Material Teórica IX –
Casos particulares del método simplex

Método Simplex

- Problemas con z mínimo
- Relaciones de $\geq$ o =
- Casos particulares
  - Soluciones alternativas óptimas
  - Punto de degeneración o punto degenerado (sobredefinido)
  - Poliedro abierto (solución no acotada)
  - Problema Incompatible

En la clase anterior vimos cómo resolver problemas de simplex cuando los problemas son de máximo con restricciones de menor o igual.

¿Qué pasa cuando los problemas son de mínimo? ¿y cuando hay restricciones de mayor o igual?

Problemas de PL con funcional de mínimo:

- Fórmula de mejora del funcional

$Z^{p+1} = Z^p - \theta_{mín}$ (zj - cj) de la variable que entrará a la base en el paso p+1

Entonces en un problema de mínimo lo único diferente es:

- Si todos los zj - cj son ≤ 0, estamos en el óptimo
- Las candidatas a entrar a la base son las variables con zj - cj > 0

Entonces, si en un problema de mínimo llegamos al óptimo cuando todos los zj - cj son ≤ 0, si miramos la primera tabla del problema de los helados que hicimos la semana pasada, vemos que <u>si el funcional fuera de mínimo</u>, en esa primera tabla el problema da óptimo

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	800	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

Todos los $z_j - c_j$ son ≤ 0

- Es lógico que si el problema de los helados fuera de mínimo, la primera tabla sea la óptima, porque cuando un problema es de mínimo y tiene todas relaciones de menor o igual, si los coeficientes de las variables en Z son mayores que cero, la solución óptima es la trivial: no hacer nada para que el funcional dé lo menor posible (es decir, las variables reales son cero y no fabrica nada, así el funcional le da cero).

Pero si el problema tiene relaciones de mayor o igual ¿cómo lo resolvemos? Veamos un ejemplo:

Problemas de PL con restricciones de $\geq$:

$$X1 \geq 2$$

$$2\,X1 + 2\,X2 \leq 24$$

$$MAX\ Z = X1 + 2\,X2$$

Como las variables están en el primer miembro lo único que falta hacer es agregar las slack para convertir las inecuaciones en ecuaciones

$$X1 - X3 = 2$$

$$2\,X1 + 2\,X2 + X4 = 24$$

$$MAX\ Z = X1 + 2\,X2$$

Claro que, como vimos, el método simplex empieza haciendo cero las variables reales.

Si hacemos cero las variables reales (X1 y X2) queda:

X3 = -2

X4 = 24

¡Pero las variables no pueden ser negativas! Además no nos quedan dos canónicos sino un canónico y otro canónico cambiado de signo.

Entonces, lo que tenemos que hacer es ***fingir que el (0, 0) es solución.***

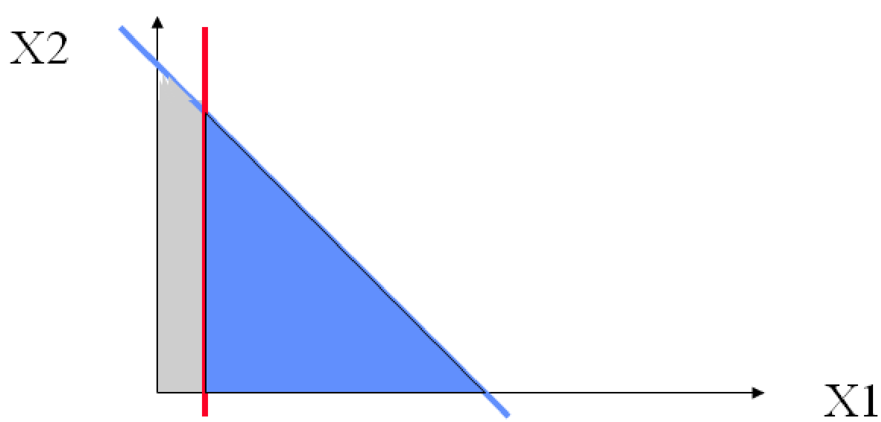
Para fingir que el (0, 0) es solución agregamos una variable sumando en la primera fila de tal manera que cuando estamos en el (0, 0) tenga dos variables mayores que cero. Pero esas variables son artificios, así que se llaman ***variables artificiales*** y se denominan con la letra griega m con un subíndice distinto para cada una (como tenemos una sola, la llamaremos μ).

X1 - X3 + μ = 2

2 X1 + 2 X2 + X4 = 24

MAX Z = X1 + 2 X2 - M μ

Es decir que estamos alterando el poliedro de soluciones para que incluya al (0,0), nótese que la restricción que era de mayor o igual quedó como una meta (X1 - 2 = X3 - μ) donde X3 es el exceso y μ es el defecto respecto de 2. El poliedro original es el sombreado de oscuro y agregamos la parte sombreada más clara.



X1 - X3 + m = 2

$2\ X1 + 2\ X2 + X4 = 24$

$MAX\ Z = X1 + 2\ X2 - M\ \mu$

Como vemos, en el Z la variable artificial tiene un coeficiente "-M" ¿por qué? Porque necesitamos que en el óptimo, esa variable valga cero (una cosa es arrancar del origen porque nos conviene y otra es que en el óptimo tengamos valor para esa variable). Entonces se le pone un coeficiente con valor muy grande (M) y signo contrario a lo que busca el Z.

Ahora veamos la resolución del problema:

			1	2			-M
-M	μ	2	1	0	-1	0	1
0	x_4	24	2	2	0	1	0
		-2 M	-M-1	-2	M	0	0
1	x_1	2	1	0	-1	0	1
0	x_4	20	0	2	2	1	-2
		2	0	-2	-1	0	1+M
1	x_1	2	1	0	-1	0	1
2	x_2	10	0	1	1	1/2	-1
		22	0	0	1	1	-1+M

Todos los zj-cj son mayores o iguales que cero. Es óptima

Problemas de PL con restricciones de IGUALDAD:

$X1 \geq 2$

$2\ X1 + 2\ X2 = 24$

$MAX\ Z = X1 + 2\ X2$

También hay que agregar una variable artificial en la restricción de igual para obtener el canónico que falta:

$X1 - X3 + \mu 1 = 2$

$2\ X1 + 2\ X2 + \mu 2 = 24$

$MAX\ Z = X1 + 2\ X2 - M\ \mu 1 - M\ \mu 2$

Casos particulares:

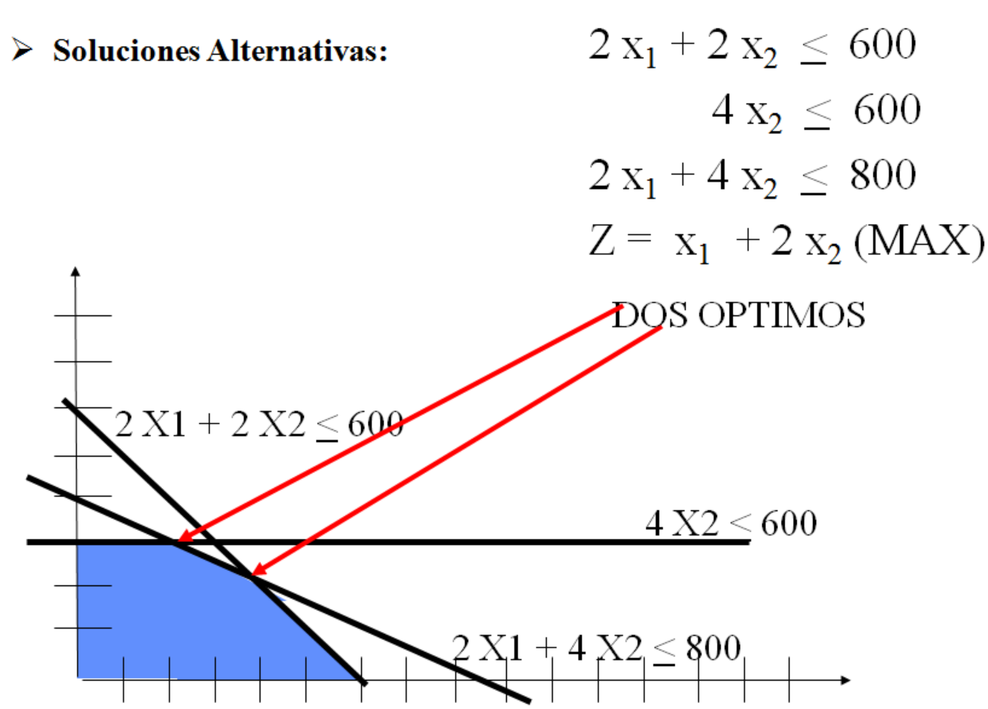
Vamos a plantear distintos problemas, cada uno de ellos tiene un caso particular.

Esto nos va a enseñar a reconocer en una tabla de simplex cuándo la solución óptima (o cualquier tabla) tiene un caso particular.

Es bueno graficar los problemas, para que veamos la relación entre lo que detecta el simplex y lo que podemos detectar en el gráfico (que debe ser lo mismo).

Soluciones alternativas óptimas

Modifiquemos la función objetivo del problema de los helados para hacerla con la misma pendiente que la tercera restricción:



➢ Soluciones Alternativas:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 600$$
$$4x_2 \leq 600$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 800$$
$$Z = x_1 + 2x_2 \text{ (MAX)}$$

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	Tita
0	x3	600	2	2	1	0	0	300
0	x4	600	0	4	0	1	0	150
0	x5	800	2	4	0	0	1	200
		0	-1	-2	0	0	0	
0	x3	300	2	0	1	-1/2	0	150
2	x2	150	0	1	0	1/4	0	-
0	x5	200	2	0	0	-1	1	100
		300	-1	0	0	1/2	0	
0	x3	100	0	0	1	1/2	-1	200
2	x2	150	0	1	0	1/4	0	600
1	x1	100	1	0	0	-1/2	1/2	-
		400	0	0	0	0*	1/2	

Se hace entrar esa variable a la base para encontrar el otro vértice óptimo

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	x4	200	0	0	2	1	-2
2	x2	100	0	1	-1/2	0	1/2
1	x1	200	1	0	1	0	-1/2
		400	0	0	0*	0	1/2

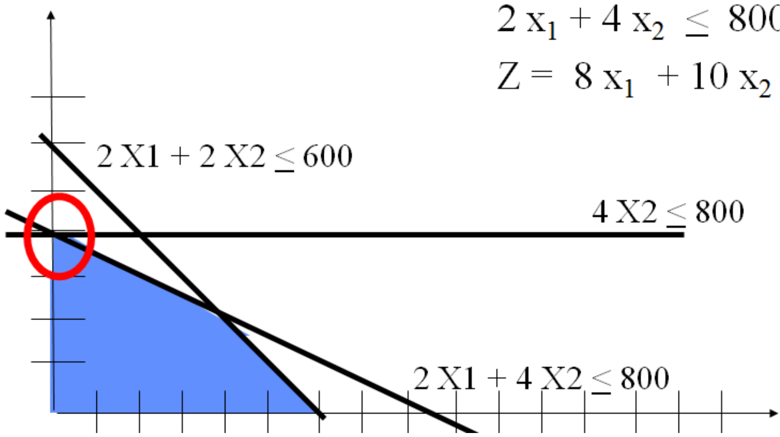
Cuando hay un zj-cj=0 en una variable que no está en la base y es el óptimo HAY SOLUCIONES ALTERNATIVAS OPTIMAS

Punto de degeneración o punto degenerado (sobredefinido)

Modifiquemos la tercera restricción del problema de los helados para que ahora tres restricciones se corten en el punto (0, 150). Se cortan el eje (X1 >= 0), la de la crema y la del almidón

➤ **Punto Degenerado:**

$$2\,x_1 + 2\,x_2 \le 600$$
$$4\,x_2 \le 800$$
$$2\,x_1 + 4\,x_2 \le 800$$
$$Z = 8\,x_1 + 10\,x_2 \text{ (MAX)}$$



➤ **Punto Degenerado:**

$$2\,x_1 + 2\,x_2 \le 600$$
$$4\,x_2 \le 800$$
$$2\,x_1 + 4\,x_2 \le 800$$
$$Z = 8\,x_1 + 10\,x_2 \text{ (MAX)}$$

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	Tita
0	x3	600	2	2	1	0	0	300
0	x4	800	0	4	0	1	0	200
0	x5	800	2	4	0	0	1	200
		0	-8	-10	0	0	0	
0	x3	200	2	0	1	-1/2	0	100
10	x2	200	0	1	0	1/4	0	-
0	x5	0	2	0	0	-1	1	0
		2000	-8	0	0	5/2	0	
0	x3	200	0	0	1	1/2	-1	400
10	x2	200	0	1	0	1/4	0	800
8	x1	0	1	0	0	-1/2	1/2	-
		2000	0	0	0	-3/2	4	

Empate de titas mínimos: El próximo punto es un punto degenerado

Cero es el tita mínimo SALE x5

Estamos en el mismo punto Que en la tabla anterior

Hay una variable en la base que vale cero: ES UN PUNTO DEGENERADO

Sale x3 de la base En la próxima tabla ya no estamos en el punto degenerado

Continuar...

Lo que define que una tabla tiene el caso particular de punto degenerado es que hay una variable en la base que vale cero.

Por ejemplo, en nuestro problema, la segunda tabla y la tercera tabla son tablas de punto degenerado.

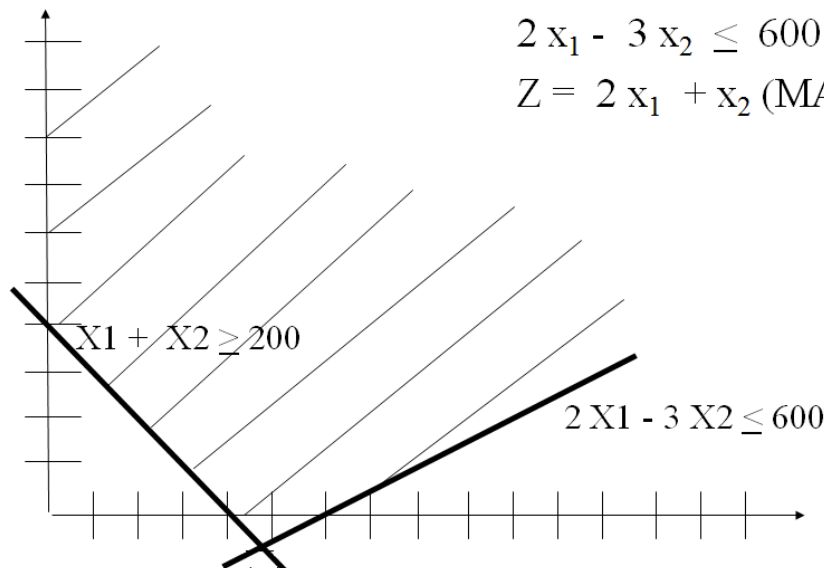
La primera tabla no es una tabla de punto degenerado, es la tabla anterior al punto degenerado, por eso tiene un empate de titas mínimos.

Poliedro abierto

Ahora vamos a usar un problema diferente al de los helados:

➢ **Poliedro Abierto.**

$$x_1 + x_2 \geq 200$$
$$2 x_1 - 3 x_2 \leq 600$$
$$Z = 2 x_1 + x_2 \text{ (MAX)}$$



Poliedro Abierto.

$$x_1 + x_2 \geq 200$$
$$2 x_1 - 3 x_2 \leq 600$$
$$Z = 2 x_1 + x_2 \text{ (MAX)}$$

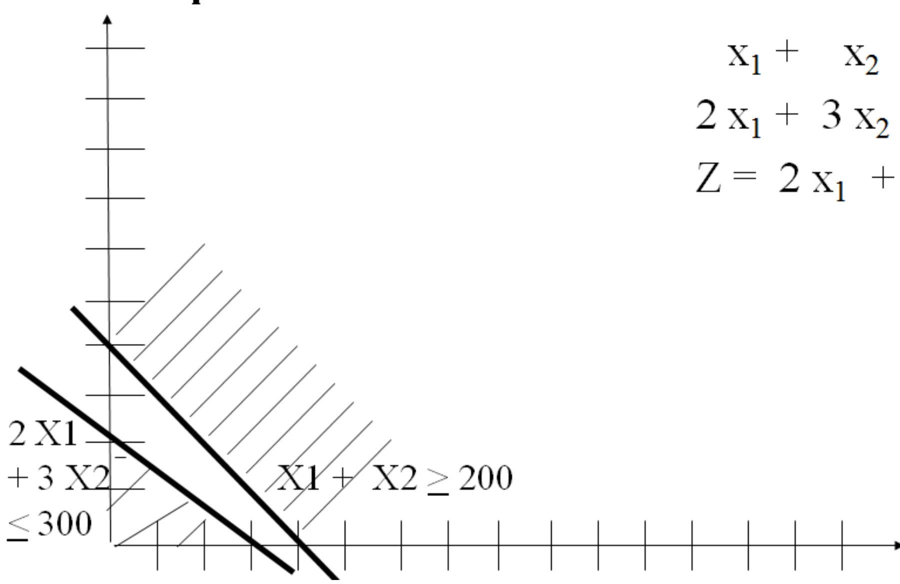
			2	1			-M
-M	μ	200	1	1	-1	0	1
0	x_4	600	2	-3	0	1	0
		-200 M	-M-2	-M-1	M	0	0
2	x_1	200	1	1	-1	0	1
0	x_4	200	0	-5	2	1	-2
		400	0	1	-2	0	2+M
2	x_1	300	1	-3/2	0	1/2	0
0	x_3	100	0	-5/2	1	1/2	-1
		600	0	-4	0	0	M

Cuando una variable quiere entrar a la base pero no puede salir ninguna (porque en la columna no hay ningún número mayor que cero ES POLIEDRO ABIERTO (no hay próximo vértice)

Problema incompatible

Nuevamente usaremos un problema diferente al de los helados:

- **Incompatible.**



$$x_1 + x_2 \geq 200$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 300$$
$$Z = 2\,x_1 + x_2 \text{ (MAX)}$$

Incompatible.

$$x_1 + x_2 \geq 200$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 300$$
$$Z = 2\,x_1 + x_2 \text{ (MAX)}$$

			2	1			-M
-M	μ	200	1	1	-1	0	1
0	x_4	300	2	3	0	1	0
		-200 M	-M-2	-M-1	M	0	0

-M	μ	50	0	-1/2	-1	-1/2	1
2	x_1	150	1	3/2	0	1/2	0
		300 - 50 M	0	1/2 M+2	M	1/2 M+1	0

Cuando se llega al óptimo (no hay ningún Zj-Cj negativo en un problema de máximo) pero en la base hay una variable artificial
EL PROBLEMA ES INCOMPATIBLE

Diagrama de flujo del método simplex: