**Pasos para formular un modelo de PL:**

1. Comprender la situación problemática.
2. Describir el objetivo en palabras. (¿Qué hacer? ¿Cuándo? ¿Para qué?)
3. Describir c/u de las restricciones en palabras.
4. Definir las variables de decisión (controlables).
5. Expresar el objetivo en función de las variables de decisión.
6. Expresar cada restricción en función de las variables de decisión.

**Hipótesis básicas:**

* No hay inflación, o si la hay, no afecta las relaciones entre precios y costos.
* No hay fallas en la producción.
* No hay desperdicios de recursos en la producción.
* Se dispone de capital, proveedores y otros recursos necesarios no contemplados.
* Todo lo que se produce se vende.
* No hay tiempos muertos.
* Todos los precios y costos se encuentran expresados en la misma moneda.
* Las demandas son máximas, por lo tanto, no se va a fabricar más de lo que se pueda vender.

**Variables Slack**: Sirven para convertir las restricciones en igualdades. Si una variable Slack vale 0, significa que esa restricción es limitante.

**Problemas de centros de producción.**

En estos problemas la producción se divide en distintos lugares físicos y en c/u de los cuales se realizan distintas partes del proceso.

**Problemas de mezcla.**

Situaciones en los cuales ciertos insumos se deben mezclar en cierta proporción para producir bienes para la venta.

**Problemas de armado.**

Situaciones en las cuales se deben fabricar un producto utilizando determinada cantidad de otros productos (cantidad y no porcentajes).

**Programación de metas.**

¿Cómo hacemos para poner una restricción que nos indique cuanto estamos por encima de un valor y cuanto por debajo? Comparamos lo que “transportamos” con la meta y una resta de variables que lo indican:

TRANSPORTADO – META = EXCESO – DEFECTO

EXCESO, DEFECTO >= 0

Si EXCESO ≠ 0 🡪 DEFECTO = 0 (y viceversa).

**Problemas con varios periodos.**

Ventas(i) + Stock Final(i) = Producción(i) + Stock Final(i-1)

(si sobra plata la pongo en un banco con 0.5% de interés y si falta debo pedir prestado pagando 1% mensual)

Con interés vencido:

CAJA\_INICIAL + INGRESOS – EGRESOS – CAJA\_A\_ALCANZAR = EXCESO– DEFECTO

Z(MAX) = EXC – DEF + 0.005 EXC – 0.01 DEF

Adelantado:

CAJA\_INICIAL + INGRESOS – EGRESOS – CAJA\_A\_ALCANZAR + 0.005 EXC – 0.01 DEF

= EXCESO – DEFECTO

Z(MAX) = EXC – DEF

Si no se aclara, es preferible ir por el vencido.

**Programación lineal entera.**

**Variables:**

* Discretas: productos/recursos enteros.
* Bivalentes o binarias:
  + De decisión: señalan alternativas posibles.
  + Indicativas: marcan el estado de una variable asociada.

Cuando se agregan al modelo las condiciones de producción, las variables Yi pasan a indicar si el producto se fabrica o no y hay que vincularlas con las de producción.

Si no agregamos las restricciones que vinculan a a las binarias Yi con las variables de producción Xi da cualquier cosa. Porque las variables indicativas NECESITAN RESTRICCIONES PARA PODER TOMAR EL VALOR QUE INDICA SU DEFINICIÓN.

ATENCIÓN: NO se puede definir una bivalente que tome valor 1 para indicar que sucede algo y pretender que mágicamente tome ese valor. Hay que poner restricciones.

**Costo diferencial por intervalo.**

HORAS = H1 + H2 + H3

X1 YH1 <= H1 <= X2 YH1

(X2+m) YH2 <= H2 <= X3 YH2

(X3+m) YH3 <= H3 <= M YH3

YH1 + YH2 + YH3 = 1

**Imagen que contiene Escala de tiempo

Descripción generada automáticamente**

**Función cóncava seccionalmente lineal.**

X = XA + XB + XC

GANANCIA X = $A \* XA + $B \* XB + $C \* XC

UA \* YB <= XA <= UA

UB \* YC<= XB <= UB \* YB

XC <= M \* YC

Texto

Descripción generada automáticamente

Texto

Descripción generada automáticamente

**Texto

Descripción generada automáticamente**

Imagen que contiene Texto

Descripción generada automáticamente

**CASOS:**

1. **Si Y2 vale 0, entonces Y1 no puede valer 1:** Y1 <= Y2
2. **Y1 vale 1 si MES = 12, sino vale 0:** 12 \* Y1 <= MES <= 11 + Y1
3. **OR:**  Yor <= Sum\_i (1,n) Yi <= n \* Yor
4. **AND**: n \* Yand <= Sum\_i (1,n) Yi <= (n – 1) + Yand
5. **Y1 distinto de Y2:** Y1 + Y2 = 1
6. **E1 solo puede tomar valores: 1, 2, 3, 5, 6, 7.**

E1 = 1\*Y1+2\*Y2+3\*Y3+5\*Y5+6\*Y6+7\*Y7

Sumatoria(Yi) = 1

1. **C1 sea mayor a 10**: C1 >= 10 + m
2. **E1 tome únicamente valores impares:** E1 = 2\*E2 + 1
3. **C1 mayor o igual a 50 si Y1=1 o 75 si Y1=0:** C1 >= 50\*Y1 + 75(1-Y1)
4. **E1 sea mayor a 100 o sino menor que 80.**

(100 + m) \* Y <= E1 <= (80 – m) + M\*Y

O

100 + m – M \* (1-Y) <= E1 <= 80 – m + M \* Y

1. **Si C1 > 0 entonces C1>= 22**

Dibujo de una persona

Descripción generada automáticamente con confianza baja

1. **E1 tome el máximo valor entre E2, E3 Y E4**

Imagen que contiene Word

Descripción generada automáticamente

1. **C1 tome el segundo menor valor entre C2, C3, C4 y C5.**

Texto

Descripción generada automáticamente

ES: C5 – M(1-Y’5) <= C1 <= C5 + M (1-Y5)

1. **Si C2 = 0 entonces C1=0.**



1. **C1 distinto de 13.**



1. **E1 tome el valor de C1 redondeado.**

C1 – 0,5 + m <= E1 <= C1 + 0,5

1. **E1 tome un valor igual a la cantidad de variables (E2, E3, E4 y E5) cuyo valor es mayor que 5.**

(5 + m) \* Y1 <= E2 <= 5\*(1-Y1) + M\*Y1



**Problema del viajante.**

Un viajante tiene que partir de su casa y visitar una serie de clientes antes de retornar finalmente a su casa. No puede dejar de visitar ningún cliente. Se conocen las distancias entre cada par de clientes y entre cada cliente y la casa del viajante. (Xij: distancia de i a j)

Viajante simétrico: no importa la dirección. (Xij = Xji).

Viajante asimétrico: importa la dirección.

Salgo a un solo lugar)

Llegó desde un solo lugar)

No realizo subtours)

**Ui – Uj + n \* Xij <= n – 1**

Hay 2 medios de transporte y mínimo se usan Z veces)

Xij = YAij + YBij. Ɐ i,j. i≠j.

Sum\_i (Sum\_j (XAij)) >= Z

Sum\_i (Sum\_j (Xbij)) >= Z

Variables para orden)

* No se puede visitar al cliente de la ciudad D si antes no se visitó al de C:

UD >= UG

* No se puede visitar al cliente de la ciudad F si antes no se visitó al de E o B.

UF >= UE – M \* Y

UF >= UB – M\* (1-Y)

**Problemas combinatorios**

Son aquellos en los cuales se desea determinar combinaciones optimas.

**Problemas de Distribución o Transporte.**

* Un conjunto de lugares donde c/u tiene disponible una cantidad de unidades de un producto (orígenes o suministros).
* Un conjunto de lugares donde c/u demanda una cantidad de unidades de un producto (destinos o demandas)
* Objetivo: determinar la cantidad de unidades de producto que c/origen envía a c/destino, para minimizar los costos de transporte totales en un cierto periodo de tiempo.
* Hipótesis principales: Producto homogéneo, costo lineal.

Xij: cantidad de unidades que el origen i envía al destino j.

Asumiendo que: Sum (Si) = Sum (Dj)

Z(Min) = Sum\_i Sum\_j (Cij Xij)

Sum(Xij) = Si (i = 1 a m)

Sum(Xij) = Dj (j = 1 a n).

Xij >= 0, Ɐi y Ɐj.

**MUY IMPORTANTE**: Existe un teorema que demuestra que, si todas las ofertas son números enteros y todas las demandas son números enteros, siendo todas las restricciones IGUALDADES, el problema de distribución o transporte tendrá como resultado que todas las variables tomaran valor entero, aunque no se les ponga la condición de que las variables tienen que tomar valor entero.

Por lo que el problema de distribución o transporte se resuelve como un problema con variables continuas. Es muy importante que la oferta total sea igual a la demanda total para que se pueda verificar que resolviéndolo como continua da resultado entero.

**Problema de transbordo.**

En este problema las unidades no son enviadas directamente desde los orígenes hacia los destinos, sino que van desde los orígenes hasta alguno de los centros de transbordo y desde este a alguno de los destinos.

* XOiTj: cantidad de unidades que el origen i envía al transbordo j.
* XTiDj: cantidad de unidades que el transbordo i envía al destino j.
* Se agrega una ecuación para c/transbordo que indica que todo lo que entro debe salir del mismo.

**Problema de asignación.**

Dados dos conjuntos A y B, ambos con n elementos. Encontrar el conjunto P donde c/elemento es un par (a,b) (a e A, b e B) tal que minimice una función de costo ∑ C(a,b).

* Restricciones: cada elemento de A y B deben aparecer en P exactamente una vez.
* Xij: 1 si i es asignado a j, 0 si no.
* Z = ∑ ∑ Cij Xij.
* ∑ Xij = 1 (Ɐi = 1 a m). ∑ Xij = 1 (Ɐj = 1 a m). Xij >= 0 Ɐi, Ɐj.
* Es un caso particular del problema de transporte, donde todas las ofertas y demandas son iguales a 1.

**Problemas de asignación cuadrática.**

Objetivo: colocar elementos en un lugar minimizando los costos 🡪 los costos son 2 y se multiplican.

* Yijkl = 1 si Xij = Xkl = 1, 0 si no.
* 2 Yijkl <= Xij + Xkl <= 1 + Yijkl
* Y en el funcional ponemos las Yijkl en lugar del producto Xij \* Xkl.

**Uncapacitated Facility Location (UFL).**

Se debe decidir donde abrir los depósitos y que proporción de la demanda de los clientes satisface cada deposito abierto.

* Xij: fracción de la demanda de la zona j que satisface el deposito ubicado en i.
* Yi: 1 si se establece el deposito i, 0 si no.
* Fi: costo anual fijo de establecer un deposito en el lugar i.
* Cij: costo de producción y distribución si el deposito que esta ubicado en i le proporciona al cliente j todo lo que este en demanda.

Minimizar: ∑ ∑ Cij Xij + ∑ fi Yi.

∑(i) Xij = 1, para todo j.

Xij <= Yi para todo i,j.

Xij >= 0, Yi e {0, 1}, para todo i,j.

**Problema de la mochila / Knapsack.**

¿Qué llevo y que dejo?

* Wi: peso del objeto i.
* Pi: aporte del objeto i a la mochila.
* C: capacidad de la mochila
* Xi: 1 si el objeto i está en la mochila, 0 si no.
* Sum\_i(1 a n) Wi \* Xi <= C
* Z(MAX) = Sum\_i(1 a n) Pi \* Xi.

Múltiples mochilas)

* Xij: 1 si el objeto i está en la mochila j.
* Sum\_j(1 a m) Xij <= 1
* Sum\_i(1 a n) Wi \* Xij <= Cj.
* Z(MAX) = Sum\_j Sum\_i Pi\* Xij.

Acotado (más de 1 objeto de cada tipo, bi indica cantidad de i))

* Xi (entera): cantidad de objeto de tipo i que se colocan en la mochila.
* Xi <= bi
* Sum\_i (1 a n) Wi \* Xi <= C
* Z(MAX) = Sum\_i Pi \* Xi.

**Problema de cobertura de conjuntos.**

* Problemas de grupos que se deben cubrir/particionar.
* Problemas de Packing.

Genéricamente:

* S = {1, 2, .., n} conjunto de elementos a cubrir.
* L = { (1,2), (2), … } conjunto formado por subconjuntos de S.
* Elegir elementos de L tales que:
  + Cobertura: se cubran todos los elementos de S con solapamiento
  + Partición: se cubran todos los elementos de S sin solapamiento.
  + Packing: se cubra la máxima cantidad de elementos de S que se pueda sin solapamiento.

Ejemplo:

Cubrir un vuelo a 5 ciudades (1, 2, 3, 4 y 5). Se definieron 6 posibles circuitos: A={1,2}, B={1,3,5}, C={2,4,5}, D={3}, E={1} y F={4,5}.

* Yi: 1 si se realiza el circuito i, 0 si no.

Cobertura) Determinar cuáles circuitos se realizaron, de modo tal que c/u de las 5 ciudades sea cubierta por al menos un circuito.

MIN: YA + YB + YC + YD +YE + YF

C1) YA + YB + Y3 >= 1

C2) YA + YC >= 1

C3) YB + YD >= 1

C4) YC + YF >= 1

C5) YB + YC + YF >= 1

Particionar) Se trata de cubrir todas las ciudades sin solapamiento (muchas veces no tiene solución)

MIN: YA + YB + YC + YD +YE + YF

C1) YA + YB + Y3 = 1

C2) YA + YC = 1

C3) YB + YD = 1

C4) YC + YF = 1

C5) YB + YC + YF = 1

Packing) Cubrir la mayor cantidad de elementos que se pueda sin solapamiento.

MAX: YA + YB + YC + YD +YE + YF

C1) YA + YB + Y3 <= 1

C2) YA + YC <= 1

C3) YB + YD <= 1

C4) YC + YF <= 1

C5) YB + YC + YF <= 1

Otro planteo) Queremos que visite la mayor cantidad de ciudades.

* Vi: 1 si se visitó la ciudad i, 0 si no.

MAX: V1 + V2 + V3 + V4 +V5

C1) YA + YB + Y3 = V1

C2) YA + YC = V2

C3) YB + YD = V3

C4) YC + YF = V4

C5) YB + YC + YF = V5

Calendarización.

Existen N tareas a realizar, cada una con un tiempo de procesamiento. Cada una de las tareas se puede realizar en cualquiera de las M maquinas. No existe restricciones en lo que respecta a la procedencia de las tareas. El objetivo sería definir en qué momento se debe procesar cada tarea y en que máquina, para poder completar todas las tareas lo antes posible.

* Iij: minuto en que empieza la tarea i en la maquina j.
* Fij: minuto en que finaliza la tarea i en la maquina j.
* FINAL: minuto en el cual finaliza la última tarea.

Como las tareas no se interrumpen: Fij = Iij + Tiempo de i en j.

Fi1 = Ii1 + T i en 1

Fi2 = Ii2 +T i en 2

Fi1 <= Ii2

Fi2 <= FINAL

(para todas las tareas i)

Z(MIN) = FINAL.

Para que no se hagan 2 tareas al mismo tiempo en la misma maquina:

Fi1 <= Ik1 + M Yanuloik

Fk1 <= Ii1 + M Yanuloki

Yanuloik + Yanuloki = 1

(para todo par de tareas ik)

**Método Simplex**

Para poder resolver con el método simplex un problema de PL tiene que cumplirse que:

* Todas las variables estén en el primer miembro.
* Todas las restricciones sean igualdades (usar slacks).

1. **¿Cómo encontramos un vértice?**

Se elige comenzar por el vértice en el cual las variables reales son cero. Esto tiene la ventaja de que las variables distintas de cero son canónicos distintos y son l.i.

El método simplex plantea un esquema de tabla para cada vértice:

Diagrama

Descripción generada automáticamente

1. **¿Cómo nos damos cuenta de que el vértice hallado es el óptimo?**

Tenemos que calcular para cada columna el valor de Zj-Cj para saber si llegamos al optimo o no.

* Cj es el coeficiente en el funcional de la variable de la columna
* Zj = a1j \* C1 + a2j \* C2 + .. + amj\*Cm (donde los Ck son los coeficientes de costo de las variables que están en la base).

1. **Una vez hallado un vértice. ¿Cómo encontramos otro?** El procedimiento debe ser coherente para no saltearnos ninguno.

Para hallar un nuevo vértice, un vector debe salir de la base y otro debe entrar.

Para determinar el que ingresa a la base elegimos uno de los que tiene un Zj-Cj que denota que no llegamos al óptimo (negativo si es para máx., positivo si es para min).

1. **¿Cómo determinamos quien sale de la base?**

Para eso se calcula, para cada fila, un coeficiente llamado tita. El tita se calcula como el cociente entre el elemento del vector que entra y el elemento del vector B en esa fila (B/Aj). Tita >= 0, sale el tita de menor valor (el primer recurso que se acaba).

1. **¿Cómo cambio la base?**
   1. Elegir el elemento pivote, que está en la intersección de la fila de la variable que sale con la columna de la variable que entra.
   2. Dividir la fila del pivote por el valor del pivote.
   3. Completar la columna del pivote con ceros.
   4. Aplicar la regla del pivote:

Gráfico, Diagrama, Gráfico de cajas y bigotes

Descripción generada automáticamente

**Teoremas fundamentales para el método simplex:**

* Dado un Z sujeto a AX=B y X>=0, si existe alguna columna j de la matriz A para la cual Zj-Cj < 0 (para un máx.) entonces puede construirse un conjunto de soluciones posibles tal que su Z es mejor que el actual, donde el límite superior de Z puede ser finito o infinito.
* Dado un Z de máximo sujeto a AX=B y X>=0, si para la solución básica factible X = (x1, x2, …, xn) las condiciones Zj-Cj >=0 se cumplen para todas las j=1, .., n, entonces:
  + X1 \* A1 + … + Xn \* An = B
  + X1 \* C1 + … + Xn \* Cn = Z
  + Constituyen una solución factible máxima.

En un problema de máximo:

* Si todos los zj - cj son > 0, estamos en el óptimo
* Las candidatas a entrar a la base son las variables con zj - cj < 0

En un problema de mínimo será lo contrario.

**Problemas de PL con restricciones de >:**

Lo que tenemos que hacer es fingir que el (0, 0) es solución. Para fingir que el (0, 0) es solución agregamos una variable sumando en la primera fila de tal manera que cuando estamos en el (0, 0) tenga dos variables mayores que cero. Pero esas variables son artificios, así que se llaman variables artificiales y se denominan con la letra griega m con un subíndice distinto para cada una (como tenemos una sola, la llamaremos μ).

**Texto

Descripción generada automáticamenteTexto

Descripción generada automáticamente**

Como vemos, en el Z la variable artificial tiene un coeficiente “-M” ¿por qué? Porque necesitamos que, en el óptimo, esa variable valga cero. Entonces se le pone un coeficiente con valor muy grande (M) y signo contrario a lo que busca el Z.

**Problemas de PL con restricciones de IGUALDAD:**

También hay que agregar una variable artificial en la restricción de igual para obtener el canónico que falta:

Texto

Descripción generada automáticamenteTexto

Descripción generada automáticamente con confianza media

**Casos particulares del método simplex:**

* **Soluciones alternativas óptimas:**

Cuando hay un Zj-Cj = 0 en una variable que NO está en la base y es el óptimo 🡪 HAY SOLUCIONES ALTERNATIVAS OPTIMAS.

Se hace entrar esa variable a la base para encontrar otro vértice óptimo.

* **Punto de degeneración o punto degenerado (sobredefinido):**

Lo que define que una tabla tiene el caso particular de punto degenerado es que hay una variable en la base que vale cero.

(Empate de titas mínimos 🡪 próxima tabla hay un PUNTO DEGENERADO).

* **Poliedro abierto:**

Cuando una variable quiere entrar a la base, pero no puede salir ninguna porque en la columna no hay ningún número mayor que cero 🡪 es POLIEDRO ABIERTO (no hay próximo vértice).

* **Problema incompatible:**

Cuando se llega al óptimo (no hay ningún Zj-Cj negativo, en un problema de máximo) pero en la base hay una variable artificial 🡪 EL PROBLEMA ES INCOMPATIBLE

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Texto, Carta

Descripción generada automáticamente

**Recursos saturados y Recursos con sobrante.**

Cuando un recurso tiene sobrante cero (la variable que indica su sobrante no está en la base o está en la base valiendo cero) se dice que el recurso está saturado.

Pareciera que si consigo uno solo de los recursos saturados no me sirve para nada pero hay una redistribución de recursos (deshace de un producto para prestarle a otro el recurso que NO conseguimos y que está saturado)

**Valor marginal y costo de oportunidad.**

Los zj - cj tienen significado:

* Si el zj - cj corresponde a una variable real del problema (por lo general son productos) se llama costo de oportunidad de ese producto (CO).
* Si el zj - cj corresponde a una variable slack del problema (por lo general son sobrantes de recursos) se llama valor marginal de ese recurso o restricción (VM).

**Costo de oportunidad**

* El costo de oportunidad es distinto de cero cuando la variable correspondiente al producto no está en la base (porque vale cero).
* El costo de oportunidad de un producto indica en cuánto va a desmejorar el funcional si tenemos la obligación de fabricar una unidad de ese producto.

**Valor marginal**

* El valor marginal es distinto de cero cuando la variable correspondiente al sobrante de recurso o slack de la restricción no está en la base (porque vale cero).
* El valor marginal indica en cuánto va a mejorar el funcional si esa restricción se afloja en una unidad.
  + Si la restricción es de menor o igual, aflojar la restricción implica aumentar el término independiente (por ejemplo: conseguir una unidad más de recurso)
  + Si la restricción es de mayor o igual, aflojar la restricción implica disminuir el término independiente (por ejemplo: disminuir la demanda mínima de un producto en una unidad).

**Rango de variación de los Cj:**

Imagen que contiene Diagrama

Descripción generada automáticamente

**IMPORTANTE**: El rango de un coeficiente Cj me dice cuánto puede variar ese coeficiente sin que la solución deje de ser óptima mientras todos los demás coeficientes y constantes del problema permanezcan sin cambios.

Que la solución siga siendo óptima implica que no cambie el valor de las variables reales y de las slacks. El valor del funcional, por supuesto no es el mismo si cambia algún Cj, los zj-cj (que dependen de los cj) tampoco serán los mismos

**Curva de oferta del producto.**

La curva de oferta representa, a los distintos valores que puede tomar el coeficiente Cj de ese producto en el Z, qué cantidad de producto Xj es conveniente fabricar.

Nos muestra cuánto estamos dispuestos a fabricar de un producto si su coeficiente en Z varía entre 0 e infinito.

Simplex funciona porque el recinto convexo y conexo, y el funcional es lineal.