



Projet de traitement numérique du signal

Anaïs Charpentier & Lucas Bolbènes

Département Sciences du Numérique - Première année
2022-2023

Table des matières

1	Introduction	3
2	Information binaire à transmettre	3
2.1	Information binaire générée aléatoirement	3
2.2	Récupération d'une image, biographie de Léopold Escande.	3
3	Modulation	5
3.1	Signal NRZ	5
3.1.1	Présentation du signal NRZ	5
3.1.2	Génération du signal NRZ	5
3.2	Signal modulé en fréquence	6
3.2.1	Génération du signal modulé en fréquence	6
3.2.2	Calcul théorique de la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence	7
3.2.3	Estimation de la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence	9
4	Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien	10
5	Démodulation par filtrage	10
5.1	Synthèse du filtre passe-bas	10
5.2	Synthèse du filtre passe-haut	11
5.3	Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61	11
5.4	Correction de l'erreur dû au retard	15
5.5	Utilisation des fréquences de la recommandation V21	15
6	Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21	15
6.1	Contexte de synchronisation idéale	15
6.1.1	Principe de fonctionnement de ce récepteur	16
6.1.2	Résultats obtenus	16
6.2	Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse	17
6.2.1	Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment	17
6.2.2	Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence	18
6.2.3	Résultats obtenus	19
7	Conclusion	19
8	Références	19

Table des figures

1	Portions de l'image, ordonnées	3
2	Image reconstruite	4
3	Signal modulé en fréquence	5
4	Représentation du signal NRZ	6
5	Représentation de la DSP du signal NRZ	6
6	Représentation du signal modulé	7
7	Densité spectrale de puissance du signal modulé.	9
8	Démodulation par filtrage.	10
9	Représentation de la réponse impulsionnelle du filtre passe bas	11
10	Représentation de la DSP du signal modulé et de la réponse en fréquence du filtre passe bas	12
11	Représentation du signal de sortie du filtre passe bas	12

12	Représentation de la DSP du signal de sortie du filtre passe bas	13
13	Représentation de la DSP du signal modulé et de la réponse en fréquence du filtre passe haut	13
14	Représentation du signal de sortie du filtre passe haut	14
15	Représentation de la DSP du signal de sortie du filtre passe haut	14
16	Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale.	15
17	Démodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse.	17

1 Introduction

L'objectif de ce projet était de comprendre les différentes étapes du fonctionnement d'un modem basique. Dans un premier temps nous parlerons de la modulation, qui consiste en la transformation de l'information numérique à transmettre en un signal que l'on peut propager physiquement. Ensuite, nous ajouterons manuellement du bruit au signal produit afin de simuler les dégradations qu'il peut subir durant son trajet sur le support physique. Enfin, nous aborderons la démodulation qui consiste à récupérer l'information binaire depuis le signal reçu par le récepteur. Nous implémenterons trois démodulateurs différents. Certaines données resteront constantes tout au long du projet, notamment la fréquence d'échantillonnage, notée F_e dans les scripts, qui sera fixée à 48 000 Hz ainsi que le débit de transmission, noté N , qui sera fixé à 300 bits par secondes.

2 Information binaire à transmettre

2.1 Information binaire générée aléatoirement

Pour tester notre modulateur et nos différents démodulateurs, il nous fallait nécessairement une information binaire sur laquelle travailler. C'est pour cela que nous avons, dans un premier temps, généré aléatoirement une information binaire.

2.2 Récupération d'une image, biographie de Léopold Escande.

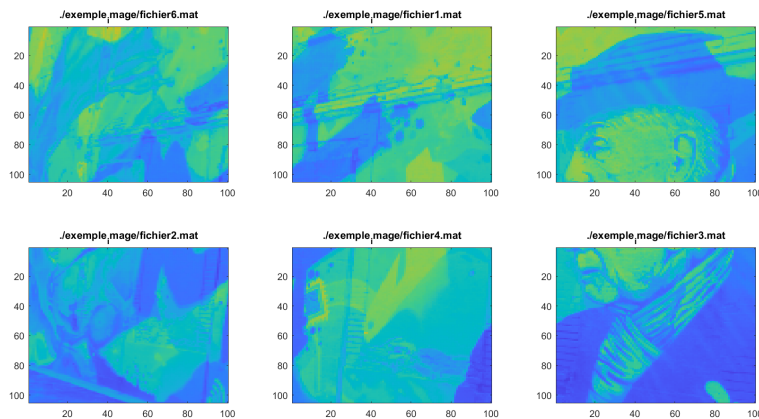


FIGURE 1 – Portions de l'image, ordonnées



FIGURE 2 – Image reconstruite

Une fois nos démodulateurs implantés, nous avons testé ses capacités en essayant de décoder une image qui était codé sur 6 paquets. Cela a fonctionné et nous avons pu reconnaître la photographie d'un mur sur lequel est représenté Léopold Charles Marie Jean-Baptiste Escande. Ce mur se trouve au parking à vélo à l'ENSEEIH. M. Escande nait le 1er Juin 1902 à Toulouse, 20 ans plus tard, il sort diplômé de l'Institut d'électrotechnique et de mécanique appliquée, elle-même créée en 1907 par Charles Camichel. Il devient alors un collaborateur de M. Camichel dans ses recherches en hydraulique. Il achève sa thèse en 1929 avant de succéder en 1941 à M. Camichel à la direction de Institut d'électrotechnique et de mécanique appliquée qui devient en 1947 l'École nationale supérieure d'électrotechnique et d'hydraulique. M. Escande est élu en 1953 membre correspondant de la section de Mécanique de l'Académie des sciences. Plus tard il deviendra Grand officier de la Légion d'honneur. Finalement il s'éteint en 1980 à Toulouse après avoir publié 17 ouvrages et 502 articles (dont 284 notes à l'Académie des sciences).

3 Modulation

La première étape du projet consiste à réaliser la modulation de fréquence, i.e. transformer l'information binaire à transmettre en un signal modulé en fréquence (exemple sur la figure 3).

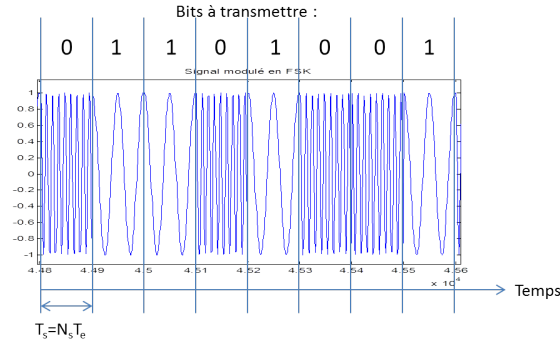


FIGURE 3 – Signal modulé en fréquence

3.1 Signal NRZ

3.1.1 Présentation du signal NRZ

$NRZ(t)$ est un signal de type NRZ polaire formé à partir de la suite de bits à transmettre en codant les 0 et les 1 par des niveaux 0 et 1 de durée T_s secondes. Il est nécessaire pour moduler notre signal.

3.1.2 Génération du signal NRZ

De manière plus concrète, le signal $NRZ(t)$ consiste à représenter chaque bits de l'information binaire durant T_s secondes, T_s étant le temps nécessaire pour un bit, calculé à partir du débit N de la manière suivante : $T_s = \frac{1}{N}$. Pour se faire on récupère le nombre d'échantillons nécessaires pour un bit noté N_s . Celui ci est calculé de la manière suivante : $N_s = T_s \cdot F_e$ avec F_e la fréquence d'échantillonnage. Enfin, on duplique chaque bits N_s fois en ligne dans un nouveau vecteur NRZ . En Matlab on utilisera la fonction *kron*.

On obtient alors le signal suivant :

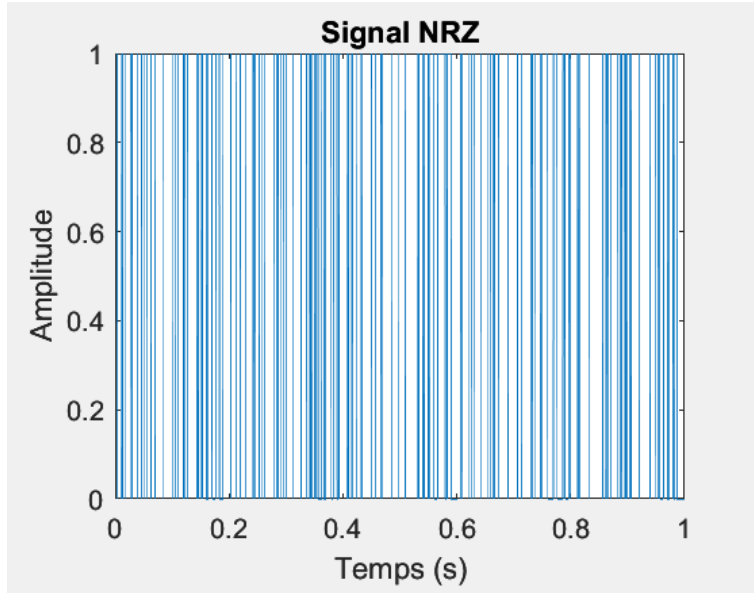


FIGURE 4 – Représentation du signal NRZ

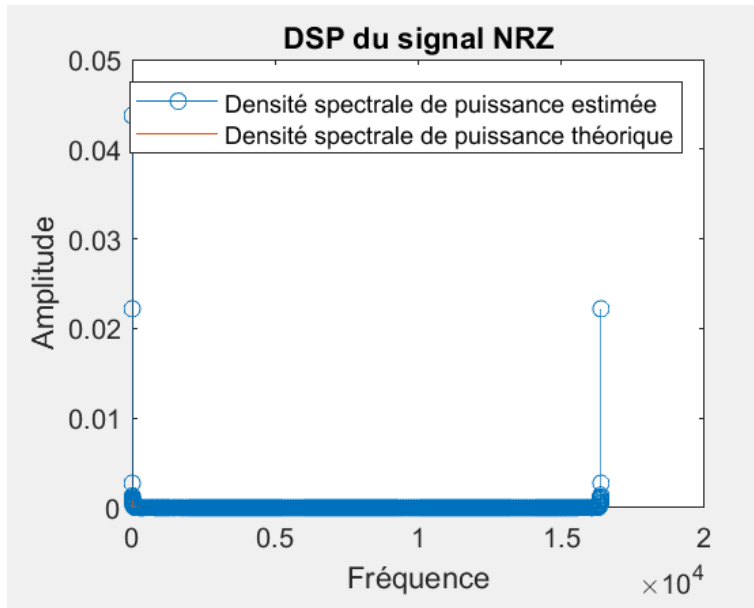


FIGURE 5 – Représentation de la DSP du signal NRZ

3.2 Signal modulé en fréquence

3.2.1 Génération du signal modulé en fréquence

Le signal modulé en fréquence $x(t)$ est généré de la manière suivante :

$$x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$$

ϕ_0 et ϕ_1 sont des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$ qui peuvent être obtenues sous matlab en utilisant $rand*2*pi$.

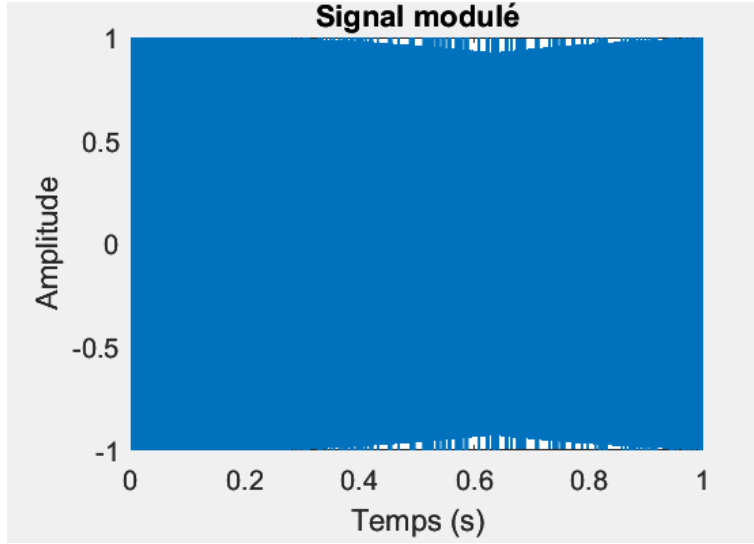


FIGURE 6 – Représentation du signal modulé

3.2.2 Calcul théorique de la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence

Commençons par deux calculs préliminaires dans des cas plus généraux qui nous aideront dans la suite. En utilisant les propriétés trigonométriques on a :

$$\begin{aligned}
 & E [\cos(2\pi f t + \theta) \cdot \cos(2\pi f(t - \tau) + \theta)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f t + \theta) \cdot \cos(2\pi f(t - \tau) + \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f t + \theta + 2\pi f(t - \tau) + \theta) + \cos(2\pi f \tau) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(4\pi f t - 2\pi f \tau + 2\theta) + \cos(2\pi f \tau) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos(4\pi f t - 2\pi f \tau + 2\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f \tau) d\theta \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} 2 \cos(4\pi f t - 2\pi f \tau + 2\theta) d\theta + \cos(2\pi f \tau) \cdot 2\pi \right) \\
 &\quad \text{Or, l'intégrale d'un cos sur deux périodes est nul, par conséquent,} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi f \tau)
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
& E [\cos(2\pi F_0 t + \theta_0) \cdot \cos(2\pi F_1 (t - \tau) + \theta_1)] \\
& \text{Or, les variables } \theta_0 \text{ et } \theta_1 \text{ sont indépendantes, donc,} \\
& = E [\cos(2\pi F_0 t + \theta_0)] \cdot E [\cos(2\pi F_1 (t - \tau) + \theta_1)] \\
& = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(2\pi F_0 t + \theta_0) d\theta_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(2\pi F_1 (t - \tau) + \theta_1) d\theta_1 \quad (2) \\
& \text{Or, l'intégrale d'un cos sur une période est nul, donc,} \\
& = 0
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer la DSP de $x(t)$ pour cela calculons d'abord la fonction d'auto corrélation de $x(t)$. Puisque c'est un signal aléatoire nous allons utiliser la formule de l'espérance.

$$\begin{aligned}
& E[(\cos(2\pi F_0 t + \psi_0) - NRZ(t) \cdot \cos(2\pi F_0 t + \psi_0) + NRZ(t) \cdot \cos(2\pi F_1 t + \psi_1)) \\
& \quad \cdot (\cos(2\pi F_0 (t - \tau) + \psi_0) - NRZ(t - \tau) \cdot \cos(2\pi F_0 (t - \tau) + \psi_0) + NRZ(t - \tau) \\
& \quad \cdot \cos(2\pi F_1 (t - \tau) + \psi_1))] \\
& \text{par identification,} \\
& = E[(a - b + c) \cdot (d - e + f)] \\
& = E[ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf] \\
& \text{par linéarité de l'espérance on a donc,} \\
& = E[ad] + E[ae] + E[af] + E[bd] + E[be] + E[bf] + E[cd] + E[ce] + E[cf] \\
& \text{et d'après l'équation (2),} \\
& = E[ad] + E[ae] + E[bd] + E[be] + E[cf] \\
& = \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau) (1 - E[NRZ(t - \tau)] - E[NRZ(t)] + E[NRZ(t - \tau)NRZ(t)]) \\
& + \frac{1}{2} \cos(2\pi F_1 \tau) E[NRZ(t)NRZ(t - \tau)] \\
& = \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau) (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + R_{NRZ}(\tau)) + \frac{1}{2} \cos(2\pi F_1 \tau) R_{NRZ}(\tau) \\
& = \frac{1}{2} R_{NRZ}(\tau) (\cos(2\pi F_0 \tau) + \cos(2\pi F_1 \tau))
\end{aligned}$$

Finalement en appliquant la transformée de Fourier,

$$\begin{aligned}
S_x(f) &= TF[R_x(\tau)] \\
&= \frac{1}{2} S_{NRZ}(f) [\frac{1}{2} (\delta(f - F_0) + \delta(f + F_0)) + \frac{1}{2} (\delta(f - F_1))] \\
&= \frac{1}{4} [S_{NRZ}(f - F_0) + S_{NRZ}(f + F_0) + S_{NRZ}(f - F_1) + S_{NRZ}(f + F_1)]
\end{aligned}$$

3.2.3 Estimation de la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence

Pour estimer la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence à l'aide du périodigramme associé à la commande *pwelch* en Matlab. On obtient alors la dsp suivante :

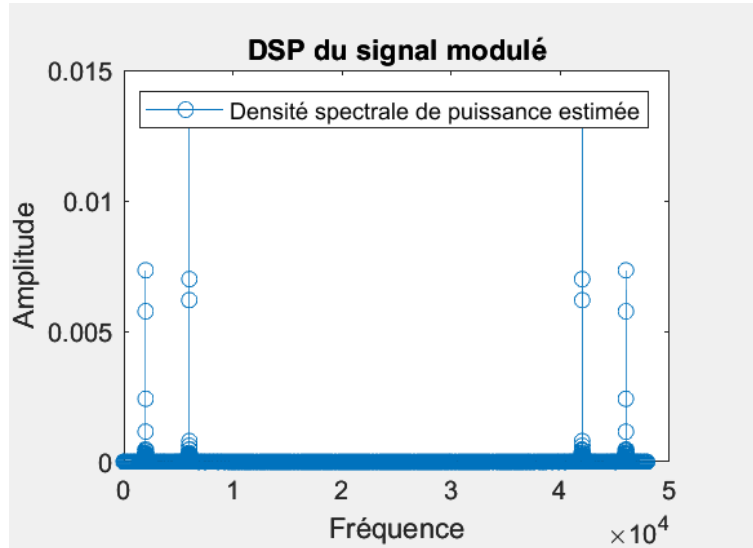


FIGURE 7 – Densité spectrale de puissance du signal modulé.

Comme d'après le calcul théorique on retrouve quatre pics à la valeurs de SNRZ (la densité spectrale de NRZ) en $f - F_0$ $f + F_0$ $f - F_1$ et $f + F_1$.

4 Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien

Nous allons considérer que le canal de propagation ajoute au signal émis un bruit que l'on suppose blanc et Gaussien et qui modélise les perturbations introduites. La puissance du bruit Gaussien à ajouter devra être déduite du rapport signal sur bruit (SNR : Signal to Noise Ratio) souhaité pour la transmission donné en dB :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_b}$$

où P_x représente la puissance du signal modulé en fréquence obtenue en prenant sa fonction d'auto-corrélation en 0 et P_b la puissance du bruit ajouté. C'est ce parametre qui sera réglé quand on modifiera SNR_{dB}

$$P_b = \frac{P_x}{10 \cdot \frac{SNR_{dB}}{10}}$$

5 Démodulation par filtrage

La figure 8 présente le récepteur implanté pour retrouver, à partir du signal modulé en fréquence bruité, le message binaire envoyé.

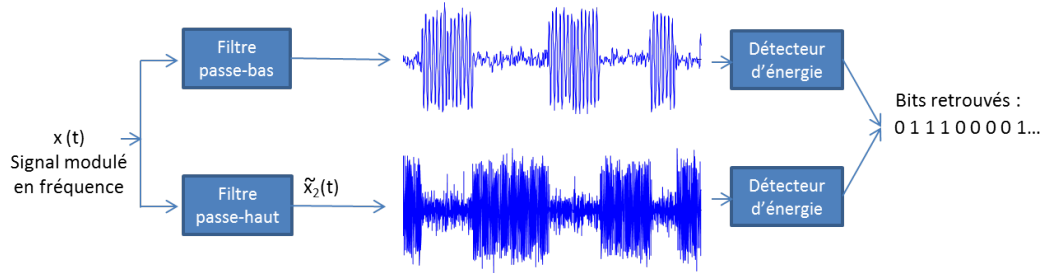


FIGURE 8 – Démodulation par filtrage.

Un filtre passe-bas permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence $F_0 = 6000\text{Hz}$, tandis qu'un filtre passe-haut permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence $F_1 = 2000\text{Hz}$. Une détection d'énergie réalisée tous les T_s secondes permet de récupérer, à partir des signaux filtrés, les bits 0 et 1 transmis.

5.1 Synthèse du filtre passe-bas

Un filtre passe-bas parfait peut être considéré comme une porte centrée autour de la fréquence nulle de largeur $2 \times F_c$ ici on prendra pour fréquence de coupure la moyenne entre 2000Hz et 6000Hz c'est à dire 4000Hz . Ainsi :

$$H_{ph}(f) = \Pi_{\frac{1}{2F_c}}(f)$$

Et grâce au tableau des transformées de Fourier on a :

$$I_{pb}(t) = \text{sinc}\left(4\pi \frac{t}{F_c}\right)$$

5.2 Synthèse du filtre passe-haut

A partir de la réponse impulsionnelle du filtre passe bas on peut déduire celle du filtre passe haut comme suit :

on nous donne la réponse en fréquence

$$H_{ph}(f) = 1 - H_{pb}(f)$$

d'où

$$I_{ph}(t) = TF^{-1}[H_{ph}(f)] = TF^{-1}[1 - H_{pb}(f)] = TF^{-1}[1] - TF^{-1}[H_{pb}(f)]$$

Et finalement

$$I_{ph}(t) = \delta(t) - I_{pb}(t)$$

5.3 Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61

Concernant le filtre passe-bas :

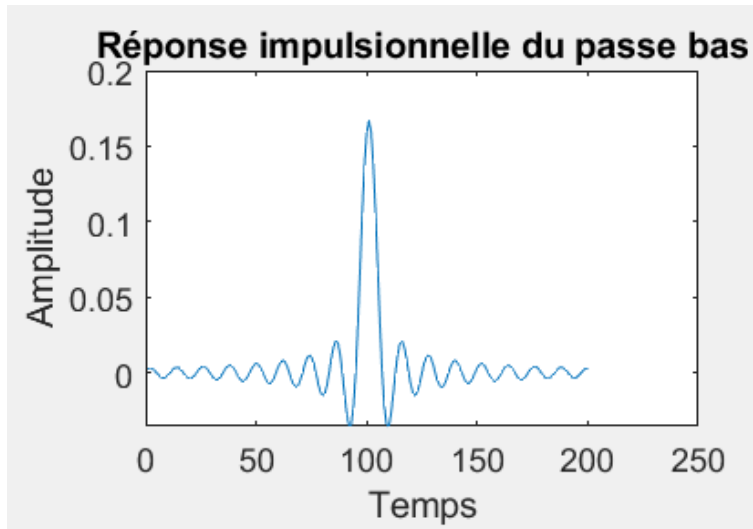


FIGURE 9 – Représentation de la réponse impulsionnelle du filtre passe bas

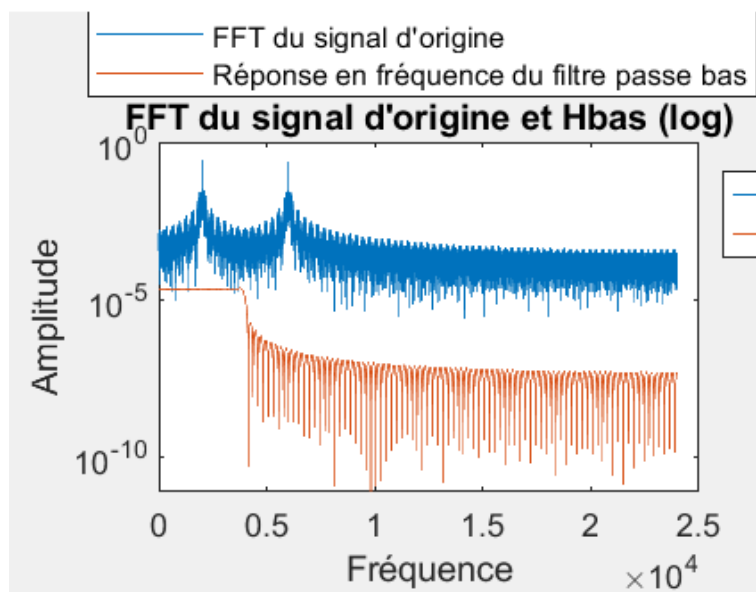


FIGURE 10 – Représentation de la DSP du signal modulé et de la réponse en fréquence du filtre passe bas

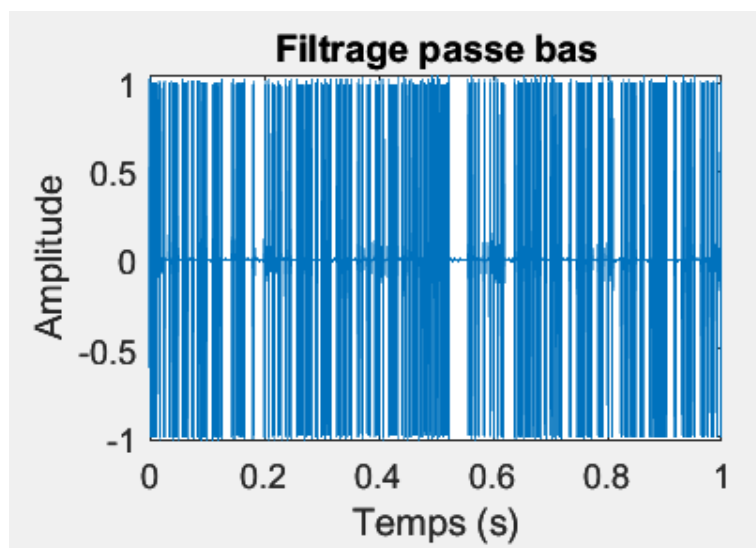


FIGURE 11 – Représentation du signal de sortie du filtre passe bas

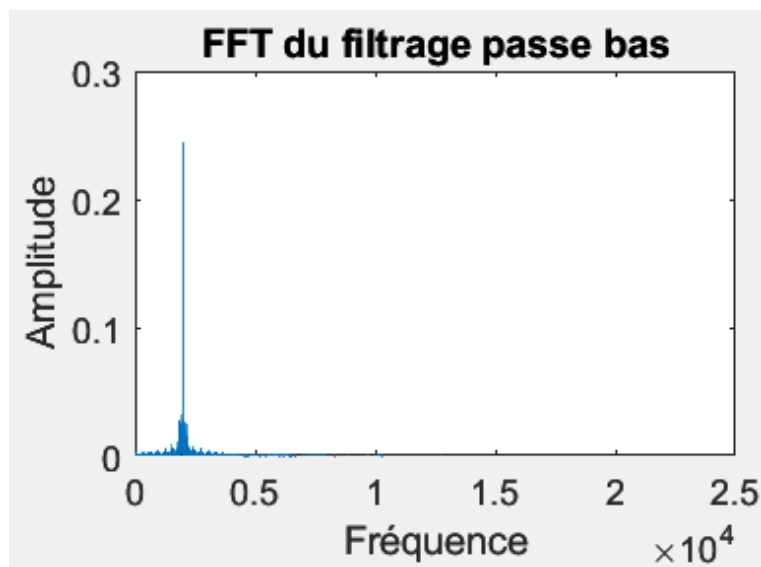


FIGURE 12 – Représentation de la DSP du signal de sortie du filtre passe bas

On note qu'en sortie du filtre passe bas on a bien gardé seulement le cosinus avec la fréquence la plus basse. En effet on observe seulement deux diracs en F_1 et $F_e - F_1$. Tandis que ceux qui représentent le cosinus de fréquence F_0 ont disparu.

Concernant le filtre passe-haut :

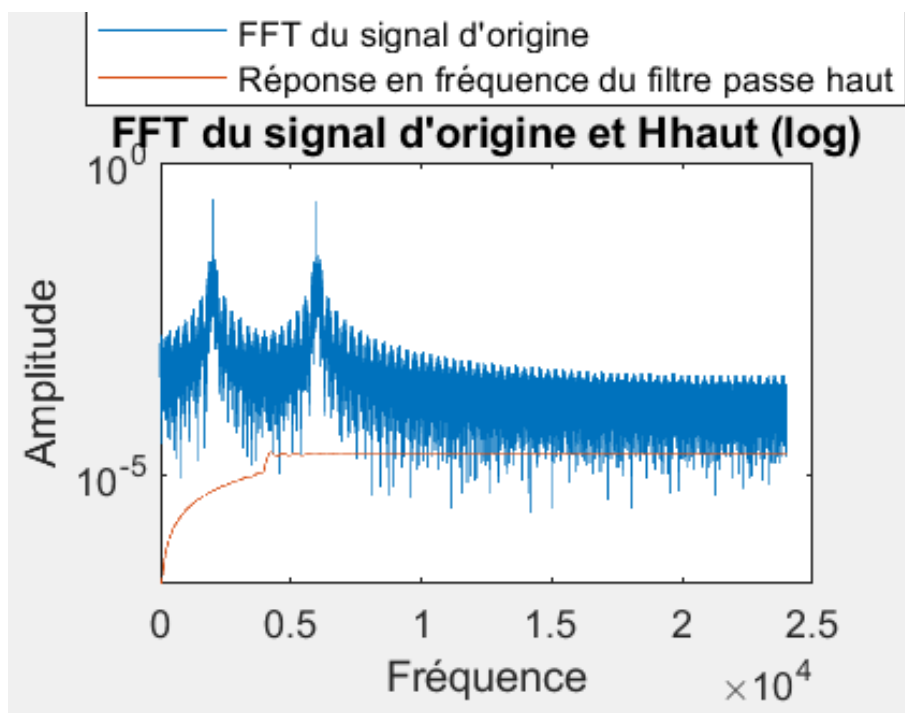


FIGURE 13 – Représentation de la DSP du signal modulé et de la réponse en fréquence du filtre passe haut

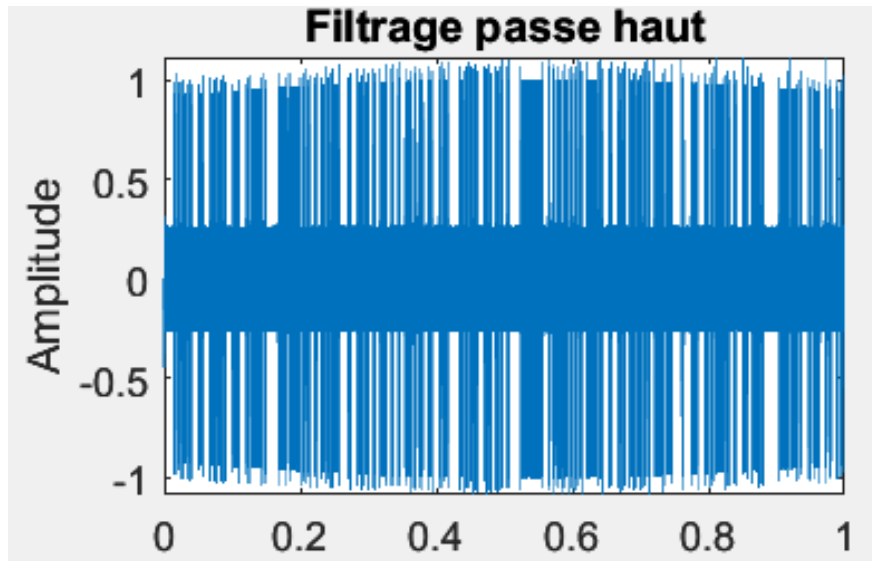


FIGURE 14 – Représentation du signal de sortie du filtre passe haut

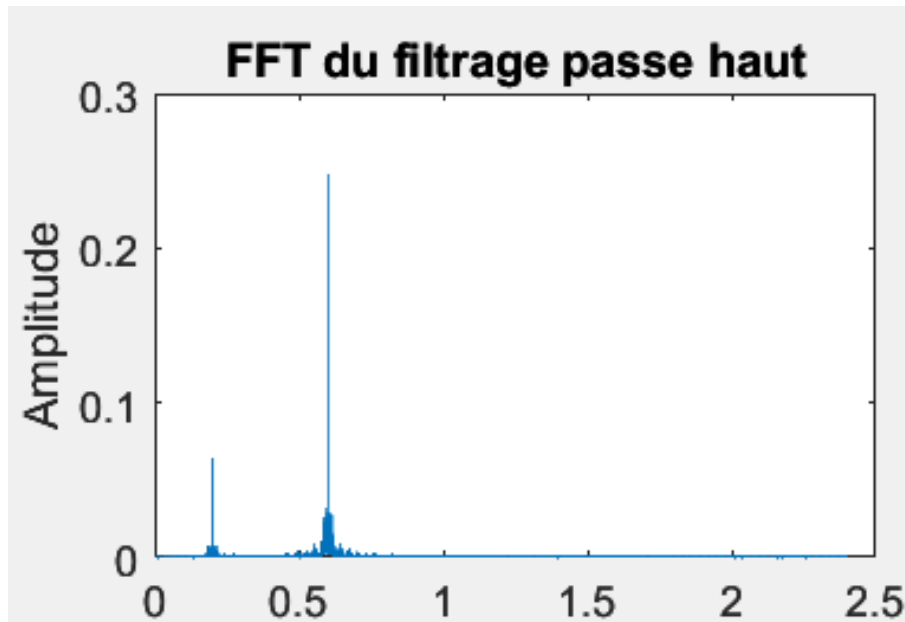


FIGURE 15 – Représentation de la DSP du signal de sortie du filtre passe haut

Au contraire, grâce au filtre passe haut on a bien gardé très majoritairement le cosinus avec la fréquence la plus haute. On observe ici seulement deux diracs importants en F_0 et $F_e - F_0$. Tandis que ceux qui représentent le cos de fréquence F_0 eux ont été fortement atténué.

Concernant l'impact sur les premiers points :
 Les 30 premiers points des signaux filtrés à l'aide de la fonction filter.m à l'ordre 61 sont quasi-nuls, c'est le retard dû à l'ordre du filtre. En effet le retard créé par un filtre dépend de son ordre :
 Pour les ordres impairs on a :

$$retard = Te \times \frac{(ordre - 1)}{2}$$

Donc ici le retard est de $30 \times Te$ et avec un échantillon tous les Te on a finalement bien 30 points touchés par le retard.

5.4 Correction de l'erreur dû au retard

L'ordre du nouveau filtre étant 201 on a un retard de $100Te$ qui décale toute nos données binaires pour la comparaison et qui crée donc un fort taux d'erreur binaire. Pour résoudre ce problème dû au retard créé par le filtre il suffit de reprendre le code en prenant en compte ce retard dans notre signal. C'est à dire qu'on retire les $\frac{(ordre-1)}{2}$ premiers échantillons (ceux qui sont faussés par le retard puisque qu'on échantillonne tous les Te) et pour garder la cohérence des tailles on re-ajoute le même nombre d'échantillons nuls à la fin du signal.

5.5 Utilisation des fréquences de la recommandation V21

En remplaçant F_0 et F_1 respectivement par 1180Hz et 980Hz comme indiqué par les recommandations V21 on maintient un taux d'erreur binaire assez proche de 0 ; bien qu'il soit un peu plus élevé que lorsque l'on avait pris pour fréquence 2000Hz et 6000Hz. Ce qui est normal puisque les fréquences des cosinus étant plus éloignées les filtres passe-haut et passe-bas fonctionnaient mieux. On peut donc affirmer que notre démodulateur fonctionne pour les recommandations v21.

6 Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21

6.1 Contexte de synchronisation idéale

La figure 16 présente le récepteur implanté afin de retrouver, dans un contexte de synchronisation idéale, le message binaire envoyé à partir du signal modulé en fréquence suivant la recommandation V21.

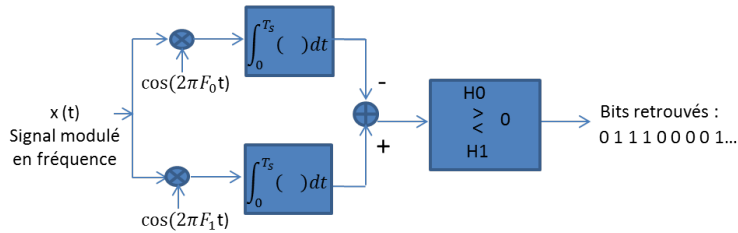


FIGURE 16 – Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale.

6.1.1 Principe de fonctionnement de ce récepteur

Calculons :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_s} \cos^2(2\pi F_0 t + \phi_0)^2 dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} (\cos(4\pi F_0 t + 2\phi_0) + 1) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(4\pi F_0 t + 2\phi_0)}{4\pi F_0} + t \right]_0^{T_s} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi F_0} (\sin(4\pi F_0 T_s + 2\phi_0) - \sin(2\phi_0)) + T_s \right) \\
&\text{En ordre de grandeur } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi F_0} (\sin(4\pi F_0 T_s + 2\phi_0) - \sin(2\phi_0)) \right) \text{ vaut} \\
&\frac{10^0}{10^4} = 10^{-4} < 10^{-2} \text{ ordre de grandeur de } T_s, \text{ d'où :} \\
&= \frac{T_s}{2}
\end{aligned}$$

Et de même :

$$\int_0^{T_s} \cos^2(2\pi F_0 t + \phi_0)^2 dt = \frac{T_s}{2}$$

Calculons également :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \phi_1) + \cos(2\pi(F_0 - F_1)t + \phi_0 - \phi_1) dt \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\sin(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \phi_1)}{2\pi(F_0 + F_1)} \right]_0^{T_s} + \left[\frac{\sin(2\pi(F_0 - F_1)t + \phi_0 - \phi_1)}{2\pi(F_0 - F_1)} \right]_0^{T_s} \right) \\
&\text{En ordre de grandeur } \frac{10^0}{10^4} = 10^{-4} \text{ et } \frac{10^0}{10^3} = 10^{-3}
\end{aligned}$$

Donc l'intégrale est de l'ordre de grandeur de 10^{-3} et on la négligera devant T_s

Or on sait que $x(t)$ vaut soit $\cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$ soit $\cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$ selon la valeur de NRZ donc en sortie d'une des deux branches on a forcément environ $\frac{T_s}{2}$ et en sortie de l'autre branche on aura une valeur de l'ordre de 10^{-3} donc est négligeable devant $\frac{T_s}{2}$. Après soustraction des deux intégrales on aura donc environ $-\frac{T_s}{2}$ si $x(t) = \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$ et $\frac{T_s}{2}$ si $x(t) = \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$. La comparaison à 0 suffit donc à différencier le signal modulé pour les bits de valeurs 1 et de valeurs 0.

6.1.2 Résultats obtenus

Avec ce nouveau démodulateur nous obtenons encore un très faible taux d'erreur binaire

6.2 Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse

Le problème de la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur est un problème important lorsque l'on réalise une transmission. Les deux doivent être parfaitement synchronisés en temps et en fréquence pour que le démodulateur implanté précédemment fonctionne, ce qui en pratique n'est bien entendu pas possible. Afin que le modem puisse continuer à fonctionner en présence d'une erreur de phase porteuse, celui-ci doit être modifié. La figure 17 présente un démodulateur permettant de s'affranchir de problèmes de synchronisation de phase entre les oscillateurs d'émission et de réception.

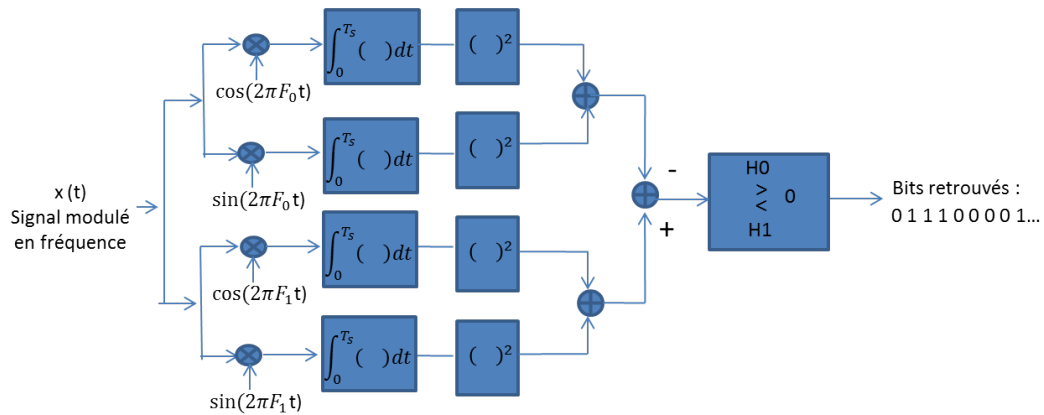


FIGURE 17 – Démodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse.

6.2.1 Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment

Lorsque l'on introduit une erreur de phase porteuse, notre modem cesse de fonctionner. En effet les deux cos du signal sont alors toujours multipliés par des cosinus de phase différentes et aucune branche ne prend une valeur plus grande devant l'autre. Ainsi après la soustraction on aura une valeur aléatoire proche de zéro et la comparaison afin de déterminer si le signal à cet instant correspond à un bit 1 ou 0 ne pourra plus se faire.

6.2.2 Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence

Afin d'expliquer le fonctionnement de ce demodulateur, commençons par quelques calculs :

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_1 + \theta_1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \theta_1)}{2\pi(F_0 + F_1)} \right]_0^{T_s} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\pi(F_0 - F_1)t + \phi_0 - \theta_1)}{2\pi(F_0 - F_1)} \right]_0^{T_s} \end{aligned}$$

Calcul équivalent pour l'intégrale de $\cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \cos(2\pi F_0 + \theta_0)$ au nom des variable près.

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \sin(2\pi F_1 + \theta_1) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \sin(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \theta_1) + \sin(2\pi(F_0 - F_1)t + \phi_0 - \theta_1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \theta_1)}{2\pi(F_0 + F_1)} \right]_0^{T_s} + \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2\pi(F_0 - F_1)t + \phi_0 - \theta_1)}{2\pi(F_0 - F_1)} \right]_0^{T_s} \end{aligned}$$

Calcul équivalent pour l'intégrale de $\cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \sin(2\pi F_0 + \theta_0)$ au nom des variable près.

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_0 + \theta_0) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos(4\pi F_0 t + \phi_0 + \theta_0) + \cos(\phi_0 - \theta_0) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(4\pi F_0 t + \phi_0 + \theta_0)}{4\pi F_0} \right]_0^{T_s} + \frac{T_s \cos(\phi_0 - \theta_0)}{2} \end{aligned}$$

Le calcul est équivalent pour l'intégrale de $\cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \cos(2\pi F_1 + \theta_1)$ au nom des variable près.

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \sin(2\pi F_0 + \theta_0) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \sin(4\pi F_0 t + \phi_0 + \theta_0) + \sin(\phi_0 - \theta_0) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(4\pi F_0 t + \phi_0 + \theta_0)}{4\pi F_0} \right]_0^{T_s} + \frac{T_s \sin(\phi_0 - \theta_0)}{2} \end{aligned}$$

Le calcul est équivalent pour l'intégrale de $\cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \sin(2\pi F_1 + \theta_1)$ au nom des variable près.

En considérant les mêmes ordres de grandeurs que dans l'explication du fonctionnement du démodulateur V21 parfait et grâce au passage au carré on a : $\frac{T_s^2}{4} \sin^2(\phi_0 + \theta_0)$ et $\frac{T_s^2}{4} \cos^2(\phi_0 - \theta_0)$ qui apparaissent respectivement sur les sous branches 2 et 1 si $x(t) = \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$ ou $\frac{T_s^2}{4} \sin^2(\phi_1 - \theta_1)$ et $\frac{T_s^2}{4} \cos^2(\phi_1 - \theta_1)$ sur les sous branches 4 et 3 si $x(t) = \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$. Ainsi en sommant les sous branches 4+3 et 1+2 on a $\frac{T_s^2}{4}$ qui apparait sur une des branches et α qui apparait sur une autre avec α négligeable par rapport à T_s . Ainsi on retrouve le même mode de fonctionnement que le démodulateur précédent.

6.2.3 Résultats obtenus

Les taux d'erreurs binaires sont proches de zéros

7 Conclusion

Ce projet nous a permis de comprendre les différentes étapes de la transmission d'un signal numérique. Malgré le fait qu'il soit surement très simplifié par rapport à la réalité, il nous a donné une idée concrète d'une des applications du Traitement du Signal. Nous avons globalement bien compris les détails abordés dans chaque partie. Notre seul défaut fût les quelques erreurs d'inattentions qui nous ont bloqués un certain temps. (L'oubli d'un ' pour transposer une matrice nous a coûté une séance). Pour conclure, nous avons apprécié ce projet et il serait intéressant d'aller plus loin.

8 Références

Cours de traitement numérique du signal 1A SN par l'excellente Thomas Nathalie.
Remerciement a Samy Labsir pour son aide précieuse.