

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos**

Calebe Gomes Teles 12553883

Gabriel Ribeiro Silvério 12551515

Gustavo Raul Weber Morelli 12551140

Lucas Carvalho 11850649

Professores: Dr. Agenor de Toledo Fleury e Dr. Renato Maia Matarazzo  
Orsino

**PROJETO FINAL**

Controle vetorizado de empuxo para um sistema ativo de pouso de um  
foguetete suborbital

São Paulo, SP

Janeiro de 2024

Calebe Gomes Teles 12553883

Gabriel Ribeiro Silvério 12551515

Gustavo Raul Weber Morelli 12551140

Lucas Carvalho 11850649

## PROJETO FINAL

Controle vetorizado de empuxo para um sistema ativo de pouso de um  
foginete suborbital

Trabalho acadêmico apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo como requisito parcial para aprovação na disciplina PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos pelos orientadores Prof. Agenor de Toledo Fleury e Prof. Renato Maia Matarazzo Orsino.

São Paulo, SP

Janeiro de 2024

## Resumo

Este trabalho possui como objetivo principal a modelagem de um foguete com controle direcional do vetor de empuxo para o sistema de pouso. Deste modo, serão apresentados os métodos e processos utilizados para sua modelagem, simulação, análise de estabilidade e resposta frente às linearizações das equações dinâmicas que governam o sistema.

**Palavras-chave:** Modelagem de sistemas; simulação de modelos; empuxo vetorizado; controle ativo.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Modelagem</b>	<b>11</b>
5.1	Modelo Físico . . . . .	11
5.2	Hipóteses Simplificadoras . . . . .	11
5.3	Graus de Liberdade . . . . .	12
5.4	Vetor de Estados . . . . .	12
5.5	Parâmetros do Sistema e Formulação Inicial . . . . .	13
5.6	Cinemática Translacional . . . . .	14
5.6.1	Matrizes de Rotação . . . . .	14
5.6.2	Transformação Homogênea . . . . .	15
5.6.3	Transformação de Velocidades . . . . .	16
5.7	Cinemática Rotacional . . . . .	16
5.7.1	Transformação Homogênea . . . . .	16
5.7.2	Transformação de Rotações . . . . .	17
5.8	Dinâmica do foguete . . . . .	17
5.8.1	Forças Aerodinâmicas . . . . .	17
5.8.2	Dinâmica Translacional . . . . .	19
5.8.3	Dinâmica Rotacional . . . . .	21
5.9	Linearização do Modelo . . . . .	22
5.9.1	Equilíbrio Dinâmico do Sistema . . . . .	22
5.9.2	Forma de Espaço de Estados . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Análises da Estabilidade e Respostas do Sistema</b>	<b>27</b>
6.1	Funções de Transferência . . . . .	27
6.2	Polos e Análise de Estabilidade . . . . .	27
6.3	Análise pelo Critério de Routh-Hurwitz . . . . .	29
6.4	Resposta do Modelo não Linearizado . . . . .	31
6.5	Resposta do Modelo Linearizado no Domínio do Tempo . . . . .	33
6.6	Resposta do Modelo Linearizado no Domínio da Frequência . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>39</b>
	<b>Referências</b>	<b>40</b>

---

## Lista de Figuras

1	Evolução do Investimento Anual Destinado a Programas Especias . . . . .	7
2	Sistema de Pouso da Sonda SLIM . . . . .	8
3	Modelo Físico do Foguete . . . . .	11
4	Indicação dos Graus de Liberdade do Sistema . . . . .	13
5	Ângulos de Euler - Rotação ( $zyz$ ) . . . . .	14
6	Decomposição da velocidade do foguete nos seus próprios eixos . . . . .	16
7	Deflexões da Tubeira e Vetorização do Empuxo . . . . .	23
8	Posicionamento dos Polos no Plano Complexo . . . . .	29
9	Comportamento das Rotações no Primeiro Cenário . . . . .	31
10	Comportamento das Rotações no Segundo Cenário . . . . .	31
11	Trajetórias em Diferentes Cenários . . . . .	32
12	Entrada para Simulação . . . . .	33
13	Resposta do Sistema Linear no Tempo . . . . .	34
14	Entrada para Simulação no Segundo Cenário . . . . .	34
15	Resposta do Sistema Linear no Tempo no Segundo Cenário . . . . .	35
16	Diagrama de Bode na saída $q$ . . . . .	37
17	Diagrama de Bode na saída $r$ . . . . .	38

# Lista de Tabelas

1	Parâmetros do Sistema . . . . .	13
2	Polos e Estabilidade do Sistema . . . . .	28

# 1 Introdução

Controle vetorial de empuxo (TVC, do inglês *Thrust Vector Control*) é um método no qual a exaustão de gases de um objeto é redirecionada com o intuito de alterar o sentido do vetor velocidade do objeto. Esta técnica vem sendo implementada desde 1930 para direcionar mísseis e manobrar aeronaves no espaço, onde superfícies aerodinâmicas não surtem efeito devido a baixa densidade ou não existência do ar ou outro fluido. Neste trabalho, será investigado como essa mesma tecnologia pode ser utilizada também para guiar a aterrissagem de um foguete, viabilizando desta forma aterrissagens em áreas específicas e reutilização dos módulos.

## Precisão de Pouso

Uma das motivações preeminentes para a investigação do Controle Vetorial de Empuxo (TVC) em sistemas de pouso de foguetes reside na imperativa busca pela precisão. O controle vetorial de empuxo possibilita ajustes minuciosos na orientação do foguete durante a fase de descida, um aspecto essencial para alcançar locais específicos de pouso, tais como plataformas de lançamento marítimas ou áreas previamente designadas para reutilização. A capacidade de realizar ajustes precisos na trajetória do foguete durante a descida é de primordial importância, dada a necessidade de assegurar a aterrissagem em alvos específicos com margens mínimas de erro.

A utilização do TVC nesse contexto técnico oferece uma contribuição inestimável para a consecução desses objetivos, uma vez que a tecnologia possibilita a manipulação direcional do vetor de empuxo do foguete. Essa capacidade de controle direcional, por sua vez, propicia a correção precisa da orientação da espaçonave durante a fase descendente, conferindo-lhe a destreza necessária para navegar com acurácia por meio de variáveis condições atmosféricas e geográficas.

Nesse sentido, o emprego do TVC, ao permitir ajustes direcionais refinados, não apenas viabiliza a aterrissagem em áreas específicas, mas também aprimora a eficiência do processo, mitigando as variações decorrentes de fatores externos. A habilidade de direcionar o empuxo de forma dinâmica durante a descida não apenas amplifica a assertividade no alcance de alvos específicos, mas também otimiza a adaptação do sistema de pouso a nuances ambientais, consolidando, assim, sua robustez operacional.

Dessa forma, a pesquisa e desenvolvimento do TVC no âmbito dos sistemas de pouso de foguetes delineiam-se como uma iniciativa instrumental para a consecução da precisão desejada, atendendo a requisitos cruciais de localização e orientação. Tal abordagem técnica destaca-se como um elemento essencial no panorama da exploração espacial, facultando avanços substanciais na capacidade de controle e manobra durante as fases críticas do pouso.

## Reutilização de Foguetes

A reutilização de foguetes tem se tornado uma meta essencial na indústria espacial moderna. Os custos associados à produção, simulação e testes são extremamente elevados, culminando em um dos setores de tecnologia de ponta com maiores despesas <sup>1</sup>.

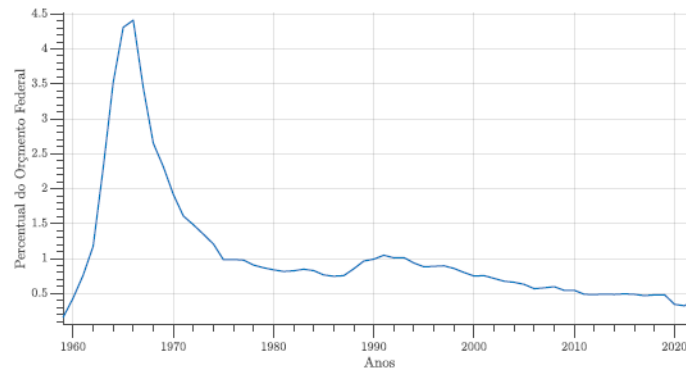


Figura 1: Evolução do Investimento Anual Destinado a Programas Especiais  
Fonte: NASA (2021)

Reflexo disso são os investimentos no programa espacial americano que, desde o primeiro pouso à lua, culminando na vitória na corrida tecnológica-espacial, vem sofrendo quedas vertiginosas ao longo dos anos, como observado na Figura 1. Por conseguinte, nota-se a relevância, tal qual no setor privado, com empresas como *SpaceX* e *BlueOrigin*, de conseguir recuperar o máximo possível do veículo de testes e missões, permitindo maior acurácia na validação do foguete construído, e até o reuso dos estágios dos foguetes em lançamentos distintos.

## Exploração Espacial

O aumento da importância da exploração espacial reflete uma mudança significativa no panorama global, impulsionada por avanços tecnológicos, descobertas científicas e aspirações humanas. A exploração espacial não é mais apenas uma busca científica e tecnológica, mas também desempenha um papel crucial em diversos aspectos, moldando o futuro da humanidade.

A exploração espacial oferece oportunidades para descobertas científicas que expandem nosso entendimento sobre o universo, desde a compreensão de planetas distantes até a busca por vida extraterrestre. Além disso, o espaço tornou-se um ambiente propício para a pesquisa e desenvolvimento de tecnologias inovadoras, muitas das quais têm aplicações práticas na Terra.

Um exemplo recente, lançado em 2023 é a sonda SLIM, desenvolvida pelo programa espacial japonês. Ele utiliza um sistema de pouso baseado em TVC com precisão de 100

<sup>1</sup>Dreier, Casey. "Historical NASA Budget Data". The Planetary Society



metros sob o terreno irregular da superfície lunar.

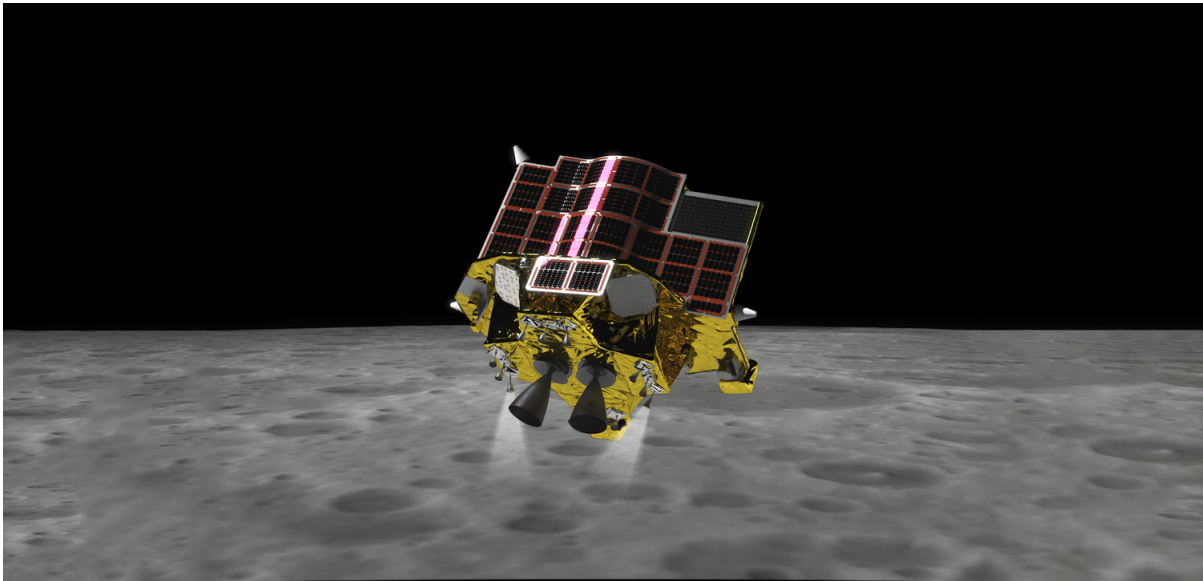


Figura 2: Sistema de Pouso da Sonda SLIM  
Fonte: JAXA (2023)

Isso indica a importância de desenvolvimento e estudo nesse campo, que, atualmente, permite o melhor avanço da indústria aeroespacial rumo à exploração de diferentes planetas, satélites e afins.

## 2 Objetivos

O foco essencial deste estudo reside na modelagem da dinâmica e do funcionamento durante a fase final do pouso de um foguete, incorporando um sistema de controle direcional do vetor de empuxo. Utilizando os princípios aprendidos em aulas sobre sistemas dinâmicos, a meta principal é realizar uma análise profunda da estabilidade do sistema e sua resposta a condições variáveis. A abordagem concentra-se em estabelecer uma modelagem matemática coesa, alinhada com a realidade física do problema, fornecendo uma base robusta para a implementação subsequente de um sistema de controle ativo, no contexto da disciplina de Controle e Aplicações (PME3481).

Nesse contexto, busca-se não apenas compreender a dinâmica do foguete durante a etapa crítica de pouso, mas também desenvolver uma base teórica que permita a aplicação prática de estratégias de controle. Esta abordagem visa não só contribuir para a compreensão teórica do tema, mas também servir como fundamento para aplicações práticas em futuras atividades espaciais. Além disso, destacamos que os autores deste trabalho são, em parte, membros do *Projeto Jupiter*, uma equipe dedicada ao *foguete modelismo* e desenvolvimentos espaciais na Escola Politécnica da USP. Como objetivo secundário, o estudo busca oferecer uma documentação inicial sobre o tema, proporcionando uma base

para investigações mais aprofundadas por outros membros da equipe no futuro.

### 3 Revisão Bibliográfica

Para melhor entendimento dos tópicos relacionados à modelagem e análise do sistema, os principais conceitos envolvidos neste trabalho serão definidos, bem como as principais referências consultadas para sua devida elaboração.

#### Modelo Aerodinâmico de um Foguete

Foram identificadas, especialmente na literatura de dinâmica de mísseis, em obras como as de Hensch (1986) e Siouris (2004), abordagens significativas relacionadas à modelagem aerodinâmica de veículos aeroespaciais esbeltos, categoria à qual pertencem os foguetes que os membros deste grupo estão desenvolvendo e pretendem abordar neste estudo. Além disso, o emprego do software Missile Datcom, desenvolvido ao longo das últimas décadas pela Força Aérea Americana, e que incorpora um amplo banco de dados de ensaios em túneis de vento, juntamente com modelos empíricos para a obtenção de coeficientes aerodinâmicos em relação ao número de Mach, ângulo de ataque e outros parâmetros, foi crucial na seleção de parâmetros e na obtenção de resultados mais confiáveis durante a simulação desenvolvida. Foi escolhida a obra de Siouris com base, tendo em vista a melhor aproximação com o formalismo utilizado nas disciplinas ministradas na Escola Politécnica.

Modelos de 6 graus de liberdade para os veículos mostrou-se comum no cenário de pesquisa de desenvolvimento aeroespacial, com trabalhos mais recentes como o de Lustig (2017) e Kisabo (2019) apresentando modelos em espaço de estados otimizados para posterior design de sistemas de controle. Além disso, a dissertação de um Pêndulo Invertido em 6 graus de liberdade, de Brobow (2019) se mostrou extremamente valiosa na definição de como desenvolver a dinâmica do sistema.

#### Simulação de Veículos Espaciais

Particularmente notável é o estudo de Niskanen (2013), realizado em Java, que oferece uma documentação detalhada sobre a modelagem das forças aerodinâmicas calculadas no simulador. Por outro lado, o trabalho de Ceotto (2021), desenvolvido em Python, se destaca pelo uso do formalismo do Método de Kane, incluindo considerações sobre os efeitos de massa variável decorrentes do funcionamento do motor-foguete, que, embora desprezados, são interessantes em relação a como descrever os diferentes tipos de forças em uma linguagem de programação qualquer.

## Controle Ativo de Empuxo

O domínio do controle de vetorização de empuxo, conhecido como *Thrust Vector Control (TVC)*, que constitui a principal entrada do sistema abordado neste estudo, tem ganhado destaque no cenário do foguetemodelismo universitário. Essa temática tem sido explorada em numerosas pesquisas recentes, exemplificadas nos trabalhos de Schinstock (1998) e Kisabo (2019). Tais estudos desdobram a orientação da tubeira em termos dos ângulos de arfagem e guinada, resultando na geração de dois sinais de entrada distintos.

## 4 Metodologia

O desenvolvimento de um foguete destinado ao pouso requer uma abordagem sequencial abrangente. Inicialmente, é crucial a modelagem precisa do corpo do foguete, tratando-o como um corpo rígido aerodinâmico.

Assim, a obtenção das equações cinemáticas e dinâmicas do processo de pouso constitui a próxima etapa. Estas equações são fundamentais para compreender e quantificar o comportamento do foguete durante a fase de aterrissagem. Esse estágio é vital para a compreensão das variáveis envolvidas e para o desenvolvimento de estratégias de controle eficazes.

O passo subsequente concentra-se no desenvolvimento do controle ativo do empuxo, uma fase crítica para direcionar o foguete durante a aterrissagem. A implementação de um sistema de controle eficiente é essencial para garantir uma aterrissagem segura e controlada, minimizando riscos e otimizando a precisão do processo. A inferência de diferentes cenários de simulação com base no modelo desenvolvido oferece percepções valiosas sobre o desempenho do foguete em diversas condições. Esses cenários contribuem significativamente para uma avaliação abrangente do sistema em situações variadas.

Finalmente, aplicam-se técnicas avançadas de análise de estabilidade no modelo desenvolvido. Essas análises proporcionam uma avaliação detalhada do comportamento dinâmico do foguete em condições variáveis. Os resultados obtidos são cruciais para validar e aprimorar o design, assegurando a estabilidade e o desempenho confiável do foguete durante a fase crítica de pouso. Esse processo integrado, que abrange modelagem, equacionamento, controle e análise, é essencial para o desenvolvimento bem-sucedido de um foguete de pouso controlado e estável.

**Acesso ao Repositório:** Todos os códigos desenvolvidos podem ser encontrados no GitHub: <<https://github.com/lucascarvalho10/pme3380/tree/main/projeto>>

## 5 Modelagem

### 5.1 Modelo Físico

Busca-se na proposta de trabalho desenvolver um modelo dinâmico de cinco graus de liberdade, que descreva a trajetória de um veículo aéreo axissimétrico durante o estágio final de pouso. O foguete estará sujeito a esforços decorrentes de três naturezas: propulsivas, gravitacionais e aerodinâmicas.

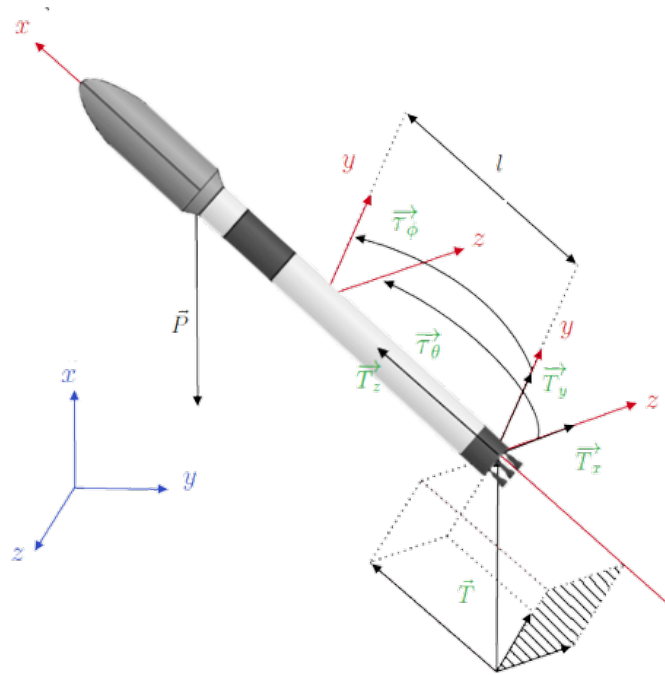


Figura 3: Modelo Físico do Foguete  
Fonte: Autores

Nota-se, neste modelo, a presença de duas bases, que representam os dois sistemas de coordenadas, um fixo, servindo de referencial inercial localizado na Terra, e um solidário, posicionado próximo do centro de massa do foguete, posição da qual é mais fácil o desenvolvimento das equações cinemáticas e dinâmicas.

No modelo é previsto a emissão de gases do bocal, gerando o empuxo, considerado nas três direções do espaço.

### 5.2 Hipóteses Simplificadoras

- Considerando baixa variação de altitude, a gravidade pode ser admitida constante no tempo e espaço. (CEOTTO et al., 2021)
- Efeitos causados por variação de massa serão desprezados (Foguetes suborbitais consomem pouco combustível e o pouso é de baixa duração), como foi bem desenvolvido e explicado em (CEOTTO et al., 2021).

- A estrutura do foguete se comporta como um corpo rígido, ou seja, todas as deformações na estrutura serão desprezadas. (SIOURIS, 2004)
- Existe axissimetria na estrutura do foguete, coincidindo com os eixos principais de inércia, ou seja, o foguete é, sob certo aspecto, análogo a uma barra esbelta, e seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria é desprezado e, portanto, omitido dos parâmetros do sistema.
- Efeitos de sustentação são desprezados devido às baixas velocidades, como é desenvolvido em (ALIYU et al., 2019). Assim, será apenas considerado o arrasto na direção do eixo de simetria do foguete, pois é nele em que haverá maior velocidade de escoamento dado as características de descida esperadas pelo foguete, em que velocidade laterais são muito baixas e, portanto, desprezíveis.
- O foguete estará descendo na posição vertical. Ou seja, parte-se da premissa que houve um controle prévio de outra origem que permitiu essa situação, a partir da qual o presente sistema será estudado
- Os efeitos da rotação própria, serão desprezados, pois nenhuma força afeta ou é afetada por esse ângulo. (BROBOW, 2015)

### 5.3 Graus de Liberdade

Como já dito, o sistema conta com cinco graus de liberdade: as três coordenadas espaciais de posição, que permitem localizar o foguete em qualquer região do espaço, e dois dos três *Ângulos de Euler*: *yawn* ( $\psi$ ) e *pitch* ( $\theta$ ). A ausência da rotação própria é justificada pela última hipótese simplificadora.

Tendo isso em vista, pode-se definir o vetor de graus de liberdade (1), que simplifica o conjunto de coordenadas generalizadas para o estudo do sistema.

$$X = [x \quad y \quad z \quad \theta \quad \psi] \quad (1)$$

Facilitando a visualização, toma-se emprestado a Figura 4, modificada conforme as necessidades, apresentando o que será considerado na movimentação do foguete.

### 5.4 Vetor de Estados

O vetor de estados considera, novamente, as coordenadas, como definido no vetor da Equação 1, mas também as velocidades do sistema. Em específico para o caso do foguete, pensando em uma aplicação futura para sistemas de controle, não serão consideradas as derivadas diretas dos ângulos de Euler; senão as rotações em torno dos referenciais dos eixos cartesianos, como descrito na Equação 2.

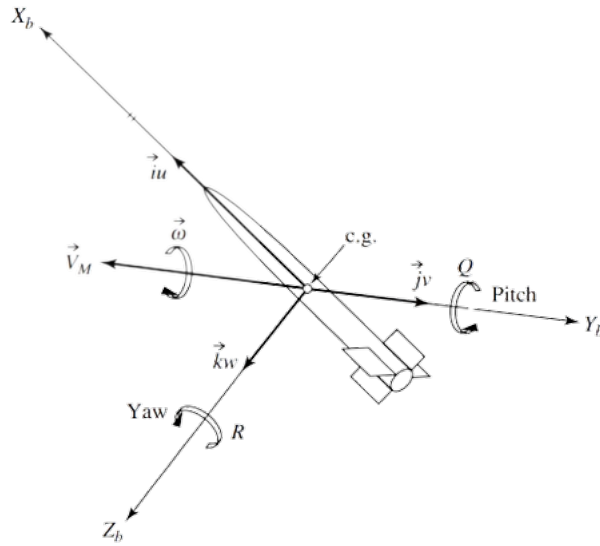


Figura 4: Indicação dos Graus de Liberdade do Sistema

Fonte: (SIOURIS, 2004)

$$x = [x \ y \ z \ \theta \ \psi \ u \ v \ w \ q \ r]^T \quad (2)$$

## 5.5 Parâmetros do Sistema e Formulação Inicial

Apenas reafirmando as hipóteses simplificadoras, que foram destacadas na seção 5.2, o foguete é suborbital e de pequeno porte. Por conseguinte, um exemplo simples e acessível são os foguetes desenvolvidos pelo *Projeto Júpiter*, da Escola Politécnica da USP.

Especificamente, os dados foram coletados do veículo *Juno 3*, projetado em 2022, os quais foram obtidos nos testes de voo. Todos os dados estão reunidos na Tabela 1.

Símbolo	Parâmetro	Valor
$X_{CM}$	Distância do centro de massa até o bocal	1,052 m
$X_{PE}$	Centro de Pressão	-0,261 m
$L$	Comprimento do foguete	3,304 m
$D_f$	Diâmetro do Foguete	0.127 m
$T$	Empuxo	230,57 N
$I_{yy}$	Momento de inércia do eixo y	15,07 $kg \cdot m^2$
$I_{zz}$	Momento de inércia do eixo z	15,07 $kg \cdot m^2$
$M$	Massa do foguete	23,545 kg
$g$	Aceleração da gravidade	9,8055 $ms^{-2}$
$\rho$	Massa específica do ar	1,091 $kgm^{-3}$
$C_d$	Coefficiente de Arrasto Aerodinâmico	0,432

Tabela 1: Parâmetros do Sistema

Sobre a formulação para as equações do sistema, em primeiro lugar, como destacado no Modelo Físico do foguete (Figura 3), existem duas bases para definir as grandezas do sistema, uma fixa e outra móvel. Tomando com base as duas, é possível definir formalmente as notações que serão utilizadas para a formulação do problema, tomadas emprestadas do trabalho desenvolvido por BROBOW, 2015.

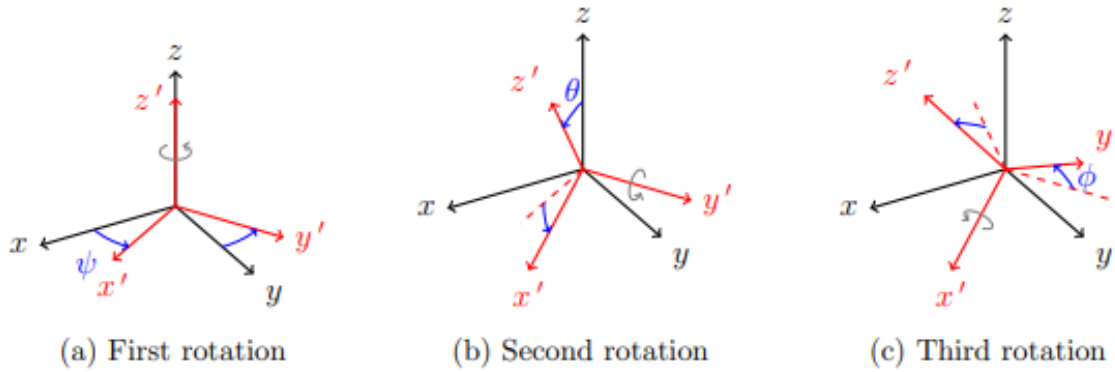


Figura 5: Ângulos de Euler - Rotação (zyz)

Fonte: BROBOW, 2015

Seguindo a notação de Siouris já apresentada (Figura 4), as grandezas cinemáticas elementares (velocidade e rotações) serão medidas a partir do sistema móvel, bem como as grandezas dinâmicas parametrizadas (empuxo gerado). O sistema fixo será utilizado para realizar cálculos como o peso do foguete e a força de arrasto aerodinâmicos, estas que serão devidamente transportadas entre as bases de acordo com a necessidade.

Dada essas definições, parte-se para o desenvolvimento das equações cinemáticas e cinéticas do foguete.

## 5.6 Cinemática Translacional

A cinemática de translação do foguete pode ser descrita a partir de dois dos ângulos de Euler definidos ( $\psi$  e  $\theta$ ), bem como pelos deslocamentos do seu centro de massa ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Com isso, é possível obter as matrizes que transformam coordenadas fixas em coordenadas móveis, tal qual o oposto.

### 5.6.1 Matrizes de Rotação

Existem as três matrizes de rotação associadas a  $\psi$ ,  $\phi$  e a  $\theta$ . Dado isso, todas as rotações absolutas do corpo rígido podem ser perfeitamente descritas. Como ficou desenvolvido no trabalho de Brobow, não existiria, formalmente, necessidade de considerar a rotação própria, dado a simetria simplificadora. Não obstante, em seu trabalho de desenvolvimento de um veículo de testes com controle vetorizado de empuxo (BROBOW, 2022),

a formulação é feita também considerando esse grau de liberdade, mas que, futuramente, como será visto também aqui, terá o tratamento adequado.

Como algumas forças externas, como o peso, estão descritas em uma coordenada absoluta e fixa no espaço, elas devem ser transformadas para a base móvel solidária do corpo para execução de cálculos. Dado isso, essas matrizes respeitam, algebricamente, essa transformação, que transporta informações da base fixa para a móvel.

$$R_{x\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad R_{y\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad R_{z\Psi} = \begin{bmatrix} c_\Psi & s_\Psi & 0 \\ -s_\Psi & c_\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Notar que, na Figura 3, no modelo físico, as duas bases são positivas, e, dada a transformação necessária, as identidades trigonométricas e os valores estão bem definidos.

### 5.6.2 Transformação Homogênea

A transformação homogênea, então, fica definida como o produto ordenado das matrizes de rotação descritas na Equação 3, na ordem especificada. Com isso:

$$R = R_{x\phi} \cdot R_{y\theta} \cdot R_{z\Psi} \quad (4)$$

Notar que a matriz  $T_{IB} = R^{-1} = R^T$  é ortonormal, ou seja, a sua transposta é igual à sua inversa. Dado isso, vale as seguintes matrizes:

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\theta s_\phi s_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi c_\psi + s_\theta s_\phi s_\psi & c_\theta s_\phi \\ c_\phi c_\psi s_\theta + s_\phi s_\psi & -c_\psi s_\phi + c_\phi s_\theta s_\psi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$T_{IB} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\psi s_\theta s_\phi - c_\phi s_\psi & c_\phi c_\psi s_\theta + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & c_\phi c_\psi + s_\theta s_\phi s_\psi & -c_\psi s_\phi + c_\phi s_\theta s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ou seja, por verdade,  $T_{IB}$  corresponde a essa mudança de base, dada da seguinte forma, dado um vetor  $A$  genérico no espaço:

$$A_{movel} = R \cdot A_{fixo} \quad (7)$$

$$A_{fixo} = T_{IB} \cdot A_{movel}$$

Analogamente, dados os seus sensores, é mais simples, também, obter velocidades translacionais do foguete medidas dele mesmo em relação ao seu referencial móvel do que fixo na Terra.



### 5.6.3 Transformação de Velocidades

Dadas as decomposições de velocidades no foguete, é plausível conseguir transformar entre os sistemas utilizando as matrizes de rotação.

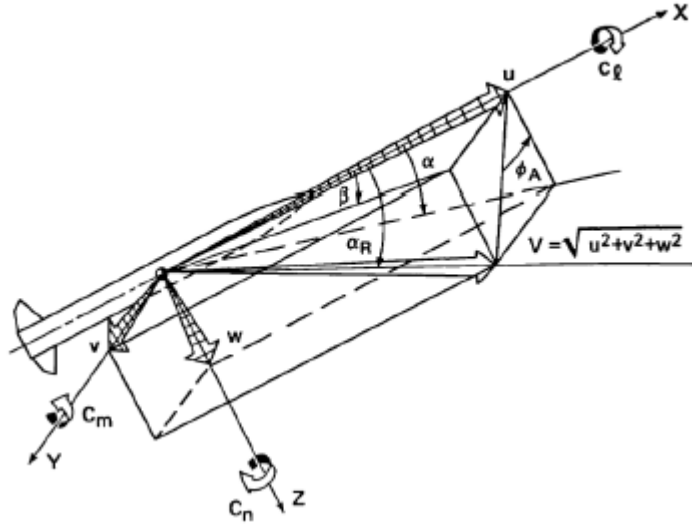


Figura 6: Decomposição da velocidade do foguete nos seus próprios eixos

Fonte: (SIOURIS, 2004)

Com as matrizes de transformações determinadas, temos a seguinte relação a ser determinada.

$$v_{fixo} = T_{IB} \cdot v_{movel} \quad (8)$$

Finalmente, dadas essas transformações, pode-se encontrar o seguinte em relação às velocidades no sistema de coordenadas fixo a partir das medidas no móvel:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\Theta}c_{\Psi}v_x + (c_{\Psi}s_{\Theta}s_{\Phi} - c_{\Phi}s_{\Psi})v_y + (c_{\Phi}c_{\Psi}s_{\Theta} + s_{\Phi}s_{\Psi})v_z \\ c_{\Theta}s_{\Psi}v_x + (c_{\Phi}c_{\Psi} + s_{\Theta}s_{\Phi}s_{\Psi})v_y + (-c_{\Psi}s_{\Phi} + c_{\Phi}s_{\Theta}s_{\Psi})v_z \\ -s_{\Theta}v_x + (c_{\Theta}s_{\Phi})v_y + (c_{\Theta}c_{\Phi})v_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

## 5.7 Cinemática Rotacional

### 5.7.1 Transformação Homogênea

Devido à presença de acelerômetros e giroscópios, é mais prático medir velocidades de dentro do próprio foguete. Dado isso, é possível converter rotações e velocidades para a base móvel, solidária a ele, para a base fixa na Terra.

Segundo o trabalho desenvolvido por (ARDAKANI; BRIDGES, 2010), essa mudança não é trivial, e envolve uma nova transformação que também será dada por uma nova matriz, denominada por  $B$ . Ela deriva da seguinte formulação:

Então, aplica-se a matriz de transformação  $B$  para obter-se as velocidades angulares em relação ao referencial fixo.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \sin \varphi \tan \theta & \cos \varphi \tan \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi \sec \theta & \cos \varphi \sec \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\vec{\omega}_{fixo} = B^{-1} \vec{\omega}_{móvel} \quad (11)$$

### 5.7.2 Transformação de Rotações

Dada a matriz definida, é possível transportar as rotações, medidas no referencial móvel do foguete, para o fixo. Nota-se, essencialmente, que a matriz  $B$  é uma forma alternada da matriz  $R$ . Isso é plausível, uma vez que  $B$  é uma forma análoga que considera a integridade geométrica do movimento como um todo.

Por fim, as rotações do foguete são dadas

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\varphi) & \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\theta) \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Em substituição, por ser simples, fica explícito, na Equação 13, a transformação de rotações como se segue:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin(\Theta) \\ \cos(\varphi) \dot{\Theta} + \cos(\Theta) \dot{\psi} \sin(\varphi) \\ \cos(\Theta) \cos(\varphi) \dot{\psi} - \dot{\Theta} \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 5.8 Dinâmica do foguete

### 5.8.1 Forças Aerodinâmicas

Devido às velocidades relativamente baixas, os efeitos de sustentação foram desconsiderados como uma simplificação no modelo. Essa escolha se mostra prudente, sobretudo no que tange à estabilidade do sistema, considerando que a força de sustentação poderia introduzir deslocamentos angulares significativos no foguete, afastando-o substancialmente do equilíbrio desejado, conforme observado por (ALIYU et al., 2019).

Entretanto, é importante ressaltar que, mesmo com essa simplificação, a força de arrasto aerodinâmico não será negligenciada. Essa decisão é motivada pelo papel estabilizador que o arrasto desempenha na aerodinâmica global do sistema. Ao contrário da sustentação, a presença do arrasto contribui para a redução de um efeito que pode

ser analogamente comparado a um "pêndulo invertido" na estrutura, resultando em uma maior estabilidade dinâmica.

Doravante, em relação à formulação da força de arraste aerodinâmico, o drag é definido como:

$$D = \frac{1}{2} C_d \rho A v_{rel}^2 \quad (14)$$

Onde

- $C_d$ : coeficiente de arrasto aerodinâmico;
- $\rho$ : densidade mássica do ar;
- $A$ : área projetada do foguete;
- $v_{rel}$ : velocidade relativa entre o foguete e o ar.

Vale notar por meio desse equacionamento que o drag depende de 4 termos que podem variar de acordo com as condições de vôo. Dado isso, iremos assumir algumas simplificações, entre elas, assumiremos densidade do ar ( $\rho$ ) como constante nas condições de vôo, por conta da baixa variação de altura, essa simplificação é plausível nas condições de vôo esperadas. Também, o coeficiente de drag será assumido como constante, pois, dado pequenas variações angulares do foguete, o  $C_d$  tem pequenas variações também, pois ele varia com o ângulo de ataque, assim simplificamos o modelo aerodinâmico. Assim, na equação de drag iremos ter variações da área e da velocidade do escoamento, que serão consideradas.

Para o cálculo do drag, iremos considerar as variações de área causadas pelas inclinações no foguete. Vale notar que no cálculo consideramos que a inclinação da área circular é aproximadamente constante para cada ângulo, enquanto as inclinações do corpo do foguete serão consideradas. Isso é dado pelo fato do comprimento ser muito maior que o diâmetro, e assim, as inclinações podem causar grandes mudanças na área projetada. Assim, obtemos o equacionamento da área projetada a seguir:

$$A(\theta, \phi) = \frac{\pi D_f^2}{4} + D_f L \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \phi} \quad (15)$$

A velocidade  $v_{rel}$  será a velocidade do eixo x do eixo de coordenadas fixo. Assim, obtemos o seguinte equacionamento geral do drag.

$$D = \frac{1}{2} C_d \rho \left( \frac{\pi D_f^2}{4} + D_f L \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \phi} \right) v_{rel}^2 \quad (16)$$

Para a determinação do Coeficiente de Arrasto,  $C_d$ , foram realizadas simulações fluidodinâmicas com o auxílio do Ansys Fluent.

Foram feitas simulações axissimétricas em duas dimensões para representar o foguete.

O modelo de simulação foi validado a partir de comparações utilizando o valor experimental de um cilindro descrito na tabela 7.3 de (WHITE, 2009). E, a partir da simulação foi possível obter a força de arrasto para a velocidade de  $25m/s$ .

Sabendo que a variação de velocidade é baixa e no regime estudado e que o ar pode ser considerado um fluido incompressível nessa velocidade, é possível considerar densidade e coeficiente de arrasto constantes. Dessa forma, pode-se calcular o coeficiente de arrasto a partir da força obtida em simulação CFD executada e disponível no repositório.

Considerando então o regime estipulado, temos densidade do ar  $\rho = 1,225kg/m^3$ , velocidade do  $v_{rel} = 25m/s$ , área de referência  $A = \pi \cdot 0,127^2/4$  e, da simulação,  $D = 2,094N$  e, introduzindo esses valores na equação 14, obtêm-se  $C_d = 0,432$ .

### 5.8.2 Dinâmica Translacional

Dado o preâmbulo apresentado, é possível desenvolver a dinâmica de translação do foguete. Primeiramente, o empuxo gerado pelo foguete, denominado por  $\vec{T}$ , é definido como na Equação 17:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \cos \alpha_y \cos \alpha_z \\ T \sin \alpha_y \cos \alpha_z \\ T \cos \alpha_y \sin \alpha_z \end{bmatrix} \quad (17)$$

Nota-se a presença dos ângulos  $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ . Por verdade, além do valor do empuxo, deve-se considerar sua posição. Dado isso, esse conjunto de três ângulos é capaz de descrever completamente a posição deles no espaço, dado as baixas variações angulares, enquanto o valor  $T$ , constante, descreve a força de emissão.

Dado isso, a dedução das equações são feitas a partir da aplicação da Segunda Lei de Newton levando em consideração a rotação do sistema de referência, obtém-se:

$$\dot{\vec{v}} = -\vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{1}{m} \sum \vec{F}_{tot} \quad (18)$$

Em que  $F_{tot}$  indica a resultante das forças, considerando o empuxo e as forças de arrasto aerodinâmico atuantes no modelo. Portanto, dado isso, a Equação 18 se transforma em:

$$\dot{\vec{v}} = -\vec{\omega} \times \vec{v} - R\vec{g} + \frac{1}{m}(\vec{T} + R\vec{D}) \quad (19)$$

Nota-se que o peso,  $P$ , e força de arrasto,  $D$ , são multiplicados pela matriz de transformação  $R$ , dado que, para expressar em forma de espaço de estados, serão utilizadas os valores em relação ao referencial móvel do foguete.

Assim, foram desenvolvidas as equações para obter os valores das acelerações em x,y e z.

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = [\omega_y v_z - \omega_z v_y, \omega_z v_x - \omega_x v_z, \omega_x v_y - \omega_y v_x] \quad (20)$$

$$Rg = [g \cos \theta \cos \psi, g(\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \varphi \sin \psi), g(\cos \varphi \cos \psi \sin \theta + \sin \varphi \sin \psi)] \quad (21)$$

Para o desenvolvimento do termo da força de arrasto aerodinâmico (16), será necessário fazer a transferência do referencial para  $v_{rel}$  também, considera-se, no referencial fixo, que as velocidades em y e z são muito baixa e, assim, o arrasto é nulo nesses eixos.

$$v_{rel} = \cos \theta \cos \psi \cdot v_x + (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \varphi \sin \psi) \cdot v_y + (\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi) \cdot v_z \quad (22)$$

Finalmente, realizando as substituições de (20) (21) (22) em (18) obtém-se o vetor aceleração, cujas coordenadas individuais são:

$$\begin{aligned} a_x = & w_z \cdot v_y - w_y \cdot v_z + \frac{1}{m} [-m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi + T \cdot \cos \alpha_y \cdot \cos \alpha_z \\ & + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_D \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi \cdot \left( \pi \cdot \left( \frac{D_f^2}{4} \right) + L \cdot D_f \cdot [(\sin \theta)^2 + (\sin \psi)^2]^{0.5} \right) \times [\cos \theta \cdot \cos \psi \cdot v_x \\ & + (\cos \psi \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi - \cos \phi \cdot \sin \psi) \cdot v_y \\ & + (\cos \phi \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta + \sin \phi \cdot \sin \psi) \cdot v_z]^2] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a_y = & -w_z \cdot v_x + w_x \cdot v_z + \frac{1}{m} [-m \cdot g \cdot (\cos(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) - \cos(\phi) \cdot \sin(\psi)) \\ & + T \cdot \cos(\alpha_z) \cdot \sin(\alpha_y) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_D \cdot (\cos(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) - \cos(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot \\ & \left( \pi \cdot \left( \frac{D_f^2}{4} \right) + L \cdot D_f \cdot [(\sin(\theta))^2 + (\sin(\psi))^2]^{0.5} \right) \cdot \\ & [\cos(\theta) \cdot \cos(\psi) \cdot v_x + (\cos(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) - \cos(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot v_y + \\ & (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot v_z]^2] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} a_z = & w_y \cdot v_x - w_x \cdot v_y + \frac{1}{m} [-m \cdot g \cdot (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\psi)) \\ & + T \cdot \cos(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha_z) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_D \cdot (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot \\ & \left( \pi \cdot \left( \frac{D_f^2}{4} \right) + L \cdot D_f \cdot [(\sin(\theta))^2 + (\sin(\psi))^2]^{0.5} \right) \cdot \\ & [\cos(\theta) \cdot \cos(\psi) \cdot v_x + (\cos(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) - \cos(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot v_y + \\ & (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot v_z]^2] \end{aligned} \quad (25)$$

Vale notar que as equações acima são do eixo de coordenadas móveis, ou seja, do eixo de coordenadas próprio do foguete.

### 5.8.3 Dinâmica Rotacional

Em termos da rotação do foguete, é desenvolvido pelo Teorema da Quantidade de Movimento Angular. Com isso, desenvolvemos as equações que definem a rotação do foguete por meio do equacionamento abaixo:

$$\dot{\vec{\omega}} = -I^{-1}\vec{\omega} \times I\vec{\omega} + I^{-1} \sum \vec{\tau} \quad (26)$$

Dados  $x_{CM}$  e  $x_{Pe}$ , os centros de massa e de pressão, respectivamente, pode-se encontrar os momentos que atuam no sistema. Nesse sentido, serão feitas operações em três dimensões, gerando as matrizes (vetores finais) também em três dimensões. Porém ao final será ignorado a dimensão x, dado que, conforme apresentado anteriormente nas hipóteses simplificadoras, é ignorado o momento de inércia em relação ao eixo de simetria e, conseqüentemente, suas rotações. Assim, desenvolvemos a dinâmica rotacional da seguinte maneira:

1. Definir o braço de atuação do momento do arrasto como  $d_{PE} = (x_{PE}, 0, 0)$  e calcular o momento resultante  $\tau_{PE} = d_{PE} \times \vec{D}$ .
2. Calcular  $\vec{\tau}_z$  e  $\vec{\tau}_y$ , resultantes do empuxo, que são dados por  $\vec{\tau}_y = T_z x_{CM}$  e  $\vec{\tau}_z = -T_y x_{CM}$ . Assim, tem-se as duas componentes a serem consideradas do momento causado pelo empuxo dos motores, que formam um vetor final  $\tau_{empuxo}$ .
3. Para a matriz de inércia calcula-se sua inversa na linguagem simbólica.
4. Finalmente, aplica-se todos os dados recolhidos na fórmula (26) e, no final, aplicamos a hipótese simplificadora de tal forma que  $I_{xx}$  torna-se desprezível e as acelerações angulares em x também.

Assim, o resultado é dado como abaixo, lembrando que as acelerações em x são desprezadas. Vale notar que, no processo de linearização, considerando um regime de pequenas oscilações, existe compatibilidade, como será apresentado posteriormente na linearização.

$$\begin{aligned} \dot{q} = & -\frac{1}{8 \cdot I_{yy}} [8 \cdot w_x \cdot w_z \cdot I_{zz} + 8 \cdot T \cdot \cos(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha_z) \cdot x_{cm} \\ & - \rho \cdot C_D \cdot \left( 2 \cdot \sqrt{2} \cdot L \cdot D_f \cdot \sqrt{2 - \cos(2\theta) - \cos(2\psi)} + \pi \cdot D_f^2 \right) \cdot \\ & (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot [\cos(\theta) \cdot \cos(\psi) \cdot v_x \\ & + (\cos(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) - \cos(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot v_y + \\ & (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot v_z]^2 \cdot x_{cp}] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} = & -\frac{1}{8 \cdot I_{zz}} [-8 \cdot w_y \cdot w_x \cdot I_{yy} - 8 \cdot T \cdot \cos(\alpha_z) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot x_{cm} \\
& + \rho \cdot C_D \cdot \left( 2 \cdot \sqrt{2} \cdot L \cdot D_f \cdot \sqrt{2 - \cos(2\theta) - \cos(2\psi)} + \pi \cdot D_f^2 \right) \cdot \\
& (\cos(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) - \cos(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot [\cos(\theta) \cdot \cos(\psi) \cdot v_x \\
& + (\cos(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) - \cos(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot v_y + \\
& (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\psi)) \cdot v_z]^2 \cdot x_{cp}]
\end{aligned} \tag{28}$$

## 5.9 Linearização do Modelo

### 5.9.1 Equilíbrio Dinâmico do Sistema

Para obter o modelo linearizado, é preciso, de antemão, considerar as condições de equilíbrio, bem como revisar os detalhes das hipóteses simplificadoras. Dado isso, assume-se que:

1. A linearização é feita em torno da posição vertical do foguete. Ou seja, parte-se de que existe outro sistema de controle prévio que permite esse posicionamento prévio, a partir do qual as análises deste trabalho se baseiam
2. O foguete está em baixas rotações e velocidades laterais, descendo com pouco perturbação
3. A velocidade vertical de aproximadamente  $-10m/s$ , permitindo admitir a existência do arrasto aerodinâmico

A entrada é definida pelos ângulos, no sistema móvel, de deflexão da tubeira (29), que vão definir a direção dos gases emitidos pelo bocal:

$$u = \begin{bmatrix} \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \tag{29}$$

Essa deflexão da Tubeira pode ser expressa como na imagem abaixo, em que elas influenciam diretamente na direção com que os gases serão emitidos do bocal, permitindo a movimentação do foguete livremente no espaço, e seu direcionamento sem problemas:

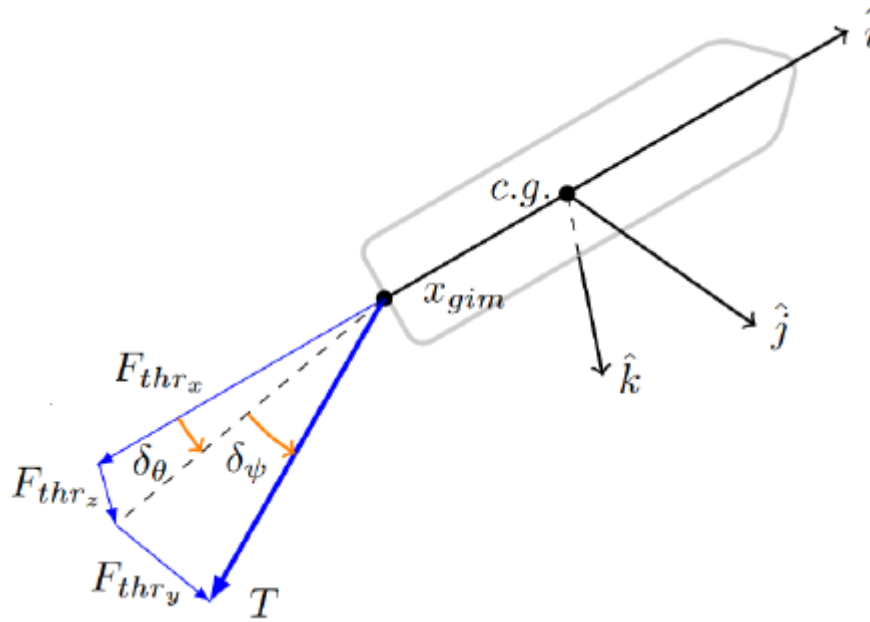


Figura 7: Deflexões da Tubeira e Vetorização do Empuxo

Fonte: (LUSTIG, 2017)

### 5.9.2 Forma de Espaço de Estados

A linearização é feita pela expansão em Série de Taylor até a primeira ordem

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} \delta x \quad (30)$$

Assim, a forma de Espaço de Estados linearizada é:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (31)$$

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\substack{\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{u}}}} \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}_n} \right|_{\substack{\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{u}}}} \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\substack{\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{u}}}} \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}_n} \right|_{\substack{\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{u}}}}$$

Revisitando o Vetor de Estado (2), que introduz as variáveis de estado no modelo, podemos estabelecer a forma linearizada do espaço de estados. Essa forma corresponde às equações dinâmicas previamente apresentadas, mas agora linearizadas com respeito às hipóteses anteriormente mencionadas.

Mais uma vez, optamos pelo uso do cálculo simbólico para derivar as linearizações, realizadas no ambiente *SymPy* do *Python*. Esse método permitiu a descrição do que está exposto na equação 37. Nesse contexto, começamos considerando a sequência de matrizes, cujos nomes estão em conformidade com a terminologia comumente utilizada na literatura



relacionada a este trabalho.

Continuando, as matrizes  $B$ ,  $C$ , e  $D$  são fundamentais no contexto do espaço de estados linearizado. A matriz  $B$  relaciona as entradas ao impacto nas variáveis de estado, enquanto  $C$  descreve como as variáveis de estado são mapeadas para as saídas do sistema. A matriz  $D$  reflete a influência direta das entradas nas saídas. Essas matrizes, quando combinadas, constituem o modelo de espaço de estados linearizado que nos permite analisar o comportamento dinâmico do sistema em torno do ponto de operação.

Em primeiro lugar, então, a matriz  $A$ , que representa a influência do vetor de estados no tempo, é indicada, após revisão das equações dinâmicas, por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.5345 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.9873 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -9.9873 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.1702 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1702 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

A matriz  $B$ , que indica o efeito das entradas na variação dos estados fica como:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 9.7927 & 0 \\ 0 & 9.7927 \\ 0 & 16.0955 \\ -16.0955 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Em relação à saída do sistema, os valores serão medidos no próprio referencial do foguete, sendo, portanto, utilizados sensores instalados nele próprio. Em específico, giroscópios para obtenção das rotações, importante para identificar se a estrutura do foguete é estável ou não no ar durante a etapa de pouso.

$$y = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (34)$$

A matriz C, que remete à influência no vetor de estados, também assume uma forma extremamente simples, dadas as condições de linearização.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

A matriz D, conhecida como a matriz de transmissão direta, representa como as entradas afetam diretamente as saídas, que remete à influência no vetor de entradas, possui todos os valores nulos, uma vez que os ângulos do bocal não influencia diretamente. A sua dimensão, claramente, é definida pela dimensão do vetor de saídas do sistema.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Dadas essas matrizes, e retomando a nomenclatura em que  $x$  é o vetor de estados definido, tem-se que:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A\Delta x + Bu \\ x = \Delta x + x_{op} \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (37)$$

O que é calculado é a variação do espaço de estado em torno do equilíbrio definido. Logo, soma-se essa variação com o estado de operação do sistema, o ponto no qual foi linearizado. Em que a matriz  $x_{op}$  é:

$$x_{op} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

A presente modelagem é primordialmente direcionada para a implementação de estratégias de controle dos gases emitidos pelo bocal do foguete, os quais são influenciados pela deflexão da tubeira. Essa abordagem possibilitará um controle ativo dessas variáveis,

essenciais para assegurar a precisão durante as fases de pouso. Ressalta-se que a análise detalhada de outras saídas relevantes, como velocidade e distância em relação ao solo, será objeto de estudo em disciplinas subsequentes, com enfoque específico na aplicação de técnicas de controle avançadas.

A precisão requerida para o processo de pouso, intrinsecamente vinculada à minimização de erros, exige a aplicação de técnicas de controle sofisticadas. A observação dessas variáveis críticas dependerá diretamente da utilização de métodos de controle, que serão objeto de exploração e aprofundamento em disciplinas futuras, proporcionando uma compreensão mais abrangente e refinada do sistema.

Destaca-se, particularmente, a importância de identificar com precisão a velocidade e a distância até o solo, fatores cruciais para a realização de um pouso seguro e eficiente. Cabe ressaltar que tais medições serão realizadas indiretamente ou estimadas por meio de técnicas avançadas de observabilidade, visando superar desafios inerentes ao ambiente espacial e garantir a confiabilidade das operações de pouso. Essa abordagem estratégica será objeto de investigação detalhada em etapas posteriores do desenvolvimento do sistema.

## 6 Análises da Estabilidade e Respostas do Sistema

No espaço de estados linearizado, a matriz de estado  $A$  governa a dinâmica do sistema. A transformada de Laplace da equação de estado,  $\dot{x} = Ax + Bu$ , resulta em uma equação algébrica no domínio da frequência:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (39)$$

onde  $s$  é a variável complexa da frequência. A solução  $X(s)$  fornece insights sobre a resposta em frequência e a estabilidade do sistema.

### 6.1 Funções de Transferência

Introduzindo a matriz de transferência  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , onde  $C$  e  $D$  são as matrizes de saída e alimentação direta, respectivamente, tem-se uma ferramenta poderosa para análise e projeto. A matriz de transferência relaciona a entrada ao sistema à saída, simplificando a análise de sistemas lineares no domínio da frequência.

Ela assume a seguinte forma:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (40)$$

Dado isso, esperam-se duas funções de transferência devido à dimensão das saídas propostas. Com efeito, elas descritas da seguinte forma:

$$G_q = \frac{-1.5e + 01s^8 - 3.75e - 02s^7 + 7.65e - 02s^6 + 1.91e - 04s^5}{1s^{10} + 2.5e - 03s^9 - 1.02e - 02s^8 - 2.55e - 05s^7 + 2.60e - 05s^6 + 6.50e - 08s^5} \quad (41)$$

$$G_r = \frac{-3.75e - 02s^8 - 7.65e - 02s^7 + 1.91e - 03s^6 - 3.21e - 03s^5}{1s^{10} + 2.5e - 03s^9 - 1.02e - 02s^8 - 2.55e - 05s^7 + 2.60e - 05s^6 + 6.50e - 08s^5} \quad (42)$$

### 6.2 Polos e Análise de Estabilidade

Os polos ( $p$ ) são as raízes do polinômio  $D(s)$  e os zeros ( $z$ ) são as raízes do polinômio  $N(s)$  na equação generalizadora acima (40). Eles desempenham um papel fundamental na caracterização do comportamento dinâmico do sistema.

**Polos:** Os polos determinam a estabilidade e a resposta transitória do sistema. Se todos os polos estiverem no semiplano esquerdo (parte real negativa), o sistema será estável. Se algum polo estiver no semiplano direito, o sistema será instável.

**Zeros:** Os zeros indicam onde a função de transferência se anula. Eles influenciam a resposta em frequência do sistema. A presença de zeros pode aumentar a magnitude em certas frequências, enquanto a sua ausência pode resultar em uma atenuação.

O cálculo dos polos consiste em encontrar as raízes da equação característica do sistema, que se tratam das raízes do polinômio de 10ª ordem no denominador das funções de transferência listadas anteriormente. Logo, pela seguinte formulação, pode-se obter os autovalores, os polos do sistema:

$$\det(A - sI) = 0 \quad (43)$$

Os cálculos também foram feitos com o auxílio da biblioteca *Control* do *Python*, disponíveis no repositório. Assim, em primeiro lugar, obtém-se o Polinômio Característico do Sistema, dado por:

$$P(s) = 1.0s^{10} + 0.0025s^9 - 0.0102s^8 - 2.55 \times 10^{-5}s^7 + 2.601 \times 10^{-5}s^6 + 6.5025 \times 10^{-8}s^5 \quad (44)$$

Assim, em relação à estabilidade do sistema, pode-se analisar os resultados obtidos em relação aos Polos. Esses valores terão uma parcela real e outra imaginária. Dado isso, a análise de estabilidade, por simplicidade, pode ser feita pela observação da parte real, como disposto na Tabela 2.

Parte Real	Parte Imaginária	Multiplicidade	Estabilidade
0	0	5	Marginalmente Estável
0.0714	0	2	Instável
-0.0714	0	2	Estável
-0.0025	0	1	Estável

Tabela 2: Polos e Estabilidade do Sistema

Sobre esses polos obtidos, é possível conferir o seguinte:

**Polos Reais:** Indicam um termo exponencial na função de transferência do sistema. Em termos físicos, isso representa um modo ou uma dinâmica associada a uma oscilação harmônica, ou exponencial no sistema. Neste caso, há um crescimento exponencial com taxa de crescimento associada igual a 0.0714. A ausência de parte imaginária implica que o sistema não possui um componente de oscilação amortecido.

**Polos Simétricos:** Polos simétricos com uma parte real de 0 indicam uma dinâmica puramente oscilatória sem crescimento ou decaimento exponencial associado. Em outras palavras, esses polos representam um comportamento oscilatório não amortecido. Essa característica é frequentemente associada a sistemas que têm a capacidade de oscilar indefinidamente, sem atenuação ou crescimento, algo que não ocorre no sistema estudado.

**Polos Nulos:** No sistema há a presença de cinco polos nulos, condensados na tabela.

Um polo em  $0 + 0j$  indica um termo de raiz em  $s$  na função de transferência de um sistema dinâmico linear. Em termos físicos, isso representa uma dinâmica ou um modo de resposta transitória que não possui componente exponencial decrescente ou crescente associada. Essencialmente, o sistema possui uma resposta constante para um sinal de entrada exponencial com frequência angular zero. Isso significa que há uma componente integradora na resposta do sistema. Em termos práticos, isso pode indicar que o sistema tem a capacidade de acumular uma integral do sinal de entrada ao longo do tempo sem limitação.

O posicionamento dos polos no Plano Complexo pode ser visualizado na Figura 8, em que mostra as simetrias em relação à origem, os polos nulos e o polo instável.

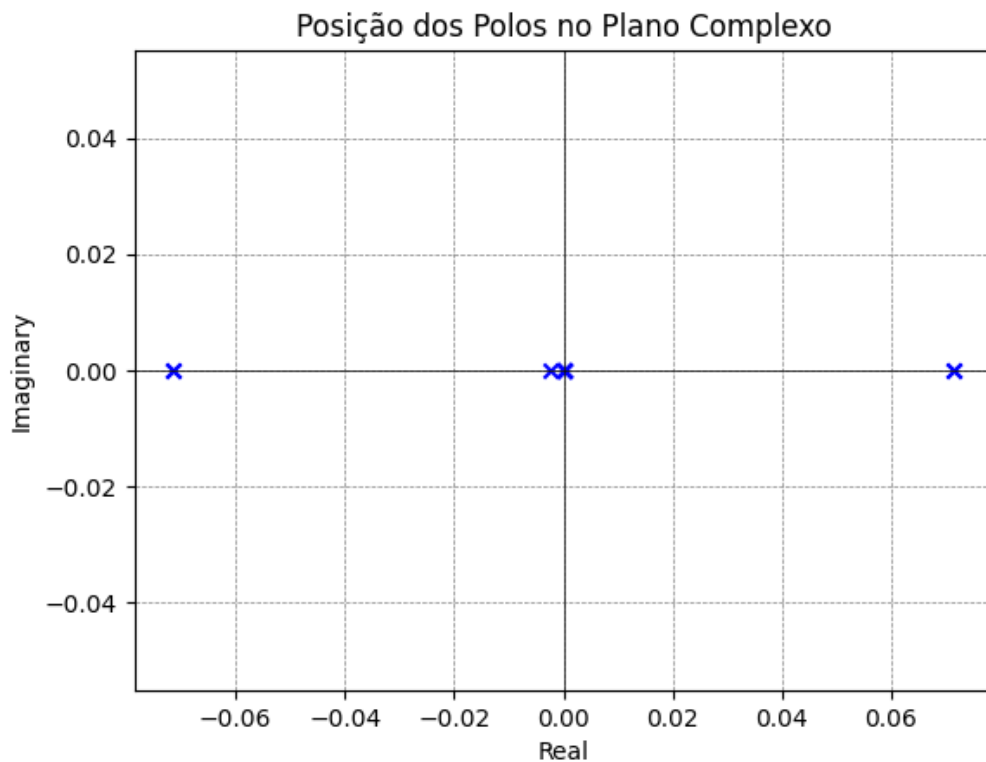


Figura 8: Posicionamento dos Polos no Plano Complexo

Fonte: Autores

### 6.3 Análise pelo Critério de Routh-Hurwitz

O Critério de Routh-Hurwitz é uma técnica fundamental na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos lineares. Ele oferece uma abordagem sistemática para determinar a estabilidade de um sistema com base nos coeficientes do polinômio característico associado à matriz de coeficientes do sistema. Este critério é particularmente útil para sistemas lineares representados por equações diferenciais lineares, como aqueles encontrados em controle e engenharia de sistemas.

A estabilidade de um sistema dinâmico é crucial para garantir que suas respostas sejam previsíveis e controláveis. O Critério de Routh-Hurwitz foca na análise dos polos do sistema, que são as raízes do polinômio característico. A condição necessária para a estabilidade é que todos esses polos tenham parte real negativa.

No contexto deste estudo, a biblioteca *tbcontrol* do *Python* foi empregada para automatizar o processo de obtenção da tabela do Critério de Routh-Hurwitz. A tabela gerada fornece uma visão estruturada e organizada dos coeficientes do polinômio característico, facilitando a análise e determinação da estabilidade do sistema. A utilização de ferramentas computacionais como essa simplifica a aplicação do critério, especialmente em sistemas mais complexos com polinômios de alta ordem.

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.012 & 2,6 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0.0025 & -2,5 \cdot 10^{-5} & 6,5 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (45)$$

Ao analisar as variações de sinais no Critério de Routh-Hurwitz, é evidente que o sistema demonstra instabilidade em várias circunstâncias, ratificando as indicações fornecidas pelos próprios polos do sistema. Contudo, a interpretação da tabela revelou alguns aspectos menos óbvios devido à presença de termos nulos no polinômio característico.

A ocorrência de diversos termos nulos adiciona complexidade à interpretação dos resultados. Especificamente, a tabela reflete numericamente a presença de zeros, que, em algumas instâncias, foram retornados devido a tentativas de divisão por zero. Essas situações podem obscurecer a compreensão clara dos resultados na tabela, exigindo uma análise cuidadosa para interpretar corretamente a estabilidade do sistema.

Assim, enquanto as trocas de sinais indicam instabilidade, é crucial considerar a presença de termos nulos ao interpretar os resultados da tabela do Critério de Routh-Hurwitz, garantindo uma análise precisa e abrangente da estabilidade do sistema.

## 6.4 Resposta do Modelo não Linearizado

Em relação ao modelo não linearizado desenvolvido, foram feitas duas rodadas de simulação, visando avaliar o efeito de distintas condições iniciais na resposta dinâmica do sistema, em específico as suas velocidades, rotações e posicionamento espacial.

Primeiramente, em relação à resposta dos ângulos, percebe-se que existe uma pequena perturbação de oscilação, ou seja, o foguete responde com baixas rotações, sendo uma interferência maior para a trajetória final do foguete, que tende a se mover, em posição quase perfeitamente vertical, com pequenas oscilações para as outras duas direções antes do pouso. Eis os gráficos das repostas dos ângulos:

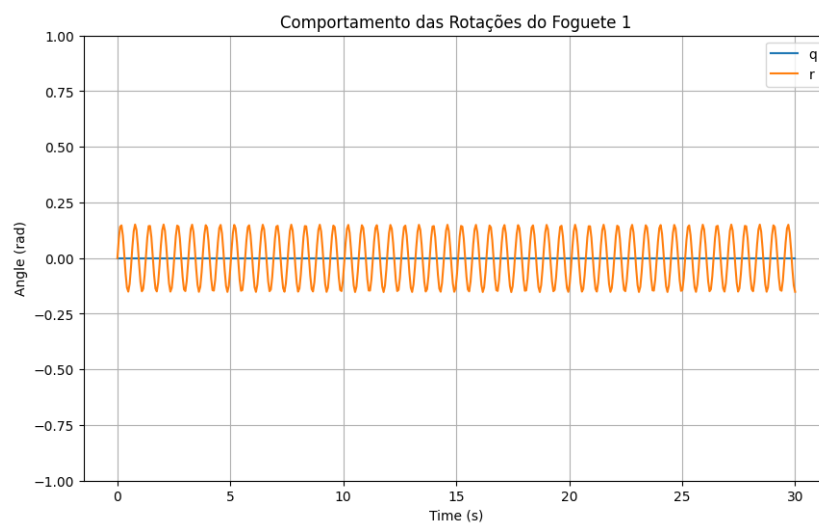


Figura 9: Comportamento das Rotações no Primeiro Cenário

Fonte: Autores

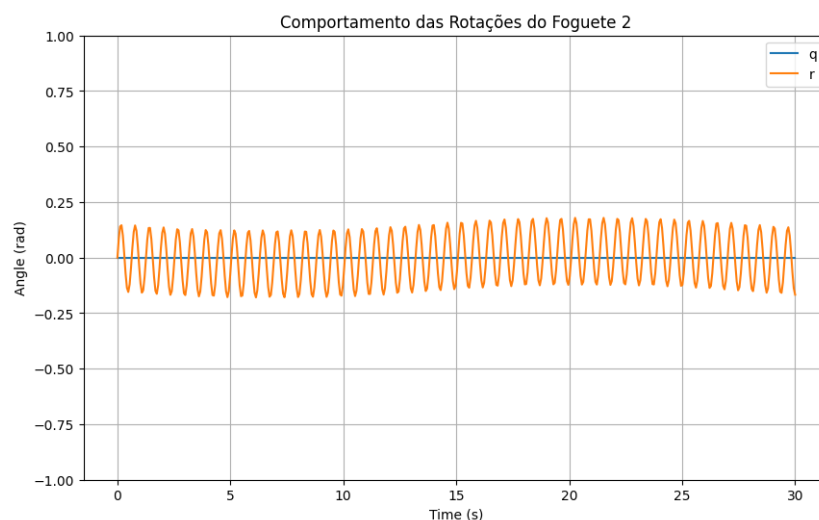


Figura 10: Comportamento das Rotações no Segundo Cenário

Fonte: Autores

Na análise da trajetória, apresentam-se os gráficos abaixo que ilustram a trajetória



curva no espaço para ambos os cenários, conforme discutido previamente. A representação visual destaca a curvatura da trajetória, proporcionando uma compreensão mais aprofundada das características do movimento em questão

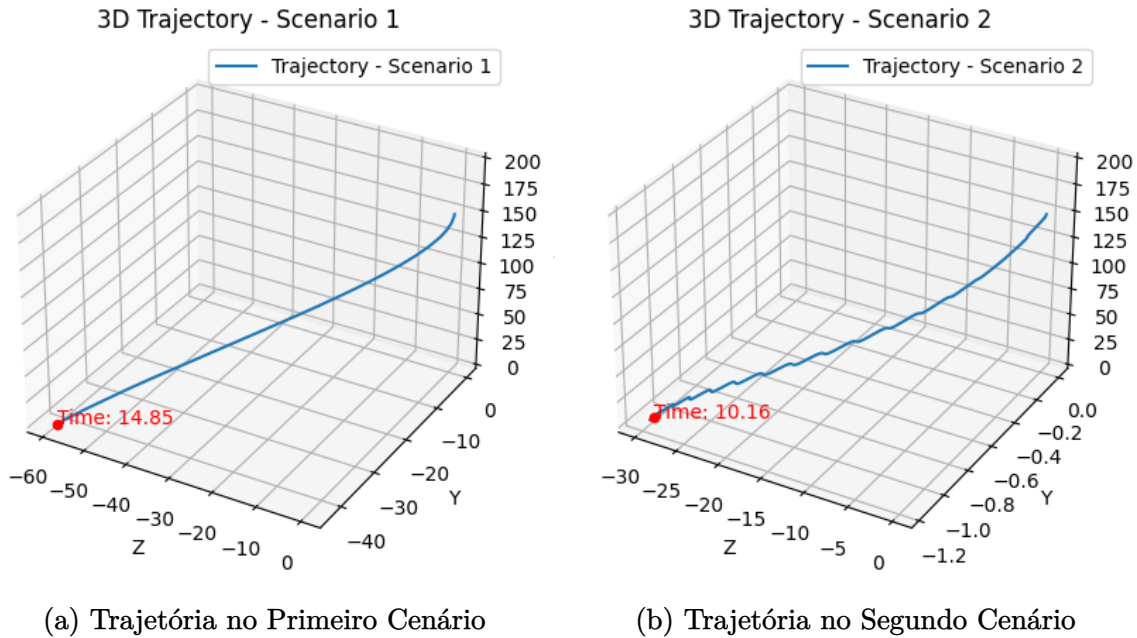


Figura 11: Trajetórias em Diferentes Cenários

Fonte: Autores

Nas simulações não linearizadas realizadas, pudemos explorar o comportamento dinâmico do sistema em resposta a diferentes entradas e condições iniciais. Os resultados obtidos destacaram a complexidade e as não linearidades inerentes ao modelo, evidenciando respostas não triviais que podem ocorrer em situações práticas.

Ao analisar a trajetória e as respostas do sistema às entradas senoidais e degrau, observamos padrões interessantes, como decaimentos e oscilações. A presença de múltiplos polos com diferentes multiplicidades influenciou diretamente na estabilidade do sistema, sendo crucial para compreender seu comportamento ao longo do tempo.

## 6.5 Reposta do Modelo Linearizado no Domínio do Tempo

Nesta seção, exploraremos a resposta no tempo do sistema linearizado em resposta a diversas formas de entrada, visando analisar e compreender seu comportamento dinâmico. O sistema em questão é caracterizado por duas entradas, representadas pelas deflexões da tubeira do bocal do foguete. As saídas correspondentes são as rotações do foguete, revelando a interação complexa entre as entradas e as respostas do sistema.

A escolha de simular o sistema diante de diferentes tipos de entrada é fundamental para obter uma visão abrangente de seu desempenho sob diversas condições. A natureza dual das entradas, associadas às deflexões da tubeira, destaca a influência direta desses parâmetros na dinâmica rotacional do foguete. Essa configuração é relevante para aplicações práticas, como o controle ativo da trajetória do foguete.

**Entrada Senoidal:** Para iniciar a simulação, o primeiro teste foi feito com um sinal de entrada de natureza senoidal, como na imagem abaixo:

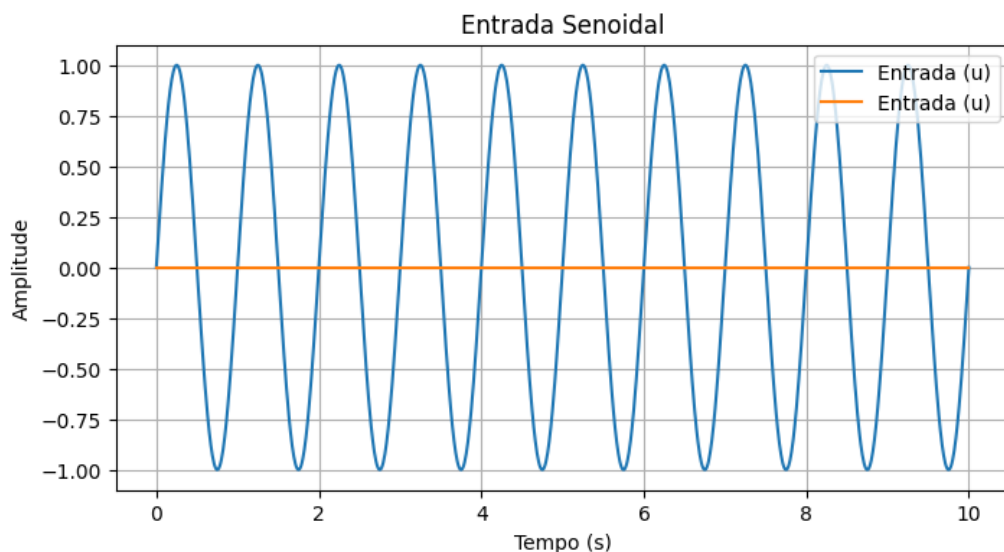


Figura 12: Entrada para Simulação

Fonte: Autores

O sistema em análise possui duas entradas, correspondentes às deflexões da tubeira do bocal do foguete. As saídas, por sua vez, são refletidas nas rotações do foguete, conforme mencionado anteriormente.

Ao escolher uma onda senoidal como sinal de entrada, buscamos uma compreensão mais aprofundada da dinâmica do sistema. A natureza periódica e suave da onda senoidal oferece insights valiosos sobre como o sistema responde a diferentes frequências de entrada.

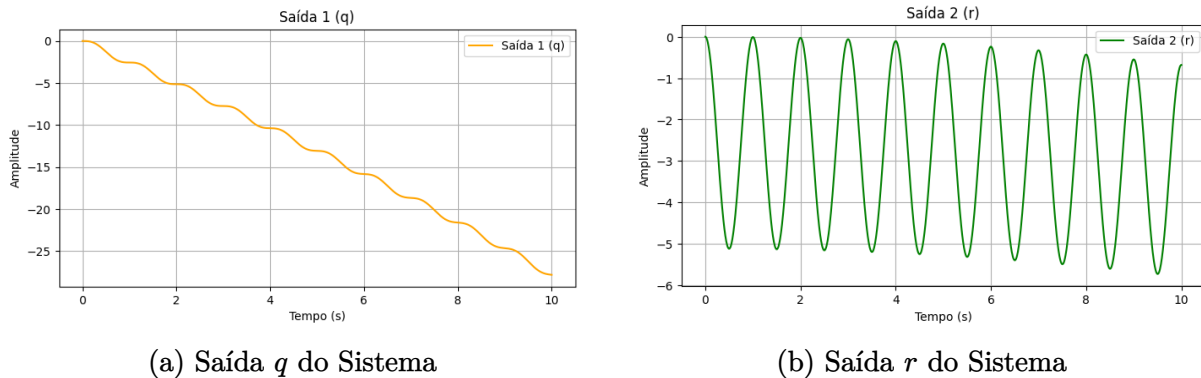


Figura 13: Resposta do Sistema Linear no Tempo

Fonte: Autores

Ao examinar a representação gráfica fornecida, podemos discernir claramente as saídas correspondentes, refletindo as rotações do foguete. A análise mais detalhada da saída  $q$  revela um gráfico com um decaimento notável ao longo do tempo. Esse comportamento é coerente com os polos identificados no sistema, sugerindo uma resposta subamortecida ou de decaimento exponencial associada a essa saída específica.

A análise da saída  $r$  é igualmente crucial para uma compreensão abrangente do comportamento dinâmico do sistema. A ampliação dessa análise permitirá uma interpretação mais refinada das características específicas da resposta ao sinal de entrada senoidal.

Nota-se que isso é justificável pela natureza dos polos do sistema. Nesse sentido, a presença de decaimento exponencial e ausência de um amortecimento oscilatório justificam as formas de gráficos apresentados nos dois casos. Isso é uma informação importante, dado que é imperceptível dentro do domínio da frequência, que será explorado a seguir.

**Entrada Degrau:** Agora, será feita uma rodada com uma entrada degrau, visando avaliar mudanças abruptas.

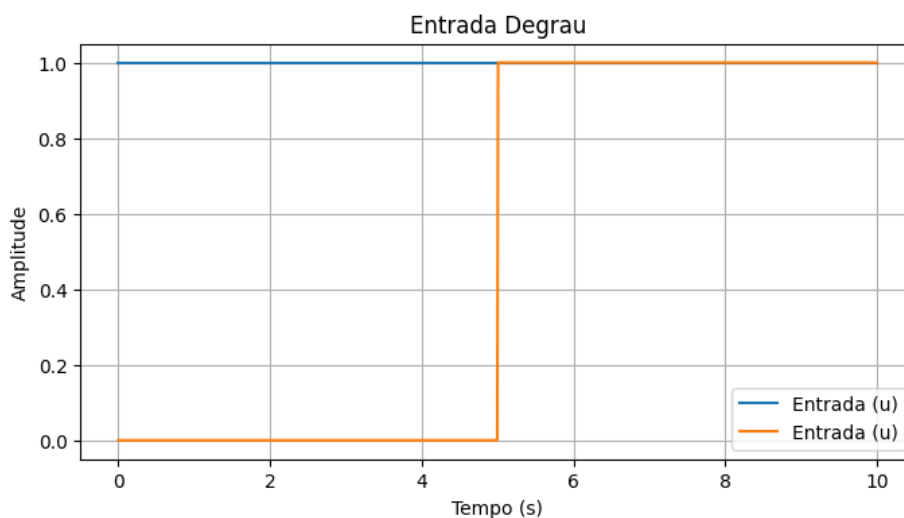


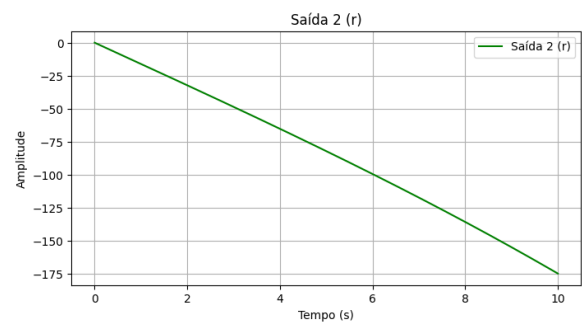
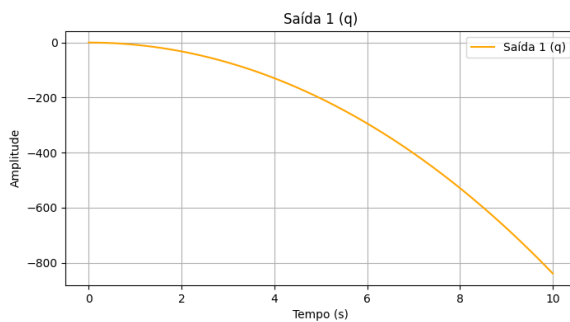
Figura 14: Entrada para Simulação no Segundo Cenário

Fonte: Autores

Ao analisar o comportamento do sistema em resposta a uma entrada de degrau com transições abruptas, observou-se uma tendência de decaimento nas respostas de ambas as saídas. Esse decaimento indica uma diminuição gradual na magnitude das saídas ao longo do tempo.

A natureza do decaimento sugere que o sistema, quando sujeito a mudanças abruptas na entrada, tende a retornar a um estado de equilíbrio ou estabilidade. Essa característica pode ser associada à presença de polos com parte real negativa na dinâmica do sistema, o que é uma condição favorável para a estabilidade.

É importante destacar que a resposta ao degrau e seu decaimento são indicativos do comportamento dinâmico do sistema diante de mudanças repentinas nas entradas. A interpretação dessas respostas contribui para uma compreensão mais aprofundada das propriedades do sistema e é fundamental para o design e análise de sistemas dinâmicos.



(a) Saída  $q$  do Sistema no Segundo Cenário

(b) Saída  $r$  do Sistema no Segundo Cenário

Figura 15: Resposta do Sistema Linear no Tempo no Segundo Cenário

Fonte: Autores

## 6.6 Reposta do Modelo Linearizado no Domínio da Frequência

A resposta em frequência é representada pela magnitude e fase da função de transferência em relação à frequência angular  $\omega$ , e pode ser expressa como  $G(j\omega)$ , onde  $j$  é a unidade imaginária.

**Magnitude da Resposta em Frequência:** A magnitude da resposta em frequência,  $|G(j\omega)|$ , fornece informações sobre a amplificação ou atenuação do sistema em diferentes frequências. Picos na magnitude indicam ressonância, enquanto mínimos indicam frequências de rejeição.

**Fase da Resposta em Frequência:** A fase da resposta em frequência,  $\angle G(j\omega)$ , indica o deslocamento temporal entre a entrada e a saída do sistema. Ela é crucial para compreender a relação de fase entre diferentes componentes de frequência.

Ao traçar  $|G(j\omega)|$  e  $\angle G(j\omega)$  em gráficos separados ou em um único gráfico chamado de *Diagrama de Bode*.

### Pontos Característicos:

- *Frequência de Corte:* Onde a magnitude atinge metade do seu valor máximo, indicando a transição entre as regiões de passagem e de atenuação.
- *Frequência de Ressonância:* Onde a magnitude apresenta um pico, destacando uma resposta destacada em determinada frequência.
- *Frequência de Rejeição:* Onde a magnitude atinge seu valor mínimo, indicando a frequência na qual o sistema atenua mais fortemente a entrada.

Dadas as análises feitas no domínio da frequência, foi possível desenvolver os dois diagramas abaixo, cada um relacionado a uma resposta em frequência diferente, ou seja, a uma das funções de transferência obtidas.

Quando se observa as saídas do sistema, torna-se evidente que a amplitude da oscilação segue uma consistência física. Essa amplitude foi calculada de forma precisa com a utilização da biblioteca *tbcontrol*. Além disso, os detalhes referentes à apresentação gráfica foram definidos de acordo com as seguintes especificações:

- Atraso de tempo desejado: 0.25s
- Ordem da expansão de Padé: 3
- Dado isso, a faixa de frequência física definida é dada pela faixa de  $(10^{-5}, 10^5)$

Estabelecendo esses parâmetros, a faixa de frequência física definida para a análise situa-se entre  $(10^{-5}, 10^5)$ . Esses valores representam não apenas uma escolha metodológica, mas também uma consideração prática para garantir a relevância do comportamento dinâmico dentro de uma faixa de frequência fisicamente significativa.

O Diagrama da variável  $q$  é dado por:

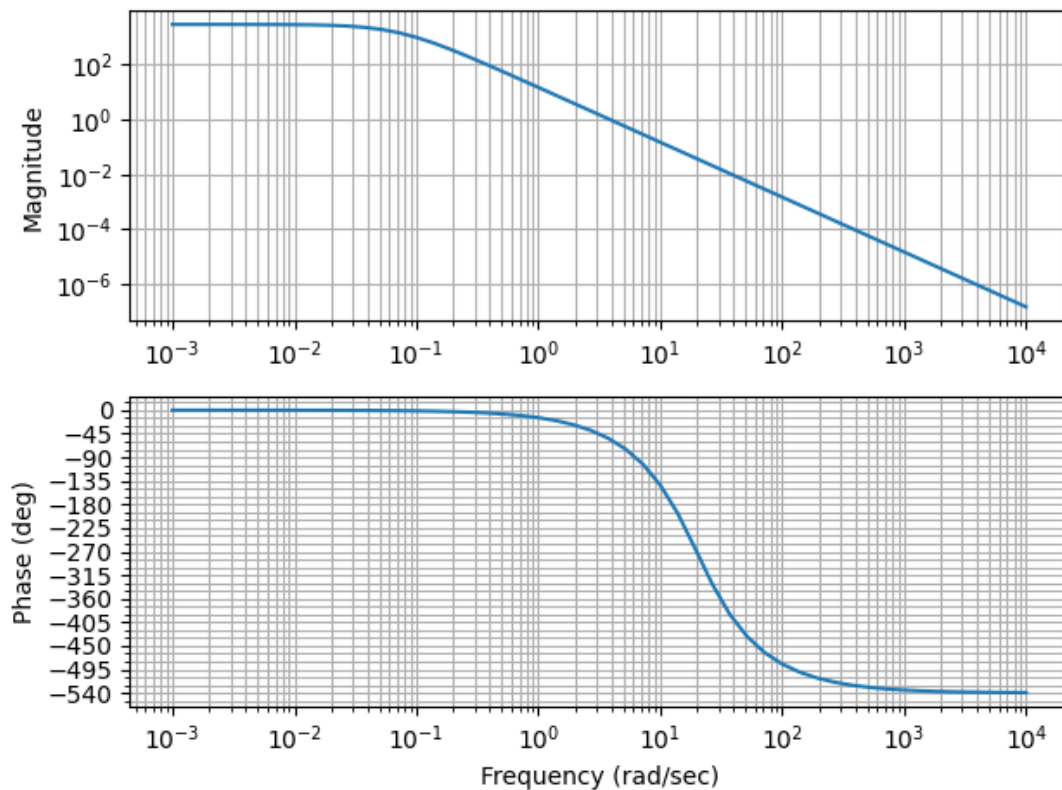


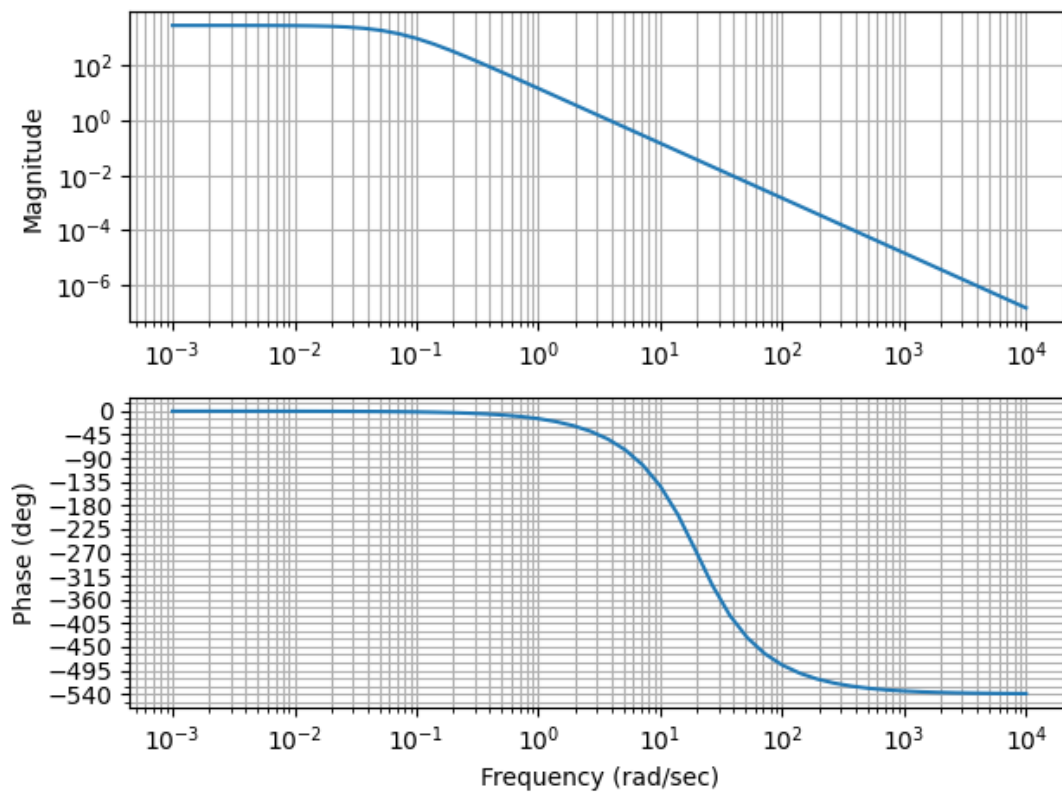
Figura 16: Diagrama de Bode na saída  $q$

Fonte: Autores

Ao observar a forma dos gráficos, é possível inferir, com base no ganho, que a resposta é predominantemente de primeira ordem, apresentando inicialmente uma constante antes de exibir uma inclinação característica. Analogamente, a fase do diagrama exibe um ligeiro desvio, o que é consistente com o comportamento previamente descrito. Essas características sugerem um sistema dinâmico cujo desempenho pode ser adequadamente modelado por esse tipo de resposta.

- Frequência de Corte (*Crossover*):  $100\text{Hz}$
- Frequência de Ressonância:  $0.0001\text{rad/sec}$
- Frequência de Rejeição:  $200\text{Hz}$

O Diagrama da variável  $r$  é dado por:

Figura 17: Diagrama de Bode na saída  $r$ 

Fonte: Autores

Com efeito, dado que as saídas tem características muito próximas, é de se esperar que elas possuam uma resposta semelhante, mesmo porque suas funções de transferência são proporcionais, cujas diferenças são devidas a erros numéricos. Como frequências naturais, amortecimento e formas de resposta, é justificável que seus diagramas de Bode exibam padrões semelhantes. Ambas as saídas responderão de maneira semelhante a diferentes frequências de entrada, resultando em magnitudes e fases parecidas nos diagramas.

Não obstante, como ficou claro, a análise temporal se mostrou diferente, dado que existe maior influência de polos nos resultados.

## 7 Conclusão

Retomando a motivação do trabalho, a investigação do Controle Vetorial de Empuxo (TVC), tecnologia que vem sido foco de grandes empresas da indústria espacial, sendo importante em reduzir as perdas e danos causados durante a operação de pouso.

Com isso em vista, o grupo decidiu analisar de forma simplificada, porém, ainda bem realista, tendo as hipóteses baseadas em outros estudos utilizados como referência para esse estudo.

O estudo foi realizado sobre um foguete radialmente simétrico em situação de pouso em baixas altitudes em posições próximas à vertical para cima, e considerando somente a velocidade vertical como não próxima de zero. Disso teria-se, inicialmente, um sistema com 6 graus de liberdade e um vetor de estados  $12 \times 1$ . Contudo, foi notado e estudado nas referências, que o efeito do rolamento próprio é desprezível, uma vez que nem uma força atuante no foguete tem efeito nele, e em um foguete esbelto o seu momento de Inércia do seu eixo é 0. Sendo justificável desprezar o rolamento próprio, ficando com 5 graus de liberdade e um vetor de estados  $10 \times 1$ .

Os resultados foram condizentes com o que o grupo esperava ao estudar as referências. Pode causar um estranhamento falar que ter como resultado esperado um foguete instável, como visto nos polos e gráficos, contudo o foguete na condição de pousar "em pé" é intrinsecamente instável. Um foguete foi feito para se deslocar para cima, e para ser instável nesse movimento, por conta disso, o centro de pressão é posicionado de forma para se estabilizar em voo, já nas condições de pouso, um centro de pressão abaixo do centro de massa gera instabilidade na posição para cima, uma vez que o arrasto do ar estaria gerando momentos torsores que amplificam qualquer rotação em y e em z do foguete.

E o foguete ser instável é o que justifica o uso do TVC, pois caso ele fosse estável não seria necessário o uso de um controle externo para se realizar o pouso. E o nosso estudo mostra que é possível controlar a instabilidade do foguete com o empuxo vetorizado, pois foi visualizado que em algumas condições de entrada juntamente com o foguete levemente inclinado o foguete ficava um tempo razoável oscilando ao redor da posição de equilíbrio, uma resposta vista em sistemas estáveis, e depois de um tempo ia ao infinito, ou seja, as entradas não controladas conseguiram estabilizar o foguete temporariamente, levando a crer que uma entrada controlada pode conseguir manter o foguete na posição vertical para a maioria das perturbações e posições iniciais.

Os resultados foram animadores, visto que provaram que o uso das entradas é possível manter de forma estável a condição de pouso vertical para cima, que é intrinsecamente instável.



## Referências

- ALIYU, B. et al. State-space modelling of a rocket for optimal control system design. *Journal of Aircraft and Spacecraft Technology*, v. 3, p. 128–137, 01 2019.
- ARDAKANI, H. A.; BRIDGES, T. Review of the 3-2-1 euler angles: a yaw–pitch–roll sequence. 2010.
- BROBOW, F. Controle de um pêndulo invertido com 6 graus de liberdade e rodas de reação. 2015.
- CEOTTO, G. et al. Rocketpy: Six degree-of-freedom rocket trajectory simulator. *Journal of Aerospace Engineering*, v. 34, 08 2021.
- SIOURIS, G. M. *Missile Guidance and Control Systems*. [S.l.]: Springer New York, 2004.
- WHITE, F. M. *Fluid Mechanics - 7th ed.* [S.l.]: McGraw-Hill, 2009.