Material de apoyo Teórica IV

Temario

- Empezamos a practicar con otros tipos de variables
- Variables enteras:
  - Variables enteras discretas
  - Variables bivalentes o binarias
- Aprendemos a linealizar restricciones que no cumplen alguno de los supuestos básicos de la Programación Lineal
- Vamos a trabajar vinculando variables binarias o bivalentes con las variables continuas que usábamos hasta ahora.

<u>Variables enteras</u>

- Variables discretas:
  - Productos enteros
  - Recursos enteros.
- Variables bivalentes o binarias:
  - de decisión: señalan alternativas posibles.
  - indicativas: marcan el estado de una variable asociada.

Variables de decisión

- Tenemos que decidir si lanzamos o no la fabricación de 6 productos. Cada producto i tiene un gasto ($200, $150, $120, $140, $90, $115) de publicidad de lanzamiento y hay que lanzar 3 productos por lo menos

Yi = 1 si se decide lanzar la fab. del producto i
Yi = 0 en caso contrario (no se lanza el producto i)
<u>Observen que las variables bivalentes o binarias no tienen unidad</u>

- Hay que fabricar tres productos por lo menos
  Y1 +Y2 +Y3 + Y4 + Y5 + Y6 ≥ 3

MIN Z = 200 Y1 + 150 Y2 + 120 Y3 + 140 Y4 + 90 Y5 + 115 Y6
Este funcional es una expresión del costo fijo (no depende de la cantidad fabricada). El costo fijo no cumple con el principio de proporcionalidad de la programación lineal continua, por eso lo tenemos que resolver con variables enteras bivalentes.

Relaciones lógicas

- Si se lanza el producto 5 o el 6, se debe lanzar el producto 1

Ya tenemos la manera de saber si se lanza el producto 5 o no (es la variable Y5, que si vale 1 significa que el modelo eligió que se lance el producto 5). También sabemos si se lanza el producto 6 (valor de Y6) y si se lanza el producto 1 (valor de Y1). Tenemos que conectar los valores de Y5 e Y6 con el valor de Y1
Vamos a ver si una tabla de valores para ver qué valores debería tomar Y1 ante los distintos valores que podría tomar Y5 e Y6

Si Y5 vale:	**Si Y6 además vale:**	**Y1 debería valer**
0	0	0 ó 1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

$Y5 - Y1 \leq 0$ **$Y6 - Y1 \leq 0$**

- Si se lanzan el producto 3 y el 4, se produce un ahorro de $100 en publicidad

Vamos a ver primero ante qué valores de Y3 e Y4 corresponde hacer el ahorro y ante qué valores no corresponde.

Si Y3 vale:	**Si Y4 vale:**	**¿Ahorro?**
0	0	NO
1	0	NO
0	1	NO
1	1	SI

¿Podemos poner…?

MIN Z = ∑ CTOPUBi Yi - $100 ~~Y3 x Y4~~

¡NO! No es lineal (Y3 e Y4 son variables, entonces tendríamos dos variables en un mismo término)

Para no multiplicar variables tenemos que definir una variable binaria indicativa (nosotros la llamamos YAH) para saber si corresponde el ahorro (YAH valdrá 1) o no corresponde el ahorro (YAH valdrá cero).

2 YAH $\leq$ Y3 + Y4 $\leq$ 1 + YAH

Relaciones booleanas (AND)

MIN Z = $\sum_{i}$ CTOPUBi Yi - $100 YAH

De la misma manera se puede plantear un and de n variables binarias (n es una constante y es la cantidad de variables binarias que estamos sumando)

n YAND $\leq$ Y1 + Y2 + Y3 + Y4 + … + Yn $\leq$ (n – 1) + YAND

Variables indicativas

- Ahora vamos a ampliar nuestro modelo, planteando el esquema productivo, con lo que tendremos nuevas variables:

  Xi: cantidad de unidades a fabricar por semana de producto i

- Supongamos que tenemos las siguientes restricciones de producción:

Materia prima:
2 X1 + 3 X2 + 5 X3 + X4 + 2 X5 + 3 X6 $\leq$ 50 (kg/sem)
Mano de obra:
5 X1 + X2 + X3 + 4 X4 + 2 X5 + X6 $\leq$ 40 (hh/sem)
Horas máquina:
2 X1 + 3 X2 + 2 X3 + X4 + 3 X5 + 4 X6 $\leq$ 150 (h/sem)

- Además los productos tienen beneficio ($15, $18, $4, $20, $3, $8), con lo que cambia el funcional original

- Pero, por supuesto, si la cantidad fabricada de un producto Xi determinado es mayor que cero, la variable Yi correspondiente debe valer 1.

- Asimismo, si la variable Xi que indica la cantidad fabricada de un producto vale cero, la variable Yi asociada con ese producto debería valer cero.

- Veamos cómo (NO) funciona el modelo si no las asociamos:

MAX 100 YAH - 200 Y1 - 150 Y2 - 120 Y3 - 140 Y4 - 90 Y5 - 115 Y6 + 15 X1 + 18 X2 + 4 X3 + 20 X4 + 3 X5 + 8 X6
Y1 +Y2 +Y3 + Y4 + Y5 + Y6 >= 3
2 YAH - Y3 - Y4 <= 0
Y3 + Y4 - YAH <= 1
Y5 - Y1 <= 0
Y6 - Y1 <= 0
MP) 2 X1 + 3 X2 + 5 X3 + X4 + 2 X5 + 3 X6 <= 50
MO) 5 X1 + X2 + X3 + 4 X4 + 2 X5 + X6 <= 40
HM) 2 X1 + 3 X2 + 2 X3 + X4 + 3 X5 + 4 X6 < =150
Las variables YAH, Y1, Y2, Y3, Y4, Y5 e Y6 son enteras

El siguiente es un ejemplo de cómo se carga y resuelve con el software LINDO:

```
MAX 100 YAH - 200 Y1 - 150 Y2 - 120 Y3 - 140 Y4 - 90 Y5 - 115 Y6 + 15 X1 + 18 X2 + 4
X3 + 20 X4 + 3 X5 + 8 X6
ST
Y1 +Y2 +Y3 + Y4 + Y5 + Y6 >= 3
2 YAH - Y3 - Y4 <= 0
Y3 + Y4 - YAH <= 1
Y5 - Y1 <= 0
Y6 - Y1 <= 0
MP) 2 X1 + 3 X2 + 5 X3 + X4 + 2 X5 + 3 X6 <= 50
MO) 5 X1 + X2 + X3 + 4 X4 + 2 X5 + X6 <= 40
HM) 2 X1 + 3 X2 + 2 X3 + X4 + 3 X5 + 4 X6 < =150
END
INT 7
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 129.0909

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
YAH	1.000000	-100.000000
Y1	**1.000000**	100.000000
Y2	**0.000000**	150.000000
Y3	**1.000000**	120.000000
Y4	1.000000	140.000000
Y5	0.000000	90.000000
Y6	0.000000	115.000000
X1	**0.000000**	13.545455
X2	**14.545455**	0.000000
X3	**0.000000**	23.454546
X4	6.363636	0.000000
X5	0.000000	14.090909
X6	0.000000	10.000000

Como vemos, Y1 es igual a 1 pero X1 es igual a cero (indica que se lanza el producto pero el producto no se fabrica). Lo mismo pasa con X3 e Y3. El caso de Y2 y X2 es el opuesto, Y2 vale cero (indica que no se lanza) pero X2 es mayor que cero (lo fabrica pese a no lanzarlo)

- Cuando se agregan al modelo las condiciones de producción, las variables Yi pasan a indicar si el producto se fabrica o no y hay que vincularlas con las de producción (se convierten en variables indicativas en lugar de ser variables de decisión)

Yi = 1 si se fabrica el producto i
Yi = 0 en caso contrario (no se fabrica el producto i)

Para vincular las variables Yi con las Xi hay que agregar, para todo i, el siguiente tipo de restricción:

$$m\ Y_i \leq X_i \leq M\ Y_i$$

donde m es un número muy pequeño (cercano a cero) y M es un número muy grande. Por ejemplo, en este caso usaremos 0,01 como m y 150 como M.

- ¿qué vimos?
- Que si no agregamos las restricciones que vinculen a las binarias Yi con las variables de producción Xi da cualquier verdura ¿por qué? Porque las variables indicativas (a diferencia de las variables de decisión) NECESITAN RESTRICCIONES PARA PODER TOMAR EL VALOR QUE INDICA SU DEFINICION)
- Veamos ahora qué pasa si lo hacemos bien (agregando al modelo anterior las restricciones de tipo m Yi ≤ Xi ≤ M Yi para todos los i posibles)

MAX 100 YAH - 200 Y1 - 150 Y2 - 120 Y3 - 140 Y4 - 90 Y5 - 115 Y6 + 15 X1 + 18 X2 + 4 X3 + 20 X4 + 3 X5 + 8 X6
ST
Y1 +Y2 +Y3 + Y4 + Y5 + Y6 >= 3
2 YAH - Y3 - Y4 <= 0
Y3 + Y4 - YAH <= 1
Y5 - Y1 <= 0
Y6 - Y1 <= 0
MP) 2 X1 + 3 X2 + 5 X3 + X4 + 2 X5 + 3 X6 <= 50
MO) 5 X1 + X2 + X3 + 4 X4 + 2 X5 + X6 <= 40
HM) 2 X1 + 3 X2 + 2 X3 + X4 + 3 X5 + 4 X6 <= 150
.01 Y1 - X1 <= 0
X1 - 150 Y1 <= 0
.01 Y2 - X2 <= 0
X2 - 150 Y2 <= 0
.01 Y3 - X3 <= 0

```
X3 - 150 Y3 <= 0
.01 Y4 - X4 <= 0
X4 - 150 Y4 <= 0
.01 Y5 - X5 <= 0
X5 - 150 Y5 <= 0
.01 Y6 - X6 <= 0
X6 - 150 Y6 <= 0
END
INT 7

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      78.85636
  VARIABLE   VALUE          REDUCED COST
      YAH       1.000000      -100.000000
       Y1       0.000000       100.000000
       Y2       1.000000       150.000000
       Y3       1.000000       120.234543
       Y4       1.000000       140.000000
       Y5       0.000000        90.000000
       Y6       0.000000       115.000000
       X1       0.000000        13.545455
       X2      14.528182         0.000000
       X3       0.010000         0.000000
       X4       6.365455         0.000000
       X5       0.000000        14.090909
       X6       0.000000        10.000000
```

Ahora le vamos a agregar modificaciones al problema

El mercado es el que manda...

- Analizando el mercado, se ve que si se fabrica producto 1, no hay mercado para el producto 2 y viceversa

(Decisiones mutuamente excluyentes)

En este tipo de restricciones la clave es separar lo que hay que averiguar, asociar cada parte con una bivalente y vincular las bivalentes.
ATENCIÓN: <u>No se puede definir una bivalente que tome valor 1 para indicar que sucede algo y pretender que mágicamente tome ese valor.</u> Hay que poner restricciones en el modelo que hagan que la bivalente se comporte de esa manera.

Necesitamos una variable que indique si se fabrica producto 1 o no:
Ya la tenemos, es la variable Y1 (que indica si se fabrica o no producto 1 porque está relacionada con X1 por las restricciones **m Y1 ≤ X1 ≤ M Y1**)

También necesitamos una variable que indique si se fabrica producto 2 o no:
También la tenemos, es la variable Y2 (que indica si se fabrica o no producto 2 porque está relacionada con X2 por las restricciones **m Y2 ≤ X2 ≤ M Y2**)
Una vez que tenemos las variables Y1 e Y2 con sus restricciones correspondientes hay que relacionarlas para que cuando se fabrique producto 1 no se fabrique producto 2 y viceversa:

Y1 + Y2 ≤ 1

Esto también sirve para cualquier ocasión en la cual si una variable es mayor que cero queremos que otra sea igual a cero.

¿Se acuerdan de metas?

(DC + LV) - 300 = EXCESO – DEFECTO

La función objetivo ayudaba a que no tomaran valor simultáneamente EXCESO y DEFECTO

¿qué hacemos si el funcional no ayuda?

Si el funcional no ayuda relacionamos a cada variable con una binaria y luego impedimos que ambas binarias sean iguales a 1

(DC + LV) - 300 = EXCESO – DEFECTO

m YEXCESO ≤ EXCESO ≤ M YEXCESO

m YDEFECTO ≤ DEFECTO ≤ M YDEFECTO

YEXCESO + YDEFECTO ≤ 1

YEXCESO, YDEFECTO binarias

Esta estructura también sirve para ver si dos variables son iguales o distintas. Por ejemplo queremos saber si X2 y X3 tienen el mismo valor:

X2 – X3 = EXC – DEF

m YEXC ≤ EXC ≤ M YEXC

m YDEF ≤ DEF ≤ M YDEF

YEXC + YDEF + YIGUALES = 1

YEXC, YDEF, YIGUALES binarias

Si X2 tiene un valor mayor al valor que toma X3, EXC será distinto de cero y por lo tanto YEXC valdrá 1. Si X3 toma un valor mayor al valor que toma X2, DEF será distinto de cero y por lo tanto YDEF valdrá 1. Si el valor de X2 y el valor de X3 son iguales, EXC vale cero (y por lo tanto YEXC vale cero), y también DEF vale cero (y por lo tanto YDEF vale cero). Como YEXC + YDEF + YIGUALES es igual a 1, YIGUALES valdrá 1 y eso es lo que pasa; X2 y X3 son iguales respecto del valor que toman.

Si queremos que dos variables, por ejemplo X2 y X3 sean distintas, como el signo "Distinto" (#) no existe en los modelos de programación lineal, bastará plantear lo mismo que planteamos antes, pero haciendo que YIGUALES valga siempre cero (también podríamos eliminar YIGUALES y decir YEXC + YDEF = 1).

Agregamos otra modificación al modelo:

- Para poder fabricar producto 4, es necesario fabricar al menos 15 unidades (en total) de los otros 5 productos

(Decisiones condicionales)

Por un lado necesitamos una variable binaria que indique si se fabrica o no producto 4 y por otro lado una variable binaria que indique si se fabrican al menos 15 unidades en total de los otros productos. Finalmente tenemos que relacionar ambas binarias para cumplir con la condición,

ATENCIÓN: No se puede definir una bivalente que tome valor 1 para indicar que sucede algo y pretender que mágicamente tome ese valor

Necesitamos una variable que indique si se fabrica producto 4 o no:
Ya la tenemos, es la variable Y4 (que indica si se fabrica o no producto 1 porque está relacionada con X4 por las restricciones **m Y4 ≤ X4 ≤ M Y4**)
También necesitamos una variable que tome valor 1 cuando se fabrican al menos 15 unidades de los productos X1, X2, X3, X5 y X6 sumados:

$$\mathbf{15\ YMAS \le X1 + X2 + X3 + X5 + X6 \le 14 + M\ YMAS}$$

Y4 solamente puede valer 1 si YMAS vale 1

$$\mathbf{Y4 \le YMAS}$$

Nuevo control de calidad

- Los productos 2 y 4 serán sometidos a un nuevo control de calidad. Se debe definir el equipo a utilizar (hay que ponerlo en marcha porque hoy está desafectado) para hacer el control de calidad.
- Existen dos alternativas:

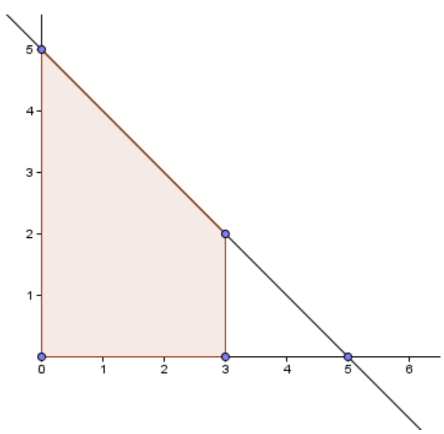
① Equipo alfa: demora una hora por un. de producto 2 y 1.5 horas por un. de producto 4, se dispone de 25 horas por mes.

② Equipo beta: demora 2 horas por un. de producto 2 y 1 hora por un. de producto 4, se dispone de 30 horas por mes.

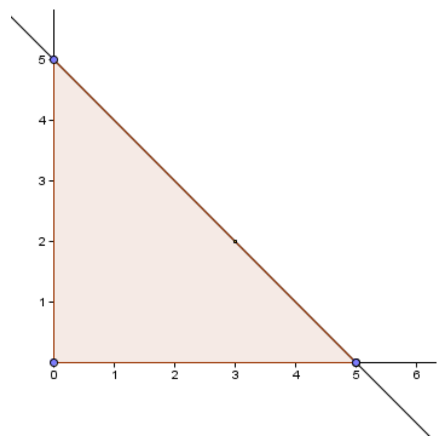
<u>Cómo eliminar restricciones</u>

Si la restricción es de menor o igual el término independiente tiene que tener un valor muy grande para que la restricción no restrinja

$X1 + X2 \leq 5$
$X1 \leq 3$
$MAX\ Z = X1 + X2$



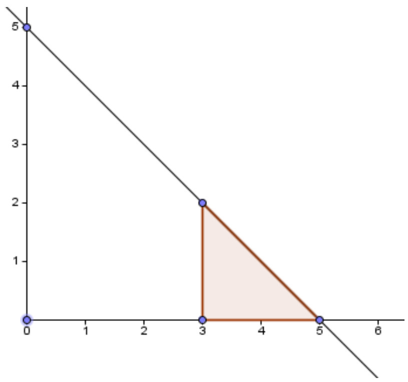
$X1 + X2 \leq 5$
$X1 \leq 3 + M$
$MAX\ Z = X1 + X2$

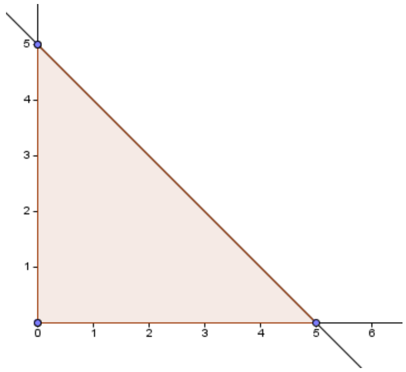


Si la restricción es de mayor o igual el término independiente tiene que tener un valor muy chico (cero o menor que cero) para que la restricción no restrinja

X1 + X2 $\leq$ 5
X1 $\geq$ 3
MAX Z = X1 + X2

X1 + X2 $\leq$ 5
X1 $\geq$ 3 - M
MAX Z = X1 + X2





Nosotros necesitamos que el modelo elija cuál se elimina. Entonces tenemos que poner las dos restricciones (la del equipo Alfa y la del equipo Beta) y multiplicar el coeficiente M que pusimos para eliminarla, por una bivalente, de manera que, si la bivalente vale 1, se elimina, y si la bivalente toma valor cero, no se elimina. Estas serán bivalentes de decisión (el modelo elige cuál restricción elimina) y no indican nada.

ALFA) 1 X2 + 1,5 X4 $\leq$ 25 + M Yalfa

BETA) 2 X2 + 1 X4 $\leq$ 30 + M Ybeta

Si Yalfa vale 1 significa que el modelo decidió <u>anular</u> el equipo Alfa (y por lo tanto, usar el equipo Beta). Si Ybeta vale 1 significa que el modelo decidió <u>anular</u> el equipo Beta (y por lo tanto, usar el equipo Alfa). Como solamente puede anular uno hay que agregar la siguiente restricción:

Yalfa + Ybeta = 1

Con lo que podríamos haber usado Yalfa en una restricción y (1 – Yalfa) en la otra.

¿Qué nos queda de esta clase?

- ❑ Cómo empezar a modelizar problemas de la Guía 3 (variables enteras)
    - ❑ Uso de variables bivalentes o binarias
    - ❑ Relaciones lógicas con variables binarias
    - ❑ Costo fijo en la función objetivo
    - ❑ Cómo vincular variables binarias y variables de producción
    - ❑ Cómo impedir que dos variables sean simultáneamente distintas de cero
    - ❑ Decisiones condicionales
    - ❑ Cómo anular restricciones