ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Minimização de Autômatos Finitos

Prof. Marcelo S. Lauretto

marcelolauretto@usp.br
www.each.usp.br/lauretto

Comentários iniciais

- Um dos resultados teóricos mais importantes para a classe de linguagens regulares:

- “Toda linguagem regular possui um autômato finito determinístico, mínimo e único que a reconhece”

Comentários iniciais

- Importância desse resultado:
  - Foi demonstrado que esse resultado é válido apenas para a classe das linguagens regulares
  - Possibilita a construção de reconhecedores sintáticos extremamente compactos e eficientes
  - É possível automatizar a minimização de autômatos finitos
  - Autômato finito mínimo é único para cada linguagem regular, possibilitando a elaboração de novos métodos no estudo de linguagens formais
    - P.ex. pode-se verificar a equivalência de duas linguagens regulares através da redução dos correspondentes autômatos finitos às suas versões equivalentes mínimas

Método de minimização de estados: etapas

- Partimos do pressuposto de que o autômato a ser minimizado é determinístico

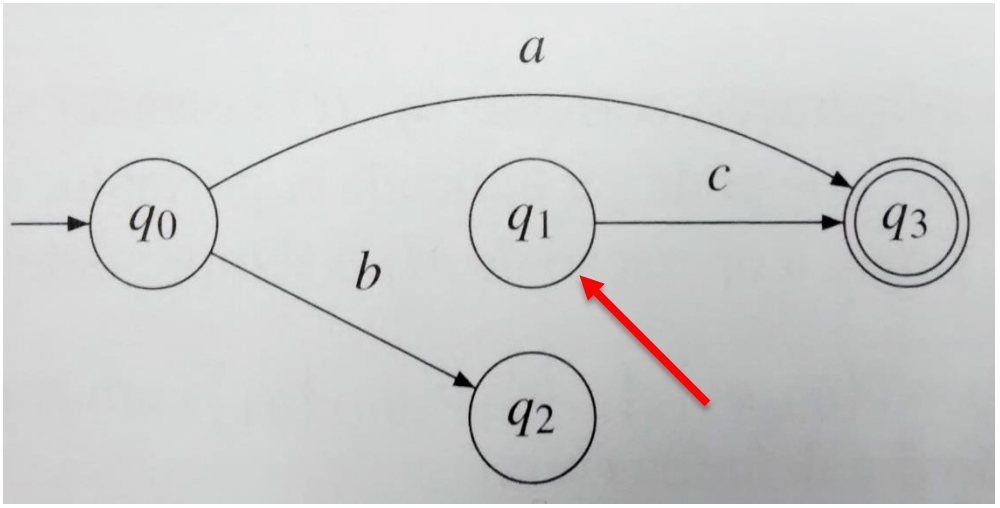
  ➔Não possui transições com cadeia vazia

- Processo de minimização do número de estados ocorre em duas etapas:

  1. Eliminação de estados inacessíveis e estados inúteis
  2. Agrupamento e fusão de estados equivalentes

Estados inacessíveis

- Um estado q_i é dito inacessível se não existe no autômato qualquer caminho, formado por transições válidas, que leve do estado inicial até q_i
- Estados inacessíveis não contribuem para o poder de reconhecimento do autômato, já que nenhuma cadeia $w \in \Sigma^*$ pode levar o autômato do estado inicial até esses estados.



Estados inacessíveis

- Algoritmo para eliminação de estados inacessíveis:

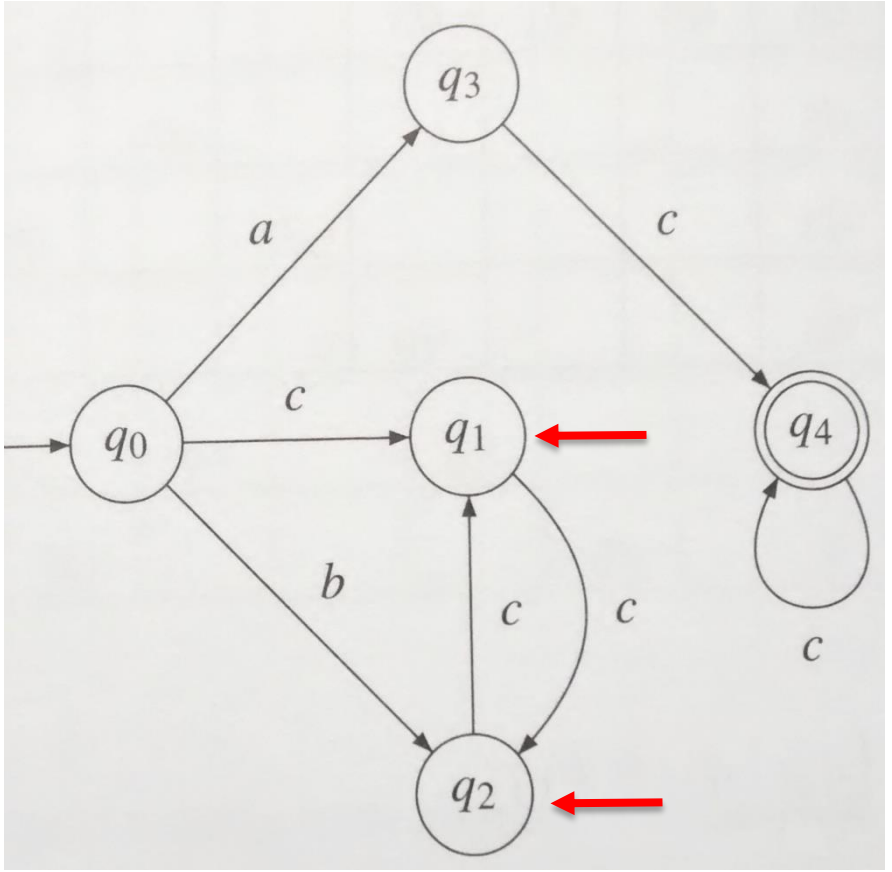
  Duas marcas para cada estado: acessível e finalizado; o método inicia com todos os estados em branco

  1. Marque o estado inicial como acessível (mas não como finalizado)
  2. Enquanto houver um estado q_i marcado como acessível mas não finalizado:
     - Para cada estado q_j ainda não marcado, tal que haja uma transição $q_i \xrightarrow{a} q_j$, marque q_j como acessível
     - Quando todos os estados vizinhos de q_i tiverem sido inspecionados, marque q_i como finalizado.
  3. Elimine todos os estados não marcados

  Obs: Busca pode ser em largura ou em profundidade

Estados inúteis

- Um estado q_i é dito inútil se não existe no autômato qualquer caminho, formado por transições válidas, que leve de q_i até algum estado de aceitação
  - Nenhuma cadeia $w \in \Sigma^*$ conduz o autômato de um estado inútil até um dos estados finais.



Estados inúteis

- Algoritmo para eliminação de estados inúteis:

  Duas marcas para cada estado: útil e finalizado; o método inicia com todos os estados em branco

  1. Marque todos os estados de aceitação como estados úteis (mas não como finalizados)
  2. Enquanto houver um estado q_i marcado como útil mas não finalizado:
     - Para cada estado q_j ainda não marcado, tal que haja uma transição $q_j \xrightarrow{a} q_i$, marque q_j como útil
     - Quando todos os estados satisfazendo a condição (a) tiverem sido inspecionados, marque q_i como finalizado.
  3. Elimine todos os estados não marcados

  Dica: usualmente, é mais eficiente criar um grafo transposto (invertendo as orientações das transições)

Equivalência entre estados

- Notação:
  - Dado um estado p qualquer do AFD e uma cadeia x, denota-se $(p, x) \vdash^* (q, \varepsilon)$ quando, partindo do estado p, o AFD parar sobre o estado q após consumir toda a cadeia x

- **Definição:** Considere um AFD $\mathrm{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ e dois estados $q_1, q_2 \in Q$. Diz-se que a cadeia $x \in \Sigma^*$ distingue q_1 de q_2 se $(q_1, x) \vdash^* (q_3, \varepsilon)$, $(q_2, x) \vdash^* (q_4, \varepsilon)$ e, de forma exclusiva, ou $q_3 \in F$ ou $q_4 \in F$
  - Em outras palavras, uma cadeia x distingue q_1 de q_2 quando, para ser integralmente consumida a partir de cada um desses dois estados, ela conduzir o autômato a um estado final em apenas um desses casos

Equivalência entre estados

- **Definição:** Dois estados q_1, q_2 são ditos k-indistinguíveis (denotado por $q_1 \equiv^k q_2$) se e apenas se não houver cadeia x, $|x| \leq k$, que permita distinguir q_1 de q_2

- De acordo com a definição acima, para quaisquer pares de estados $q_i, q_j \in Q$, valem:
  - $q_i \equiv^0 q_j$ se e somente se ambos forem de aceitação ou nenhum for de aceitação:
    $q_i \equiv^0 q_j \Leftrightarrow (q_i, q_j \in F \vee q_i, q_j \in Q - F)$
  - $q_i \equiv^k q_j$ se e somente se:
    - $q_i \equiv^{k-1} q_j$ e
    - $\forall\, a \in \Sigma,\ \ \delta(q_i, a) \equiv^{k-1} \delta(q_j, a)$

Equivalência entre estados

- **Definição:** Dois estados q_1, q_2 são ditos indistinguíveis ou equivalentes (denotado por $q_1 \equiv q_2$) se e apenas se eles forem k-indistinguíveis para todo $k \geq 0$

- A definição acima poderia sugerir que, para poder-se saber se dois estados são equivalentes, seria necessário verificar todas as cadeias de tamanho arbitrário → Impossível!

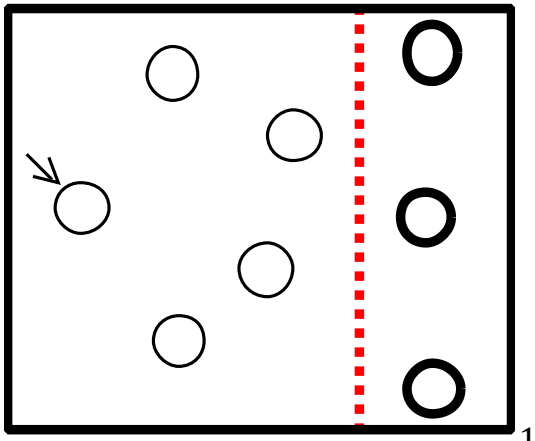
- O teorema a seguir garante a existência de um método que, em um número finito de passos, identifica os estados equivalentes.

Equivalência entre estados

- **Teorema:** Seja $M = (\mathrm{Q}, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD com n estados, e considere dois estados quaisquer q_1, q_2 de M.
  Então, $q_1 \equiv q_2$ se e somente se $q_1 \equiv^{n-2} q_2$.
  - Esse teorema afirma que, para se garantir a equivalência de dois estados em um AFD com n estados, é suficiente garantir sua $(n-2)$-indistinguibilidade, ou seja, não há necessidade de se considerar cadeias de comprimento maior que $n-2$
- Ideia da demonstração:
  - $q_1 \equiv q_2 \Rightarrow q_1 \equiv^{n-2} q_2$: imediato, pois $q_1 \equiv^{\mathrm{k}} q_2 \Rightarrow q_1 \equiv^{\mathrm{k}-1} q_2$
  - $q_1 \equiv^{n-2} q_2 \Rightarrow q_1 \equiv q_2$:
    - Trivial se o autômato tiver estados que são somente de aceitação ou de rejeição: nesse caso, quaisquer pares de estados q_1, q_2 são indistinguíveis, pois ambos levam qualquer cadeia w simultaneamente para um estado de aceitação ou de rejeição (assumindo que a função de transição $\delta: Q \times \Sigma \to Q$ seja total)

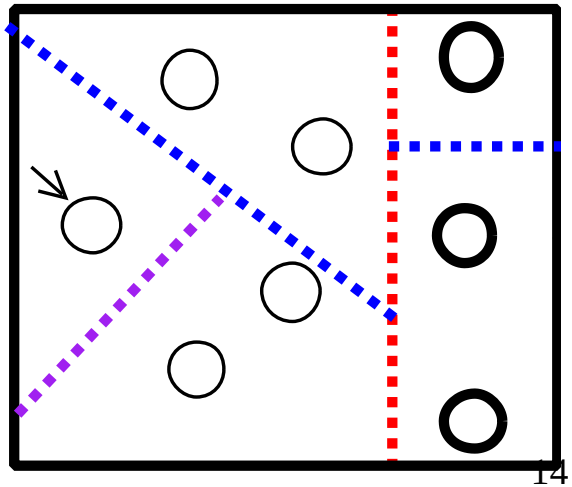
Equivalência entre estados

- Ideia da demonstração (cont):
  - $q_1 \equiv^{n-2} q_2 \Rightarrow q_1 \equiv q_2$ (cont):
    - Consideremos agora o caso mais geral em há tanto estados finais como não-finais em M.
    - De acordo com o critério $\equiv^0$, o conjunto Q pode ser particionado inicialmente em dois grandes grupos:
      - O primeiro formado pelos estados finais (F)
      - O segundo pelos estados não finais $(Q - F)$
      - Trata-se, portanto, do primeiro de uma série de sucessivos refinamentos do o objetivo de determinar as classes de equivalências de estados de M.



Equivalência entre estados

- Ideia da demonstração (cont):
  - $q_1 \equiv^{n-2} q_2 \Rightarrow q_1 \equiv q_2$ (cont):
    - Executa-se, em seguida, para cada um dos dois subconjuntos obtidos através de $\equiv^0$, seu refinamento (particionamento) através de relações $\equiv^i,\ i = 1,2,3$,etc.
    - Como M possui n estados (sendo alguns finais e outros não), o maior subconjunto de Q criado através de $\equiv^0$ possui no máximo $n-1$ estados; portanto, haverá no máximo $n-2$ refinamentos sucessivos de $\equiv^0$ gerando conjuntos de classes de equivalência, distintas umas das outras.



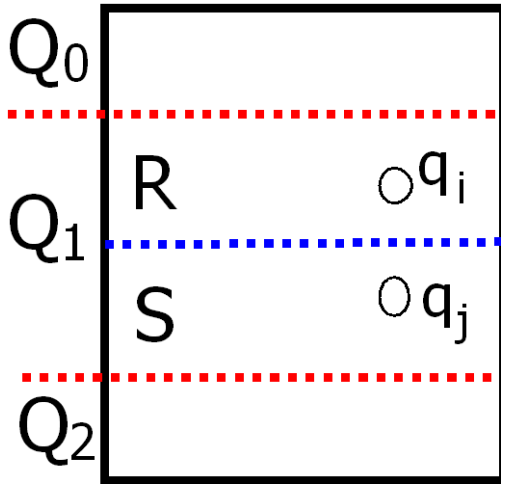
Equivalência entre estados

- Ideia da demonstração (cont):
  - $q_1 \equiv^{n-2} q_2 \Rightarrow q_1 \equiv q_2$ (cont):
    - Para completar a demonstração, basta provar que cada um dos $n-2$ particionamentos distintos sucessivos (no máximo) refere-se ao uso correspondente de cadeias de comprimento $1,2,\ldots,n-2$, para efetuar o teste de distinguibilidade do par de estados.
      - Consequentemente, não há possibilidade de ocorrer um novo particionamento distinto dos anteriores para cadeias de comprimento k se os particionamentos obtidos para cadeias de comprimento $k-1$ e $k-2$ se mostrarem idênticos.
    - Para provar essa afirmação, considere-se o conjunto de todas as classes de equivalência de M que satisfazem simultaneamente às relações $\equiv^k$ e $\equiv^{k+1}$. Nesse caso, essas mesmas classes de equivalência satisfazem a $\equiv^{k+2}$, $\equiv^{k+3}$ e assim sucessivamente.

Equivalência entre estados

- Ideia da demonstração (cont):
  - $q_1 \equiv^{n-2} q_2 \Rightarrow q_1 \equiv q_2$ (cont):
    - Considere-se, por exemplo, uma situação hipotética em que:
      i. a relação $\equiv^k$ particiona um certo conjunto Q em três subconjuntos Q_0, Q_1 e Q_2;
      ii. a relação $\equiv^{k+1}$ preserva o particionamento da relação $\equiv^k$ inalterado;
      iii. a relação $\equiv^{k+2}$ produz uma partição diferente, digamos Q_0, R, S e Q_2, com $R \cup S = Q_1$, $R \cap S = \emptyset$:

$$\equiv^k : Q_0, Q_1, Q_2$$
$$\equiv^{k+1}: Q_0, Q_1, Q_2$$
$$\equiv^{k+2}: Q_0, R, S, Q_2$$



    - Admitindo-se, por hipótese, que Q_1 seja particionado em duas novas classes de equivalência R, S, isso significa que existem $q_1, q_2 \in Q_1$ tais que $q_1 \not\equiv^{k+2} q_2$. Mas para que isso fosse verdade, seria necessário, de acordo com a definição, que:

1) $q_1 \not\equiv^{k+1} q_2$, ou

2) $\delta(q_1, a) \not\equiv^{k+1} \delta(q_2, a)$ para algum $a \in \Sigma$.

Equivalência entre estados

- Ideia da demonstração (cont):
  - $q_1 \equiv^{n-2} q_2 \Rightarrow q_1 \equiv q_2$ (cont):
    - A condição (1) é falsa, pois de acordo com a hipótese original, $q_1, q_2 \in Q_1$ e portanto $q_1 \equiv^{k+1} q_2$.
    - A condição (2) também é falsa, pois se $q_1 \equiv^{k+1} q_2$ então $\delta(q_1, a) \equiv^{k} \delta(q_2, a)$; como, por hipótese, as partições produzidas pelas relações $\equiv^{k}$ e $\equiv^{k+1}$ são idênticas, então $\delta(q_1, a) \equiv^{k+1} \delta(q_2, a)$.
    - Fica, portanto, demonstrado que:
      - Na hipótese de serem obtidos dois conjuntos idênticos de classes de equivalência para k e $k+1$, não haverá mais necessidade de se analisar a equivalência de tais classes para valores maiores do que k.
      - Para um autômato finito com n estados, haverá no máximo $n-1$ conjuntos distintos de classes de equivalência ($\equiv^{0}$ e os demais $n-2$), cada qual associado a cadeias de comprimento 0 até $n-2$, não havendo, portanto, necessidade de se examinar a equivalência de tais classes para cadeias de comprimento superior a $n-2$. □

Etapas para Minimização de Estados

- Remoção dos estados inacessíveis e inúteis
- Identificação dos pares de estados equivalentes entre si;
- Agrupamentos dos estados em classes de equivalência, cada uma identificada pelo seu representante
- Criação de um novo AFD (mínimo)
  - Novos estados correspondem aos representantes das classes de equivalências do AFD original;
  - Novas transições são obtidas do AFD original, substituindo a referência aos estados originais pelos respectivos representantes

Identificação dos pares de estados equivalentes - algoritmo

- Entrada: um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Saída: Uma partição $Q_0, Q_1, \ldots, Q_K$ do conjunto Q de estados, de tal forma que seus elementos correspondem às mais amplas classes de equivalências de estados existentes em Q.

1. Divide-se o conjunto original de estados de M nos dois subconjuntos que compõem sua partição inicial:
   - Subconjunto dos estados finais;
   - Subconjunto dos estados não finais.
   - Justificativa: Em um AFD, um estado final, qualquer que seja ele, é sempre distinguível de um estado não final (já que a cadeia vazia os distingue).
2. Essa partição inicial corresponde, portanto, ao resultado da aplicação da relação $\equiv^0$ ao conjunto Q.

(Continua)

Identificação dos pares de estados equivalentes - algoritmo

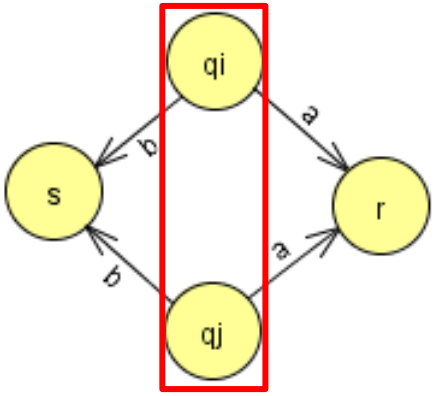
(Continuação)

3. Para cada um dos subconjuntos obtidos em (1), refiná-los em novas partições, segundo o critério:

- Dois estados q_i, q_j de um mesmo subconjunto Q_i, obtido de uma partição prévia do conjunto Q de estados, são equivalentes se e somente se:
- q_i e q_j têm transições definidas sobre o mesmo conjunto de símbolos $S \subseteq \Sigma$, e
- Para cada um desses símbolos a $\in S$:
  - $\delta(q_i, a) = \delta(q_j, a)$ ou
  - $\delta(q_i, a) \neq \delta(q_j, a)$ mas $\delta(q_i, a)$ e $\delta(q_j, a)$ são equivalentes.
- Caso contrário, q_i e q_j não são equivalentes e devem, portanto, ensejar uma partição de Q_i.

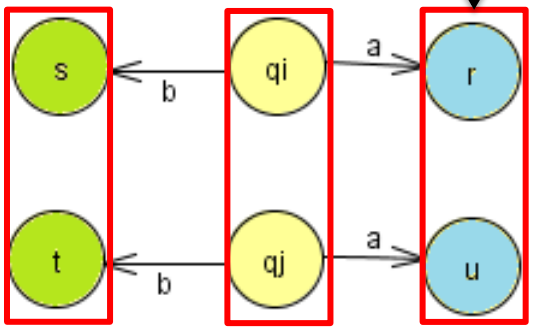
Identificação dos pares de estados equivalentes - algoritmo

- Representações dos casos que satisfazem à condição 2b do algoritmo:

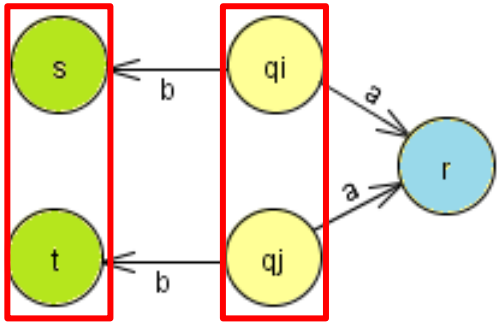


Transições com as mesmas entradas para estados idênticos

Estados equivalentes



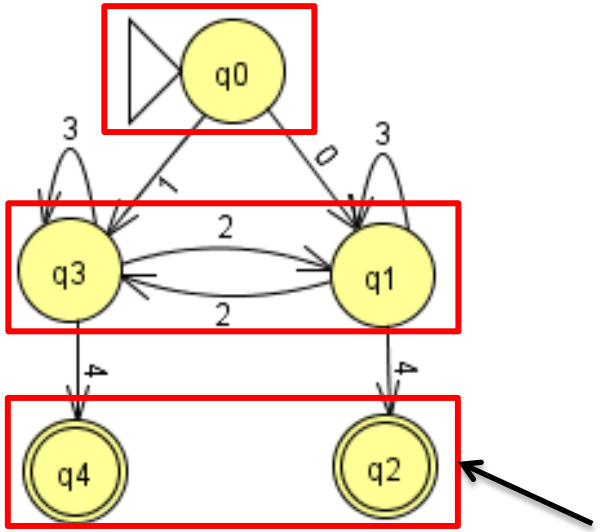
Transições com as mesmas entradas para estados equivalentes



Transições com as mesmas entradas para estados idênticos e equivalentes

Identificação dos pares de estados equivalentes - implementação

- Para a identificação de estados equivalentes, a estrutura de dados a ser preenchida é uma matriz binária $\mathrm{E}[i, j]$, indicando se os estados distintos
  q_i e q_j são ou não equivalentes
  - Exemplo: considere o AFD abaixo e respectiva matriz $\mathrm{E}[i, j]$



	q0	q1	q2	q3	q4
q0		0	0	0	0
q1	0		0	1	0
q2	0	0		0	1
q3	0	1	0		0
q4	0	0	1	0	

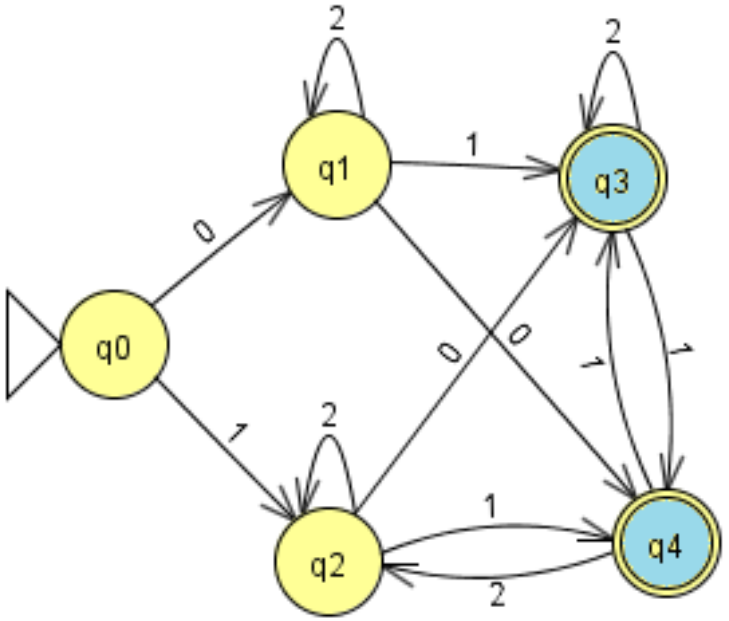
Estados equivalentes

Identificação dos pares de estados equivalentes - implementação

- $\mathrm{E}[i,j]$ é atualizada iterativamente, como segue:
  1. Separação dos estados finais e não finais:
     - Para cada par de estados q_i, q_j, se ambos forem finais ou ambos forem não finais, defina $\mathrm{E}[i,j] = \mathrm{E}[j,i] = 1$; caso contrário, $\mathrm{E}[i,j] = \mathrm{E}[j,i] = 0$
  2. Marcação dos estados que não tenham transições sobre os mesmos símbolos:
     - Para cada par de estados q_i, q_j tais $\mathrm{E}[i,j] = 1$, se houver algum símbolo $a \in \Sigma$ tal que $\delta(q_i, a)$ esteja definida mas $\delta(q_j, a)$ não esteja (ou vice-versa), então marque-os como não equivalentes: $\mathrm{E}[i,j] = \mathrm{E}[j,\mathrm{i}] = 0$
  3. Repita o procedimento abaixo até que nenhuma nova posição de M seja modificada:
     - Para cada par de estados q_i, q_j tais $\mathrm{E}[i,j] = 1$, se houver algum símbolo $a \in \Sigma$ tal que $\delta(q_i, a)$ e $\delta(q_j, a)$ não seja, equivalentes, então marque q_i, q_j como não equivalentes: $\mathrm{E}[i,j] = \mathrm{E}[j,i] = 0$

Identificação dos pares de estados equivalentes - implementação

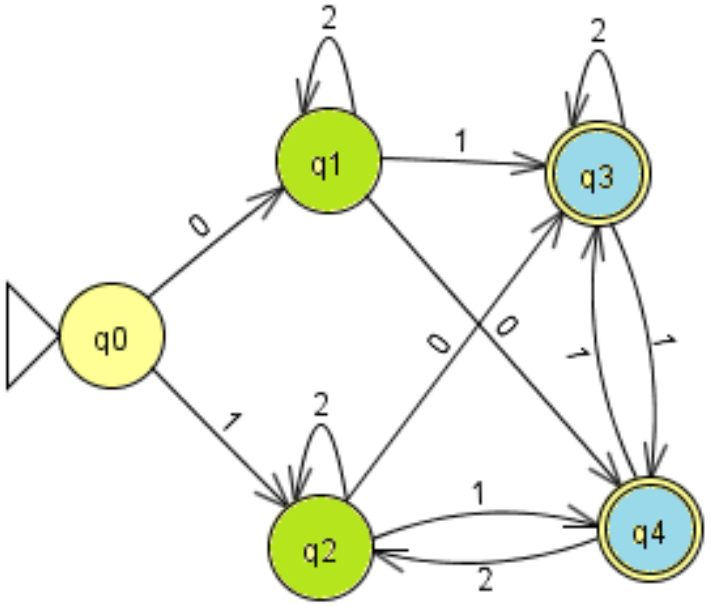
- Exemplo: considere o AFD abaixo e respectiva matriz $\mathrm{E}[i, j]$
  - Separação dos estados finais e não finais



	q0	q1	q2	q3	q4
q0		1	1	0	0
q1	1		1	0	0
q2	1	1		0	0
q3	0	0	0		1
q4	0	0	0	1	

Identificação dos pares de estados equivalentes - implementação

- Exemplo: considere o AFD abaixo e respectiva matriz $\mathrm{E}[i, j]$
  - Marcação dos estados que não tenham transições sobre os mesmos símbolos

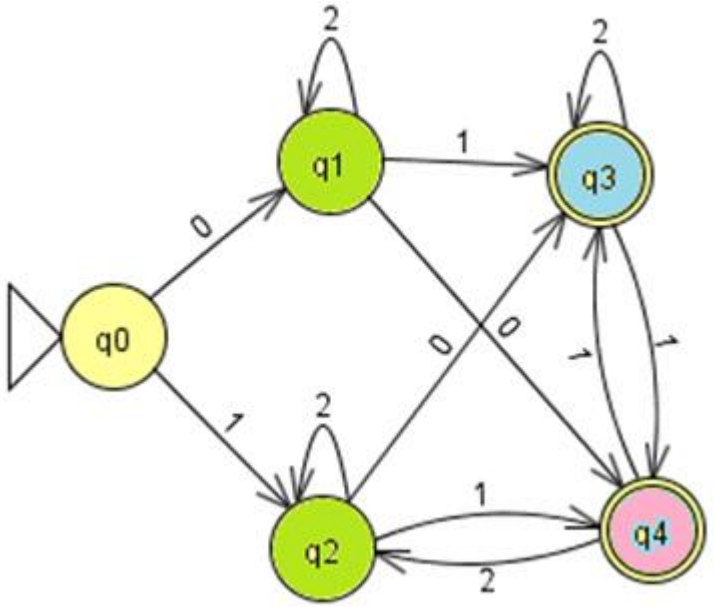


	q0	q1	q2	q3	q4
q0		0	0	0	0
q1	0		1	0	0
q2	0	1		0	0
q3	0	0	0		1
q4	0	0	0	1	

Estados q_1 e q_2 aceitam transições com o símbolo 2, enquanto q_0 não

Identificação dos pares de estados equivalentes - implementação

- Exemplo: considere o AFD abaixo e respectiva matriz $\mathrm{E}[i, j]$
  - Marcação dos estados que possuam transições não equivalentes



	q0	q1	q2	q3	q4
q0		0	0	0	0
q1	0		1	0	0
q2	0	1		0	0
q3	0	0	0		0
q4	0	0	0	0	

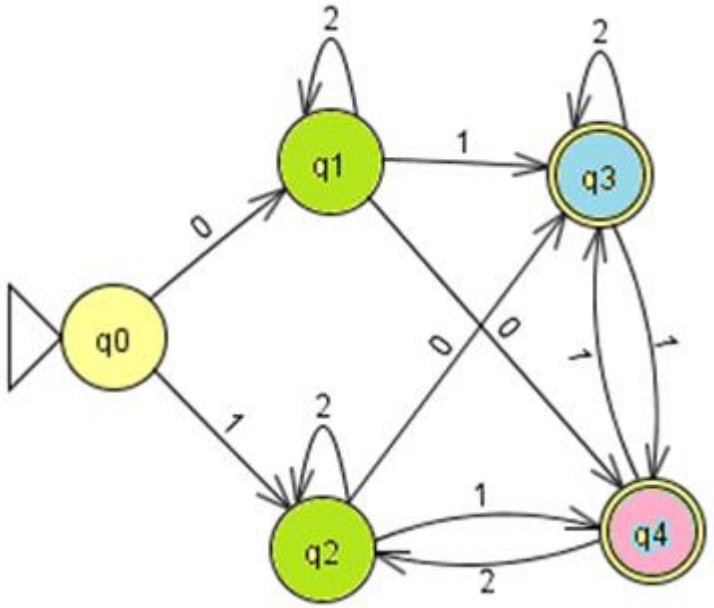
$\delta(q_3, 2)$ e $\delta(q_4, 2)$ não são equivalentes

Agrupamentos dos estados em classes de equivalência - implementação

- Identificação da classe de equivalência de cada estado do AFD é fornecida pelo vetor $\mathrm{rep}[i]$:
  - $\mathrm{rep}[i]$ = representante da classe de equivalência à qual o estado q_i pertence
- $\mathrm{rep}[i]$ é atualizado como segue:
  - Inicialize $\mathrm{rep}[i] = -1$, para todo q_i
  - Inicialize o contador $C = 0$
  - Enquanto houver algum estado q_i tal que $\mathrm{rep}[i] = -1$, faça:
    - Incremente o contador: $C = C + 1$
    - $\mathrm{rep}[i] = C - 1$
    - Para todos os estados q_j tais que $\mathrm{E}[i, j] = 1$, atribua $\mathrm{rep}[j] = \mathrm{rep}[i]$

Identificação dos pares de estados equivalentes - implementação

- Exemplo: Identificação das classes de equivalência:



	q0	q1	q2	q3	q4
q0		0	0	0	0
q1	0		1	0	0
q2	0	1		0	0
q3	0	0	0		0
q4	0	0	0	0	

Classes de equivalência:

q	rep
q0	0
q1	1
q2	1
q3	2
q4	3

Criação do novo AFD mínimo - algoritmo

- Entrada: um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Saída: um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ tal que $L(M') = L(M)$ e M' não contenha nenhum par de estados equivalentes
- Obter a matriz de estados equivalentes $\mathrm{E}[i, j]$ e o vetor de representantes $\mathrm{rep}[i]$, conforme descrito anteriormente.
- Construir M' tal que:
  - $Q' = \{0,1, \ldots, C-1\}$: conjunto das classes de equivalência (cada qual representada por um índice
  - δ': Para cada transição no AFD original, $\delta(q_i, a)$, atribua $\delta'(rep[i], a) = rep[\delta(q, a)]$
  - $q_0' = rep[q_0]$, ou seja, o estado correspondente à classe de equivalência que contém $q_0 \in Q$
  - $F' = \{rep[q] \mid q \in F\}$, ou seja, todas as classes de equivalência contendo estados finais no AFD original

Bibliografia

- RAMOS, M. V. M.; NETO, J. J.; VEGA, I. S. Linguagens Formais – Teoria, Modelagem e Implementação. Ed. Bookman, 2009.