

Uso do modelo SIR para simulação da epidemia de COVID-19

Lucas Costa Barbosa DRE - 118045887

¹Universidade Federal do Rio de Janeiro

lucas.barbosa.0899@poli.ufrj.br

Introdução. O Modelo SIR (Suscetível - Infectado - Recuperado) é o mais simplificado dentre os modelos de simulação epidemiológica (HE; PENG; SUN, 2020) (OSMAN; ADU; YANG, 2017) (BRAUER; CASTILLO-CHAVEZ; FENG, 2019). Estes modelos refletem, de forma mais ou menos simplificada, as dinâmicas presentes dentro de uma epidemia. Muitos destes modelos foram utilizados para a pandemia da COVID-19, já que se trata de um vírus de rápida contaminação, e baixa letalidade, o que dá importância e facilita o uso destes modelos (TANG et al., 2020). Contudo, existem outros métodos para investigar o comportamento de pandemias, como o modelo de ajuste de fases (WANG et al., 2020). O maior entrave para o sucesso destes modelos, é a imprevisibilidade e o caos dos sistemas dinâmicos que permeiam as epidemias (AIHARA; SUZUKI, 2010). Neste artigo não será abordado o modelo SEIR, pois os dados de pessoas expostas são escassos. Acredita-se que o modelo SIR pode ser capaz de prever, com uma razoável semelhança a realidade, os dados.

Métodos. Para este artigo, foram utilizados os dados obtidos pelo (*Center for Systems Science and Engineering (CSSEGI)* da Universidade *John Hopkins (DONG; DU; GARDNER, 2020)*). Os dados contêm número de infectados e recuperados. Com isso, através de (1), foi calculado o número de suscetíveis:

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (1)$$

O sistema dinâmico que modela essas 3 variáveis é definido por:

$$\dot{S} = \frac{-\beta}{N} S(t) I(t) \quad (2)$$

$$\dot{R} = \gamma I(t) \quad (3)$$

$$\dot{I} = -\dot{S} - \dot{R} \quad (4)$$

, . Define-se então um período de amostragem h , geralmente 1 dia. β e γ são, respectivamente, a quantidade de contatos que uma pessoa tem h dias e o período de incubação do vírus, medidos em h utilizou-se como $t = 0$ o instante em que houve o primeiro caso. Portanto:

$$I(0) = 1, R(0) = 0, S(0) = N - 1 \quad (5)$$

Já para encontrar os parâmetros β e γ , foi feita uma interpolação utilizando como *kernel* a função $f(x) = Ae^{-bx}$, e $f(x) = ax + b$, respectivamente, e a função de erro Erro Quadrático Médio $E(y, \hat{y}) = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$, sendo y o valor real de y e \hat{y} o valor calculado $f(x)$. A interpolação de $\beta(t)$, será otimizada pela descida de gradiente de ambos parâmetros A e b :

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 2(y_i - \hat{y}_i)(-e^{-bx}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2(y_i - \hat{y}_i)(Axe^{-bx}) \quad (7)$$

Já a interpolação de $\gamma(t)$ será feita otimizada pela descida de gradiente de ambos parâmetros a e b :

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2(y_i - \hat{y}_i)x_i \quad (8)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2(y_i - \hat{y}_i) \quad (9)$$

. Sabendo dos valores de $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, utilizou-se as equações (2), (3) e (4) e o método de integração de Euler, $f(x+h) = f(x) + hf'(x)$, para predizer as 3 curvas a partir do dia posterior ao último dia que consta nos dados. O código pode ser encontrado no repositório do github do *QRCODE* presente nas referências.

Resultados. A figura 1 mostra os valores históricos de $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$. Para a interpolação de $\beta(t)$ e $\gamma(t)$, temos os resultados na figura 2. Na figura 3 é possível observar os valores históricos e simulados de $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$. As funções $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ são:

$$\beta(t) = 0,2e^{-0.009t} \quad (10)$$

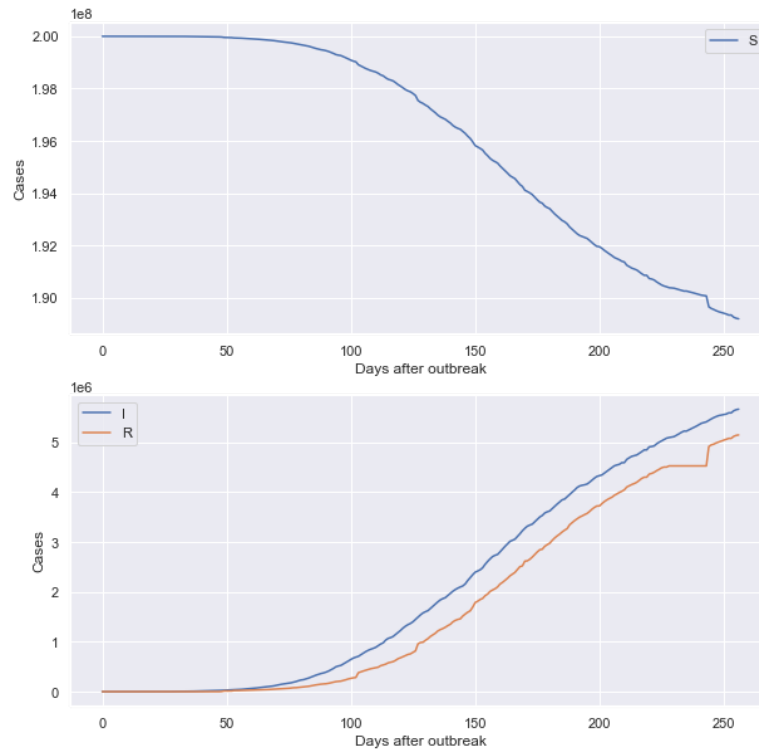
$$\gamma(t) = 0.035 - 0.00013t \quad (11)$$

Discussão. A respeito das curvas $\beta(t)$ e $\gamma(t)$, é possível notar que $\beta(t)$ segue em alguma medida uma exponencial decrescente, como proposto. $\gamma(t)$ se comporta em certa medida linearmente, porém o valor de a é tão alto que a função atinge 0 muito rapidamente, fazendo com que a curva $R(t)$ não cresça. Além disso, os valores são tão pequenos que na literatura eles são considerados constantes (BRAUER; CASTILLO-CHAVEZ; FENG, 2019), iguais a cerca de $8,5 \times 10^{-3}$. Já para $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$, notou-se que houve uma certa mudança de comportamento entre

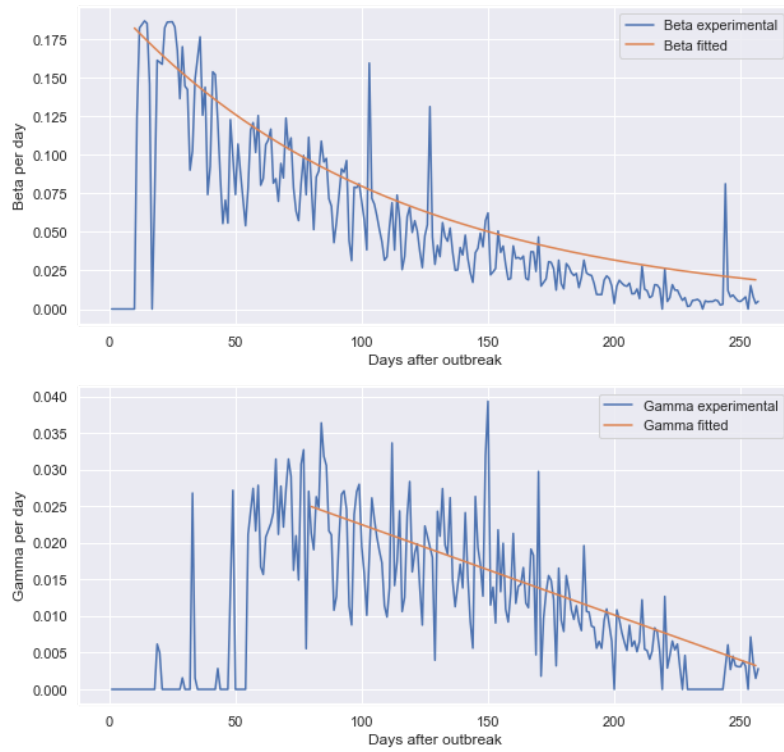
as curvas reais e simuladas, coisa que não aconteceu quando colocou-se γ constante, (Figura 4)

Figuras.

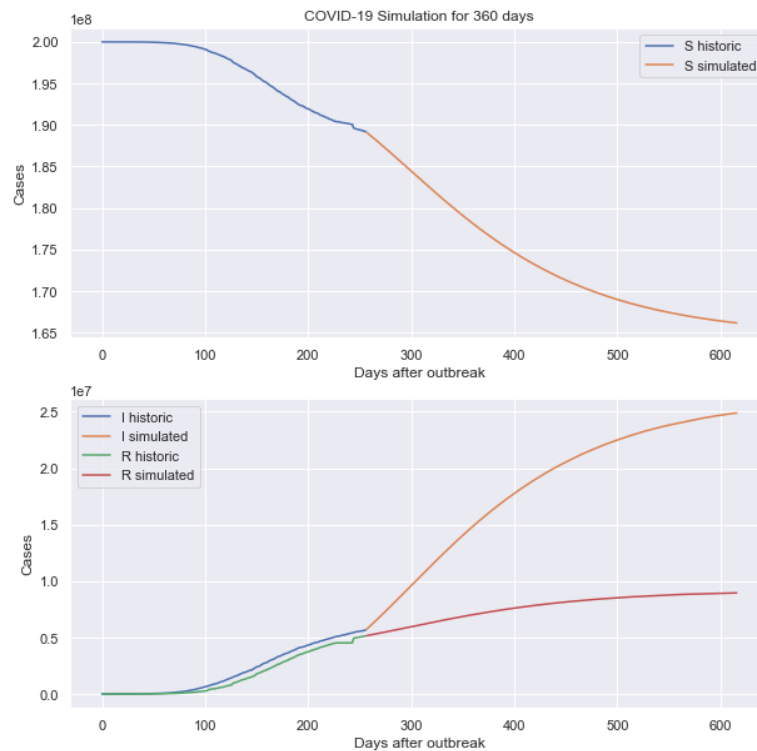
1) Resultado dos valores históricos de S (em cima), I (em baixo azul) e R (embaixo laranja):



2) Resultado do valor experimental (azul) e interpolado (laranja) para $\beta(t)$ (em cima) e γ (embaixo) :

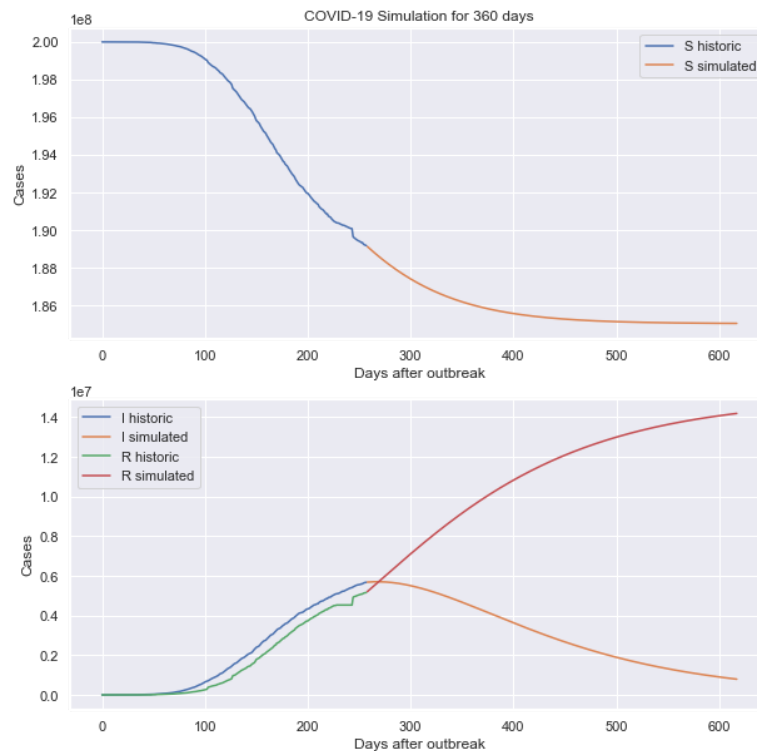


3) Valores de $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ históricos e simulados, para γ variável, no caso para 360 dias.



4) Valores de $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ históricos e simulados, para γ constante,

no caso para 360 dias.



Keywords. SIR; Modelos epidemiológicos; método de integração de euler; EDO; interpolação.

Referências

AIHARA, K.; SUZUKI, H. Theory of Hybrid Dynamical Systems and Its Applications to Biological and Medical Systems. **Philosophical Transactions. Series A**, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences, v. 368, n. 1930, p. 4893–4914, 13 nov. 2010.

BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C.; FENG, Z. **Mathematical Models in Epidemiology**. [S.l.]: Springer Nature, 2019.

DONG, E.; DU, H.; GARDNER, L. An Interactive Web-Based Dashboard to Track COVID-19 in Real Time. **The Lancet Infectious Diseases**, v. 20, n. 5, p. 533–534, maio 2020.

HE, S.; PENG, Y.; SUN, K. SEIR Modeling of the COVID-19 and Its Dynamics. **Nonlinear Dynamics**, p. 1–14, 18 jun. 2020.

OSMAN, M.; ADU, I.; YANG, C. **A Simple SEIR Mathematical Model of Malaria Transmission.** *Asian Research Journal of Mathematics*. [S.l: s.n.]. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.9734/arjom/2017/37>>, 2017

TANG, B. et al. Estimation of the Transmission Risk of the 2019-nCoV and Its Implication for Public Health Interventions. **Journal of Clinical Medicine Research**, v. 9, n. 2, 7 fev. 2020. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3390/jcm9020462>>.

WANG, H. et al. **Phase-adjusted estimation of the number of Coronavirus Disease 2019 cases in Wuhan, China.** *Cell Discovery*. [S.l: s.n.]. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41421-020-0148-0>>. , 2020



Repositório no Github