Material de apoyo Teórica I

Modelo Matemático de Programación Lineal Continua

Características:

1) Variables de decisión continuas

$$\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n}$$

2) Función Objetivo lineal (también llamado Z)

$$\boxed{\min \text{ ó } \max c_1x_1 + \cdots + c_nx_n}$$

3) Restricciones lineales para

$$\boxed{i = 1, \ldots, m},$$

$$\boxed{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \text{ ó } a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i}$$

$$\boxed{\text{ó } a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i}$$

- El coeficiente de una variable en la función objetivo es llamado el Cj de la variable
- El coeficiente que acompaña a la variable Xj en la restricción i es llamado el coeficiente tecnológico aij
- El lado derecho de la restricción i se denomina bi

Primer caso de estudio

La familia De Grön tienen un emprendimiento comercial, producen y venden detergente concentrado y lavavajillas. Los De Grön compran sustancia base, aromatizante, envases plásticos de un litro y etiquetas.
Para hacer un litro de detergente concentrado hacen falta 200cc de sustancia base y 40cc de aromatizante, para hacer un litro de lavavajillas hacen falta 100cc de sustancia base y 250cc de aromatizante, en los dos casos el resto, hasta completar el litro, es agua.
La familia trabaja todo el fin de semana para dejar preparada la producción que comienzan a vender el lunes. Para el próximo fin de semana pueden comprar 400 botellas, 500 etiquetas, 60 litros de sustancia base y 70 litros de aromatizante.
Los precios de compra de los insumos se indican en la siguiente tabla:

Sustancia base	**Aromatizante**	**Botellas plásticas**	**Etiquetas**
$/litro	$/litro	$/unidad	$/unidad
10	15	1	0.1

El detergente concentrado lo venden a 10,70$/litro y el Lavavajillas a 9,85 $/litro.
Por experiencia saben que de detergente concentrado no deben hacer menos de 100 botellas y de lavavajillas no menos de 80, también saben que nunca venden más de 280 botellas de lavavajillas.
Eric es el jefe de la familia y es el que se ocupa, cada semana, de organizar la producción. ¿cómo lo podemos ayudar?

Pasos para formular un modelo de Programación Lineal

- Comprender la situación problemática
- Describir el objetivo en palabras
- Describir cada una de las restricciones en palabras
- Definir las variables de decisión (controlables)
- Expresar el objetivo en función de las variables de decisión
- Expresar cada restricción en función de las variables de decisión

Comprender la situación problemática

¿Cuál es el problema?

Quieren saber cuánto hacer de cada producto

¿cuántas posibilidades hay? DEMASIADAS

¿Qué supuestos podemos hacer?

- ¿Cuánta Materia prima, Mano de obra, Capital, Maquinaria, envases, cuentan para hacer el trabajo?
- Todos los recursos no mencionados no son limitantes (se tiene más de lo que se puede llegar a usar)

- ¿qué pasa con el agua?
- No es limitante (por eso no tenemos indicación de cuánta agua tenemos disponible o cuánta agua exactamente lleva cada producto)

- Siempre respetando la experiencia de la familia, ¿cuánto se puede vender de cada producto?
- Todo lo que se produce se vende (si hay una demanda máxima, como para lavavajillas, no van a fabricar más de lo que pueden vender)

Más supuestos que podemos agregar

- No hay inflación ni varían los precios o costos
- No hay productos ni materia prima fallados

- Cada unidad de producto lleva 1 botella y 1 etiqueta
- No hay desperdicio de recursos al fabricar
- ¿qué más?...

Describir el objetivo con palabras

¿Qué hay que determinar?

Cuánto hacer de cada producto (DC y LV)

¿en qué período de tiempo?

El próximo fin de semana

¿qué hay que maximizar o minimizar? Podría ser…

- maximizar la cantidad producida
- minimizar los gastos
- maximizar la facturación

Contras de cada una de estas propuestas de optimización:

- maximizar la cantidad producida Si no conviene ¿lo hacemos igual?
- minimizar los gastos Si los gastos son grandes ¿no lo hacemos aunque ganemos mucho?
- maximizar la facturación. ¿Y si tiene muchos gastos para hacer el producto?

Lo mejor sería maximizar algo que tenga en cuenta lo que ganamos al vender el producto (facturación) y lo que gastamos para fabricarlo:

- Maximizar ganancia (ingresos x ventas – costos de fabricación)

Objetivo:

Determinar cuánto hacer de cada producto (DC y LV), el próximo fin de semana, para maximizar las ganancias (ingresos x ventas – costos de fabricación)

Describir cada una de las restricciones en palabras

BOTELLA)

No usar más de 400 botellas

ETIQUETA)

No usar más de 500 etiquetas

SUSTBASE)

No usar más de 60 litros de SB

AROMAT)

No usar más de 70 litros de Arom.

MINDC)

No hacer menos de 100 de DC

MINLV)

No hacer menos de 80 de LV

MAXLV)

No hacer más de 280 de LV

Además hay que agregar que las variables deben ser mayores o iguales que cero (condición de no negatividad)

Definir las variables de decisión (controlables)

Dado que nuestro objetivo es:

Determinar cuánto hacer de cada producto (DC y LV), el próximo fin de semana, para maximizar las ganancias (ingresos x ventas – costos de fabricación)

Hay que medir con variables lo que hacemos de cada producto:

DC: cantidad de unidades de detergente concentrado a producir y vender (unidades/fin de semana)

LV: cantidad de unidades de lavavajilla a producir y vender (unidades/fin de semana)

¿Necesitamos más variables?

Para saberlo, tenemos que preguntarnos ¿hay algo que no podamos medir sabiendo solamente el valor de DC y LV?

- Consumo de recursos (botellas, etc): basta con saber cuánto valen DC y LV porque supusimos que no hay desperdicio de recursos al fabricar
- Ganancia por venta: basta con saber cuánto valen DC y LV porque todo lo que se produce se vende
- Gastos de compra de recursos: basta con saber cuánto valen DC y LV porque no se gasta recurso para hacer otra cosa

¿Cómo calculamos la ganancia unitaria de cada producto?:

Ingreso por ventas = Precio de venta

Costos de fabricación para cada recurso: = Cantidad que usa el producto de ese recurso multiplicado por costo de una unidad de ese recurso

Para DC:

Precio de venta= 10,70 ($/unidad)

Costo de Sustancia base = 0,2 (litros/un) x 10 ($/litro) = 2 ($/un)

Costo de Aromatizante = 0,04 (litros/un) x 15 ($/litro) = 0,6 ($/un)

Costo de botella = 1 (botella/un) x 1 ($/botella) = 1 ($/un)

Costo de etiqueta = 1 (etiqueta/un) x 0,1 ($/etiqueta) = 0,1 ($/un)

Ganancia por unidad de DC = 10,70 ($/un) – 2 ($/un) – 0,6 ($/un) – 1 ($/un) – 0,1 ($/un) = 7 ($/un)

Si hacemos lo mismo para LV da 4 ($/un)

Expresar cada restricción en función de las variables de decisión

BOTELLA)

No usar más de 400 botellas

$$1 \frac{\text{botella}}{\text{unidad}} \; DC \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem}} + 1 \frac{\text{botella}}{\text{unidad}} \; LV \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem.}} \leq 400 \frac{\text{botellas}}{\text{fin de sem}}$$

ETIQUETA)

No usar más de 500 etiquetas

$$1 \frac{\text{etiqueta}}{\text{unidad}} \; DC \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem}} + 1 \frac{\text{etiqueta}}{\text{unidad}} \; LV \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem.}} \leq 500 \frac{\text{etiquetas}}{\text{fin de sem}}$$

SUSTBASE)

No usar más de 60 litros de sustancia base

$$0{,}2 \frac{\text{litros}}{\text{unidad}} \; DC \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem}} + 0{,}1 \frac{\text{litros}}{\text{unidad}} \; LV \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem.}} \leq 60 \frac{\text{litros}}{\text{fin de sem}}$$

AROMAT)

No usar más de 70 litros de aromatizante

$$0{,}04 \frac{\text{litros}}{\text{unidad}} \; DC \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem}} + 0{,}25 \frac{\text{litros}}{\text{unidad}} \; LV \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem.}} \leq 70 \frac{\text{litros}}{\text{fin de sem}}$$

MINDC)

No hacer menos de 100 de DC

$$DC \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem.}} \geq 100 \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem.}}$$

MINLV)

No hacer menos de 80 de LV

$$LV \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem.}} \geq 80 \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem}}$$

MAXLV)

No hacer más de 280 de LV

$$LV \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem.}} \leq 280 \frac{\text{unidades}}{\text{fin de sem}}$$

Además DC $\geq$ 0 y LV $\geq$ 0 (condiciones de no negatividad)

El modelo matemático

MAX 7 DC + 4 LV
BOTELLA) 1 DC + 1 LV <= 400
ETIQUETA) 1 DC + 1 LV <= 500
SUSTBASE) 0.2 DC + 0.1 LV <= 60
AROMAT) 0.04 DC + 0.25 LV <= 70
MINDC) DC >= 100
MINLV) LV >= 80
MAXLV) LV <= 280

IMPORTANTE: Los únicos signos válidos en las restricciones son mayor o igual, igual o menor o igual. Todas las restricciones se tienen que poder convertir en igualdades para resolver el problema.

SOLUCIÓN DE UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL CONTINUA (PL Continua)

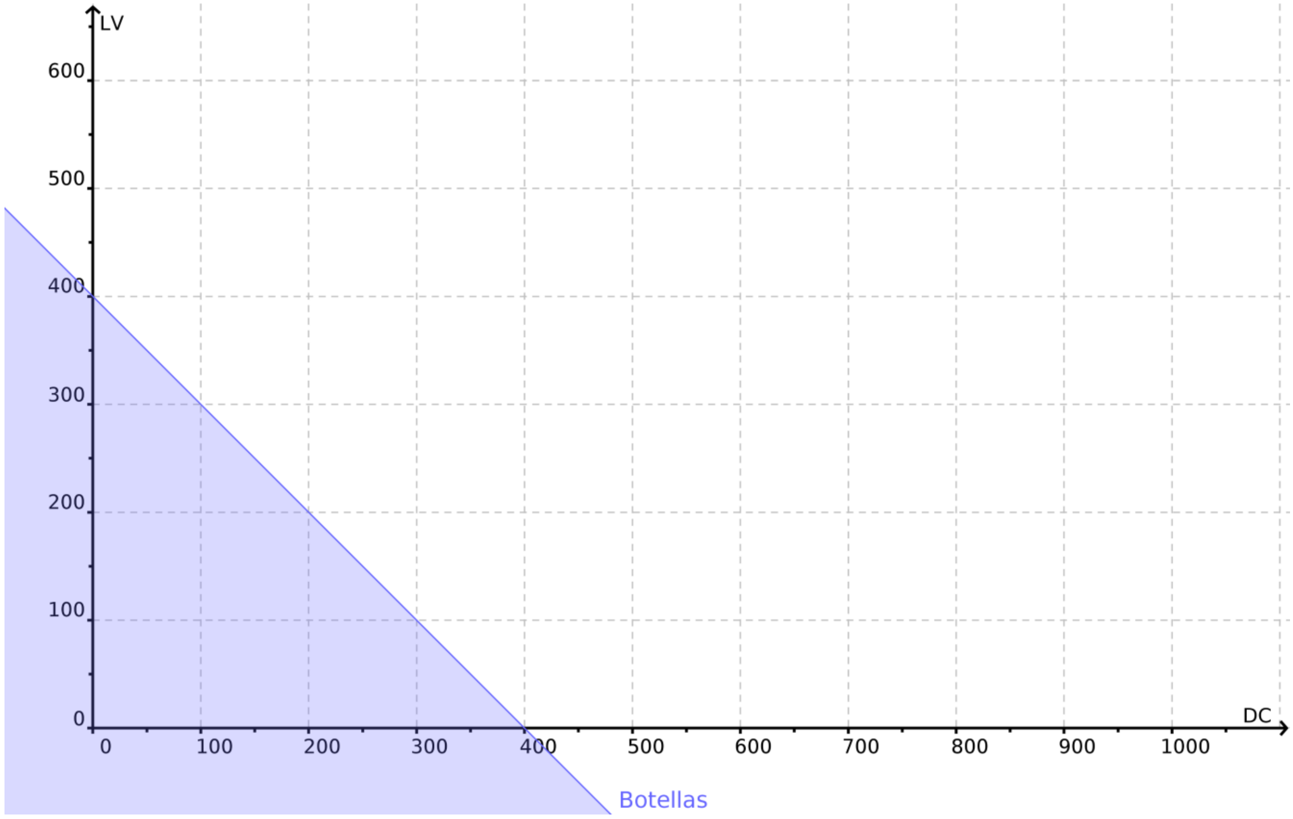
- Un punto es una especificación de los valores de cada variable de decisión
- La región factible de un PL consta de todos los puntos que satisfacen todas las restricciones del PL y las restricciones de signo, que dicen que todas las variables son no negativas
- El punto de la región factible que tiene el mejor valor de Z es el óptimo del PL

Modelo Matemático de PL Continua: SOLUCIÓN GRÁFICA

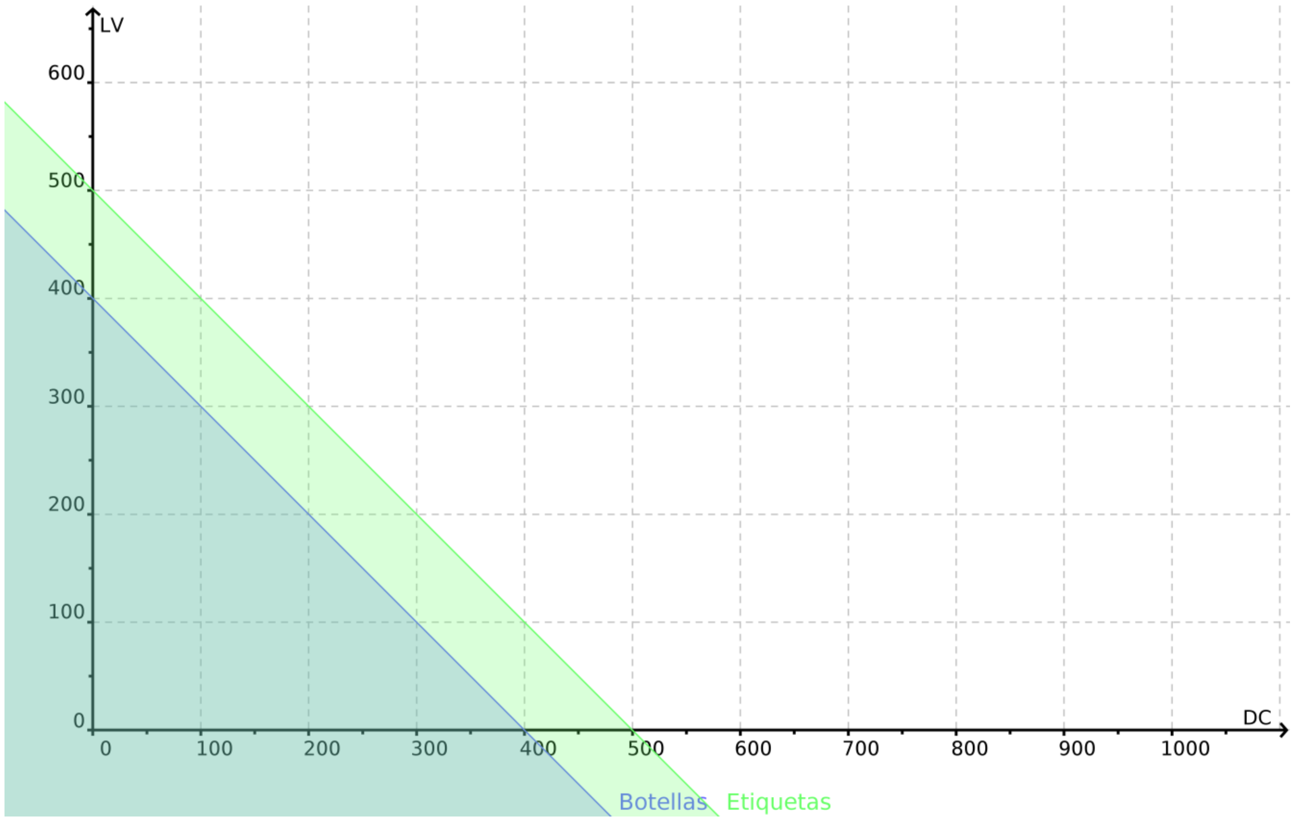
- La región factible para cualquier PL Continuo es un conjunto convexo
- El óptimo (si existe) siempre está al menos en un vértice de la la región factible. Por lo tanto, no vale la pena analizar ningún punto que no sea vértice.
- Vamos a graficar en el eje de abscisas los valores de la variable DC y en el eje de ordenadas los valores de la variable LV (considerando el primer cuadrante, porque son variables no negativas)
- Para cada restricción, graficamos el semiplano que la cumple

Resolución gráfica

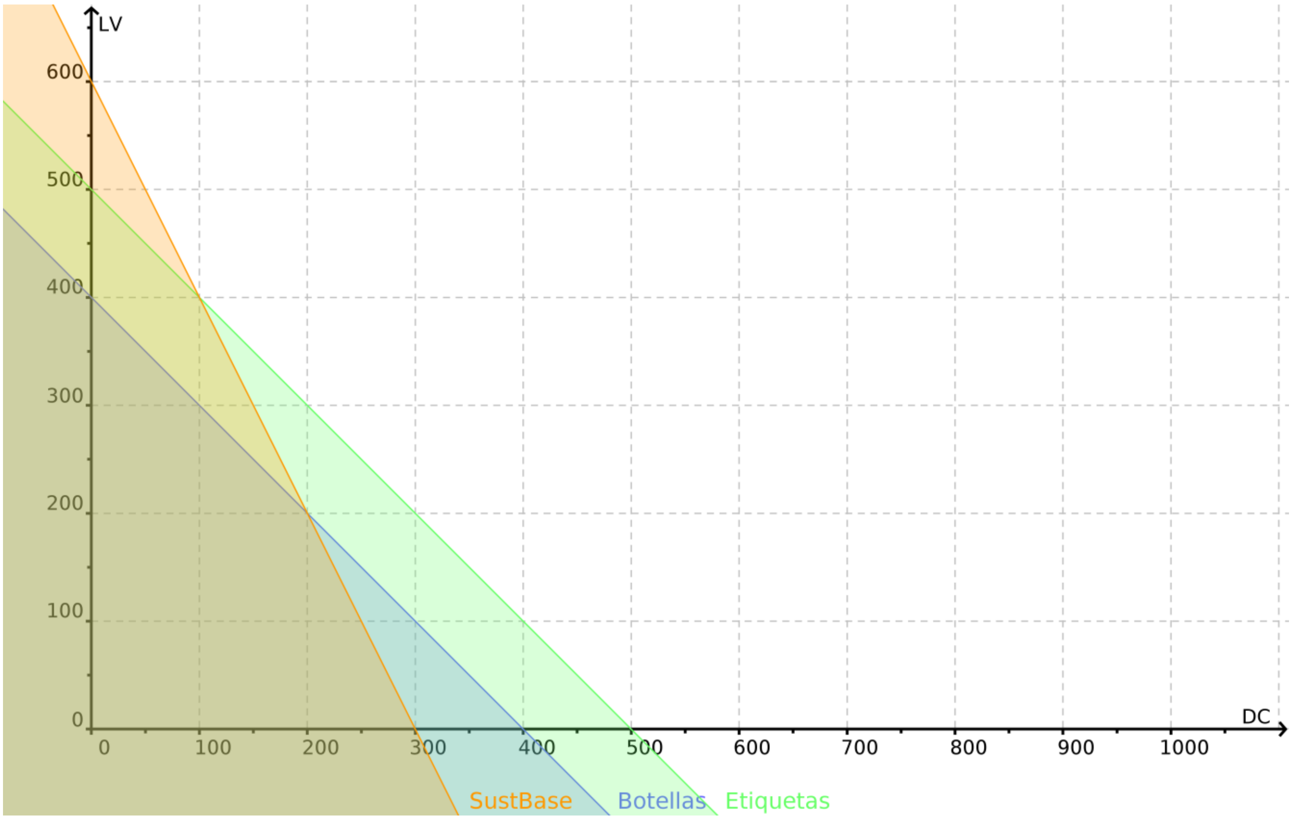
Graficamos la restricción de Botellas



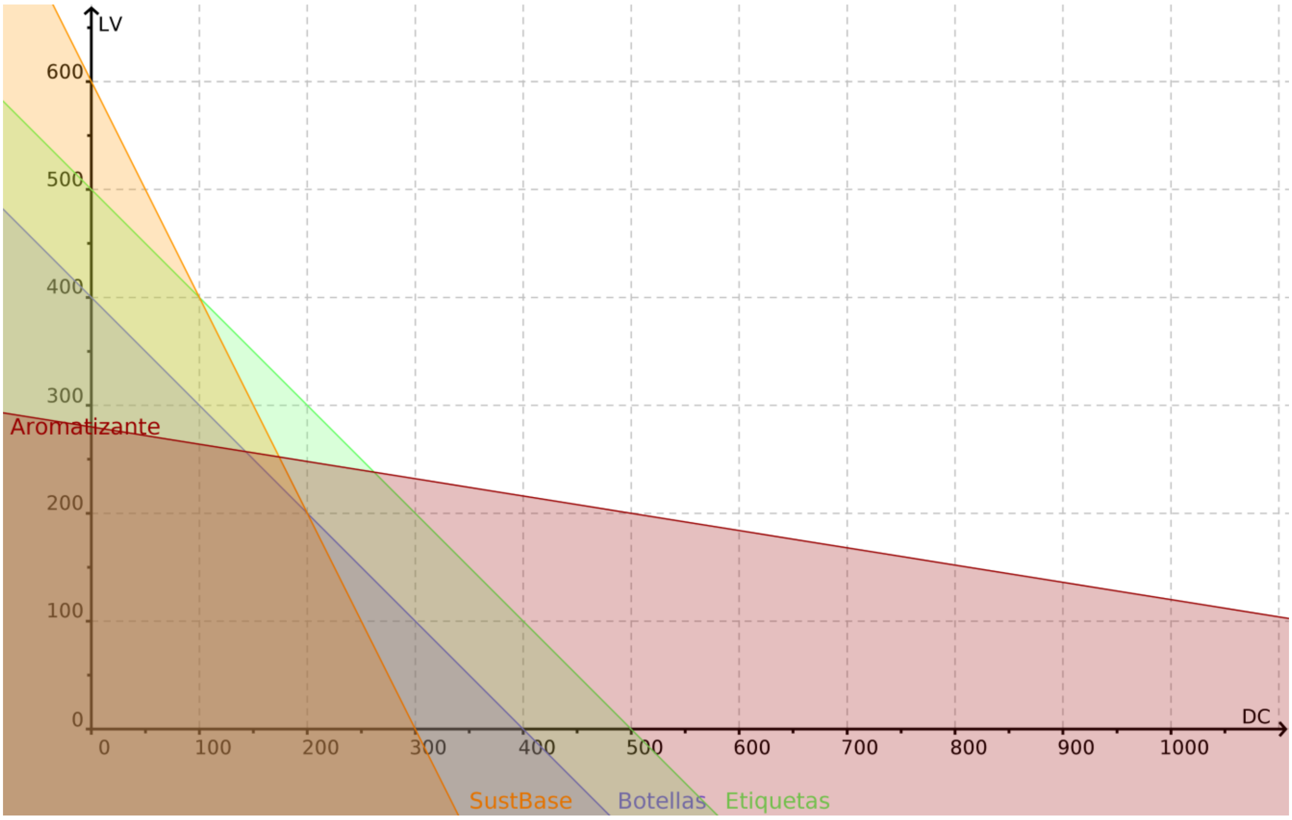
Superponemos la restricción de Etiquetas



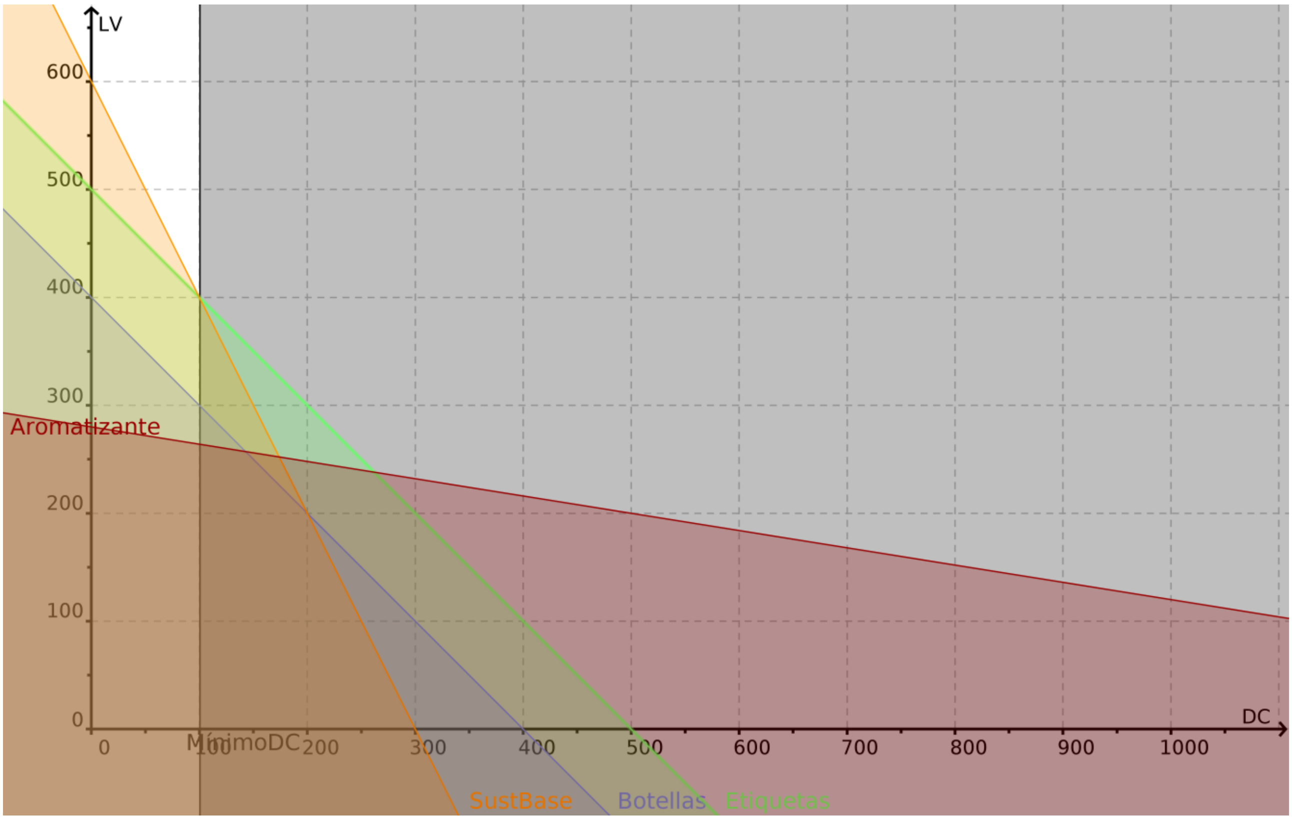
Superponemos la restricción de Sustancia Base



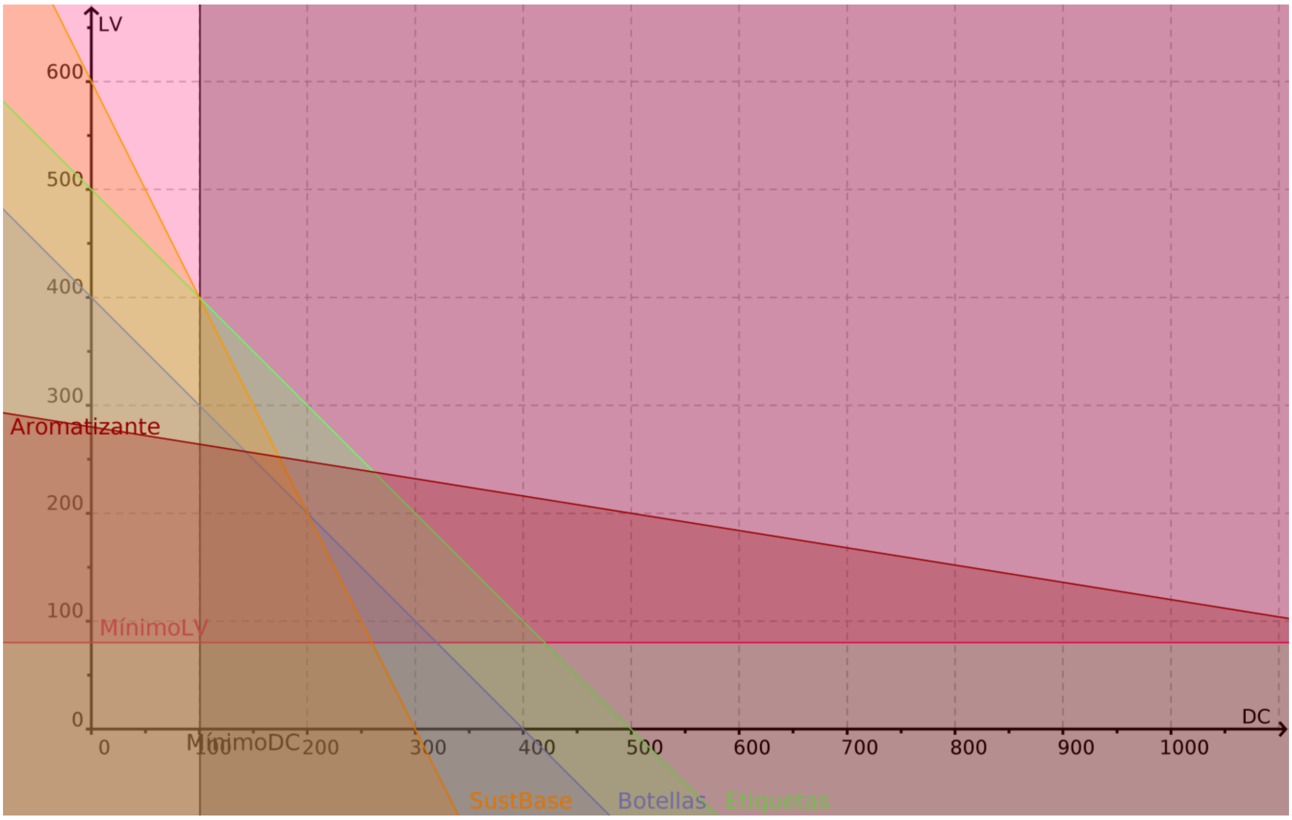
Superponemos la restricción de Aromatizante



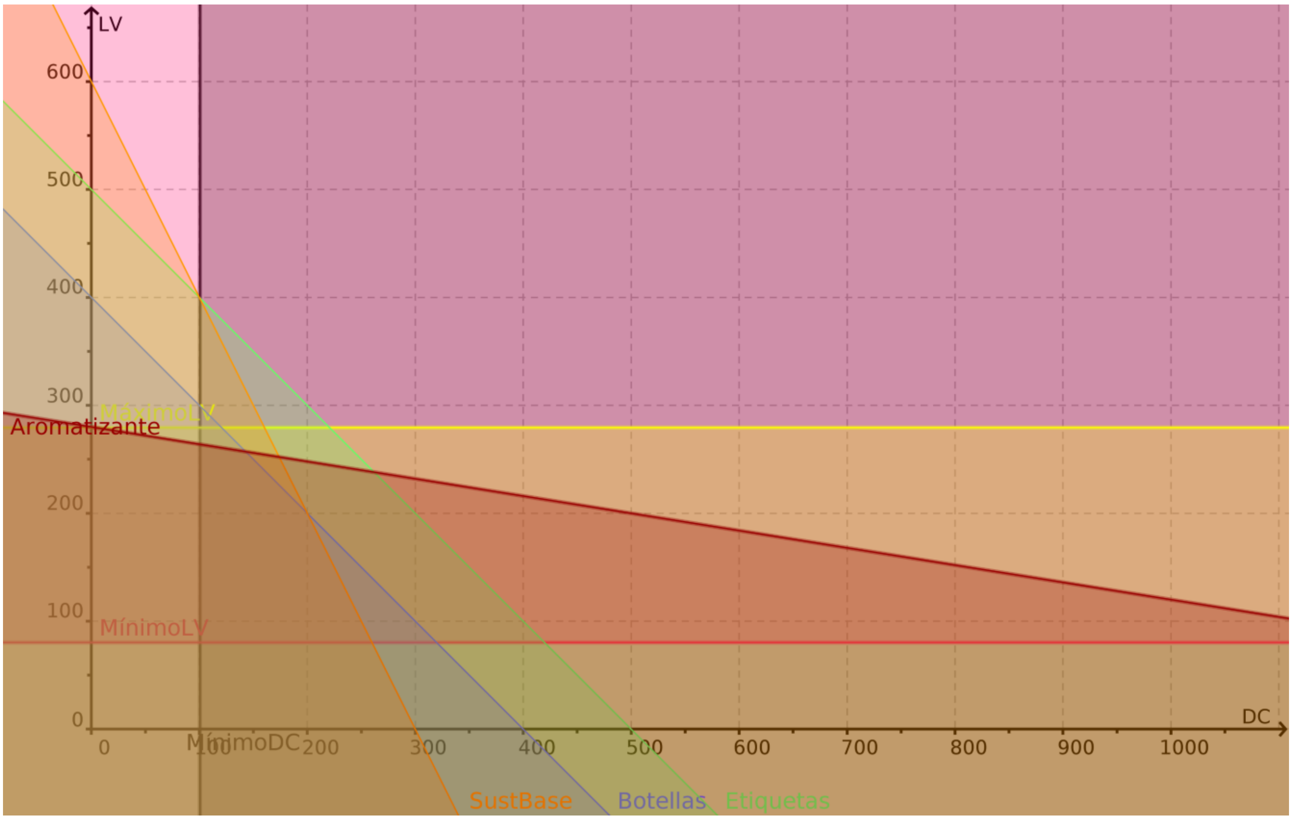
Superponemos la restricción de Demanda mínima de DC



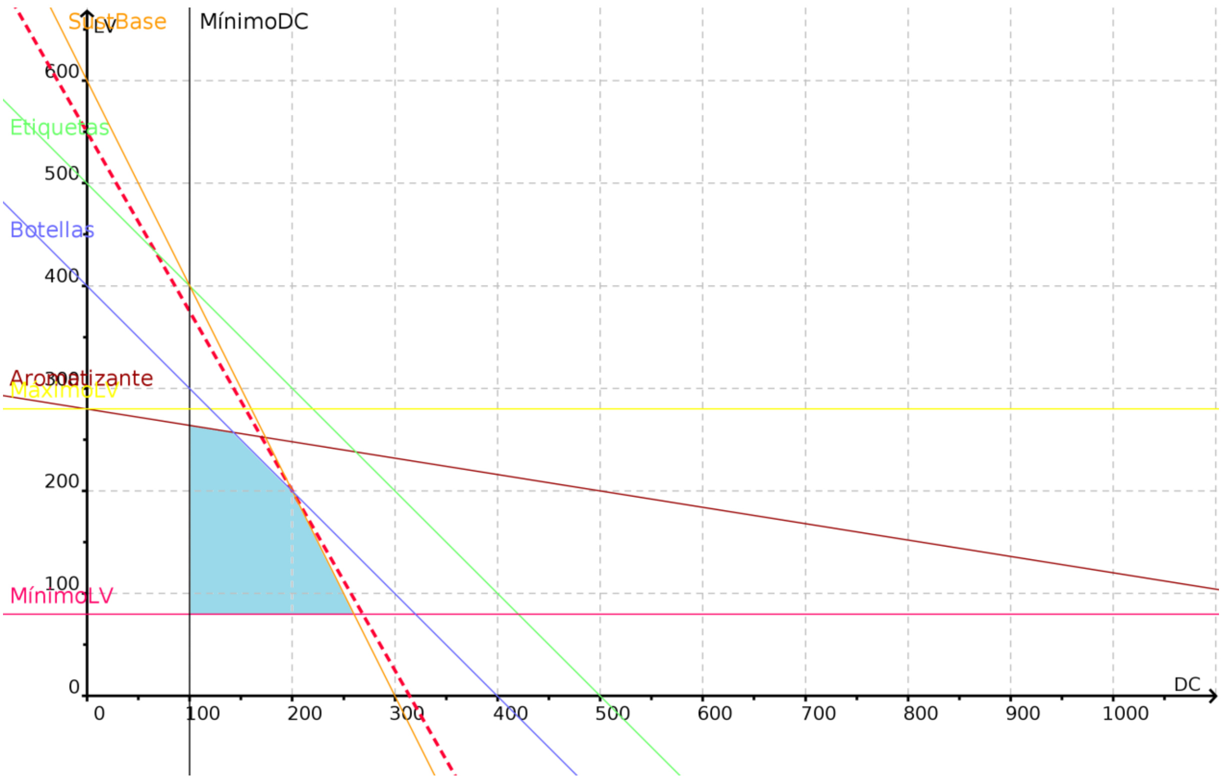
Superponemos la restricción de Demanda mínima de LV



Superponemos la restricción de Demanda máxima de LV



Veamos en celeste la región factible donde se cumplen todas las restricciones



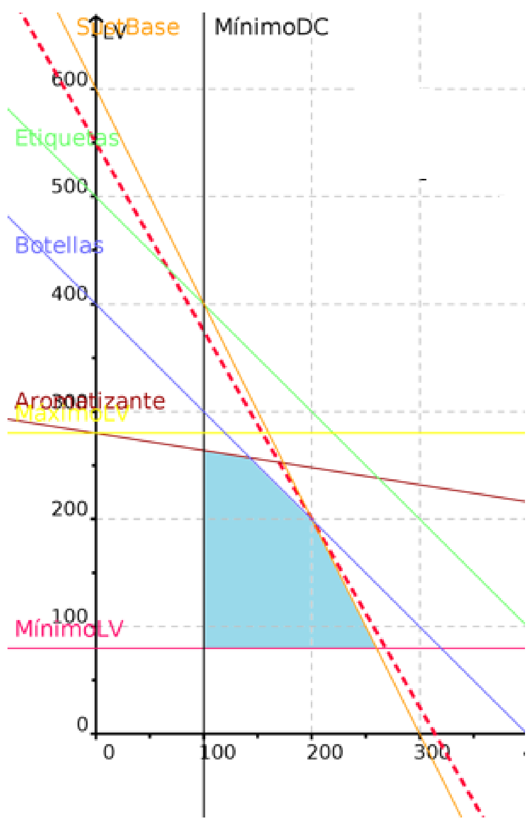
IMPORTANTE: TODOS LOS MODELOS QUE TRABAJAMOS EN MODELOS Y OPTIMIZACIÓN I SON MODELOS LINEALES

Modelo Matemático de PL Continua: SOLUCIÓN ÓPTIMA

- Para saber cuál es el punto óptimo podemos graficar la traza de la función objetivo (el plano 7 DC + 4 LV corta al plano de la solución factible como una recta). En el gráfico anterior la vemos punteada en color rojo.
- Hay que desplazar esa traza del funcional desde el (0, 0) lo más lejos del (0,0) que se pueda (porque estamos maximizando) hasta que no podamos movernos más porque "se termina el poliedro"
- Estamos en un vértice, que es el (200, 200)
- Es decir, la solución óptima es hacer 200 unidades de DC y 200 de LV

SOLUCIÓN ÓPTIMA y uso de los recursos

- Además de saber que en el óptimo se fabrican 200 de DC y 200 de LV, un informe de la solución completo implica saber cuáles recursos están agotados y cuáles tienen sobrante
- De manera gráfica podemos ver que los recursos agotados son los que se cortan en el punto óptimo (Botellas y Sustancia Base)



Modelo Matemático de PL Continua: SOLUCIÓN ÓPTIMA y uso de los recursos - VARIABLES SLACK

- Para saberlo con las restricciones, hay que agregar una variable en cada restricción llamada variable slack o de holgura, para convertir todas las restricciones en igualdades (esto los software de resolución lo hacen automáticamente)
- Al resolver el problema, las restricciones que tengan variable slack igual a cero indican que esa restricción es limitante (si es un recurso de disponibilidad máxima, está agotado)

Agregamos las slack en rojo:

MAX Z = 7 DC + 4 LV

BOTELLA) 1 DC + 1 LV + SOBRANTEBOTELLAS = 400

ETIQUETA) 1 DC + 1 LV + SOBRANTEETIQUETAS = 500

SUSTBASE) 0.2 DC + 0.1 LV + SOBRANTESB = 60

AROMAT) 0.04 DC + 0.25 LV + SOBRANTEAR = 70

MINDC) DC – VENTADCSOBREELMINIMO = 100

MINLV) LV – VENTALVSOBREELMINIMO = 80

MAXLV) LV + DEMANDAINSATISFECHALV = 280

Reemplazando DC por 200 y LV por 200 obtenemos:

MAX Z = 7 . 200 + 4 . 200

BOTELLA) 1 . 200 + 1 . 200 + SOBRANTEBOTELLAS = 400

ETIQUETA) 1 . 200 + 1 . 200 + SOBRANTEETIQUETAS = 500

SUSTBASE) 0.2 . 200 + 0.1 . 200 + SOBRANTESB = 60

AROMAT) 0.04 . 200 + 0.25 . 200 + SOBRANTEAR = 70

MINDC) 200 – VENTADCSOBREELMINIMO = 100

MINLV) 200 – VENTALVSOBREELMINIMO = 80

MAXLV) 200 + DEMANDAINSATISFECHALV = 280

Y queda:

MAX Z = 2200

BOTELLA) SOBRANTEBOTELLAS = 0

ETIQUETA) SOBRANTEETIQUETAS = 100

SUSTBASE) SOBRANTESB = 0

AROMAT) SOBRANTEAR = 12

MINDC) VENTADCSOBREELMINIMO = 100

MINLV) VENTALVSOBREELMINIMO = 120

MAXLV) DEMANDAINSATISFECHALV = 80

Modelo de Programación Lineal en el software LINDO

```
MAX 7 DC + 4 LV
ST
BOTELLA) 1 DC + 1 LV <= 400
ETIQUETA) 1 DC + 1 LV <= 500
SUSTBASE) 0.2 DC + 0.1 LV <= 60
AROMAT) 0.04 DC + 0.25 LV <= 70
MINDC) DC >= 100
MINLV) LV >= 80
MAXLV) LV <= 280
END

   OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      2200.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       DC        200.000000         0.000000
       LV        200.000000         0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
 BOTELLA)           0.000000          1.000000
ETIQUETA)         100.000000          0.000000
SUSTBASE)           0.000000         30.000000
  AROMAT)          12.000000          0.000000
   MINDC)         100.000000          0.000000
   MINLV)         120.000000          0.000000
   MAXLV)          80.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       2
```

Modelo de Programación Lineal en el software GLPK

```
#Declaración de variables
var DC >= 0;
var LV >= 0;

#Funcional
maximize Z: 7 * DC + 4 * LV;

s.t. Botella: 1 * DC + 1 * LV <= 400;
s.t. Etiqueta: 1 * DC + 1 * LV <= 500;
s.t. SustBase: 0.2 * DC + 0.1 * LV <= 60;
s.t. Aromatiz: 0.04 * DC + 0.25 * LV <= 70;
s.t. MinimoDC: DC >= 100;
```

s.t. MinimoLV: LV >= 80;
s.t. MaximoLV: LV <= 280;

Problem: deGron
Rows: 8
Columns: 2
Non-zeros: 13
Status: OPTIMAL
Objective: Z = 2200 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	Z	B	2200			
2	Botella	NU	400		400	1
3	Etiqueta	B	400		500	
4	SustBase	NU	60		60	30
5	Aromatiz	B	58		70	
6	MinimoDC	B	200	100		
7	MinimoLV	B	200	80		
8	MaximoLV	B	200		280	

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	DC	B	200	0		
2	LV	B	200	0		

Modelo Matemático de PL Continua: SOLUCIÓN ÓPTIMA

Cuando se resuelve un modelo de PL al tratar de llegar al óptimo se presenta uno de los siguientes casos:

- Tiene una solución óptima única (como nuestro caso)
- Tiene una cantidad infinita de soluciones óptimas (soluciones alternativas óptimas). Este caso se identifica de manera gráfica cuando la traza de la función objetivo coincide con un lado del poliedro óptimo
- No es factible (incompatible). No se puede formar la región de soluciones factibles
- Es no acotado. Esto se da solo en un modelo de maximización. Hay puntos con valor de Z arbitrariamente grande en la región factible

Casos Particulares

<u>Soluciones alternativas óptimas</u>: La traza del funcional coincide con uno de los lados del poliedro solución y además el óptimo está sobre ese lado del poliedro solución => hay infinitas soluciones óptimas

Poliedro abierto: Si la función objetivo o funcional es de máximo la solución óptima no está acotada

Incompatible: No hay poliedro solución. No hay ningún punto en el primer cuadrante en el cual se cumplan todas las restricciones del problema

Punto degenerado: Es un punto sobredefinido (se cortan más de dos restricciones en el mismo punto).

En los distintos problemas de la Guía 1 encontrarán estos casos particulares.

¿Qué nos queda de esta clase?

- ❑ Cómo resolver un problema con un modelo matemático de dos variables continuas
- ❑ Plantear el modelo
- ❑ Resolverlo gráficamente (son dos variables)