

Material de apoyo Teórica XII

Temario

Volvemos a la resolución del problema de los helados para ver:

- Variación simultánea de dos recursos
- Introducción de un nuevo producto
- Agregado de inecuaciones

Además veremos un caso de análisis de sensibilidad con inversión

$$\begin{aligned} 2 X_1 + 2 X_2 &\leq 600 \text{ [KG AZUCAR/MES]} \\ 4 X_2 &\leq 600 \text{ [KG CREMA/MES]} \\ 2 X_1 + 4 X_2 &\leq 800 \text{ [KG ALMID./MES]} \end{aligned}$$

TABLA OPTIMA DEL DIRECTO

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Modificaciones al problema original

3 Variación simultánea de recursos

Si variamos más de un recurso al mismo tiempo, no podemos confiar en el rango de variación (porque el rango de variación sirve si lo único que cambia es ese recurso).

Debe haber una relación entre la variación de los recursos (uno varía en función de lo que varía otro).

Se reduce a un problema de conveniencia económica (si me mejora el Z o no)



Se presenta la posibilidad de conseguir azúcar entregando a cambio crema (para conseguir 1 kg. de azúcar se deben entregar 1,5 kg. de crema). ¿Conviene efectuar este canje?. Si conviene: ¿cuántos kg. de azúcar es conveniente conseguir?

Para que convenga, en principio el recurso que recibo debe estar saturado (si tiene sobrante, directamente no conviene). En este caso el azúcar está saturado así que en principio conviene.

En segundo lugar hay que verificar que el valor de lo que entregamos sea menor que el valor de lo que recibimos. En este caso 1,5 kg de crema por el valor marginal de la crema es menor que 1 kg de azúcar por el valor marginal del azúcar

Podemos ver en el Z que por cada canje ganamos 3 pesos



			$600+\alpha$	$600-1,5\alpha$	800			
$600+\alpha$	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2	
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2	
$2600+3\alpha$			0	$-200-0,5\alpha$	0	$-200-\alpha$	$-100+0,5\alpha$	

Hay que hallar el valor de α para que todos los $z_j - c_j$ sigan siendo menores o iguales a cero (uno de ellos se hará cero = soluciones alternativas en el dual = punto degenerado en el directo)

Este valor de α es para que esta tabla siga siendo óptima. Hay que pasar a la próxima tabla óptima (alternativa) y ver si sigue siendo conveniente el negocio.

$$\left. \begin{array}{l} -200 - 0,5\alpha \leq 0 \\ -200 - \alpha \leq 0 \\ -100 + 0,5\alpha \leq 0 \end{array} \right\} \text{Implica } \alpha \leq 200$$

Reemplazamos en la tabla óptima actual el valor de alfa por 200. Nos tiene que quedar una solución alternativa y hacemos entrar esa variable a la base y veremos qué variable sale.

			$600+200$	$600-300$	800			
 $600+200$	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2	
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2	
$2600+600$			0	$-200-100$	0	$-200-200$	$-100+100$	

En este caso en la próxima tabla no conviene porque sale Y1 de la base, pero hay que probar que es así y no decir que analizando la tabla óptima basta.

Se sigue analizando hasta que el negocio no convenga más, en nuestro caso en la próxima tabla ya no conviene porque sale Y1 de la base y el valor marginal pasa entonces a ser cero. Si hubiera salido otra variable de la base hubiéramos tenido que armar la próxima tabla y analizar en ella si el negocio

Modificaciones al problema original

④ Introducción de un nuevo producto

Ahora vamos a ver qué pasa cuando analizamos la posibilidad de fabricar un nuevo producto y no queremos resolver el problema de vuelta desde el principio.

- ☛ Ante el peligroso aumento de la competencia se decide ofrecer una promoción de yogur helado a 8 \$/lata. Cada lata de yogur insume 1 kg. de almidón, 3 kg. de crema y 2 kg. de azúcar

$$2 X_1 + 2 X_2 + 2 X_6 \leq 600 \text{ [KG AZ/MES]}$$

$$4 X_2 + 3 X_6 \leq 600 \text{ [KG CR/MES]}$$

$$2 X_1 + 4 X_2 + 1 X_6 \leq 800 \text{ [KG AL/MES]}$$

$$Z(\text{MAX}) = 8 X_1 + 10 X_2 + 8 X_6$$

X6: latas de yogur helado fab. por mes (latas/mes)

Estimación previa por el método del lucro cesante:

$$\text{Lucro Cesante} = \sum \text{UsoRecurso}_i * \text{VMRecurso}_i$$

$$\text{Lucro Cesante} = 2 \text{ kgAZ/lata} * 3 \text{ \$/kgAZ} + 3 \text{ kgCR/lata} * 0 \text{ \$/kgCR} + 1 \text{ kgAL/lata} * 1 \text{ \$/kgAL}$$

$$\text{LucroCesante} = 7 \text{ \$/lata}$$

Esto es una **estimación** del valor del Z_j del nuevo producto.

¿El verdadero valor del Z_j será mayor o menor que el Lucro Cesante?.

Será mayor o igual ¿por qué?

Porque como estamos cambiando más de un recurso a la vez, no podemos confiar en que el valor marginal se va a mantener (el rango de variación es válido cuando movemos un solo recurso). Y como estamos quitando recurso, si no se mantiene el valor marginal, aumenta.

Estimación previa por el método del lucro cesante:

- Si el lucro cesante es mayor que el beneficio del nuevo producto **NO CONVIENE** producir el nuevo producto
- Si el lucro cesante es menor o igual que el beneficio del nuevo producto **PUEDE SER CONVENIENTE** fabricar el nuevo producto
- Como en el caso de nuestro producto el lucro cesante es 7 y es menor o igual que el c_j (que es 8) **PUEDE SER CONVENIENTE** fabricar el nuevo producto, así que vamos a tener que incorporarlo a la solución que hasta ahora es óptima, de manera de analizar su conveniencia sin hacer todo de nuevo.

Resolución incorporando a la tabla óptima del problema:

- Para incorporar a la tabla óptima del problema sin resolver todo de nuevo, hay que encontrar la matriz de cambio de base que permita pasar el vector expresado en la base inicial (que se obtiene de los datos del producto a agregar) a la base óptima
- La matriz de cambio de base se obtiene de la expresión en la tabla óptima de los vectores que en la primera tabla eran canónicos (tomados en el orden que permita expresar la matriz identidad en la primera tabla)
- En el caso de nuestro problema, los vectores canónicos en la primera tabla eran A_3 , A_4 y A_5 , en ese orden
- Entonces, la matriz de cambio de base está integrada por los vectores A_3 , A_4 y A_5 en la tabla óptima

- Vamos a premultiplicar el vector nuevo expresado en la primera tabla por la matriz de cambio de base para obtener ese vector en la tabla óptima

Matriz de cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

8	x_1	200	8	10	1	0	-1/2	8	θ
10	x_2	100	1	0	1	0	-1/2	3/2	400/3
← 0	x_4	200	0	0	2	1	-2	-1/2	----
		2600	0	0	3	0	1	5	40
								-1	

8	x_1	140	1	0	2/5	-3/10	1/10	0
10	x_2	120	0	1	-3/10	1/10	3/10	0
8	x_6	40	0	0	2/5	1/5	-2/5	1
		2640	0	0	17/5	1/5	3/5	0

Modificaciones al problema original

⑤ Agregado de inecuaciones

- Ahora vamos a ver qué pasa cuando agregamos una restricción que antes no existía.
- Lo primero que tenemos que probar es si fabricando la misma cantidad cumplimos con la restricción.
- Si es así, la restricción nueva no afecta al óptimo actual (sigue siendo el óptimo).
- Si afecta, debemos analizar en el DUAL



Se piensa en otra alternativa para hacer a la heladería más competitiva. Consiste en incorporar trozos de fruta a los helados. Se necesitan 4 kg. de fruta por lata de helado de agua y 3 kilos de fruta por cada lata de helado de crema. Se dispone de 1000 kg. de fruta mensuales

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 600 \text{ [KG AZUCAR/MES]}$$

$$4 X_2 \leq 600 \text{ [KG CREMA/MES]}$$

$$2 X_1 + 4 X_2 \leq 800 \text{ [KG ALMID./MES]}$$

$$4 X_1 + 3 X_2 < 1000 \text{ [KG FRUTA/MES]}$$

$$Z(\text{MAX}) = 8 X_1 + 10 X_2$$

Prueba de la restricción con la solución óptima actual:

- Antes de agregar la restricción, conviene probar con los valores actuales de X_1 y X_2 a ver si alcanza la disponibilidad del nuevo recurso fruta para seguir fabricando lo que hacíamos hasta ahora

$$4 X_1 + 3 X_2 \leq 1000$$

$$4 \cdot 200 + 3 \cdot 100 = 1100 \text{ que no es } \leq 1000$$

- Por lo tanto tenemos que agregar la nueva restricción: no podemos seguir produciendo lo mismo que hasta ahora (además sabemos que nos faltan 100 kilos)

Resolución incorporando a la tabla óptima:

- Agregar una inecuación, si pasamos al dual, es como agregar un producto nuevo, así que podemos aplicar el mismo método que hicimos con un nuevo producto, premultiplicando por la matriz inversa óptima
- En el caso de nuestro problema, los vectores canónicos en la primera tabla dual eran los de las dos artificiales
- Como los vectores de las artificiales y los de las variables slack son linealmente dependientes, la matriz de cambio de base está integrada por los vectores -A4 y -A5 en la tabla óptima

- Vamos a premultiplicar el vector nuevo expresado en la primera tabla dual por la matriz de cambio de base para obtener ese vector en la tabla óptima dual

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

			600	600	800				1000	θ
600	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2	5/2	6/5	
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2	-1/2	---	
2600			0	-200	0	-200	-100	100		
1000	y_6	6/5	2/5	-4/5	0	-2/5	1/5	1		
800	y_3	8/5	1/5	8/5	1	3/10	-2/5	0		
2480			-40	-120	0	-160	-120	0		

Da 100
(la cantidad
de fruta que
nos faltaba)


Además, en esta clase vemos:

Un ejemplo para ver entre varios negocios qué nos conviene

- 1) Nos ofrecen comprarnos 350 kilos de azúcar a \$1225 (precio unitario 3,50)
¿Puede resultar conveniente considerar esa posibilidad?


En principio parece conveniente porque el valor marginal del azúcar es 3 pesos y lo estamos vendiendo a \$3,50. Pero ¿tendrán los 350 kilos el mismo valor marginal?. Para ver eso, vamos a reemplazar en la tabla óptima del dual (como estamos trabajando con recursos, tenemos que trabajar en el dual) el valor de disponibilidad de azúcar por el nuevo valor que queda si vendemos 350 kilos.

				250					
				600	600	800			
Ck	Xk	Bk		A1	A2	A3	A4	A5	
250	600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2	
800	Y3	1		0	2	1	1/2	-1/2	
				0	500	0	150	-275	



No es óptima
 Pero ya nos damos cuenta
 de que no conviene.
 El Z bajó en 1300,
 cuando lleguemos al óptimo
 va a bajar más y
 nos pagan 1225

				250					
				600	600	800			
Ck	Xk	Bk		A1	A2	A3	A4	A5	
250	600	Y1	4	1	0	1	-1/2	0	
600	Y2	1/2		0	1	1/2	1/4	-1/4	
		1300		0	0	-150	25	-150	



VOLVAMOS AL PROBLEMA ORIGINAL

2) Podemos comprar almidón a \$0,80 el kilo

En principio parece que conviene, porque el valor marginal es de 1 peso, es decir que si compramos un kilo de almidón, el funcional aumenta 1 peso, y pagamos 0,80.

El tema es que no podemos comprar la cantidad que queremos sino que tenemos tres opciones:

a) Comprar 80 kilos de almidón (siempre a 0,8 el kilo)

Vamos a analizar en la tabla reemplazando la disponibilidad original del almidón (800) por la nueva (880).

Ganamos 80 pesos y gastamos
64 pesos.
Conviene (ganamos \$16)

				600	600	880		
				600	600	800		
Ck	Xk	Bk		A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3		1	-2	0	-1	1/2
880	800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2
			2680	0	-40	0	-160	-140

b) Comprar 120 kilos de almidón (siempre a 0,8 el kilo)

Vamos a analizar en la tabla reemplazando la disponibilidad original del almidón (800) por la nueva (920).

Sale de la base Y3
Quiere decir que el valor marginal de
los últimos 20 kilos es cero
(hay 100 kilos con valor marginal de \$1
y 20 kilos con valor marginal de \$0)

				600	600	920		
				600	600	800		
Ck	Xk	Bk		A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3		1	-2	0	-1	1/2
920	800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2
				0	40	0	-140	-160



Entonces gastamos 96
pesos ($\$0,8 \times 120$) y
ganamos 100.
Igual conviene (ganamos \$4)

En este ejemplo b) vimos que no siempre podemos decir que porque la tabla no sigue siendo óptima el negocio no conviene. En este caso, el valor marginal de los primeros 100 kilos es 1 peso y el de los últimos 20 kilos es de cero pesos, pero esos cien pesos que ganamos son más que los 96 que nos sale comprar el paquete de 120 kilos.

c) Comprar 150 kilos de almidón (siempre a 0,8 el kilo)

Ya vimos que comprar 120 kilos apenas nos convenía, así que comprar 150 seguramente no nos convendrá.

Igualmente reemplazaremos por la nueva disponibilidad de almidón.

				600	600	950		
						800		
Ck	Xk	Bk		A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3		1	-2	0	-1	1/2
950	800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2
				0	55	0	-125	-175

A partir de los 100 kilos, el valor marginal es cero, así que con 150 tenemos:
 100 kilos con valor marginal \$1 +
 50 kilos con valor marginal \$0 = \$100
 Y gastamos $\$0,8 \times 150 = \120

Es decir, que no nos conviene.

Volvamos nuevamente al problema original.

3) Variación de 1 recurso y de C_j :

FA CALDO decide bajar la compra mensual de crema a 400 kg, ya que sobran 200 kg, eso lo perjudica porque paga un precio más alto por kg y lo beneficia porque bajan los costos al tener menos inventario, C_1 pasa a valer 10 y C_2 pasa a valer 8.

Aquí tenemos que hacer dos cambios:

- Cambiar dos C_j (deberíamos hacerlo en el directo)
- Cambiar un B_i (deberíamos hacerlo en el dual)

¿En qué orden hacerlo? Es indistinto

De lo que analizamos hasta ahora sabemos que si bajamos la disponibilidad de crema no afecta la solución óptima del dual (porque sobran 200 kilos y estamos bajando la disponibilidad en 200 kilos). Así que conviene empezar por cambiar la disponibilidad de crema y después pasar al directo para cambiar los beneficios de los dos productos

				400			
			600	600	800		
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		2600	0	-200	0	-200	-100
				0*			

Aunque no cambió la tabla óptima del dual sí cambió el valor de la variable X4 (el Z2-C2 del dual ahora vale 0).

Para poder analizar el cambio en los beneficios de los helados, tenemos que volver al directo.


¿Cómo pasamos a la tabla óptima del directo desde la tabla óptima del dual? Haciendo el dual del dual. Cada problema es el dual del otro.

			600	400	800			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2	X3
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2	X5
2600			0	0	0	-200	-100	
			X3	X4	X5	X1	X2	

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	0	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Como obtuvimos la tabla del directo ANTES del cambio que tenemos que hacer, ahora cambiamos los Cj de los helados de agua y de crema, a ver si la tabla sigue siendo óptima.


			10	8			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
10	X1	200	1	0	1	0	-1/2
8	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	0	0	0	2	1	-2
			0	0	6	0	-1



No es óptima, tenemos que hacer entrar X5 a la base, y la única que puede salir es X2.

Como ganamos más que antes
(antes ganábamos \$2600 y ahora ganamos
\$3000), nos conviene

			10	8			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
10	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X5	200	0	2	-1	0	1
0	X4	400	0	4	0	1	0
		3000	0	2	5	0	0



Aparece un costo de oportunidad
(\$2) en los helados de crema

BASANDONOS EN EL RESULTADO ANTERIOR

4) Fabricar o Comprar:

El dueño de FA CALDO se había comprometido a entregar una lata de helado de crema a un cliente ¿y ahora qué hacemos?

El precio de venta que nosotros cobramos por la lata es de \$120.

Averiguamos que podemos comprar una lata igual a la competencia por \$110 ¿qué hacemos?

Tenemos dos opciones:

- 1) Fabricarla nosotros (ya vimos en la tabla anterior que como los helados de crema tienen un costo de oportunidad de 2 pesos, si la fabricamos perdemos dos pesos).
- 2) Comprarla a la competencia, con lo que ganamos 10 pesos (la compramos a \$110 y la vendemos a \$120)

Obviamente nos conviene comprarla a la competencia.

Si cuando vamos a comprarla nos dicen que hubo un pequeño aumento y que ahora vale \$121 ¿qué hacemos?

Seguimos teniendo dos opciones:

- 1) Fabricarla nosotros (ya vimos en la tabla anterior que como los helados de crema tienen un costo de oportunidad de 2 pesos, si la fabricamos perdemos dos pesos).
- 2) Comprarla a la competencia, con lo que perdemos 1 peso (la compramos a \$121 y la vendemos a \$120)

Nos sigue conviniendo comprarla a la competencia.