

¿Por qué Modelos y Optimización I?

El objetivo de este documento es entender el por qué de la inclusión en la currícula de esta materia y explicar los temas que se verán en la asignatura.

Recordemos los objetivos de la asignatura:

► Globales

Acrecentar la capacidad de los alumnos para analizar sistemas, trabajando sobre modelos matemáticos lineales. Esto se cumple desarrollando una metodología y ejercitando la misma sobre ejercicios complejos, creando las condiciones para que el análisis se realice en base a la imaginación, con el único límite que puede establecer la lógica.

► Particulares

Desarrollar en los alumnos habilidades de modelización, criterios de optimización y capacidad de análisis de resultados, mediante el desarrollo de casos y explicaciones teórico-prácticas de su resolución, para:

- a) Aprender de la realidad mediante la experimentación con el modelo
- b) formular modelos matemáticos lineales para la resolución de problemas complejos
- c) formular modelos matemáticos con variables binarias y enteras
- d) resolver de manera exacta y de manera aproximada (heurística) los modelos combinatorios de programación lineal entera y entera mixta
- e) resolver problemas combinatorios mediante la aplicación de conceptos de planos de corte

Es una asignatura vinculada con la Toma de decisiones y con la Investigación Operativa. ¿qué es la Investigación Operativa?. Tomemos la definición de la SADIO (Sociedad Argentina de Informática e Investigación Operativa):

La Investigación Operativa es la aplicación de ciencia moderna a problemas complejos que aparecen en la dirección y administración de sistemas constituidos por hombres, materiales, equipos y dinero en la industria, el comercio, el gobierno y la defensa. Su característica primordial es la elaboración de modelos científicos que mediante la incorporación de factores de riesgo e incertidumbre permitan evaluar decisiones, políticas y alternativas.

Su objeto es auxiliar al directivo o al administrativo en la selección científica de sus decisiones.

¿Qué implica la toma de decisiones?

Condiciones para la existencia de un problema de decisión

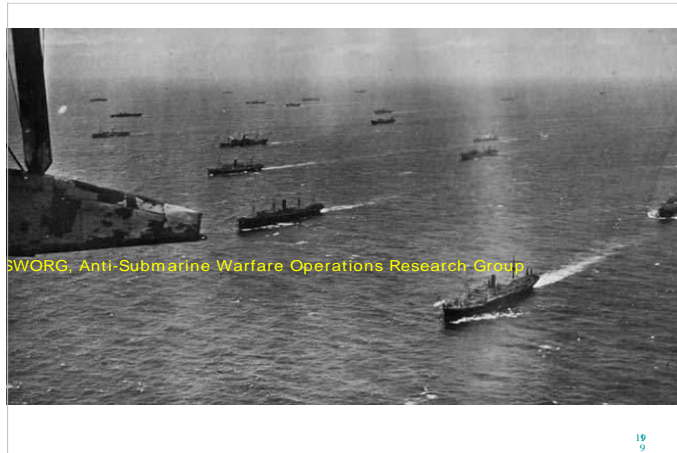
- Existen formas alternativas de actuar, con distintos resultados y diferentes eficiencias para lograr el objetivo.
- Existen dudas respecto del curso alternativo a utilizar.

¿Cómo surge la Investigación Operativa?

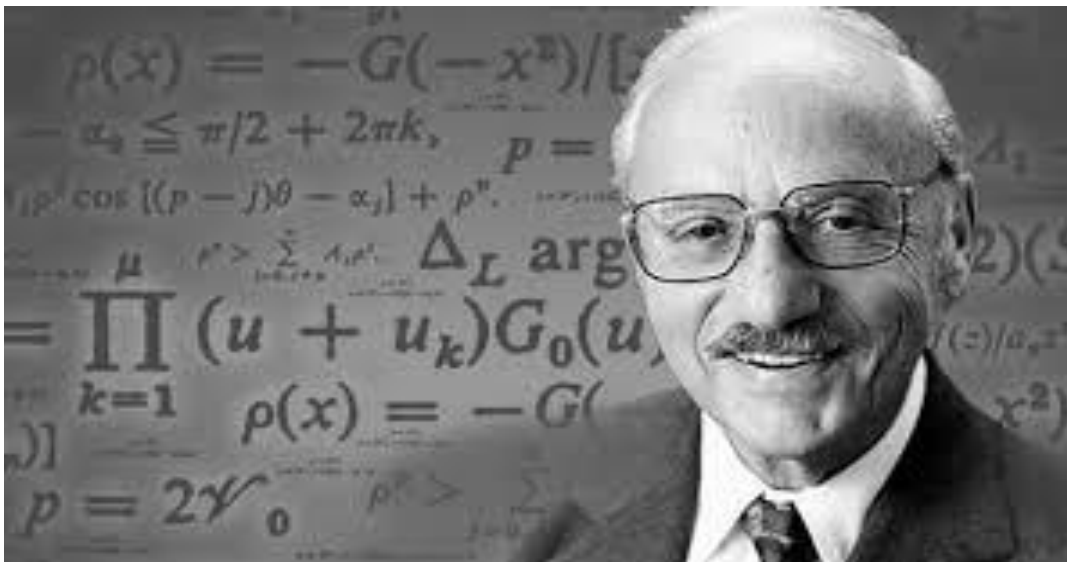
La toma de decisiones es tan vieja como la humanidad, pero la Investigación Operativa como tal, empezó a hacerse conocer en la segunda guerra mundial.

En 1942, la U-Bootswaffe alemana con su flota de submarinos U-Boot inició un bloqueo a Gran Bretaña atacando convoyes de barcos cargados de suministros procedentes de Estados Unidos e impidiendo que alcanzaran su destino. El Grupo de Investigación de Operaciones de Guerra Antisubmarina de Estados Unidos (ASWORG, Anti-Submarine Warfare Operations Research Group en inglés) realizó representaciones matemáticas de dichos convoyes, teniendo en cuenta una serie de restricciones y condiciones impuestas por la realidad, tales como la velocidad máxima a la que podían desplazarse los navíos, la cantidad de suministros que debían transportar, y el combustible necesario para alcanzar su destino. Aplicaron estos modelos también sobre los U-Boots: el tamaño de su flota, el alcance de los submarinos, sus torpedos, etc. Con base a esta información fueron capaces de modelar la guerra naval, y determinar si era mejor una estrategia basada en convoyes formados por un gran grupo de navíos de carga escoltados por muchos destructores, o por el contrario pequeños grupos más difíciles de localizar para el enemigo, e incluso la manera de causar un mayor daño a los submarinos U-Boot. Cuando la armada de los Estados Unidos de América puso en práctica esta estrategia, disminuyó de forma considerable

la cantidad de barcos hundidos mientras se incrementaba la destrucción de submarinos alemanes (pasando del hundimiento de apenas una treintena al año a rondar los 250 anuales en 1943 y 1944).

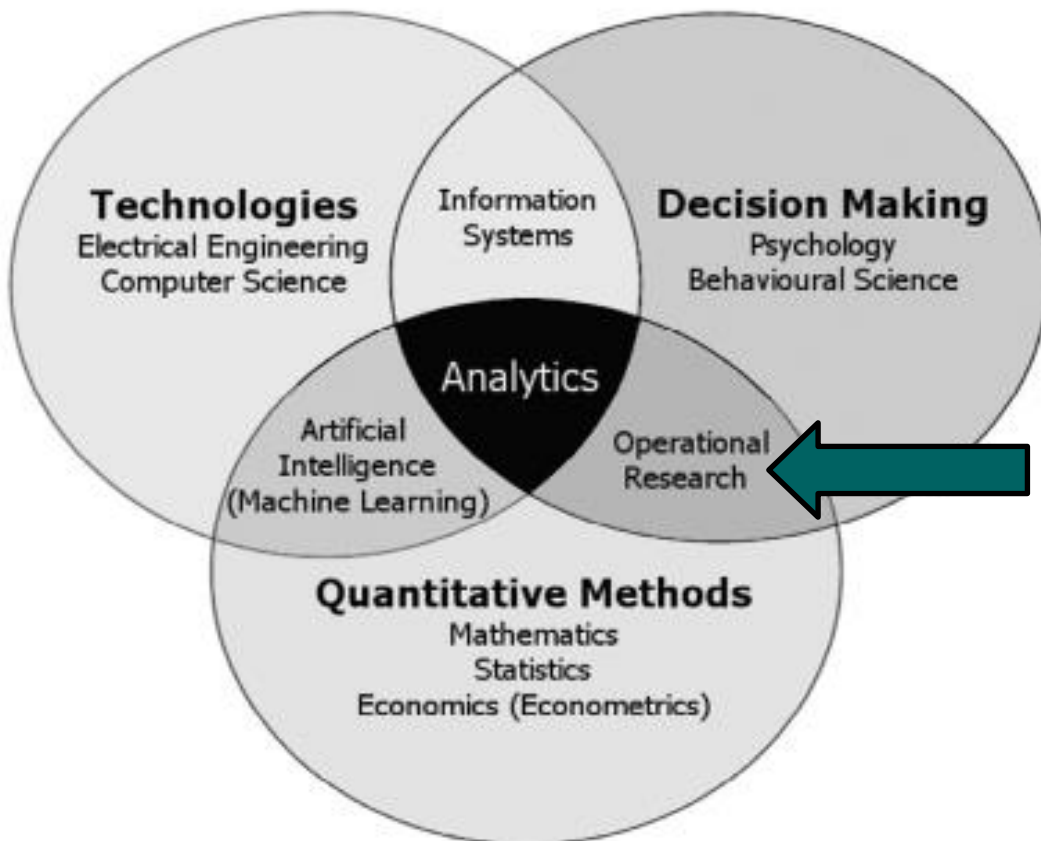


Tras apreciar el alcance de ésta nueva disciplina, Inglaterra creó otros grupos de la misma índole para obtener resultados óptimos en la contienda. De la misma forma Estados Unidos (EEUU), al unirse a la Guerra en 1942, comenzó a aplicar técnicas de Investigación de Operaciones militarmente, y unos años más tarde, en 1947, formó un grupo de trabajo dedicado a mejorar los procesos de planificación a gran escala: el proyecto SCOOP (Scientific Computation Of Optimum Programs). En dicho grupo se encontraba trabajando George Bernard Dantzig (foto), quien desarrolló en 1947 el algoritmo del método Simplex.



¿Por qué Modelos y Optimización I está en la currícula de la Licenciatura en Análisis de Sistemas y de la Ingeniería en Informática?

Observemos el siguiente gráfico:



Dentro de este diagrama tenemos las distintas disciplinas y temáticas de las carreras vinculadas con sistemas y con informática. Como vemos, la Investigación Operativa es la intersección entre los métodos cuantitativos y la toma de decisiones. Además, junto con los sistemas de información y la inteligencia artificial, son la base de la Analítica y la Ciencia de Datos.

Cómo aplicar Investigación Operativa (y Modelos y Optimización) para resolver problemas de decisión.

Dijimos antes que los problemas de decisión tienen varias alternativas y que existen dudas acerca de cuál alternativa es la mejor.

La Investigación Operativa utiliza modelos matemáticos para la toma de decisiones entre distintas alternativas, porque muchas veces la cantidad de alternativas y la complejidad para su formulación es tal que no es posible

¿Por qué Modelos y Optimización I?

explicitarlas y analizarlas una por una. Por eso el modelo matemático sirve para encontrar y analizar las alternativas, y elegir la mejor (optimización).

Definición

Un **modelo matemático** de un objeto o fenómeno es cualquier esquema simplificado e idealizado de ese objeto o fenómeno, constituido por símbolos y operaciones (relaciones) matemáticas.

Clasificaciones de los modelos

Se podría decir que un modelo es una forma de representar cada uno de los tipos de entidades que intervienen en un cierto proceso físico mediante objetos matemáticos. Las relaciones matemáticas formales entre los objetos del modelo, deben representar de alguna manera las relaciones reales existentes entre las diferentes entidades o aspectos del sistema u objeto real. Una vez formulado el modelo matemático, se pueden aplicar el cálculo, el álgebra y otras herramientas matemáticas para deducir el comportamiento del sistema bajo estudio. Un modelo físico requerirá que se pueda seguir el camino inverso al modelado, permitiendo reinterpretar en la realidad las predicciones del modelo.

Según la información de entrada

Con respecto a la función del origen de la información utilizada para construir los modelos pueden clasificarse de otras formas. Podemos distinguir entre modelos heurísticos y modelos empíricos:

- **Modelos heurísticos** (del griego *euriskein* 'encontrar'). Son los que están basados en las explicaciones sobre las causas o mecanismos naturales que dan lugar al fenómeno estudiado.
- **Modelos empíricos** (del griego *empeirikos* relativo a la 'experiencia'). Son los que utilizan las observaciones directas o los resultados de experimentos del fenómeno estudiado.

Según el tipo de representación

Además los modelos matemáticos encuentran distintas denominaciones en sus diversas aplicaciones. Una posible clasificación puede atender a si pretenden hacer predicciones de tipo cualitativo o pretende cuantificar aspectos del sistema que se está modelizando:

- **Modelos cualitativos o conceptuales**, estos pueden usar figuras, gráficos o descripciones causales, en general se contentan con

predecir si el estado del sistema irá en determinada dirección o si aumentará o disminuirá alguna magnitud, sin importar la magnitud concreta de la mayoría de sus aspectos.

- **Modelos cuantitativos o numéricos**, usan números para representar aspectos del sistema modelizado, y generalmente incluyen fórmulas y algoritmos matemáticos más o menos complejos que relacionan los valores numéricos. El cálculo con los mismos permite representar el proceso físico o los cambios cuantitativos del sistema modelado.

Según la aleatoriedad

Otra clasificación independiente de la anterior, según si a una entrada o situación inicial concreta pueden corresponder o no diversas salidas o resultados, en este caso los modelos se clasifican en:

- Determinista. Se conoce de manera puntual la forma del resultado ya que no hay incertidumbre. Además, los datos utilizados para alimentar el modelo son completamente conocidos y determinados.
- Estocástico. Probabilístico, para el cual no se conoce el resultado esperado, sino su probabilidad y existe por tanto incertidumbre.

Clasificación según su aplicación u objetivo

Por su uso suelen utilizarse en las siguientes tres áreas, sin embargo existen muchas otras como la de finanzas, ciencias etc.

- **Modelo de simulación o descriptivo**, de situaciones medibles de manera precisa o aleatoria, por ejemplo con aspectos de programación lineal cuando es de manera precisa, y probabilística o heurística cuando es aleatorio. Este tipo de modelos pretende predecir qué sucede en una situación concreta dada.
- **Modelo de optimización**. Para determinar el punto exacto para resolver alguna problemática administrativa, de producción, o cualquier otra situación. Cuando la optimización es entera o no lineal, combinada, se refiere a modelos matemáticos poco predecibles, pero que pueden acoplarse a alguna alternativa existente y aproximada en su cuantificación. Este tipo de modelos requiere comparar diversas condiciones, casos o posibles valores de un parámetro y ver cual de ellos resulta óptimo según el criterio elegido.
- **Modelo de control**. Para saber con precisión como está algo en una organización, investigación, área de operación, etc. Este modelo pretende ayudar a decidir qué nuevas medidas, variables o qué

parámetros deben ajustarse para lograr un resultado o estado concreto del sistema modelado.

Ejemplos de modelos por tipos

	Descriptivos / Simulación		Optimización / Elección		Control / Tratamiento	
	Determinista	Probabilista	Determinista	Probabilista	Determinista	Probabilista
Cuantitativo / Numérico	Cálculos de astronomía	Simulaciones	Cálculo componentes de sistemas	Diseño de ingeniería	Control automático	Control probabilista
Cualitativo / Conceptual	Análisis de microeconomía	Juegos	Flujo en grafos		Teoría psicológica	

En la clasificación resaltamos el tipo de modelos que trabajamos en Modelos y Optimización I: Modelos cuantitativos de optimización determinísticos.

En Modelos y Optimización II se trabajará con modelos cuantitativos de optimización probabilísticos.

Para determinar un problema será necesario conocer:

- ▶ Responsables de la decisión.
- ▶ Escenario en el que actúan.
- ▶ Objetivos.
- ▶ Variables controlables.
- ▶ Variables no controlables.

Ventajas del modelo

- Mayor simplicidad para “manejar”
- Posibilidad de técnicas ya desarrolladas para encontrar la solución con ese modelo
- Toda realidad transformada correctamente en un modelo dado se acepta que posee las propiedades del mismo

Elementos de un modelo

Hipótesis y supuestos:

Para simplificar el modelo se delimita el sistema en estudio a través de las hipótesis y supuestos simplificativos.

Así se comienza a transformar el sistema físico en un modelo simbólico.

Las hipótesis deben ser probadas científicamente.

Los supuestos son hipótesis que no pueden probarse.

Objetivo:

Mide la eficiencia de nuestro sistema. Surge como respuesta a tres preguntas:

- ¿Qué hacer?
- ¿Cuándo? (período de tiempo)
- ¿Para qué?

Actividad

Proceso unitario que se realiza en el sistema físico caracterizado por consumir recursos y/o generar un resultado económico y/o indicar un estado.

Variables

Son las que miden o indican el estado de una actividad.

Las que miden pueden ser continuas o enteras.

Las que indican son, generalmente, variables (0,1) o bivalentes

Elementos de la formulación:

- 1) Variables de decisión. Ejemplo ¿qué cantidad X_j se va a fabricar de cada producto $j=1 \dots n$ (n debe ser un valor conocido)

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

- 2) Objetivo. Ejemplo: maximizar beneficios o minimizar costos

$$\max f(\mathbf{x}) \text{ ó } \min f(\mathbf{x})$$

- 3) Restricciones en las decisiones factibles. Ejemplo: presupuesto limitado

$$g_1(\mathbf{x}) \leq b_1, g_2(\mathbf{x}) \geq b_2, g_3(\mathbf{x}) = b_3$$

Los modelos matemáticos que trabajamos en Modelos y Optimización I son modelos matemáticos lineales, que se llaman modelos de Programación Lineal (programación entendida como programación matemática, no como programación informática)

El problema de la programación matemática consiste en elegir aquel o aquellos valores de las variables instrumentales pertenecientes al conjunto de oportunidades S , es decir, $X \in S$, que proporcionan el mayor o menor valor de la función objetivo.

Modelo Matemático de Programación Lineal

Características:

- 1) Variables de decisión **continuas**

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

- 2) Objetivo **lineal**

$$\min \text{ ó } \max c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

- 3) Restricciones **lineales** para $i = 1, \dots, m$,

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \text{ ó } a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$\text{ó } a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$