le 0}$

$\boxed{\tfrac{1}{2}\ b1 - 400 - 0 \le 0}$

¿Cuánto puede valer b1 para que se cumplan las 3 condiciones?

La respuesta es: $500 \le b1 \le 800$

Los software de resolución también nos permiten responder esto.

Por ejemplo, en LINDO:

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

<u>Por supuesto el rango es válido **si lo único que cambiamos es ese bi.**</u>

¿Y cuál es la base que no cambia?. A continuación vemos cuáles son los valores que no cambian:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1)     2600.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1            200.000000       0.000000
     X2            100.000000       0.000000
      ROW   SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
     AZ)            0.000000        3.000000
     CR)          200.000000        0.000000
     AL)            0.000000        1.000000

 NO. ITERATIONS=      2
```

Gráfica del VM del azúcar

- ¿Cómo se hace el gráfico de valor marginal de un recurso?
- Para empezar, en la tabla óptima, tenemos que obtener el rango de variación para el cual es válido ese valor marginal
- Así, se sigue hasta obtener los distintos rangos cuando la disponibilidad varía entre 0 e infinito

			600	600	800		
600	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		2600	0	-200	0	-200	-100

Para 500 <= b1 <= 800
esta tabla es óptima

Ahora vamos a reemplazar b1 por 800 para ver qué pasa de 800 para arriba

			~~600~~ 800	600	800		
~~600~~ 800	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		~~2600~~	0	~~-200~~ -600	0	~~-200~~ -400	~~-100~~ 0*

Entra a la base Y5 y la única que
puede salir es Y1

Eso quiere decir que para una disponibilidad de Azúcar mayor a 800 el valor marginal del azúcar pasa a ser cero

Volvemos a la tabla óptima original del dual (la que era óptima para b1 entre 500 y 800) y reemplazamos b1 por 500.

			~~600~~ 500	600	800		
~~600~~ 500	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		~~2600~~	0	~~-200~~ 0*	0	~~-200~~ -100	~~-100~~ -150

Entra a la base Y2 y la única que
puede salir es Y3

			500	600	800		
500	y_1	4	1	0	1	-1/2	0
600	y_2	1/2	0	1	1/2	1/4	-1/4
			0	0	0*	-150	-200

Para 300 <= b1 <= 500
esta tabla es óptima

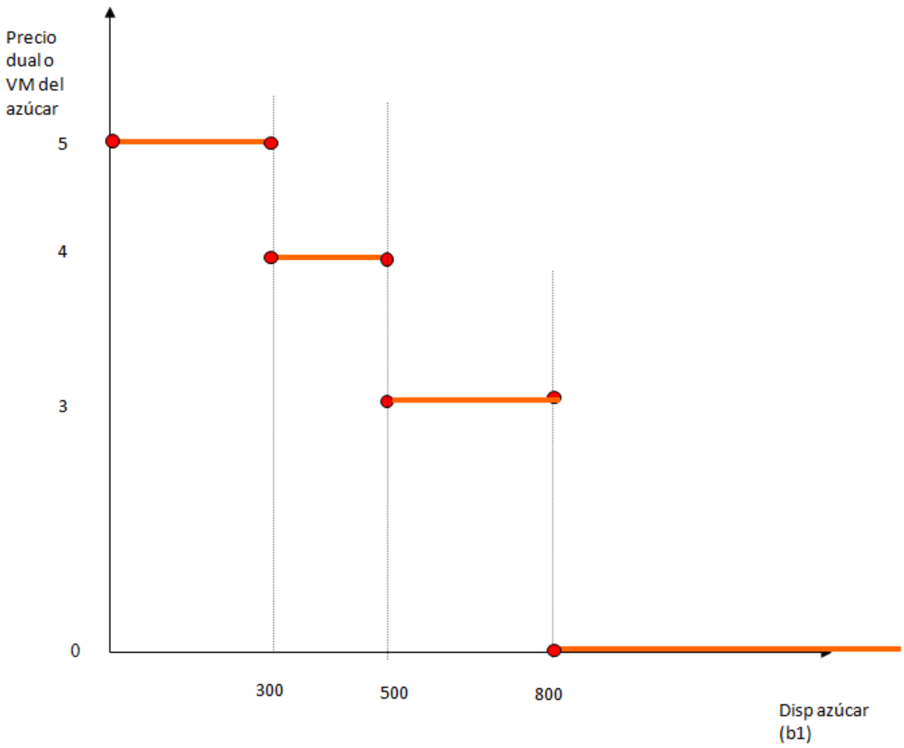
Ahora vamos a reemplazar b1 por 300 para ver qué pasa de 300 para abajo

			300 ~~500~~	600	800		
300 ~~500~~	y_1	4	1	0	1	-1/2	0
600	y_2	1/2	0	1	1/2	1/4	-1/4
			0	0	~~0~~	~~-150~~	~~-200~~
					-200	0*	-150

Entra a la base Y4 y la única que puede salir es Y2

Tenemos que hallar la nueva tabla y en esa tabla encontrar el rango de variación de b1

Y así, cuando hayamos encontrado la nueva tabla (que va a ser válida para b1 entre 0 y 300) vamos a poder graficar el valor marginal del azúcar cuando la disponibilidad del azúcar varía entre 0 e infinito, como vemos a continuación.



Con esto ya podemos resolver todos los ejercicios de la práctica 5.

¿Qué nos queda de esta clase?

- Seguimos viendo análisis de sensibilidad
  - Planteo Dual
  - Modificaciones a la solución óptima
    - Cambios en un bi
    - Gráfico de valor marginal de un recurso (cómo va cambiando el valor marginal si la disponibilidad de ese recurso cambia entre 0 e infinito)