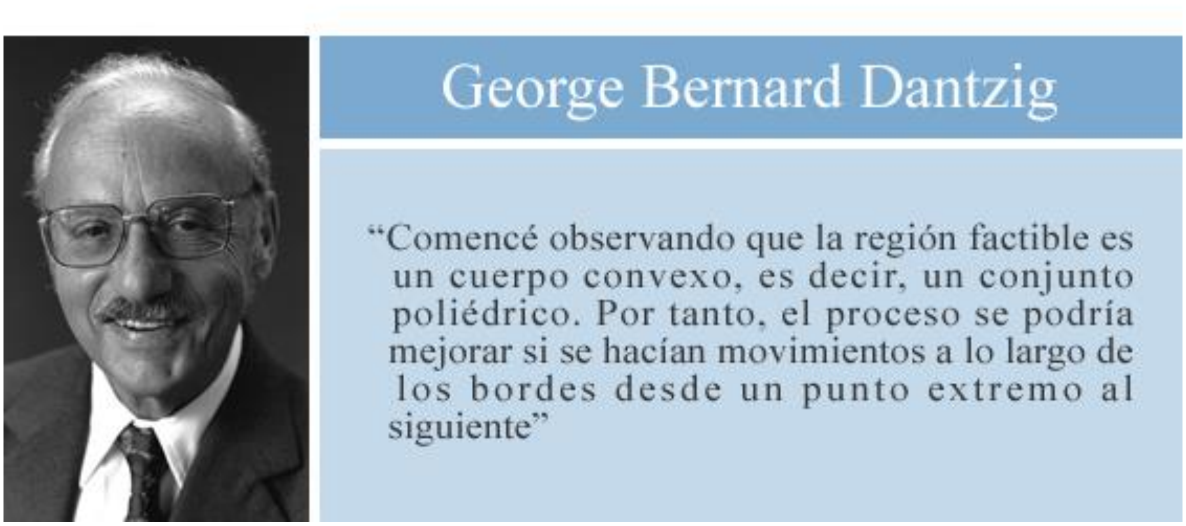
Material de apoyo Teórica VIII

<u>Resolvamos los modelos de una vez por todas (aunque tengan más de dos variables)</u>

Usaremos el Método Simplex, desarrollado por George Dantzig en 1947, para resolver problemas de programación lineal <u>continua</u>



Veamos un ejemplo que utilizaremos para explicar el método. El ejemplo tiene dos variables, con lo que lo podemos resolver de manera gráfica. Sin embargo, eso nos va a servir para relacionar la resolución gráfica con la resolución analítica con el método simplex. Además aclaramos que comenzamos explicando el método para un problema de máximo con restricciones de menor o igual, pero en el material que encontrarán a continuación del presente vamos a explicar cómo se resuelve cuando el funcional es de mínimo o tenemos restricciones de mayor o igual o restricciones de igualdad:

FA CALDO", una heladería mayorista, utiliza un modelo de Programación Lineal para determinar sus niveles mensuales de producción.

Los datos del modelo son los siguientes:

- *Fabrica dos tipos de helado: de agua y de crema.*
- *Cada lata de helado de agua lleva 2 kilos de azúcar y 2 kilos de almidón de maíz.*
- *Cada lata de helado de crema lleva 2 kilos de azúcar, 4 kilos de crema y 4 kilos de almidón de maíz.*
- *Se dispone mensualmente de 600 kilos de azúcar, 600 kilos de crema y 801 kilos de almidón.*

El beneficio por lata es de 8 pesos para los helados de agua y de 10 para los de crema.

El objetivo del modelo de "FA CALDO" es:

Determinar la cantidad de helados de agua y de crema a fabricar, por mes, para maximizar los beneficios totales.

Es decir que nos alcanza con dos variables para modelar el problema. Siempre solemos aconsejar que las variables tengan nombre que sean representativos del significado de las mismas, pero en este caso vamos a ponerles de nombre X1 y X2 para poder hacer la analogía con el método, que llama Xj a las variables del modelo.

El modelo de "FA CALDO" es el siguiente:

$$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600\ [KG\ AZUCAR/MES]$$
$$4\ X2 \leq 600\ [KG\ CREMA/MES]$$
$$2\ X1 + 4\ X2 \leq 801 [KG\ ALMID./MES]$$

$$MAX\ 8\ X1 + 10\ X2$$

X1: Cantidad de latas de helado de agua producidas y vendidas (U/Mes)

X2: Cantidad de latas de helado de crema producidas y vendidas (U/Mes)

Forma normalizada de un problema de P.L.

- Para poder resolver con el método simplex un problema de PL tiene que cumplirse que:
  - Todas las variables estén en el primer miembro (esto nuestro modelo ya lo cumple, sino tendríamos que pasar las variables al primer miembro y dejar una sola constante en el segundo miembro)
  - Todas las restricciones sean igualdades.
- Para lograr que todas las restricciones sean igualdades, agregamos variables slack en cada restricción (esto los software lo hacen de manera automática)

Forma normalizada del problema de los helados

$$2\ X1 + 2\ X2 + X3 = 600$$
$$4\ X2 + X4 = 600$$
$$2\ X1 + 4\ X2 + X5 = 801$$

$$Z(MAX) = 8\ X1 + 10\ X2 + 0\ X3 + 0\ X4 + 0\ X5$$

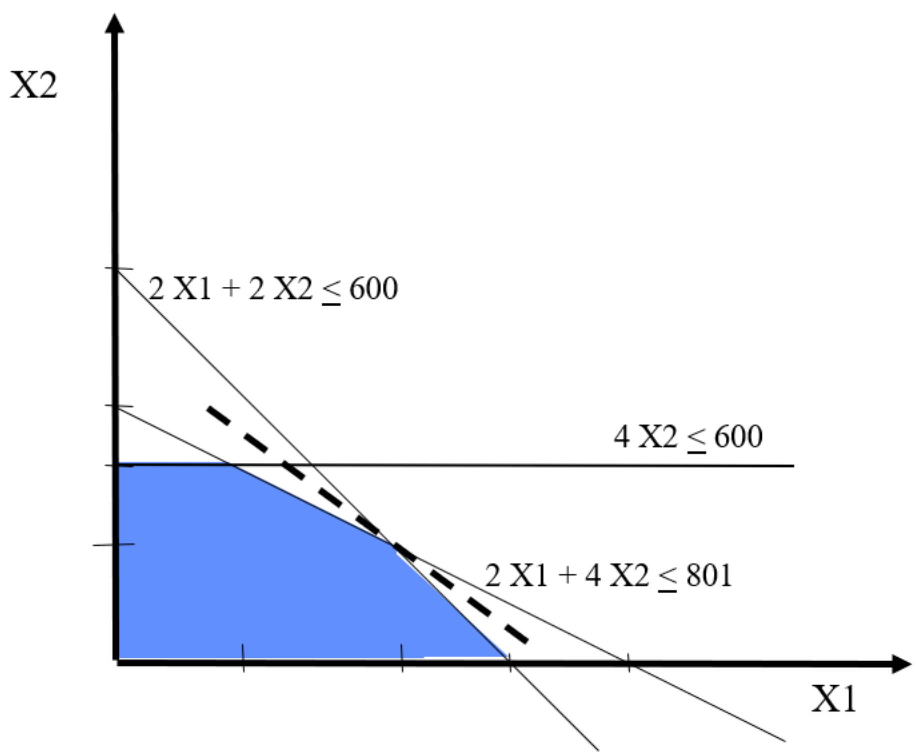
El significado de las variables slack es el siguiente:

X3 = sobrante de azúcar (kg/mes)
X4 = sobrante de crema (kg/mes)
X5 = sobrante de almidón (kg/mes)

Como vemos, las variables slack no tienen incidencia en el funcional (no se gana más o menos dinero porque sobre azúcar o porque se use la totalidad de azúcar).

A continuación el poliedro de soluciones factibles, que son las que cumplen todas las restricciones del problema:

Problema de P.L.



Vemos que el óptimo es X1= 199,5 y X2 = 100,5 (en guiones está la traza de Z)

Antes de explicar el método, vamos a recordar un poco la nomenclatura de la expresión algebraica, que es la que planteamos habitualmente.

Expresión Algebraica:	CONSTANTES
$Z = \sum c_j x_j$ (MAX o MIN)	c_j: coeficiente en el funcional de la variable Xj
Sujeto a:	b_i: término independiente de la restricción I
$x_j \geq 0$ $j = 1 \ldots n$	a_{ij}: coeficiente que tiene la variable Xj en la restricción i
y $\sum a_{ij} x_j = b_i$ $i = 1 \ldots m$	

Para poder resolver por el método simplex, necesitamos expresar el problema en forma vectorial. Observemos qué relación hay entre la expresión algebraica y la vectorial:

Expresión Algebraica:	Expresión Vectorial:
$Z = \sum c_j x_j$ (MAX o MIN)	$Z = C\,X$ (MAX o MIN)
Sujeto a:	Sujeto a:
$x_j \geq 0$ $j = 1 \ldots n$	$X \geq 0$
y $\sum a_{ij} x_j = b_i$ $i = 1 \ldots m$	y $A\,X = B$

Obtengamos ahora, para el problema de "FA CALDO", la expresión vectorial, colocando las constantes cj en el vector C, las constantes bi en el vector B y las constantes aij en la matriz A. Recordemos que cuando una variable no figura en una restricción es porque el coeficiente aij es cero:

Expresión vectorial del problema de los helados

$$Z = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 801 \end{pmatrix}$$

Una de las primeras cosas que notamos en la matriz A de los coeficientes aij es que las últimas tres columnas son vectores canónicos distintos que forman una matriz identidad.

$$Z = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \\ 2 & 4 \end{matrix} \;\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}\right) \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 801 \end{pmatrix}$$

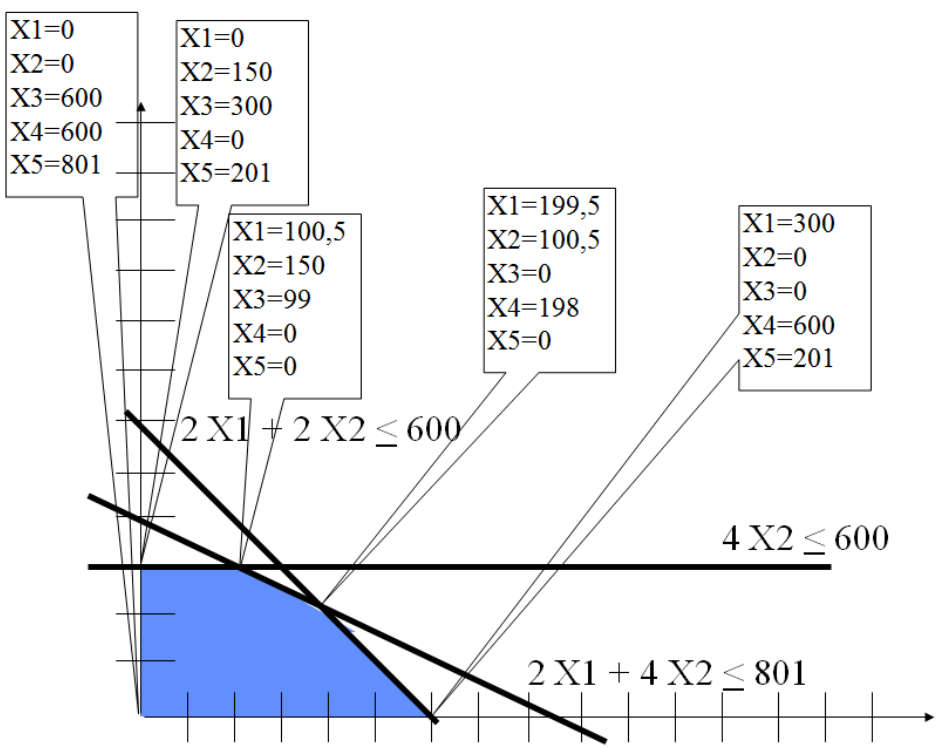
Esta matriz identidad, que se formó al agregar las variables slack, es muy importante en el método, y es la base de lo que usó Dantzig para su método.

Tipos de Solución a un P.L.

- Solución.
- Solución posible o factible: cumple con todas las restricciones del problema
- Solución factible básica: es un punto extremo o vértice.
- Solución factible básica no degenerada: Es un vértice en el cual se cortan dos restricciones.

Las soluciones que nos interesan son las soluciones factibles básicas, es decir los vértices, porque habíamos dicho en la primera clase que la solución óptima a un problema de programación lineal continua está siempre al menos en uno de los vértices, por lo que lo que nos conviene es detectar cuáles son los vértices del poliedro solución de nuestro modelo, para evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de ellos, y así detectar el óptimo.

Puntos extremos del problema de los helados



Observemos el valor de las variables en los vértices y veremos que en cada vértice, solamente 3 variables son distintas de cero y las demás son cero.

La cantidad máxima de variables que pueden ser distintas de cero en un vértice es igual a la cantidad de restricciones que tiene el problema (en nuestro caso hay tres restricciones)

Por lo tanto ya tenemos una pista para reconocer un vértice. En cada vértice, de las n variables del problema, a lo sumo m pueden ser distintas de cero (mayores que cero, porque no hay variables con valor negativo), siendo m la cantidad de restricciones del modelo. Para el problema de FA CALDO, n = 5 y m = 3.

Para desarrollar su método, Dantzig se basó en varios teoremas que ya habían sido demostrados en matemática. A continuación los enunciamos (no los demostramos, si están interesados en su demostración les sugerimos consultar el libro de Saúl Gass, (GASS, S., *Programación Lineal*, Ed. CECSA).

Teorema 1:

- **El conjunto de todas las soluciones factibles a un problema de programación lineal es un conjunto convexo (poliedro convexo).**

Por el teorema 1, cuando se encuentra un óptimo, es un óptimo global. Al ser convexo el poliedro no cabe la posibilidad de que un vértice tenga valor de función objetivo peor que el anterior, pero el siguiente a éste vuelva a mejorar el valor de la función objetivo. Esto lo aprovecho Dantzig porque su método va encontrando vértices (después veremos cómo) y detectando el valor de la función objetivo en el siguiente vértice adyacente (después veremos cómo). Cuando detecta que el valor de la función objetivo en el próximo vértice es peor que en el vértice actual, ya sabe que está en el óptimo y que no vale la pena seguir avanzando al siguiente vértice.

Teorema 2:

- **La función objetivo alcanza su mínimo (o máximo) en un punto extremo del conjunto convexo K de soluciones factibles del problema de prog. lineal. Si alcanza ese mínimo (máximo) en más de un punto extremo, entonces la función objetivo tiene el mismo valor para cualquier combinación convexa de esos puntos extremos.**

Por el teorema 2, el método de Dantzig se planteó solamente visitar vértices del poliedro. El problema pasa a ser cómo detectamos que un punto es un punto extremos o vértice. Para eso se trabaja con la expresión vectorial del modelo de programación lineal continua.

Teorema 3:

- **Si se puede encontrar en la matriz A del problema un conjunto de k = m vectores A1, A2,...Ak que es linealmente independiente y tal que x1 A1 + x2 A2 + ... + xk Ak = B y todos los xi $\geq$ 0, entonces es punto extremo del conjunto convexo de soluciones posibles.**
  X es un vector n-dimensional cuyos últimos n - k elementos son cero.

Por el teorema 3 sabemos que si encontramos en la matriz A de nuestro problema, m vectores, o sea 3 vectores, que son linealmente independientes, entonces estamos en un vértice.

Recordemos que, en álgebra lineal, un conjunto de vectores es *linealmente independiente* si ninguno de ellos puede ser escrito con una combinación lineal de los restantes. Por ejemplo, en **R**^{3}, el conjunto de vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) es linealmente independiente, mientras que (2, −1, 1), (1, 0, 1) y (3, −1, 2) no lo es, ya que el tercero es la suma de los dos primeros.

Volvamos a indicar nuestra matriz A en el problema de los helados:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Los vectores A3, A4 y A5 son linealmente independientes entre sí. Ya encontramos 3 vectores linealmente independientes entre sí. Siguiendo el teorema 3, estamos en un punto extremo pero ¿en qué punto extremo estamos?.

Teorema 4:

- **Si X = (x1, x2,..., xn) es un punto extremo del poliedro solución K, entonces los vectores asociados con las componentes xi que son mayores que cero forman un conjunto linealmente independiente.**

Siguiendo el teorema 4, las tres variables que son distintas de cero (ya vimos gráficamente que como hay tres restricciones en el modelo de FA CALDO había tres variables distintas de cero en cada vértice) tienen que ser las asociadas con los vectores que son linealmente independientes en la matriz A de ese vértice. En el teorema 3 ya vimos que los vectores que son linealmente independientes son A3, A4 y A5. Por lo tanto, siguiendo el teorema 3 y el 4, X3, X4 y X5 son distintas de cero y las demás (X1 y X2) son iguales a cero. Al igualar a cero el valor de dos variables, nuestro sistema de igualdades que tenía 5 variables y 3 restricciones (que era indeterminado y por eso tenía infinitas soluciones, que son los puntos del poliedro solución) se puede resolver para este vértice.

$$
\begin{aligned}
2\ X1 + 2\ X2 + X3 &= 600 \\
4\ X2 + X4 &= 600 \\
2\ X1 + 4\ X2 + X5 &= 801
\end{aligned}
$$

Si X1=0 y X2=0, queda:

X3 = 600
X4 = 600
X5 = 801

Estamos en el vértice (0, 0). Justamente el método simplex agrega las variables slack para tener tres vectores canónicos que permitan armar este primer vértice.

El teorema 5 es una unión de los teoremas 3 y 4:

Teorema 5:

- **X = (x_1, x_2,..., x_n) es un punto extremo del poliedro solución K, si y sólo si las componentes x_i que son mayores que cero están asociadas con vectores linealmente independientes en :**

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = B$$

Como consecuencia de los teoremas y corolarios en los cuales se basa el método simplex se deduce que:

❶ Existe un punto extremo del poliedro K de soluciones factibles en el cual la función de objetivo alcanza su máximo (mínimo).

❷ Cada solución factible básica corresponde a un punto extremo del poliedro solución K.

❸ Cada punto extremo de K tiene asociados a él m vectores linealmente independientes del conjunto dado de n vectores asociados con él.

¿Qué problemas tenemos que solucionar ahora?

¿Cómo encontramos un vértice?.

¿Cómo nos damos cuenta de que el vértice hallado es el óptimo?.

Una vez hallado un vértice ¿cómo encontramos otro? El procedimiento debe ser coherente para no saltearnos ninguno.

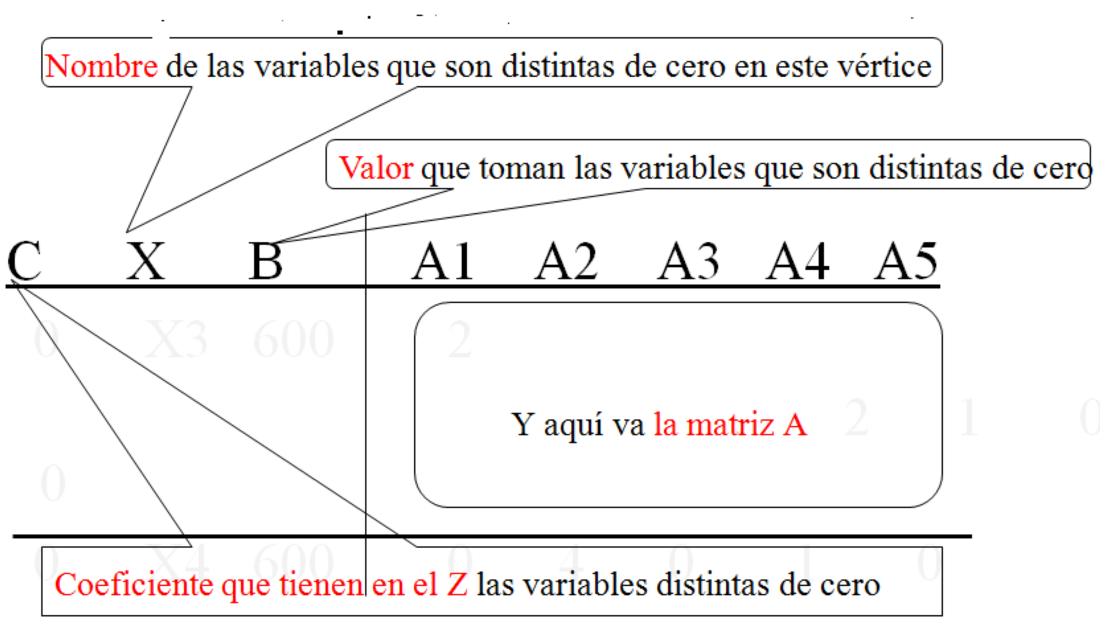
¿Cómo solucionamos los problemas?

¿Cómo encontramos un vértice?.

El método simplex elige comenzar por el vértice en el cual las variables reales son cero (las que toman valor distinto de cero son las slacks).

Eso tiene la ventaja adicional de que los vectores de las variables distintas de cero son canónicos distintos y, por lo tanto, linealmente independientes (ver forma vectorial del problema de los helados)

El método simplex plantea un esquema de tabla para cada vértice, que tiene esta forma:



El primer vértice es el (0, 0) y como vimos, las variables que son distintas de cero son X3, X4 y X5 A estas variables que están asociadas con los vectores que forman base se las suele llamar variables básicas o variables que están en la base (aunque los vectores son los que están en la base)

C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
	X3	600					
	X4	600					
	X5	800					

Las tres variables tienen coeficiente igual a cero en el funcional.

C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600					
0	X4	600					
0	X5	800					

A la derecha ponemos la matriz A, es decir los vectores que habíamos encontrado en el principio cuando pusimos el coeficiente que acompañaba a cada variable en cada restricción.

Además, por facilidad de un cálculo que vamos a ver a continuación, se indica encima de cada columna, el valor del coeficiente Cj de la variable asociada con esa columna.

			8	10			
C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	800	2	4	0	0	1

Esta es la primera tabla del problema de FA CALDO en el método simplex. Nosotros sabemos que esta tabla no es óptima, pero Dantzig, en el método simplex, desarrolló un cálculo para saberlo.

¿Cómo nos damos cuenta de que el vértice hallado es el óptimo?.

Tenemos que calcular ,según nos dice Dantzig para cada columna, el valor de zj - cj para saber si llegamos al óptimo o no.

El cj es el coeficiente del funcional de la variable de la columna.

Veamos cómo calculamos el zj.

<u>Procedimiento de cómputo:</u>

Definimos:

$a_{1j}\ c_1 + a_{2j}\ c_2 + ... + a_{mj}\ c_m = z_j$

Donde los c_k son los coeficientes de costo de las variables que están en la base.

Es decir que el zj es el resultado del producto vectorial C x Aj donde Aj es el vector de la variable que entrará a la base

Los dos teoremas que siguen fueron formulados por Dantzig para el método simplex:

<u>Teorema A:</u>

- **Dado un Z sujeto a A X = B y X $\geq$ 0, si existe alguna columna j de la matriz A para la cual $z_j - c_j < 0$ (para un problema de máximo) entonces puede construirse un conjunto de soluciones posibles tal que su Z es mejor que el actual, donde el límite superior de Z puede ser finito o infinito.**

<u>Teorema B:</u>

- **Dado un Z de máximo sujeto a A X = B y X $\geq$ 0. Si para una solución básica factible X = ($x_1, x_2, ..., x_m$) las condiciones $z_j - c_j \geq 0$ se cumplen para todas las j = 1...n, entonces:**

  $x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m = B$

  y $x_1 c_1 + x_2 c_2 + ... + x_m c_m = Z$

  constituyen una solución factible máxima

Calculamos el zj - cj para cada columna (todos los zj = 0)

			8	10			
C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	801	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

Como hay dos zj-cj negativos aún no hemos llegado al óptimo

El Z1 se calcula como C x A1, es decir:

Z1 = 0 x 2 + 0 x 0 + 0 x 2 = 0

C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	801	2	4	0	0	1

El Z2 se calcula como C x A2, es decir:

Z2 = 0 x 2 + 0 x 4 + 0 x 4 = 0

C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	801	2	4	0	0	1

Observemos en la matriz que los vectores canónicos tienen zj- cj igual a cero. Esto siempre sucede porque el zj – cj define si la variable no básica debería convertirse en básica. En el caso de los vectores canónicos, la variable asociada con esos vectores es básica, así que no es una candidata a entrar en la base.

Una vez hallado un vértice ¿cómo encontramos otro? El procedimiento debe ser coherente para no saltearnos ninguno.

Para hallar un nuevo vértice, un vector debe salir de la base y otro vector debe entrar a la base (cambio de base).

Para determinar el que ingresa a la base elegimos uno de los que tienen un zj-cj que denota que no llegamos al óptimo (negativo en este caso, porque el problema es de máximo).

Se puede elegir cualquiera de los que cumplen con esa condición, por ejemplo, elijamos a X1 para que su vector entre a la base. Si hubiéramos elegido a X2, íbamos a llegar igual al óptimo, el tema es que íbamos a ir primero al vértice (0, 150). En cambio, al elegir a X1 para que su vector entre a la base, vamos a ir al (300, 0) como siguiente vértice desde el (0, 0). Es decir, si elegimos X2 vamos a visitar los vértices desde el (0, 0) hasta el óptimo en el sentido de las agujas del reloj. En cambio, eligiendo X1, que es lo que hicimos nosotros, vamos a visitar los vértices desde el (0, 0) hasta el óptimo en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Pero una vez determinado quién entra a la base ¿cómo determinamos quién sale?

Para eso se calcula, para cada fila, un coeficiente llamado θ (tita) de cuyo significado se puede obtener más información en el teorema de Generación de soluciones de punto extremo**.**

El tita (θ) se calcula, para cada fila, como el cociente entre el elemento del vector que entra a la base y el elemento del vector B en esa fila
(es decir B/Aj, en este caso B/A1)

Calculamos el valor de tita (θ) para cada fila (en la segunda fila divide por cero y no se calcula). Si el divisor es menor o igual que cero, el tita de esa fila no se calcula.

			8	10				
C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5	θ
0	X3	600	2	2	1	0	0	600/2
0	X4	600	0	4	0	1	0	-----
0	X5	801	2	4	0	0	1	801/2
		Z=0	-8	-10	0	0	0	

Teorema de Generación de Soluciones de punto extremo:

Si

$X = (x_1, x_2, x_3,\ldots,x_m,0\ldots0)$ es solución,

Entonces:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + \ldots + x_m A_m = B \qquad (a)$$

Se puede escribir:

$$\Sigma\, a_{ij} A_i = A_j$$

Si A_{m+1} *no está en la base:*

$$a_{1,m+1} A_1 + a_{2,m+1} A_2 + \ldots + a_{m,m+1} A_m = A_{m+1} \quad (b)$$

Calculamos (b) $\cdot\ \theta$ y la restamos de (a) :

$$(x_1 - \theta\, a_{1,m+1}) A_1 + (x_2 - \theta\, a_{2,m+1}) A_2 + \ldots +$$
$$+ (x_m - \theta\, a_{m,m+1}) A_m + \theta\, A_{m+1} = B \qquad (c)$$

Queremos encontrar θ tal que:

$$x_i - \theta\, a_{i,m+1} \geq 0 \qquad \text{para todo } a_{i,m+1} > 0$$

De lo cual:

$$0 \leq \theta \leq \min \frac{x_i}{a_{i,m+1}}$$

Para que el nuevo punto sea extremo:

$$\theta_o = \min \frac{x_i}{a_{i,m+1}}$$

Si el mínimo se da con $i = 1$ *la primera componente de* (c) *es cero*

$$x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + \ldots + x'_m A_m + x'_{m+1} A_{m+1} = B$$

Donde:

$$x'_i = x_i - \theta_o\, a_{i,m+1} \qquad i = 2,\ldots,m$$
$$x'_{m+1} = \theta_o$$

Una vez determinado quién entra a la base (X1) y quién sale (X3) hay que cambiar de base.

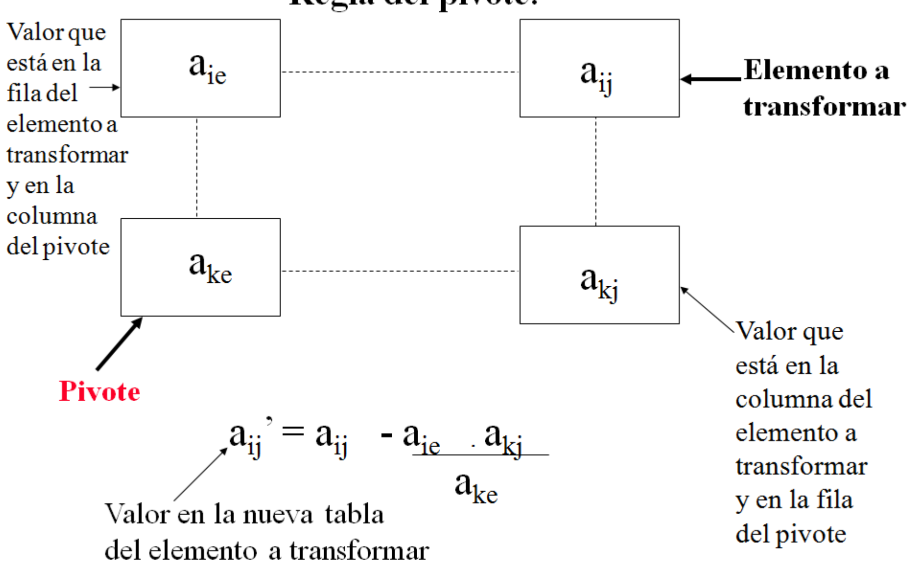
Además, hay que hacerlo de tal manera que X1 tome valor distinto de cero (porque entra su vector a la base), que X3 tome valor igual a cero (porque sale de la base) y que el vector de X1 sea el primer canónico (para mantener a los vectores de las variables que están en la base como canónicos distintos y dado que la variable que sale de la base -X3- tenía como vector al primer canónico).

¿Cómo cambiar de base?

Para cambiar de base (cambiar de tabla y pasar a analizar otro vértice) se deben seguir estos pasos:

1. Elegir el elemento pivote, que está en la intersección de la fila de la variable que sale de la base (X3) con la columna de la variable que entra a la base (X1)
2. Dividir la fila del pivote por el valor del pivote
3. Completar la columna del pivote con ceros
4. Aplicar la regla del pivote que veremos a continuación, para obtener el resto de los valores

Regla del pivote:



Segunda tabla del problema de los helados

Lo primero que ponemos son las variables que están en la base: X4 y X5 que ya estaban y X1 que acaba de entrar en lugar de X3

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1						
0	X4						
0	X5						

En segundo lugar, dividimos por el pivote toda la fila del pivote (que era la primera fila) y completamos los tres valores canónicos

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4		0			1	0
0	X5		0			0	1

Y para los valores restantes, tenemos que pivotear

Pivote

				8	10			
	Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
Sale de la base	0	X3	600	2	2	1	0	0
	0	X4	600	0	4	0	1	0
	0	X5	801	2	4	0	0	1
			Z=0	-8	-10	0	0	0

Variable que entra a la base

Apliquemos la regla del pivote:

1ra Tabla

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	801	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

Valor actual =
Valor anterior (600)
menos el producto de los
dos valores que forman
rectángulo (600 y 0)
dividido el pivote (2) =
600 – (600 x 0) / 2 = 600

2da Tabla

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4		0			1	0
0	X5		0			0	1

1ra Tabla

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	801	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

Valor actual =
Valor anterior (801)
menos el producto de los
dos valores que forman
rectángulo (600 y 2)
dividido el pivote (2) =
801 – (600 x 2) / 2 = 201

2da Tabla

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4	600	0			1	0
0	X5		0			0	1

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	801	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

1ra Tabla

Valor actual =
Valor anterior (801)
menos el producto de los
dos valores que forman
rectángulo (600 y 2)
dividido el pivote (2) =
801 – (600 x 2) / 2 = 201

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4	600	0			1	0
0	X5		0			0	1

2da Tabla

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	801	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

1ra Tabla

Valor actual =
Valor anterior (4)
menos el producto de los
dos valores que forman
rectángulo (0 y 2)
dividido el pivote (2) =
4 – (0 x 2) / 2 = 4

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4	600	0			1	0
0	X5	201	0			0	1

2da Tabla

Como vemos, la segunda fila quedará igual a la de la primera tabla

1ra Tabla

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	800	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

Valor actual =
Valor anterior (4)
menos el producto de los
dos valores que forman
rectángulo (2 y 2)
dividido el pivote (2) =
4 – (2 x 2) / 2 = 2

2da Tabla

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	201	0			0	1

1ra Tabla

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	800	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

Valor actual =
Valor anterior (0)
menos el producto de los
dos valores que forman
rectángulo (1 y 2)
dividido el pivote (2) =
0 – (1 x 2) / 2 = -1

2da Tabla

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	201	0	2		0	1

:

Segunda tabla del método simplex para el problema de los helados:

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	200	0	2	-1	0	1
		Z=2400	0	-2	4	0	0

Como vemos, aún no llegamos al óptimo

Tiene que entrar X2 en la base … HAY QUE VOLVER A CALCULAR QUÉ VECTOR SALE DE LA BASE

Para eso vamos a volver a calcular los valores de tita (θ) para el vector que entra, que es el A2. Entonces el tita es = B / A2

Veamos las tablas del problema, de la primera a la óptima:

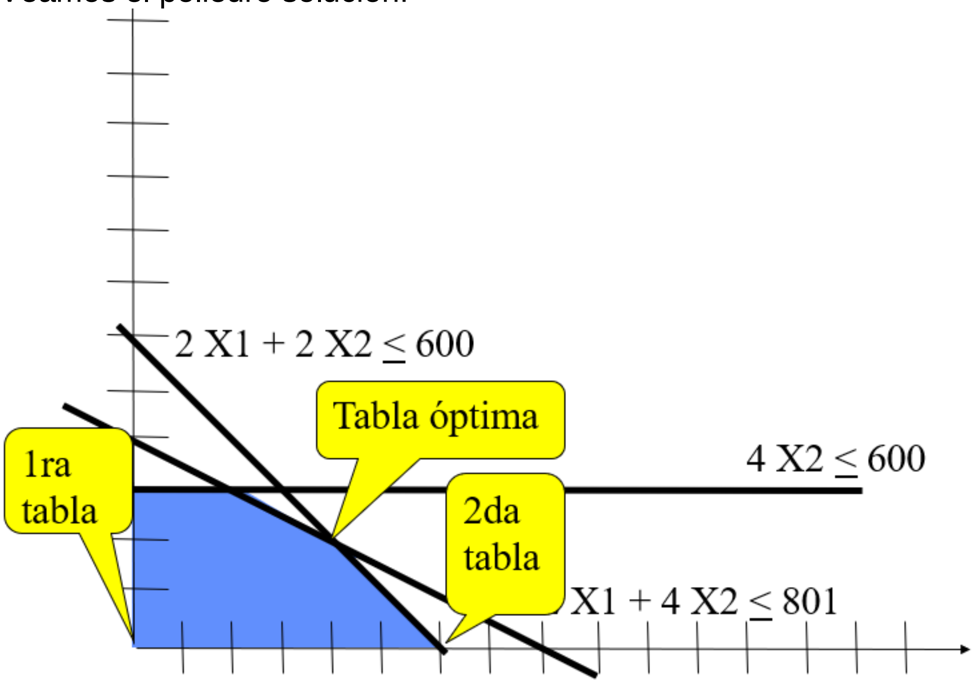
			8	10			
C	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	801	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	201	0	2	-1	0	1
		Z=2400	0	-2	4	0	0

TABLA OPTIMA

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	199,5	1	0	1	0	-1/2
0	X4	198	0	0	2	1	-2
10	X2	100,5	0	1	-1/2	0	1/2
		Z=2601	0	0	3	0	1

Veamos el poliedro solución:



Entonces el método simplex va pasando de un vértice a otro adyacente hasta que detecta que llegamos al óptimo gracias al cálculo de zj-cj

Solución del problema de los helados con LINDO

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2601.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	199.500000	0.000000
X2	100.500000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	198.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 2

Vemos que en las columnas “REDUCED COST” y “DUAL PRICES” están los valores de los zj-cj.

¿Qué nos queda de esta clase?

- ❑ Método analítico para resolver problemas de programación lineal continua
- ❑ Cómo operar con el método e interpretar sus resultados

Y ahora ya pueden empezar a resolver la práctica 4…

No olviden ver el material de casos particulares de esta semana, en el cual vemos qué pasa si el problema es de mínimo, si tiene condiciones que no son todas de menor o igual, si tiene casos particulares, etc.