Controle em Tempo Real - Avaliação I - Grupo I

Lucas Barra de Aguiar Nunes - DRE: 118039991
Lucas Costa Barbosa - DRE: 118045887

10/01/2021

Conteúdo

Lista de Figuras

Exercícios 1, 2, e 3

Dado a função de custo para o passo N-p, temos $x = x[N-p], u = u[N-p], Q_1 = Q_1[N-p], Q_2 = Q_2[N-p], \Phi = \Phi[N-p], \Gamma = \Gamma[N-p]$:

$$J_{N-p,N}(x,u) = x^T(Q_1 + \Phi^T \mathcal{P} \Phi)x + u^T(\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma + Q_2)u + x^T(\Phi^T \mathcal{P} \Gamma)u + u^T(\Gamma^T \mathcal{P} \Phi)x \tag{1}$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^T 0 \tag{2}$$

$$Q_1 = Q_1^T 0 \tag{3}$$

$$Q_2 = Q_2^T 0 \tag{4}$$

$$\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma = (\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma)^T > 0 \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Dada as propriedades da diferenciação e transposição de matrizes demonstradas no Apêndice A, temos:

$$\left.\frac{\partial J_{N-p,N}(x,u)}{\partial u}\right|_{u=u^*} = (u^*)^T[(\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma + Q_2)^T + (\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma + Q_2)] + x^T(\Phi^T \mathcal{P} \Gamma) + ((\Gamma^T \mathcal{P} \Phi)x)^T = 0 \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial J_{N-p,N}(x,u)}{\partial u}\right|_{u=u^*} = 2(u^*)^T(\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma + Q_2)^T + 2x^T(\Phi^T \mathcal{P} \Gamma) = 0 \tag{8}$$

$$2(\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma + Q_2)u^* + 2(\Gamma^T \mathcal{P} \Phi)x = 0 \tag{9}$$

$$u^* = -[(\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma + Q_2)^{-1} \Gamma^T \mathcal{P} \Phi]x \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 J_{N-p,N}(x,u)}{u^2} = 2u^T(\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma + Q_2)^T > 0 \tag{11}$$

No exercício 1, $\mathcal{P}$ inicia como uma matriz simétrica e ao final lhe é atribuída uma outra matriz simétrica. Os exercícios seguintes obtém a simétrica anterior e atribuem a mesma matriz simétrica. Como no cálculo acima foi provado para uma matriz simétrica $\mathcal{P}$ qualquer, a prova é válida para os 3 exercícios.

Para achar o custo referente ao controle ótimo u^*:

$$J^*_{N-p,N}(x) = J_{N-p,N}(x,u^*) = x^T(Q_1 + \Phi^T \mathcal{P} \Phi)x + (-Fx)^T(\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma + Q_2)(-Fx) + \tag{12}$$

$$+ x^T(\Phi^T \mathcal{P} \Gamma)(-Fx) + (-Fx)^T(\Gamma^T \mathcal{P} \Phi)x = \tag{13}$$

$$J^*_{N-p,N}(x) = x^T(Q_1 + \Phi^T \mathcal{P} \Phi)x + x^T(F^T(\Gamma^T \mathcal{P} \Gamma + Q_2)F)x - x^T(\Phi^T \mathcal{P} \Gamma F)x - x^T(F^T \Gamma^T \mathcal{P} \Phi)x = \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Sendo:

$$F^T(\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)F = ((\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1}\Gamma^T\mathcal{P}\Phi)^T(\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)(\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1}\Gamma^T\mathcal{P}\Phi = \tag{16}$$

$$= (\Gamma^T\mathcal{P}\Phi)^T((\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1})^T(\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)(\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1}\Gamma^T\mathcal{P}\Phi = \tag{17}$$

$$= (\Gamma^T\mathcal{P}\Phi)^T((\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1})^T\Gamma^T\mathcal{P}\Phi \tag{18}$$

$$\Phi^T\mathcal{P}\Gamma F = \Phi^T\mathcal{P}\Gamma(\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1}\Gamma^T\mathcal{P}\Phi \tag{19}$$

$$F^T\Gamma^T\mathcal{P}\Phi = ((\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1}\Gamma^T\mathcal{P}\Phi)^T\Gamma^T\mathcal{P}\Phi = (\Gamma^T\mathcal{P}\Phi)^T((\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1})^T\Gamma^T\mathcal{P}\Phi \tag{20}$$

Logo:

$$J^*_{N-p,N}(x) = x^T(Q_1 + \Phi^T\mathcal{P}\Phi + (\Gamma^T\mathcal{P}\Phi)^T((\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1})^T\Gamma^T\mathcal{P}\Phi + \tag{21}$$

$$- \Phi^T\mathcal{P}\Gamma(\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1}\Gamma^T\mathcal{P}\Phi - (\Gamma^T\mathcal{P}\Phi)^T((\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1})^T\Gamma^T\mathcal{P}\Phi)x = \tag{22}$$

$$J^*_{N-p,N}(x) = x^T(Q_1 + \Phi^T\mathcal{P}\Phi - \Phi^T\mathcal{P}\Gamma(\Gamma^T\mathcal{P}\Gamma + Q_2)^{-1}\Gamma^T\mathcal{P}\Phi)x \tag{23}$$

O código *ex3_controle_otimo.m*, utilizando o modelo discreto para o duplo integrador, apresentada no Apêndice B se encarrega de achar o ganho ótimo F^* pela derivação de $J_{N-p,N}(x,u)$, comparando com o valor achado utilizando a equação (5).

A figura 1 ilustra a comparação entre esses ganhos. É possível perceber que de fato os valores são iguais.

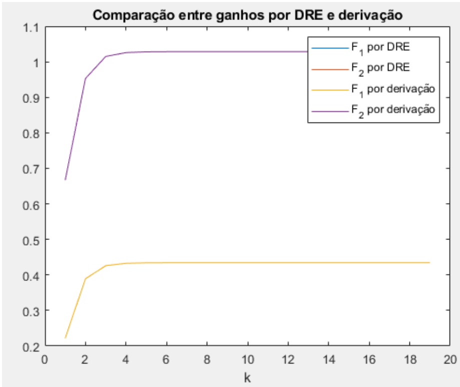


Figura 1: Comparação entre ganhos obtidos por derivação e pela equação (5) (DRE).

Exercício 4

Definição do modelo

Para o duplo integrador:

$$\ddot{y} = u \tag{24}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{27}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \tag{28}$$

$$\Phi = e^{Ah} = I + Ah = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\Gamma = \int_0^h \Phi ds B = \begin{bmatrix} h & \frac{h^2}{2} \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Conhecendo essas constantes, basta se definir os valores de $Q_0, Q_1, Q_2, x[-1]$ e $x[0]$ para encontrarmos $\bar{J}[k]$ e $u[k]$.

Os códigos *ex4_custo_script.m* e *ex4_custo_plot.m*, contidos no Apêndice B se encarrega de calcular e plotar $\bar{J}[k]$, comparando com os outros valores pedidos.

A figura 2 ilustra o diagrama de blocos do arquivo *ex4_custo.slx*:

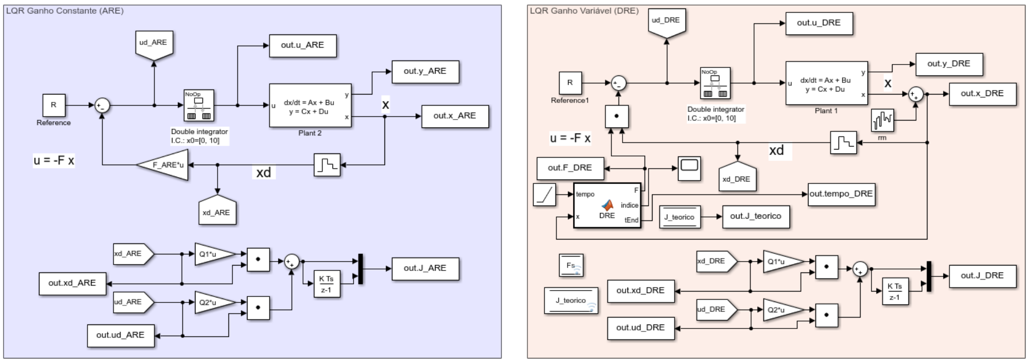


Figura 2: Esquema do arquivo *ex4_custo.slx*.

Resultados

As figuras 3-7 ilustram os gráficos dos estados, saída, erro em relação a referência nula, sinais de controle e custo, respectivamente, todos em tempo discreto, e comparando entre o método ARE e DRE, para as condições de $Q_0 = Q_1 = I, Q_2 = 10, x[0] = [0, 1]$. Os sinais estão sem ruído para facilitar a análise, porém posteriormente irá se analisar o ruído. O valor de Q_2 foi elevado para permitir visualizar a diferença entre os métodos.

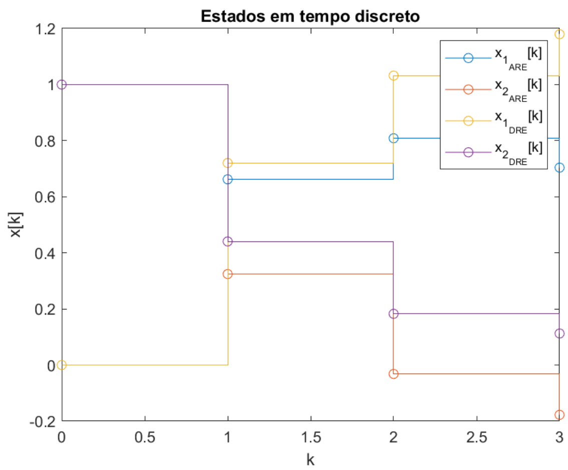


Figura 3: Gráfico dos estados do duplo integrador discreto para ARE e DRE.

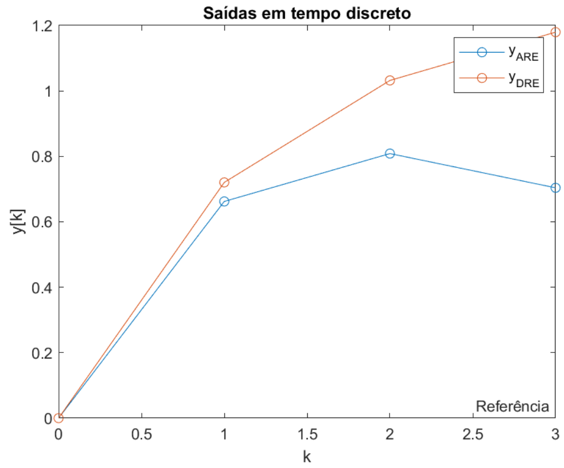


Figura 4: Gráfico das saídas do duplo integrador discreto para ARE e DRE.

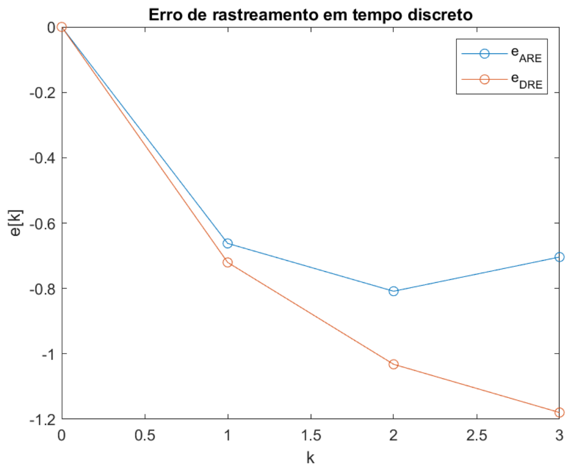


Figura 5: Gráfico dos erros do duplo integrador discreto para ARE e DRE.

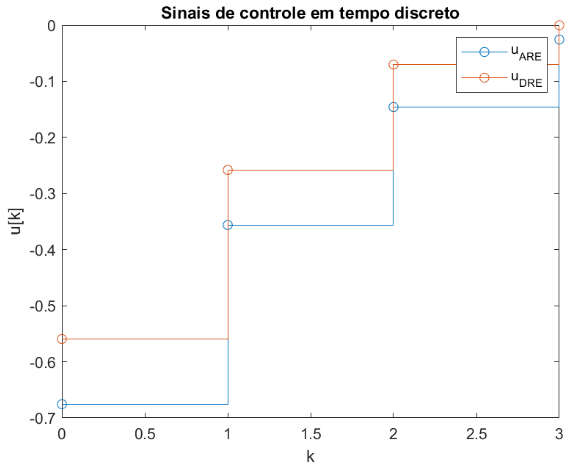


Figura 6: Gráfico dos sinais de controle do duplo integrador discreto para ARE e DRE.

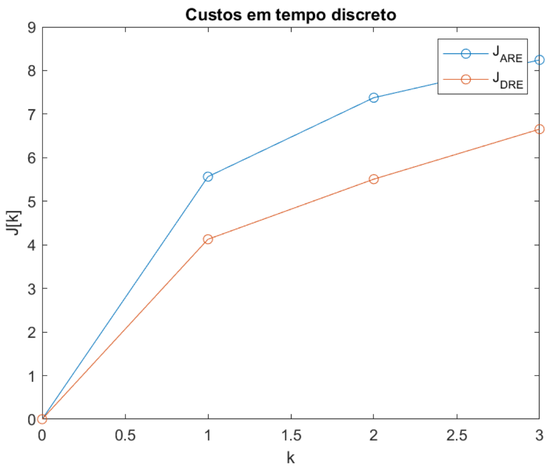
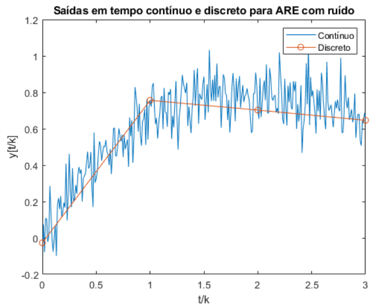


Figura 7: Gráfico dos custos do duplo integrador discreto para ARE e DRE.

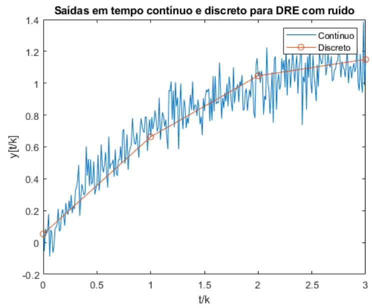
Discussão dos resultados

Comparação dos custos

É possível perceber que a planta implementou com sucesso uma integração. O valor de Q_2 escolhido foi este para que a otimização de u e consequentemente o ajuste fino do ganho fosse importante. Na figura 7 é possível notar que o custo do método DRE foi consideravelmente menor, provando a superioridade deste método para um Q_2 elevado.



(a) Saídas em tempo contínuo e discreto para ARE com ruído



(b) Saídas em tempo contínuo e discreto para DRE com ruído

Figura 8: Análise do efeito do ruído na amostragem das saídas de ARE e DRE.

Análise do sinal de controle

Como dito anteriormente, o valor elevado de Q_2 leva a uma estratégia de otimização focada em minimizar o módulo de u, com o intuito de minimizar o custo. O método DRE obteve mais êxito nesse sentido, como pode ser visto na figura 6, visto que o sinal de controle de DRE é menos negativo.

Um ponto negativo disso é que o módulo de x irá diminuir menos, causando um custo maior. Porém, como Q_1 e Q_0 são pequenos em relação a Q_2, esse aumento se torna irrisório frente a redução do custo do controle.

Análise do efeito do ruído de medição

Adicionando um ruído de frequência cem vezes maior que a frequência de amostragem, i.e., $\frac{100}{h}$, e potência de 0.0001, temos as seguintes saídas:

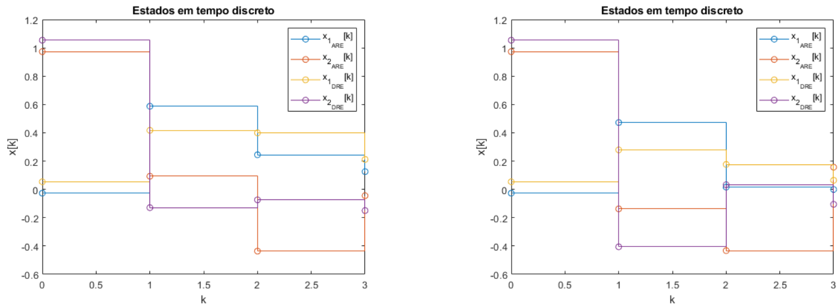
É possível notar que, visto que o ruído possui alta frequência e baixa potência, há pouco prejuízo na amostragem da saída. Pelo teorema de Nyquist, a frequência de amostragem deveria ser pelo menos o dobro da frequência do ruído para que sua presença causasse modificações significantes. Logo, o período de amostragem deveria ser 200 vezes menor do que é atualmente.

Análise do efeito de Q_0,Q_1 e Q_2

A matriz Q_0 é responsável por minimizar o estado final, e consequentemente o erro de estado estacionário para referência nula, como é nesse caso.

Já a matriz Q_1 é responsável por minimizar os estados, agilizando a sua estabilidade durante o transitório.

A figura 9 ilustra o efeito no modelo abordado:



(a) Estados para $Q_0 = 10I$ e $Q_1 = I$

(b) Estados para $Q_0 = I$ $Q_1 = 10I$

Figura 9: Análise do efeito de Q_0 e Q_1 nos estados do modelo.

É possível notar que, em relação a figura 3, houve uma redução drástica do estado final e do transitório, respectivamente.

Por fim, a matriz Q_2, como dito anteriormente, minimiza o controle.

Análise do efeito da perturbação de entrada

Analisando o controle ilustrado na figura 6, decidiu-se utilizar uma perturbação em degrau de valor final igual a 0.06, que é aproximadamente 10% do módulo do valor máximo do controle. E usando novamente $Q_0 = Q_1 = I$ e $Q_2 = 1$, e eliminando o ruído para auxiliar na análise do efeito da perturbação.

A figura 10 ilustra o espaço de estados para a perturbação abordada.

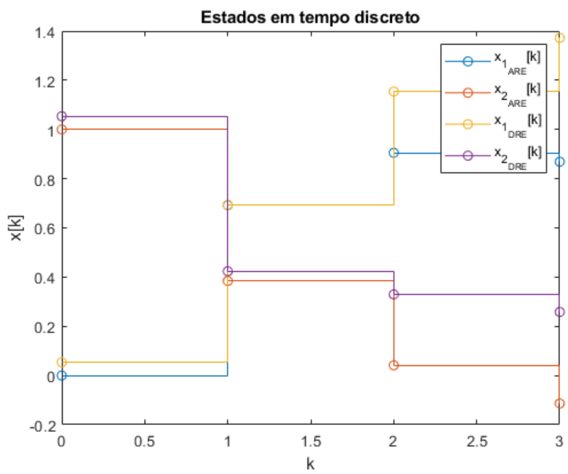


Figura 10: Gráfico dos estados de ARE e DRE para perturbação de valor final 0.06.

É possível perceber que a perturbação atenuou o controle, fazendo com que os estados avançassem mais.

Apêndice A

Propriedade das Matrizes

Transposição

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{32}$$
$$(A^T B)^T = B^T (A^T)^T = B^T A \tag{33}$$

Derivação

$$Q(x) = x^T A x \tag{34}$$
$$DQ(x)(h) = x^T A h + h^T A x = x^T A h + x^T A^T h = x^T (A + A^T) h \tag{35}$$
$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x} = x^T (A + A^T) \tag{36}$$

Apêndice B

Código *ex3_controle.m*:

```
clear all;
close all;
global N Phi Gamma Q1 Q2 Q0 h
%Passo de amostragem
h = 1;

%Horizonte de otimiza  o
N = 20;

%Modelo discreto do duplo integrador
Phi = [1 h; 0 1];
Gamma = [h^2/2; h];
C = [1 0];
D = 0;

%ordem do sistema
n = length(Phi);

%Custo
Q0 = eye(2);
Q1 = eye(2);
Q2 = 1;

T = Q0;
syms x1_ x2_ u_
x = [[0;0]];
x_ = [x1_;x2_];

```

```
for k=1:N-1
    F(k,:) = inv(Gamma'*T*Gamma+Q2)*Gamma'*T*Phi;
    u(k) = (-1)*F(k,:)*x(:,k);
    J = x_'*(Q1+Phi'*T*Phi)*x_+u_'*(Gamma'*T*Gamma+Q2)*u_ + x_'*(Phi'*T*Gamma)*u_+u_'*(Gamma'*T*Phi)*x_;
    dJ = diff(J,u_);
    F_(k,:) = [vpa(diff(dJ,x1_)/diff(dJ,u_)) vpa(diff(dJ,x2_)/diff(dJ,u_))];
    x(:,k+1) = Phi*x(:,k) + Gamma*u(k);
    T = Q1+Phi'*T*Phi-Phi'*T*Gamma*inv(Gamma'*T*Gamma+Q2)*Gamma'*T*Phi;
end

plot(1:N-1,F)
hold on
plot(1:N-1,F_)
legend('F_1 por DRE','F_2 por DRE', 'F_1 por deriva  o', 'F_2 por deriva  o');
xlabel('k');
title('Compara  o entre ganhos por DRE e deriva  o')
```

Código *ex4_custo_plot.m*:

```
%Configura  o inicial
clear all;
close all;
run('ex4_custo_script.m')
save = false;

N = 4;
h = 1;

F0 = zeros(1,n,1,N);
out = sim('ex4_custo.slx',(N-1)*h);


%Estados
figure(1)
plot(out.xd_ARE,'o-')
hold on
plot(out.xd_DRE,'o-')
legend('x_{1_{ARE}}[k]','x_{2_{ARE}}[k]','x_{1_{DRE}}[k]','x_{2_{DRE}}[k]')
title('Estados em tempo discreto')
xlabel('k')
ylabel('x[k]')
if save == true
    saveas(gcf,'figs/ex4_x.png')
end
hold off

%Sa da
figure(2)
plot(out.xd_ARE.Time,out.xd_ARE.Data(:,1),'o-')
hold on
plot(out.xd_DRE.Time,out.xd_DRE.Data(:,1),'o-')
yline(0,'-','Refer ncia');
legend('y_{ARE}','y_{DRE}')
title('Sa das em tempo discreto')
xlabel('k')
ylabel('y[k]')
if save == true
    saveas(gcf,'figs/ex4_y.png')
end
hold off

%Erro
figure(3)
plot(out.xd_ARE.Time,R-out.xd_ARE.Data(:,1),'o-')
hold on
plot(out.xd_DRE.Time,R-out.xd_DRE.Data(:,1),'o-')
legend('e_{ARE}','e_{DRE}')
title('Erro de rastreamento em tempo discreto')
xlabel('k')
ylabel('e[k]')
if save == true
```

```
    saveas(gcf,'figs/ex4_e.png')
end
hold off

%Sinal de controle
figure(4)
plot(out.ud_ARE,'o-')
hold on
plot(out.ud_DRE,'o-')
hold on
legend('u_{ARE}','u_{DRE}')
title('Sinais de controle em tempo discreto')
xlabel('k')
ylabel('u[k]')
if save == true
    saveas(gcf,'figs/ex4_u.png')
end
hold off

%Custos
figure(5)
plot(out.J_ARE.Time,out.J_ARE.Data(:,2),'o-')
hold on
plot(out.J_DRE.Time,out.J_DRE.Data(:,2),'o-')
hold on
legend('J_{ARE}','J_{DRE}')
title('Custos em tempo discreto')
xlabel('k')
ylabel('J[k]')
if save == true
    saveas(gcf,'figs/ex4_J.png')
end
hold off
```

Código *ex4_custo_script.m*:

```
clear all;
global N Phi Gamma Q1 Q2 Q0 h R
%Passo de amostragem
h = 1;

%Horizonte de otimiza  o
N = 20;

%Modelo discreto do duplo integrador
Phi = [
    1 h;
    0 1
    ];
Gamma = [
    h^2/2;
    h
    ];
C = [1 0];
D = 0;
```

```
%ordem do sistema
n = length(Phi);

%Custo
Q0 = [
     1 0;
     0 1
     ];
Q1 = [
     1 0;
     0 1
     ];
Q2 = 10;

%Estado inicial
x0= [0;1];

%Refer ncia
R = 0;

%F por ARE
[X,F_ARE,~,info] = idare(Phi,Gamma,Q1,Q2,[],[]);

%Valor inicial do bloco de mem ria
F0 = zeros(1,n,1,N);

%N vel ruido de medi  o
rm_ARE = 0;
seed_ARE = 41;

rm_DRE = 1e-4;
seed_DRE = 42;

%Perturba  o de entrada
d_ARE = 0.06;
d_ARE_gate = 1;

d_DRE = 0.06;
d_DRE_gate = 1;
```