$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^x = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right]$$

Fazendo na mão:

$$f(x) = x \cdot (1 + x + x^2/2 + \dots) - x^3/6\,(1 + x^2/2 + \dots) + \dots$$

Isolando parcelas com x de mesmo grau

$$f(x) = x + x^2 + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \left(\frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{6}\right) + \left(\frac{x^5}{24} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120}\right) + \dots$$

$$f(x) = x + x^2 + x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + x^4 \cdot \cancel{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)}^{0} + x^5\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right) + \dots$$

$$f(x) = x + x^2 + x^3/3 - x^5/30 - x^6/90 - x^7/630 \dots$$

Quanto ao x, é possível perceber que ele pula as potências múltiplas de 4, e que o sinal troca a cada 3 parcelas:

É preciso encontrar um algoritmo que calcule cada ci (ou seja, a somas das frações que multiplicam x^i). Para achar a fração referente ao x^n, é preciso iterar pelos x^i do sen(x) que ao serem multiplicados pelo x^j do e^x, virarão x^n. Logo:

$$f(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots + c_i x^i \quad \forall i,\ i \% 4 \neq 0$$

$x^n = x^i \cdot x^j = x^{i+j} \Rightarrow n = i+j$

$n=0 \to (i,j) = \{(0,0)\}$

$n=1 \to (i,j) = \{(0,1),(1,0)\}$

$n=2 \to (i,j) = \{(0,2),(1,1),(2,0)\}$

$n=3 \to (i,j) = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$

Porem, i só pode ser ímpar:

$n=0 \to (i,j) = \{(0,0)\}$

$n=1 \to (i,j) = \{\cancel{(0,1)},(1,0)\}$

$n=2 \to (i,j) = \{\cancel{(0,2)},(1,1),\cancel{(2,0)}\}$

$n=3 \to (i,j) = \{\cancel{(0,3)},(1,2),\cancel{(2,1)},(3,0)\}$

Logo, p/ n qualquer:

$(i,j) = \{(1,n-1),(3,n-3),\ldots,(n,0)\}$

Com isso, podemos realizar o algoritmo:

$f(x) = 0$

Para n dentro de [1,2,3,5,6,7,9,10,11...]:

$\quad sinal\_x^n = (-1)^{n//4}$

$\quad C_n = 0$

$\quad i = 1$

Enquanto $i \leq exp$:

$sinal = (-1)^{i//2}$

$Cn = Cn + sinal \cdot \left(\frac{1}{i!} \cdot \frac{1}{n-i!}\right)$

$f(x) = f(x) + sinal\_x^{h} \cdot x^{n} \cdot Cn$