Universidade Federal de Minas Gerais

Matemática Discreta - Trabalho Prático

---

1. Introdução

Este projeto consiste na geração e visualização de fractais utilizando regras de substituição em sequências de caracteres. O programa é composto por dois arquivos: um responsável pela geração do fractal e outro pela sua visualização utilizando a biblioteca SDL2.

2. Especificação e Restrições

- O programa deve receber como entrada um axioma, um ângulo e uma regra de substituição.
- O programa deve iterar sobre a sequência de caracteres a partir do axioma, substituindo os caracteres de acordo com a regra especificada.
- O número de iterações deve ser no ***MÁXIMO*** 4.
- O programa deve gerar uma sequência final de caracteres após as n iterações.
- O resultado final deve ser armazenado em um arquivo chamado "fractal.txt".
- O programa está limitado a um máximo de 1.000.000 de caracteres para o axioma e a regra de substituição.
- O programa assume que a entrada do usuário é válida e segue o formato esperado.

3. Projeto

3.1 Arquitetura do Sistema

O sistema é composto por dois programas em linguagem C. O primeiro programa é responsável pela geração do fractal e gera a sequência de caracteres que representa o fractal no arquivo "fractal.txt".

O segundo tem execução *OPCIONAL* e utiliza a biblioteca SDL2 para ler a sequência de caracteres do arquivo "fractal.txt" e desenhar o fractal em uma janela gráfica.

3.2 Algoritmo de Geração de Fractal

O algoritmo de geração de fractal é implementado no primeiro programa e segue os passos descritos no enunciado do trabalho. Ele recebe como entrada um axioma, um ângulo e uma ou duas regras de substituição, e realiza as substituições necessárias na sequência de caracteres ao longo de n iterações. Ao final das iterações, a sequência de caracteres resultante é armazenada no arquivo "fractal.txt".

3.3 Algoritmo de Desenho do Fractal (EXECUÇÃO OPCIONAL, já que as imagens serão apresentadas nesta documentação, ***PODE HAVER PROBLEMAS NA INSTALAÇÃO DA BIBLIOTECA***)

O algoritmo de desenho do fractal é implementado no segundo programa, chamado "fDraw.c". Ele utiliza a biblioteca SDL2 para criar uma janela gráfica e desenhar o fractal. O algoritmo percorre a sequência de caracteres lida do arquivo "fractal.txt" e realiza as seguintes ações para cada caractere:

- Se o caractere for 'F', é desenhada uma linha na direção atual a partir da posição atual.
- Se o caractere for '+', o ângulo de direção é incrementado em um valor fixo.
- Se o caractere for '-', o ângulo de direção é decrementado em um valor fixo.
- Outros caracteres são ignorados.

O resultado é um desenho do fractal na janela gráfica, onde as linhas são desenhadas de acordo com as instruções presentes na sequência de caracteres.

---

4. Implementação

Ao abordar a implementação dos fractais, existem diversas estratégias possíveis. Neste documento, serão discutidas duas abordagens principais: uma versão iterativa com armazenamento em arquivo e outra versão recursiva. Além disso, será apresentada a estratégia utilizada no projeto.

4.1 Versão Iterativa com Armazenamento em Arquivo

Nessa abordagem, a geração do fractal é realizada de maneira iterativa. Os caracteres de cada estágio intermediário são gravados em um arquivo, lidos e processados para gerar um novo arquivo para o próximo estágio. Esse processo é repetido até que o estágio desejado seja alcançado.

Pontos Positivos:

- Facilidade de implementação e compreensão.
- Permite a visualização do fractal em cada estágio intermediário, auxiliando na análise e depuração.

Pontos Negativos:

- Pode ser menos eficiente em termos de desempenho, devido à leitura e escrita em arquivos durante cada iteração.
- O uso de arquivos intermediários pode ocupar espaço em disco

4.2 Versão Recursiva

Nessa abordagem, a geração do fractal é realizada de forma recursiva. A sequência de caracteres para cada estágio é gerada chamando a função recursivamente. A recursão continua até que o estágio desejado seja alcançado.

Pontos Positivos:

- Implementação mais elegante e concisa, especialmente para fractais complexos.
- Potencialmente mais eficiente em termos de desempenho, evitando o uso de arquivos intermediários.

Pontos Negativos:

- Pode ser mais difícil de compreender e depurar, especialmente para fractais com múltiplas regras de substituição.
- O uso excessivo de recursão pode levar a problemas de estouro de pilha (stack overflow) em fractais extremamente grandes.

4.3 Abordagem Utilizada

A estratégia adotada no projeto segue uma versão iterativa com armazenamento em arquivo, conforme evidenciado no código fornecido. O fractal é gerado por meio de iterações sobre a sequência de caracteres, substituindo os caracteres de acordo com as regras especificadas. O resultado final é armazenado no arquivo "fractal.txt" e, em seguida, visualizado utilizando o programa "fDraw.c" com a biblioteca SDL2.

4.4 Tecnologias Usadas na Implementação

O projeto foi implementado utilizando a linguagem C e as seguintes ferramentas e tecnologias:

- Compilador GCC (GNU Compiler Collection) versão 9.3.
- Biblioteca SDL2 (Simple DirectMedia Layer) versão 2.0.

---

5. Equações de Recorrência

Serão apresentadas a seguir, cada uma das equações de recorrência usadas para calcular a quantidade de segmentos F gerados e a quantidade de símbolos existentes em cada estágio.
A lógica usada para calcular cada uma delas foi a mesma, foi desenvolvido um código que contava a ocorrência dos caracteres F e os todos os caracteres a cada iteração e a partir disso foi desenvolvido o raciocínio.

5.1 Ilha de Koch

Axioma : F
$\Theta = \pi / 2$
$F \rightarrow F+F-F-FFF+F+F-F$

Iterações(n)	#F	#Símbolos
0	4	7
1	36	63
2	324	567
3	2916	5103
4	26244	45927

Observando os dados fornecidos, podemos notar que a quantidade de segmentos 'F' na iteração n é igual à quantidade de segmentos 'F' na iteração anterior multiplicada por 9:

S(0) = 4

S(n) = 9 * S(n-1)

Além disso, a quantidade total de símbolos na iteração n é igual à quantidade total de símbolos na iteração anterior multiplicada por 9

T(0) = 7

T(n) = 9 * T(n-1)

5.2 Preenchimento de espaço de Hilbert

Axioma : X

X ⟶-YF+XFX+FY-

Θ = π / 2

Y ⟶+XF-YFY-FX+

Iterações(n)	#F	Símbolos
0	0	1
1	3	11
2	15	51
3	63	211
4	255	851

Mais uma vez, observando os dados fornecidos, temos que:

Equação de recorrência para a quantidade de segmentos 'F' (S):

S(0) = 0

S(n) = 4 * S(n-1) + 3

Equação de recorrência para a quantidade total de símbolos (T):

T(0) = 1

T(n) = (4^n - 1 / 3) * 7

5.3 Fractal Criado por mim

Axioma : X

X ⟶YF+XF+Y

Θ = π / 3

Y ⟶ XF-YF-X

Iterações(n)	#F	Símbolos
0	0	1
1	2	7
2	8	25
3	26	79
4	80	241

Por fim, observando os dados fornecidos, temos que:

Equação de recorrência para a quantidade de segmentos 'F' (S):

S(0) = 0

S(n) = 3*S(n-1) + 2

Equação de recorrência para a quantidade total de símbolos (T):
T(0) = 1

T(n) = 3*T(n-1) + 4

---

6. Complexidade Assintótica

6.1 Ilha de Koch

A equação de recorrência dada é T(n) = 9 * T(n-1), com T(0) = 7.

Podemos resolver essa equação de recorrência para obter uma fórmula fechada para T(n).

T(n) = 9 * T(n-1) = 9 * (9 * T(n-2)) = 9^2 * T(n-2) = 9^3 * T(n-3) = ... = 9^n * T(0) = 9^n * 7

Portanto, a solução da equação de recorrência é T(n) = 7 * 9^n.

A complexidade do algoritmo representado por essa equação de recorrência é **O(9^n).**

6.2 Preenchimento de espaço de Hilbert

A equação de recorrência dada é T(n) = ((4^n - 1) / 3) * 7, com T(0) = 1.

A fórmula fechada para T(n) é T(n) = ((4^n - 1) / 3) * 7.

Para determinar a complexidade assintótica dessa função, podemos analisar o crescimento da expressão (4^n - 1) / 3 à medida que n aumenta.

Quando n aumenta, o termo (4^n - 1) tende a dominar o comportamento da função, uma vez que 4^n cresce exponencialmente. Portanto, podemos considerar apenas esse termo para analisar a complexidade assintótica.

O termo (4^n - 1) cresce exponencialmente em relação a n, e podemos dizer que

sua complexidade é O(4^n).

Assim, a complexidade assintótica da função T(n) = ((4^n - 1) / 3) * 7 é **O(4^n).**

CONSIDERANDO QUE TEMOS OS TERMOS X E Y NA STRING FINAL.

6.3 Fractal criado por mim

Para analisar a complexidade desse algoritmo, vamos observar a relação de recorrência dada:

T(n) = 3 * T(n-1) + 4

Vamos expandir a relação para alguns valores de n para identificar um padrão:

T(0) = 1 T(1) = 3 * T(0) + 4 = 3 * 1 + 4 = 7 T(2) = 3 * T(1) + 4 = 3 * 7 + 4 = 25 T(3) = 3 * T(2) + 4 = 3 * 25 + 4 = 79 T(4) = 3 * T(3) + 4 = 3 * 79 + 4 = 241

Podemos observar que cada termo T(n) depende do termo anterior T(n-1) multiplicado por 3 e acrescido de 4. Portanto, podemos reescrever a relação de recorrência como:

T(n) = 3^n * T(0) + 4 * (3^(n-1) + 3^(n-2) + ... + 3 + 1)

A soma dos termos 3^(n-1) + 3^(n-2) + ... + 3 + 1 é uma série geométrica finita com a razão 3 e n termos. Podemos utilizar a fórmula da soma de uma série geométrica para simplificar:

3^(n-1) + 3^(n-2) + ... + 3 + 1 = (3^n - 1) / (3 - 1) = (3^n - 1) / 2

Substituindo essa expressão na relação de recorrência, temos:

T(n) = 3^n * T(0) + 4 * (3^n - 1) / 2 = 3^n + 2 * (3^n - 1) = 3^n + 2 * 3^n - 2 = 3 * 3^n - 2

A complexidade assintótica mais precisa possível é, portanto, **O(3^n).**

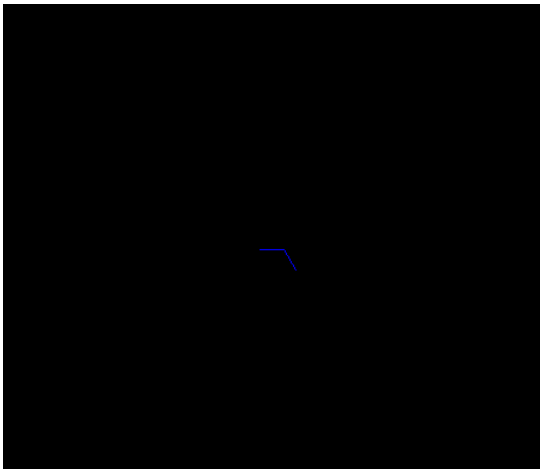
CONSIDERANDO QUE TEMOS OS TERMOS X E Y NA STRING FINAL.

---

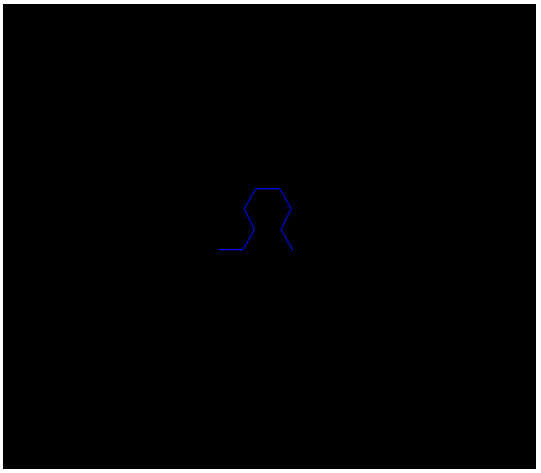
7. Representação Gráfica do Fractal

Para representar graficamente os fractais, eu usei um código desenvolvido por mim em linguagem C com a biblioteca SLD2. Ele pode ser executado, se for de interesse. Para isso, o “readme.txt” especifica como executá-lo;

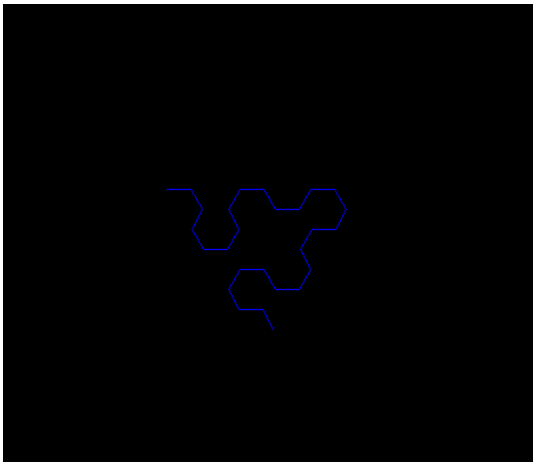
Seguem as imagens do meu fractal em cada estágio.



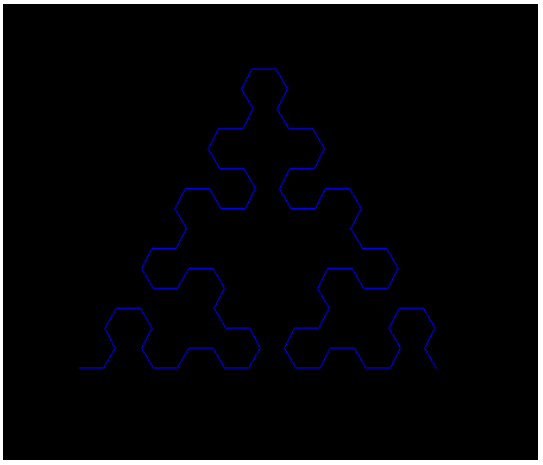
fractal na primeira iteração



fractal na segunda iteração



fractal na terceira iteração



fractal na quarta iteração