

Otimização de Escalas de Tripulantes em Companhias Aéreas

Daniel Augusto Cortez
Lucas Rodrigues Colucci
Renato Lerac Corrêa de Sá

31 de julho de 2012

Resumo

Fornecemos as motivações e a formulação do problema de otimização de escalas de tripulantes em companhias aéreas. O problema é normalmente decomposto em dois subproblemas resolvidos sequencialmente: determinação de viagens e determinação de escalas. Um modelo de programação linear inteiro é apresentado para resolver cada um.

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Definições e Nomenclaturas	4
2	Formulação do Problema	6
2.1	Regras de Trabalho e Estrutura de Custo	7
2.2	Problema da Determinação das Viagens	11
2.2.1	Gerador de Viagens	14
2.2.2	Exemplo	15
2.3	Problema da Determinação de Escalas	18
2.4	Formulação Integrada	21
3	Métodos de Solução	22

1 Introdução

Métodos de otimização no planejamento das operações de uma empresa aérea têm sido aplicados a várias décadas [10]. Tal planejamento envolve diversos problemas que normalmente são resolvidos de forma separada e seqüencial devido ao tamanho e a complexibilidade de cada problema individual, embora eles estejam intimamente relacionados [4] (veja Figura 1.1).

Primeiro, resolve-se o problema da *malha de voos*, que consiste em determinar todos os trechos a serem voados pela empresa num determinado período de tempo. O planejamento é basicamente feito em termos de demanda de mercado.

Segundo, trata-se do problema da *atribuição de frotas*. Nele, determina-se qual o tipo de aeronave (tal como Boeing 737, Boeing 767, Airbus 320, etc) deve ser atribuído para efetuar cada trecho da malha de voos. O objetivo é maximizar os lucros de venda, em função da demanda prevista e do custo de se operar determinada frota em determinado trecho, sujeito à restrição de que todos os voos da malha sejam cobertos com as frotas disponíveis.

Terceiro, considera-se o problema do *roteamento de aeronaves*, que envolve a escolha das aeronaves de uma frota que vão realizar determinados voos de forma que cada aeronave passe um tempo adequado em aeroportos específicos com a finalidade de serem revisadas pela manutenção. O objetivo é maximizar os lucros, respeitando ainda a restrição de que todos os voos da frota sejam cobertos.

Finalmente, o problema de *escalonamento de tripulantes* é resolvido. Tal problema foi um dos primeiros a receber atenção significativa por parte da comunidade de pesquisa operacional [3], sendo ainda um dos mais estudados. Isso porque, no transporte aéreo, os custos com a tripulação representam a segunda maior parcela dos custos operacionais da empresa, perdendo apenas para os custos com combustível. Para se ter uma ideia, o custo total com tripulação excede 1,3 bilhões de dólares todo ano na American Airlines [2]. Hoje em dia, a otimização no planejamento de escalas representa economia de cerca de 50 milhões de dólares anuais para uma companhia de grande porte [4].

De forma geral, escalonamento de tripulantes pode ser definido como o problema de se atribuir um grupo de trabalhadores (uma tripulação) para realizar um conjunto de atividades. No contexto da aviação, cada tripulante (comandante, co-piloto, comissário, etc) deve ser designado para realizar um determinado voo da empresa. Tal designação deve ser feita respeitando-se uma série de restrições impostas pelas agências reguladoras da aviação, bem

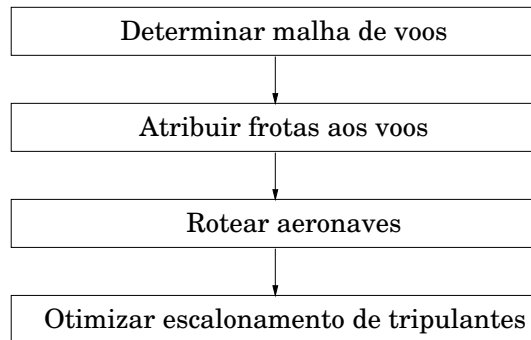


Figura 1.1: Sequência de problemas resolvidos no planejamento de operações de uma empresa aérea.

como regras de regulamentação trabalhista, restrições operacionais impostas pela própria empresa e acordos trabalhistas entre empregado e empregador. Dado o grande número de variáveis e restrições envolvidas, assim como a possibilidade de grandes ganhos econômicos, o problema torna-se bastante interessante, tanto do ponto de vista da indústria, quanto acadêmico.

Os objetivos deste primeiro trabalho é dar uma descrição mais precisa do problema de escalonamento de tripulantes, fornecer uma formulação precisa e discutir brevemente algumas técnicas de solução já aplicadas para resolução do mesmo.

1.1 Definições e Nomenclaturas

Antes que possamos apresentar e explorar a estrutura do problema com mais detalhes, faz-se necessário a introdução de algumas definições e nomenclaturas normalmente utilizadas, as quais serão amplamente utilizadas neste trabalho.

- **Etapas:** é um voo único sem paradas, também chamado de **perna**, **trecho** ou **segmento de voo**.
- **Jornada:** conjunto de uma ou mais etapas sequenciais, também chamado de **jornada de trabalho**.
- **Tempo Mínimo de Conexão:** menor intervalo possível de tempo entre duas etapas consecutivas em uma jornada.

- **Tempo Máximo de Conexão:** maior intervalo possível de tempo entre duas etapas consecutivos em uma jornada.
- **Tempo de Briefing:** tempo mínimo que antecede o início da primeira etapa de uma jornada, necessário para o *briefing* da tripulação.
- **Tempo de Debriefing:** tempo mínimo que sucede o término da última etapa de uma jornada, necessário para o *debriefing* da tripulação.
- **Início da Jornada:** horário em que a tripulação deve se apresentar para o início de uma jornada. Corresponde ao horário da decolagem da primeira etapa menos o tempo de briefing. Também chamado de **checkin**.
- **Término da Jornada:** horário em que a tripulação encerra suas atividades em uma jornada. Corresponde ao horário de pouso da última etapa mais o tempo de debriefing. Também chamado de **checkout**.
- **Base Contratual:** cidade onde um dado tripulante está domiciliado, também chamada simplesmente de **base**.
- **Viagem:** conjunto de jornadas de trabalho, com a primeira etapa da primeira jornada e a última etapa da última jornada começando e terminando na mesma base contratual. Uma viagem também é chamada de **pairing**, ou **rotação**.
- **Descanso:** intervalo mínimo de tempo ininterrupto de repouso após uma jornada.
- **Pernoite:** intervalo de tempo separando duas jornadas consecutivas de uma viagem.
- **Reserva:** período de tempo em que o tripulante permanece, por determinação do empregador, em local de trabalho à sua disposição.
- **Sobreaviso:** período de tempo não excedente a 12 horas, em que o tripulante permanece em local de sua escolha, à disposição do empregador, devendo apresentar-se em até 90 minutos após receber comunicação para o início de nova tarefa.
- **Folga:** período de tempo não inferior a 24 horas consecutivas em que o tripulante, em sua base contratual, sem prejuízo de remuneração, está desobrigado de qualquer atividade relacionada com seu trabalho.

- **Escala:** conjunto de viagens, reservas, sobreavisos, folgas e deveres extra-voo (cursos, treinamentos em simulador, férias, etc), expandindo um determinado horizonte de tempo, que definem as atividades de um tripulante.

A Figura 1.2 apresenta o exemplo de uma viagem que ilustra alguns dos conceitos expostos acima. As etapas na figura estão representadas pelos retângulos mais internos. São indicados os aeroportos de origem e destino, e os horários de decolagem e pouso. As jornadas são indicadas pelos retângulos pontilhados reúnem uma cadeia de etapas. A base contratual considerada é CGH (São Paulo).

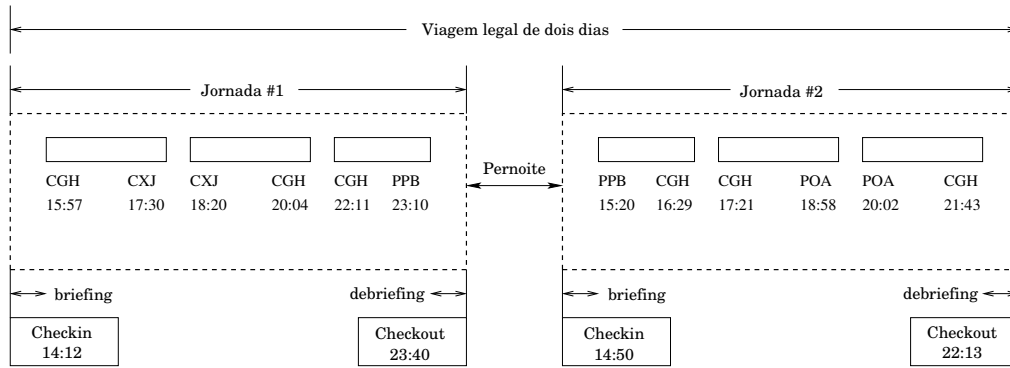


Figura 1.2: Exemplo de uma viagem de dois dias para a base CGH.

A Figura 1.3 apresenta o exemplo de uma escala de um determinado tripulante baseado em GRU. O horizonte de tempo considerado é de 15 dias. Para fins de ilustração, foram alocadas as viagens (c), (a) e (b) do exemplo anterior nos dias 3, 5–8 e 12–14, respectivamente. Os demais dias foram preenchidos com períodos de folgas, sobreaviso, reserva e um curso.

2 Formulação do Problema

Normalmente o problema do escalonamento de tripulantes é dividido em dois subproblemas que são resolvidos de forma independente e sequencial. O primeiro deles é conhecido como *problema da determinação de viagens* (PDV), que consiste na obtenção de um subconjunto de viagens, obedecendo as regras de trabalho impostas pela legislação, com custo mínimo, cobrindo todas os segmentos de voo exatamente uma vez. Obtida a solução das viagens, um

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	← dias
F	F	(c)	F	(a)				C	S	F	(b)			R	← atividades

F – Folga
 S – Sobreaviso
 R – Reserva
 C – Curso
 (a), (b), (c) – Viagens

Figura 1.3: Exemplo de uma escala com diversas atividades para um tripulante baseado em GRU. As viagens (a), (b) e (c) correspondem àquelas mostradas na figura anterior.

segundo problema é resolvido, conhecido como *problema da determinação de escalas* (PDE), cujo objetivo é construir as escalas dos tripulantes, distribuindo as viagens de tal forma que cada viagem seja atribuída exatamente uma vez para cada tripulante requerido. Na atribuição, visa-se minimizar os custos e garantir distribuição uniforme de trabalho. A atribuição das viagens também está sujeita a uma série restrições reguladoras.

Tanto o PDV quanto o PDE têm sido extensamente estudados na literatura [5]. Em especial, o primeiro deles recebeu mais atenção, principalmente no contexto norte-americano, dada o seu potencial em produzir economia significativa de custos. No problema da determinação de escalas, além de minimizar custos, é importante também levar em conta aspectos da qualidade de vida dos tripulantes. Uma visão geral e esquemática dos dois problemas é apresentada na Figura 2.1.

As modelagens matemáticas usuais do PDV e do PDE são semelhantes e baseiam-se em um problema de programação linear inteiro conhecido como *particionamento de um conjunto*. A técnica de resolução comum utilizada pode ser descrita como “gerar-e-otimizar”. Outras abordagens vem sendo recentemente propostas, buscando por soluções através de métodos meta-heurísticos. Nas próximas seções apresentaremos mais detalhes sobre as duas abordagens.

2.1 Regras de Trabalho e Estrutura de Custo

Antes de entrarmos nos detalhes sobre a formulação do PDV e do PDE, é interessante explicitar os tipos de restrições e a estrutura de custo envolvidos nos problemas, em especial no contexto brasileiro, já que há uma diferença

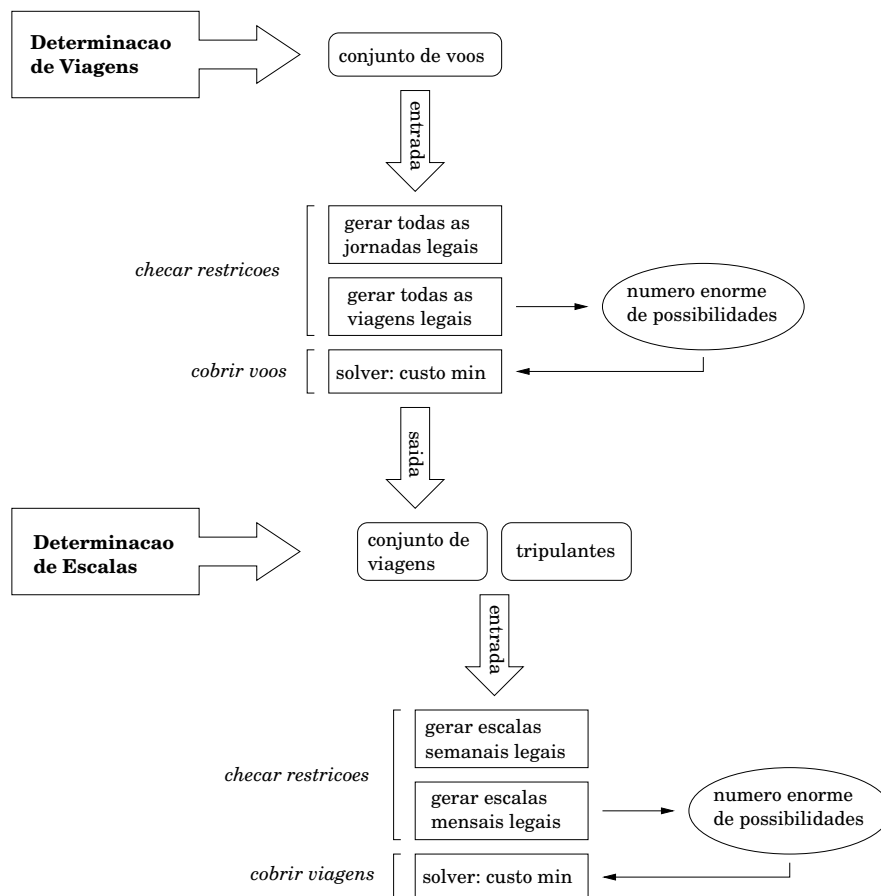


Figura 2.1: Subproblemas enfrentados na solução do problema de escalonamento de tripulantes (adaptado de [9]).

significativa com relação aos contextos norte-americano e europeu, normalmente empregados nos trabalhos da literatura.

No caso do PDV, a geração de uma viagem é regida por uma série de regras impostas pela Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), além de restrições impostas por leis trabalhistas e acordos contratuais. Uma viagem é dita legal se ela obedecer todas as regras impostas pela legislação em questão. Abaixo apresenta-se valores típicos para as regras que regem a construção de uma viagem em uma empresa de aviação regular do Brasil com voos de curto e médio alcance:

- Duração máxima de uma jornada de trabalho: 11 horas;
- Número máximo de horas de voo em uma jornada: 9 horas e 30 minutos;
- Número máximo de pousos em uma jornada: 6 pousos;
- Descanso mínimo entre jornadas: 12 horas;
- Tamanho máximo de uma viagem: 6 dias;
- Tempo mínimo de conexão: 30 minutos;
- Tempo máximo de conexão: 4 horas;
- Número máximo de trocas de aeronave em uma jornada: 2 trocas;
- Tempo de briefing: 30 minutos fora de base e 45 minutos dentro;
- Tempo de debriefing: 30 minutos.

O custo de uma viagem está associado à produtividade mais os custos referentes à estadia do tripulante quando esse precisar pernoitar fora da base, além das diárias de alimentação. Uma expressão para calcular o custo c_p de uma viagem p é dada por

$$c_p = \sum_{d \in D_p} c_d, \quad c_d = \alpha_0 \left[t_d - \left(tp_d - \sum_{i \in I_d} t_i \right) \right] + cp_d, \quad (2.1)$$

onde

D_p : conjunto de jornadas que constituem a viagem p ;

c_d : custo da jornada d ;

α_0 : custo da hora de trabalho do tripulante;

t_d : duração da jornada d (em horas);

tp_d : tempo de preparação (briefing mais debriefing) usado na jornada d ;

I_d : conjunto de etapas que compõem a jornada d ;

t_i : duração da etapa i , incluindo o tempo mínimo de conexão;

cp_d : custo do pernoite mais diárias de alimentação da jornada d .

Note que a expressão multiplicando α em (2.1) representa o tempo que o tripulante passou trabalhando sem estar voando, portanto representa uma medida de produtividade. Quanto mais cara a viagem, menor foi a produtividade do tripulante.

No PDE também aplica-se uma série de regras trabalhistas para geração de uma escala legal. Dentre elas, podemos citar como mais importantes:

- Número mínimo de folgas: 8 folgas, sendo no mínimo 2 em um final de semana;
- Intervalo máximo de trabalho sem folgas: 6 dias;
- Número máximo de horas de voo em um mês: 85 horas;
- Número máximo de horas de uma reserva: 6 horas;
- Número máximo de sobreavisos: 2 semanais e 8 mensais.

O custo associado a uma dada escala legal montada para um tripulante é bastante dependente da política de pagamento da empresa. No Brasil, em geral, as companhias costumam pagar um salário fixo e mais um excedente se o número de horas voadas pelo tripulante extrapolar um determinado valor. Além disso, horas voadas no período noturno e em domingos e feriados, chamadas horas especiais, são pagas diretamente a partir do zero. Assim, podemos calcular o custo c_k de uma escala atribuída a um tripulante k como

$$c_k = \alpha_1 + \alpha_2 \sum_{p \in P_k} e_p + \alpha_3 \max \left\{ 0, \left(\sum_{p \in P_k} t_p \right) - mg \right\} + \sum_{p \in P_k} c_p, \quad (2.2)$$

onde

α_1 : remuneração fixa do tripulante;
 α_2 : remuneração por cada hora especial realizada;
 α_3 : remuneração por cada hora de voo excedente à garantia mínima;
 P_k : conjunto de viagens atribuídas ao tripulante k ;
 e_p : horas de voo especiais na viagem p ;
 t_p : horas de voo na viagem p ;
 mg : garantia mínima de horas de voo;
 c_p : custo da viagem p .

Note que consideramos apenas a atribuição de viagens na escala de tripulantes. Atividades de reserva e sobreaviso também entram na remuneração contando como se fossem horas de voo. No caso do sobreaviso, o valor deve ser multiplicado por $1/3$.

2.2 Problema da Determinação das Viagens

No problema da determinação das viagens, tem-se como entrada o conjunto de voos a ser operado pela empresa, o conjunto de bases contratuais dos tripulantes, as regras de trabalho que ditam a construção de viagens legais e a estrutura de custo como descrita na equação (2.1). A saída então deve ser um conjunto de viagens que cubra todos os voos operados exatamente e uma vez e que gere o custo mínimo (veja Figura 2.2).

Normalmente os voos das companhias aéreas apresentam uma frequência regular de oferecimento, sendo que a maioria deles operam diariamente. Outros são oferecidos apenas em alguns dias fixos da semana e poucos são oferecidos vez ou outra no mês. Costuma-se então inicialmente resolver o problema diário, onde se assume que todos os voos são repetidos diariamente. Note que para o problema diário, viagens de vários dias com etapas repetidas são inviáveis. Um segmento de voo repetido causaria o efeito de mais de uma tripulação ser atribuída para realização dessa etapa, uma vez que quando se faz a implementação da solução diária, uma tripulação distinta é atribuída a cada um dos dias da viagem.

O problema semanal é mais complicado porque envolve um maior número de etapas consideradas. De qualquer forma, a solução do problema semanal pode ser obtido a partir de um ajuste da solução do problema diário, sem

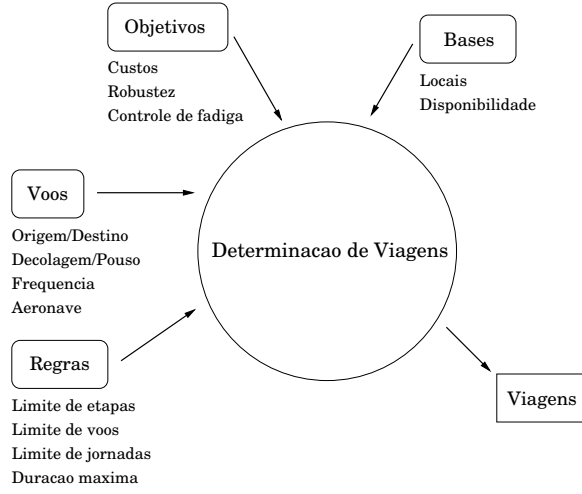


Figura 2.2: Representação do problema da determinação de viagens (PDV).

perda significativa de custo [5]. A solução do problema mensal completo segue da solução do problema semanal. Como a maior parte da redução de custos está associada à resolução do problema diário, ele se torna o mais importante. Daqui em diante trataremos apenas do problema diário.

Uma outra simplificação do problema está no fato que os tripulantes são habilitados para operar apenas um tipo, ou família, de aeronaves dentro de uma frota. Assim, fatora-se o problema da determinação das viagens por tipo de aeronave. Para cada tipo, resolve-se um PDV considerando apenas as etapas operadas por aquele tipo. As viagens assim geradas são atribuídas aos tripulantes habilitados no tipo ao se resolver o PDE.

Há uma formulação natural para o PDV em termos de um problema de programação linear. Suponha que seja possível gerar e enumerar todas as n viagens associadas a uma dada entrada do problema contendo m etapas a serem cobertas. Seja $x_j \in \{0, 1\}$ uma variável de decisão que assume o valor 1 se a viagem j for escolhida na solução de custo mínimo e 0 caso contrário. Então, o PDV pode ser modelado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 &\text{sujeito à} && \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Os coeficientes a_{ij} são definidos por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a viagem } j \text{ cobre a etapa } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As restrições em (2.3) garantem que cada etapa seja coberta exatamente uma vez por alguma viagem. Existe ainda uma formulação alternativa onde as restrições são dadas por

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

Nesse caso uma mesma etapa pode ser coberta por mais de uma viagem e o problema se torna um de *recobrimento do conjunto*. Do ponto de vista do escalonamento, se uma etapa é coberta por mais de uma viagem, então uma tripulação estará trabalhando nessa etapa e as demais viajando de passageiro (situação conhecida por *deadheading*). As vezes essa formulação é necessária para que se garanta viabilidade da solução. Se o preço a se pagar pela operação com *deadheading* for essencialmente o mesmo de uma operação normal, então não há alteração significativa no custo da viagem associada. Isso permite que o problema seja modelado com as restrições (2.4) sem alterar a estrutura de custos.

É comum a inserção de restrições adicionais ao modelo que garantem uma distribuição de trabalho entre as bases compatível com os recursos disponíveis em cada base. Se o número total de bases do problema considerado é r , então as *restrições de bases* são expressas por

$$H_k^L \leq \sum_{j=1}^n h_{kj}x_j \leq H_k^U, \quad k = 1, \dots, r, \quad (2.5)$$

onde H_k^L é o número mínimo de horas disponíveis na base k e H_k^U é seu número máximo. Note que H_k^L pode ser diferente de zero desde que se exija que não mais do que um certo número de tripulantes fiquem de reserva. O coeficiente h_{kj} dá o número de horas necessárias para efetuar a viagem j ($h_{kj} = 0$ se a viagem j não pertencer à base k).

O grande problema com a formulação (2.3) está no enorme número de variáveis geradas mesmo nos casos das instâncias pequenas (poucas etapas diárias). A Tabela 2.1 ilustra o número de viagens legais geradas, com duração máxima de 3 ou 4 dias, para diversas frotas de aeronaves. O número enorme de variáveis está associada com a natureza combinatória do problema.

A maioria das empresas aéreas operam em aeroportos conhecidos como *hubs*, onde um grande número de aeronaves chegam e partem em um mesmo intervalo de tempo, possibilitando que os passageiros efetuem suas conexões para uma grande quantidade de destinos em pouco tempo. Esse tipo de estrutura em rede leva à explosão no número de viagens legais que podem ser construídas [6]. Note da Tabela 2.1 que apesar do número de viagens ser gigantesco, o número de jornadas tem um valor muito mais gerenciável.

Frota	Max Dias	Etapas	Bases	Jornadas	Viagens ($\times 10^6$)
AAS80	3	1.152	12	690.000	48.400
AA757	3	251	15	7.000	1
AA727	3	375	11	31.000	36
AAF10	4	307	3	55.000	63.200
UA737	4	773	7	568.000	100.000.000
USDC9	4	478	4	562.000	105.000.000

Tabela 2.1: Jornadas e viagens legais geradas para um conjunto de frotas de aeronaves de companhias norte-americanas (fonte: [1]).

Como o problema de partição é do tipo NP-difícil, a aplicação de métodos diretos de otimização é impraticável para qualquer situação real. Os métodos de solução normalmente envolvem algum tipo de heurística e/ou algum critério de parada que leva a soluções sub-ótimas. Discutiremos alguns desses métodos na Seção 3.

2.2.1 Gerador de Viagens

O primeiro passo em direção à solução do PDV consiste na implementação de um gerador de viagens eficiente que seja capaz de produzir um grande número de viagens legais em pouco tempo. Como já mencionamos, os métodos de resolução de (2.3) baseiam-se no conceito de “gerar-e-otimizar”, e já que as rotinas de otimização estão normalmente prontas em pacotes fechados, a parte de geração é de grande importância.

Uma viagem pode ser vista como um caminho especial em um grafo estruturado. Esse grafo é chamado de *rede de voos* e será detalhado a seguir.

As etapas na rede de voos podem ser representadas como nós ou arcos. Escolhemos a representação em termos de arcos. Os nós da rede representam as saídas e chegadas de cada etapa, bem como uma fonte s e um sorvedouro t . Existe um arco representando cada etapa da malha de voos. Para o

problema diário, replicamos cada arco quantas vezes for o número máximo de dias permitido em um viagem. O conjunto de arcos será denotado por \mathcal{A} .

O nó fonte é ligado ao nó de saída de cada etapa que se origina em uma base específica. O nó de chegada de cada etapa que termina nessa base é ligado ao sorvedouro. Existem ainda arcos representando conexões legais entre etapas. Um par de etapas terá um arco de conexão entre eles se o aeroporto de chegada do primeiro corresponder ao aeroporto de saída do segundo, e o intervalo de tempo entre a chegada e a saída estiver for uma conexão legal de uma jornada, ou descanso regular entre jornadas.

É fácil notar que toda viagem legal é representada por um caminho $s - t$ na rede de voos. Porém, existem caminhos $s - t$ que não representam viagens legais pois podem desrespeitar alguma regra de trabalho, embora as conexões possíveis sejam legais. A estrutura da rede garante que não seja feita nenhuma conexão entre duas etapas que não tenham suas respectivos destino e origem coincidentes no espaço e no tempo. Entretanto, não garante, por exemplo, que o número máximo de horas de voo permitido em uma jornada seja excedido.

O gerador de viagens funciona aplicando um algoritmo de busca em profundidade à rede de voos. O algoritmo inicia-se no nó de origem s e explora todas a conexões viáveis $(i, j) \in \mathcal{A}$, até retroceder. O processo de busca em profundidade controla a viabilidade das viagens, levando em conta a duração máxima das jornadas e limites de horas de voo e de pousos.

2.2.2 Exemplo

A tabela abaixo mostra um conjunto fictício de 7 etapas operadas diariamente entre as localidades A, B, C e D. O exemplo é adaptado de [4].

#	Etapas	Origem	Destino	Saída	Chegada
1		A	B	08:00	09:00
2		B	C	10:00	11:00
3		C	D	13:00	14:00
4		C	A	15:00	16:00
5		D	A	15:00	16:00
6		A	B	17:00	18:00
7		B	C	11:00	12:00

A rede de voos (parcial) para uma base contratual A é ilustrado na Figura 2.3, onde são apresentadas algumas das conexões legais possíveis para

clareza do desenho. O caminho vermelho na figura representa uma viagem legal com dois dias de duração.

A partir da rede apresentada, montamos as seguintes jornadas válidas (os números representam os números das etapas)

$$\begin{aligned} D_1 &= \{1\}, & D_2 &= \{2\}, & D_3 &= \{3\}, & D_4 &= \{4\} \\ D_5 &= \{5\}, & D_6 &= \{6\}, & D_7 &= \{7\}, & D_8 &= \{1, 2\} \\ D_9 &= \{1, 7, 3\}, & D_{10} &= \{2, 3\}. \end{aligned}$$

Assumindo que as localidades A, B e D sejam bases contratuais, geramos seis viagens, que podem ser expressas em termos das jornadas como

$$\begin{aligned} P_1 &= \{D_4, D_8\}, & P_2 &= \{D_9, D_5\}, & P_3 &= \{D_5, D_6, D_{10}\} \\ P_4 &= \{D_4, D_6, D_7\}, & P_5 &= \{D_1, D_7, D_4\}, & P_6 &= \{D_5, D_7, D_9\}. \end{aligned}$$

Note que a viagem P_6 cobre a etapa 7 duas vezes, então ela não é válida e deve ser desconsiderada. Supondo que os custos associados as viagens sejam $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 4$ e $c_5 = 5$, a partir de (2.3) obtemos o seguinte problema ($x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, 5$):

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 1 \quad (\text{etapa 1}) \\ & x_1 + x_3 = 1 \quad (\text{etapa 2}) \\ & x_2 + x_3 = 1 \quad (\text{etapa 3}) \\ & x_1 + x_4 + x_5 = 1 \quad (\text{etapa 4}) \\ & x_2 + x_3 = 1 \quad (\text{etapa 5}) \\ & x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{etapa 6}) \\ & x_2 + x_4 + x_5 = 1 \quad (\text{etapa 7}) \end{aligned}$$

Se for requerido que pelo menos 3 horas e no máximo 6 horas estejam disponíveis nas bases A e D, e no máximo 5 horas na base C, então as restrições de bases (2.5) são

$$\begin{aligned} 3 &\leq 4x_2 + 3x_5 \leq 6 & (\text{base A}) \\ 0 &\leq 3x_1 + 3x_4 \leq 5 & (\text{base C}) \\ 3 &\leq 4x_3 \leq 6 & (\text{base D}) \end{aligned}$$

A solução ótima para o problema formulado usa as viagens 3 e 5 ($x_3 = x_5 = 1$, $x_1 = x_2 = x_4 = 0$) e tem um custo total igual à 9. Por se tratar de um problema pequeno, a resolução do mesmo pode ser obtido por qualquer pacote de otimização linear.

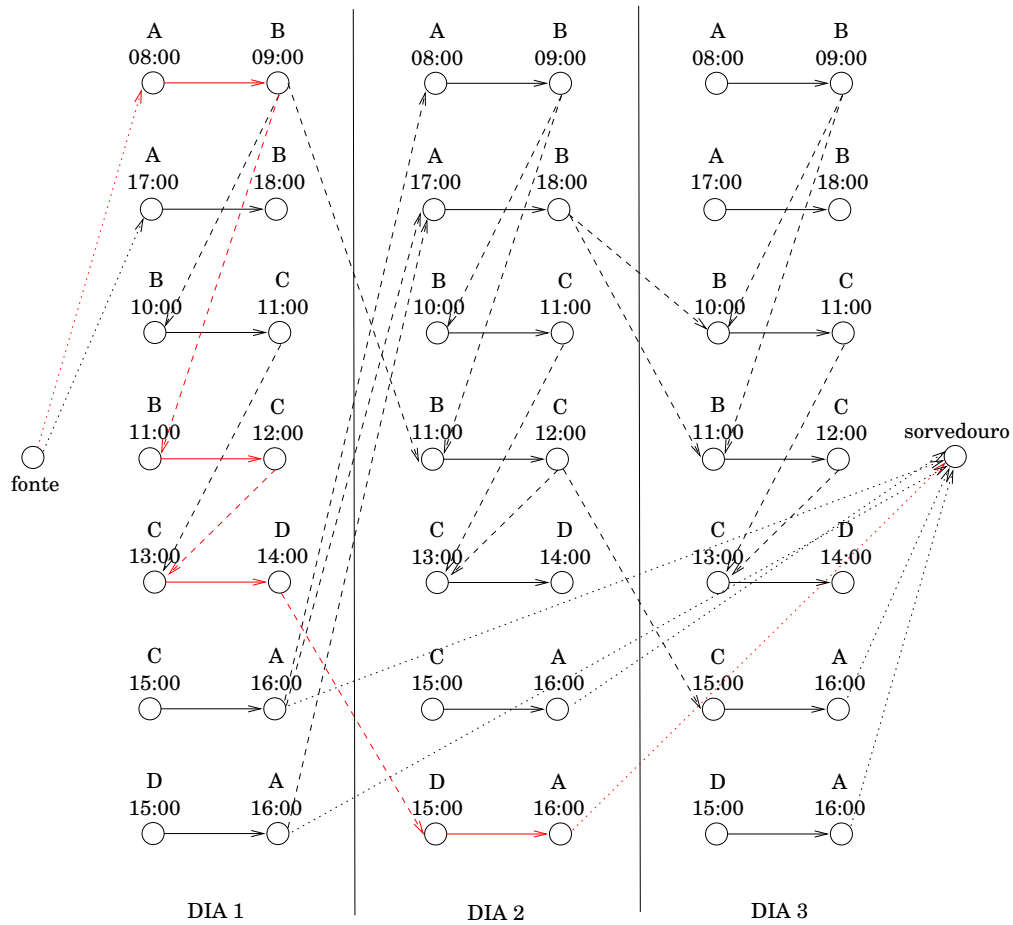


Figura 2.3: Rede de voos para a base de tripulantes A. Arcos tracejados representam conexões legais entre etapas. O caminho em vermelho representa uma das viagens possíveis.

2.3 Problema da Determinação de Escalas

No problema da determinação de escalas (ou, de forma mais restrita, problema da atribuição de viagens), tem-se como entrada o conjunto de viagens obtido na resolução do PDV na etapa anterior, um conjunto de atividades extra-voo, as regras utilizadas para confecção de escalas legais e, finalmente, o conjunto de tripulantes para o qual se deseja gerar as escalas. A saída será uma escala legal obtida para cada tripulante do conjunto considerado, tal que todas as atividades sejam atribuídas o número de vezes necessário, e tal que o custo total da solução seja minimizado. Uma esquema para entrada e saída do problema é apresentado na Figura 2.4. Uma descrição detalhada sobre o problema pode ser encontrada em [7].

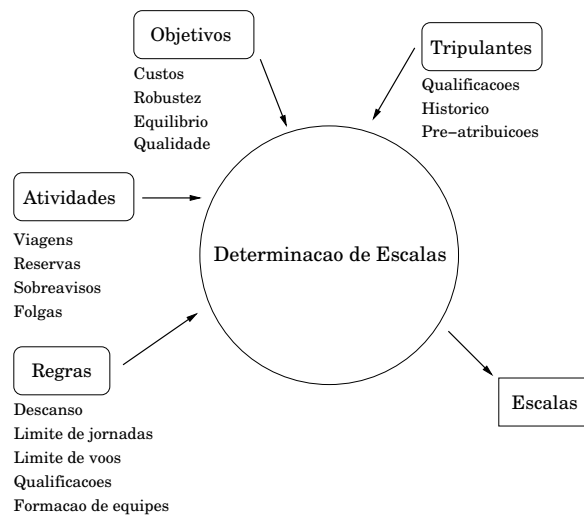


Figura 2.4: Representação do problema da determinação de escalas (PDE). Adaptado de [7].

Nos dados de entrada são fornecidos os registros pessoais de cada tripulante, que incluem suas qualificações, atividades pré-atribuídas, férias, etc. As qualificações contêm informações, por exemplo, sobre os equipamentos nos quais o tripulante está habilitado, ou sobre destinos onde ele não pode operar devido a alguma restrição operacional. Atividades pré-atribuídas podem ser folgas pedidas, exames médico, cursos, etc. Os registros de um tripulante também incluem atributos acumulados, como o total de horas de voo realizadas durante o ano corrente. Outros dados de interesse são, por exemplo, datas limites para treinamentos.

Outro conjunto de dados de entrada é formado pelas atividades a serem

cobertas, que consiste das viagens, reservas, sobreavisos, folgas, atividades de treinamento (*e.g.*, treinamento em simulador e cursos) e atividades em solo (*e.g.*, exames médico). Normalmente, na formulação mais restrita do problema, apenas as viagens devem ser atribuídas de forma automatizada e otimizada. Todas as outras atividades são atribuídas *a priori*, individualmente para cada tripulante em dias pré-determinados dentro do horizonte de tempo do planejamento.

As regras típicas para construção de uma escala legal incluem limites máximos para horas de voo e jornadas de trabalho, número mínimo de folgas, número máximo de dias consecutivos de trabalho, etc (confira Seção 2.1). Essas são conhecidas como *regras horizontais* pois se aplicam a escalas únicas, e não considerem as outras escalas geradas na solução. Outro conjunto de regras, conhecidas por *regras verticais*, aplicam-se à solução como um todo. Um exemplo típico está na atribuição de uma atividade que necessita ser realizada por mais de um membro de uma tripulação com a mesma função. Outros exemplos de regras verticais são casos do tipo “deve voar com”, ou “não deve voar com”.

A função objetivo no PDE é muito dependente da política da empresa. Existem basicamente quatro tipos de objetivos que podem ser encontrados em um problema desse tipo. Normalmente as empresas adotam alguma combinação desses objetivos, seja introduzindo uma função objetivo combinada, seja introduzindo restrições globais para algum deles enquanto otimizando outros. Os objetivos referem-se a redução de custos reais, robustez da solução, distribuição equilibrada de trabalho e “qualidade de vida” oferecida.

Vamos agora considerar o problema da determinação de escalas em sua forma mais simples. Sejam dados um conjunto de atividade \mathcal{A} , de cardinalidade $m_{\mathcal{A}}$, e um conjunto de tripulantes \mathcal{C} , de cardinalidade $m_{\mathcal{C}}$. Desejamos obter um conjunto de escalas $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{A}$ para cada tripulante k , $1 \leq k \leq m_{\mathcal{C}}$, que particiona \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \dots \cup \mathcal{R}_{m_{\mathcal{C}}} ,$$

de forma a minimizar alguma função objetivo linear nos custos c_k de cada escala.

Um grande número de escalas $\mathcal{R}_j \subset \mathcal{A}$ podem ser geradas para cada tripulante. Idealmente, todas as escalas legais poderiam ser geradas, mas para o resultado seria um número enorme dada a natureza combinatória do problema. Depois da geração de n escalas, um problema de particionamento é resolvido para selecionar a melhor combinação de escalas que minimizem o custo da função objetivo.

Seja $x_j \in \{0, 1\}$, $1 \leq j \leq n$, uma variável de decisão cujo valor é 1 se a escala \mathcal{R}_j for escolhida na solução, e 0 caso contrário. Seja c_j , $1 \leq j \leq n$, o custo associado à escala \mathcal{R}_j . Seja ainda A a matriz $m \times n$, onde $m = m_{\mathcal{C}} + m_{\mathcal{A}}$, com coeficientes a_{ij} definidos por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a escala } j \text{ foi gerada para o tripulante } i, i = 1, \dots, m_{\mathcal{C}} \\ 1, & \text{se a escala } j \text{ contém a atividade } i - m_{\mathcal{C}}, i = m_{\mathcal{C}} + 1, \dots, m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com essas definições, o PDE é formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{sujeito à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Note que para cada tripulante exatamente uma escala deve ser determinada e cada atividade deve ser atribuída a exatamente uma escala.

Suponha, por exemplo, que para cada tripulante três escalas sejam geradas. Então $n = 3m_{\mathcal{C}}$, e a matriz de restrições A assume forma semelhante a:

Tripulante ₁			Tripulante ₂			...	Tripulante _C				
\mathcal{R}_1	\mathcal{R}_2	\mathcal{R}_3	\mathcal{R}_4	\mathcal{R}_5	\mathcal{R}_6	...	\mathcal{R}_{n-2}	\mathcal{R}_{n-1}	\mathcal{R}_n		
1	1	1	0	0	0	...	0	0	0	= 1	Atribuições
0	0	0	1	1	1	...	0	0	0	= 1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	0	0	0	...	1	1	1	= 1	
1	1	0	1	0	1	...	0	1	0	= 1	Atividades
0	1	1	0	0	1	...	1	0	1	= 1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	0	1	0	0	0	...	0	1	0	= 1	

Existem dois tipos de restrições representadas pela matriz A no modelo básico. As *restrições de atribuições* garantem que todo tripulante tenha exatamente uma escala atribuída. Elas formam o primeiro bloco $m_{\mathcal{C}} \times n$ de A . As *restrições de atividades* garantem que cada atividade será atribuída exatamente uma vez na solução, formando o bloco final $m_{\mathcal{A}} \times n$ final da matriz A .

Assim como no PDV, a formulação exposta acima do PDE apresenta dificuldade de resolução devido ao número excessivo de variáveis e restrições.

Mesmo os otimizadores mais potentes não são capazes de resolver instâncias práticas do problemas em tempo viável. A solução é utilizar algum tipo de heurística que encontre uma resposta sub-ótima para o problema, ou técnicas de otimização mais avançadas como a geração implícita de colunas.

2.4 Formulação Integrada

Atualmente o PDV e o PDE são eficientemente tratados por uma série de técnicas que garantem soluções próximas do ótimo com um tempo de processamento aceitável. Sistemas comerciais foram desenvolvidos em torno dessas técnicas, sendo diariamente utilizados na maioria das empresas para resolução de seus problemas de escalonamento [5].

Um problema muito mais complexo seria o da integração entre o PDV e PDE, onde esses dois sub-problemas seriam analisados e resolvidos simultaneamente. A vantagem dessa abordagem é motivada pelos fatos descritos a seguir.

Primeiro, a fatoração do problema não permite que se estime adequadamente o custo real de um escalonamento global. De fato, na determinação das viagens, busca-se minimizar o custo associado à baixa produtividade de uma jornada de trabalho. Entretanto, o custo real do planejamento só pode ser calculado após a atribuição das viagens aos tripulantes, ou seja, depois da solução do PDE. Isso porque, para um dado horizonte de tempo, faz-se o pagamento de um salário fixo e mais um valor adicional para as horas excedentes.

Segundo, o conjunto “ótimo de viagens” provido na solução do PDV é determinado sem considerar o número e a disponibilidade dos diferentes tripulantes. É claro que se pode incorporar no modelo as restrições de bases (2.5), mas elas fornecem apenas uma estimativa da mão de obra disponível, pois não consideram as restrições impostas pelas regras que limitam a geração de escalas legais. Na realidade, a disponibilidade real só é considerada enquanto se resolve o problema da determinação de escalas.

A tendência recente nos trabalhos sobre escalonamento de tripulantes é de lidar com a versão integrada do problema [8, 9], que apontam para ganhos econômicos da ordem de 5% com relação a versão sequencial. O problema completo, entretanto, é de difícil resolução, dado a combinação do número de variáveis que já eram grandes no PDV e no PDE. Reporta-se em [8] longos tempos de processamento mesmo para instâncias pequenas utilizando técnicas de geração de colunas e agregação dinâmica de restrições. Uma

alternativa interessante é a utilização de meta-heurísticas como o algoritmo genético aplicado em [9].

3 Métodos de Solução

TODO

Referências

- [1] Ranga Anbil, John J. Forrest, and William R. Pulleyblank. Column generation and the airline crew pairing problem. *Documenta Mathematica*, 3:677–686, 1998.
- [2] Ranga Anbil, Eric Gelman, Bruce Patty, and Rajan Tanga. Recent advances in crew-pairing optimization at american airlines. *Interfaces*, 21(1):62–74, 1991.
- [3] J. P. Arabeyre, J. Fearnley, F. C. Steiger, and W. Teather. The airline crew scheduling problem: A survey. *Transportation Science*, 3:140–163, 1969.
- [4] Cynthia Barnhart, Amy M. Cohn, Ellis L. Johnson, Diego Klabjan, George L. Nemhauser, and Pamela H. Vance. *Airline Crew Scheduling*, chapter 14, pages 517–560. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 2 edition, 2003.
- [5] Balaji Gopalakrishnan and Ellis L. Johnson. Airline crew scheduling: State-of-the-art. *Annals of Operations Research*, 140:305–337, 2005.
- [6] G. W. Graves, R. D. McBride, I. Gershkoff, D. Anderson, and D. Mahidhara. Flight crew scheduling. *Management Science*, 39(6):736–745, 1993.
- [7] Niklas Kohl and Stefane E. Karisch. Airline crew rostering: Problem types, modeling, and optimization. *Annals of Operations Research*, 127:223–257, 2004.
- [8] Mohammed Saddoune, Guy Desaulniers, Issmail Elhallaoui, and François Soumis. Integrated airline crew pairing and crew assignment by dynamic constraint aggregation. *Transportation Science*, 46(1):39–55, 2012.

- [9] Nadia Souai and Jacques Teghem. Genetic algorithm based approach for the integrated airline crew-pairing and rostering problem. *European Journal of Operational Research*, 199:674–683, 2009.
- [10] Gang Yu, editor. *Operations Research in the Airline Industry*. Kluwer Academic Publishers, 1998.