

Introduction à la Synthèse des Filtres Actifs

Notes de cours

Première édition

Copyright © 2000 Faculté Polytechnique de Mons



**Faculté Polytechnique
de Mons**

Thierry Dutoit
Faculté Polytechnique de Mons
TCTS Lab

Ave. Copernic
Parc Initialis
B-7000 Mons
Belgium

Ph: +32 65 374774
Fax: +32 65 374729
Thierry.Dutoit@fpms.ac.be
<http://tcts.fpms.ac.be/~dutoit>

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Définitions

Un *filtre électrique* opère une modification d'un signal électrique d'entrée ou d'excitation $x(t)$, pour produire un signal de sortie ou réponse, $y(t)$. A cette modification du signal temporel $x(t)$ correspond une modification du spectre $X(j\omega)$ pour produire $Y(j\omega)$.

Si le filtre est *linéaire*, le contenu spectral de $Y(j\omega)$ ne peut être plus riche que celui de $X(j\omega)$. Le filtre se contente alors d'amplifier ou d'atténuer certaines composantes présentes dans $X(j\omega)$. Un filtre *non linéaire*, au contraire, fait apparaître des composantes inexistantes dans $X(j\omega)$. La plupart des filtres sont linéaires. Ce sont les seuls que nous étudierons ici.

On distingue par ailleurs les filtres *analogiques* des filtres *numériques*. Les premiers agissent directement sur le signal analogique d'entrée. Ils sont constitués d'un ensemble de composants analogiques (résistances, condensateurs, inductances, éléments actifs). Les seconds requièrent une numérisation préalable du signal d'entrée, dont ils modifient les valeurs ainsi numérisées à l'aide d'un ensemble d'opérateurs numériques (multiplieurs, additionneurs, éléments à délai). Nous n'étudierons ici que la synthèse des filtres analogiques.

1.2 Applications

Les filtres sont aujourd'hui présents dans pratiquement n'importe quel équipement de télécommunication. L'application la plus importante est sans aucun doute celle liée au multiplexage fréquentiel de signaux, opération qui consiste à combiner en un seul signal une multitude de signaux indépendants, qui occupent dans le signal multiplexé une plage spectrale déterminée. C'est le principe de la transmission hertzienne des signaux radio-TV : le champ électromagnétique qui nous entoure porte la somme de toutes les émissions radio-TV. C'est aussi le principe de la transmission analogique longue distance de signaux téléphoniques sur paires cuivrées : afin de minimiser le nombre de câbles à poser, on fait passer plusieurs communications sur le même câble. A la réception, il est donc nécessaire de démultiplexer le signal transmis, afin de reconstituer les signaux de départ. Ceci s'effectue en deux étapes :

1. Translation du spectre multiplexé, afin de faire correspondre le signal à extraire à une fenêtre spectrale fixée une fois pour toutes.
2. Filtrage du signal translaté en fréquence, par un filtre (fixé une fois pour toutes) permettant d'éliminer les composantes spectrales en dehors de cette fenêtre.

On trouve par ailleurs des filtres électriques dans bon nombres d'appareils électroniques grand-public (appareils audio, vidéo, appareils électroménagers).

Enfin, un filtre de garde (forcément analogique) est indispensable à l'échantillonnage d'un signal analogique que l'on cherche à numériser.

1.3 Historique

Les technologies utilisées pour réaliser les opérations de filtrage ont connu une évolution fulgurante au cours du XX^{ème} siècle. La figure 1.1 donne un aperçu des technologies utilisées aux Etats-Unis pour les communications téléphoniques.

Entre 1920 et 1960, la grande majorité des filtres utilisés pour ces applications étaient basés sur des circuits RLC (passifs). Les techniques d'approximations analytiques (que nous aborderons au chapitre 3) datent de cette époque, ainsi que les techniques de synthèse LC. On retiendra les noms de Cauer, Piloty, et Darlington, et chez nous Belevitch (belge, professeur à l'UCL, directeur de recherches chez Phillips Research, Bruxelles), qui ont énormément contribué au développement de ces techniques.

Il a fallu attendre le milieu des années 1960 (c.-à-d. le développement en grande série d'amplificateurs opérationnels) pour voir arriver les filtres actifs discrets (RCAO : RC+Ampli Opérationnel), capables d'effectuer en une même opération filtrage et amplification.

L'intérêt économique de ce type de filtre s'est révélé dans les années 1970, avec l'arrivée des circuits intégrés (HIC ou plus tard DIP), qui intègrent amplificateur opérationnel, résistances, et capacités.

C'est également à cette époque que sont apparus les filtres d'onde, sous l'impulsion de Fettweis (belge, professeur à l'université de Bochum).

Les années 1980 ont vu le développement des circuits à capacités commutées, et l'arrivée des processeurs de signaux numériques, qui ont ouvert la voie au filtrage numérique. Les professeurs Boite et Leich, qui ont enseigné ces matières à la FPMs, ont été parmi les pionniers dans la conception de ce type de filtres.

Plus récemment des filtres analogiques VLSI sont apparus, avec des techniques de synthèse qui leur sont propres.

Il est ainsi possible de nos jours de concentrer sur un espace très réduit des filtres d'ordre très élevés. On en produit des dizaines de millions de filtres chaque année à travers le monde.

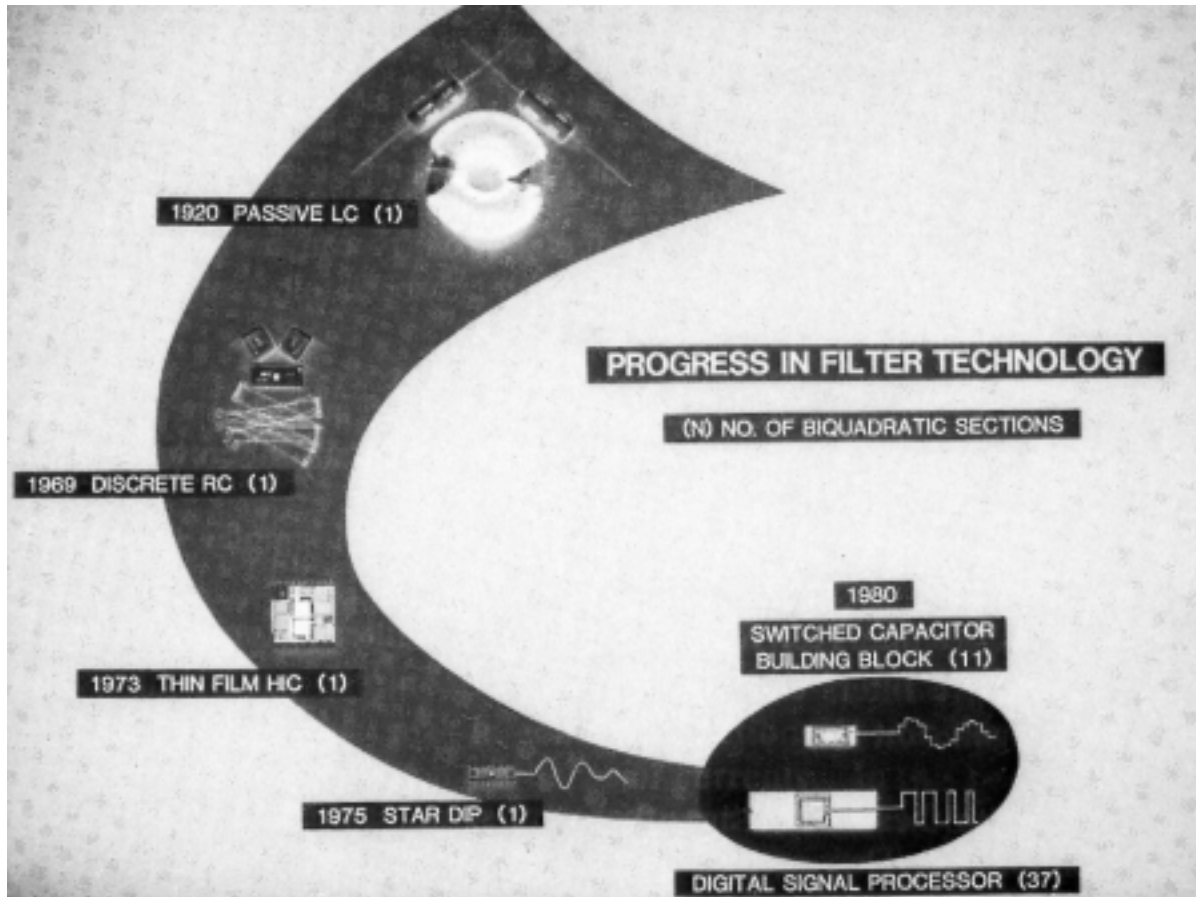


Fig. 1.1 Progrès en technologie du filtrage dans le système américain Bell. Le nombre de sections du second ordre synthétisable est donnée entre parenthèse (d'après [8]).

Les filtres actifs présentent un ensemble d'avantages indéniables sur les filtres passifs (LC) :

- Ils sont plus fiables (toute la chaîne de fabrication est automatisée);
- En grandes quantités, leur coût est nettement moindre;
- Les éléments parasites (résistances, capacités, ou inductances parasites) sont moindres, vu la petite taille des circuits;
- On peut les intégrer si nécessaire sur la puce électronique portant un processeur numérique.

On leur trouve également certains défauts :

- Les composants actifs (ampli opérationnel) ont une bande passante réduite, ce qui tend à en limiter l'usage aux applications audio. Au contraire, les composants passifs sont utilisés pour les applications hautes fréquences (jusque 500 MHz)
- Les circuits actifs sont très sensibles à la précision sur leur composants, c.-à-d. que leurs caractéristiques peuvent varier beaucoup si les composants utilisés n'ont pas leurs valeur nominale (ce qui arrive toujours en pratique, si on considère que la précision garantie par les fabricants sur les résistances et condensateurs est souvent de l'ordre de 10%!). Nous verrons que ce critère intervient lors du choix des structures de filtres à utiliser.

- Les composants actifs nécessitent une source d'énergie. Il convient donc de chercher à en minimiser le nombre, pour des spécifications données.
- Les amplitudes des signaux traitables par des filtres actifs sont de l'ordre du Volt (au delà de cette valeur, ils peuvent produire de la distorsion). Les résistances et les amplis opérationnels produisent par ailleurs du bruit. Ceci tend à limiter la dynamique des signaux utilisables, ce qui n'est pas le cas pour les filtres passifs.

En conséquence, ces deux technologies (synthèse LC et RCAO) restent d'application pour la synthèse des filtres analogiques. Nous n'aborderons ici que la synthèse RCAO, la plus simple des deux.

1.4 Plan du cours

Après ce bref exposé introductif, nous consacrerons le chapitre 2 à l'examen des types de spécifications les plus couramment imposées. Nous y verrons en quoi un filtre réel peut s'écarter des spécifications idéales, et en quoi cela affecte le signal produit. Le chapitre 3 abordera, avec l'aide d'exemples sous MATLAB, le délicat problème de l'approximation. Nous nous restreindrons ici à l'approximation analytique, et nous verrons comment obtenir les fonctions de transfert de filtres passe-bas, passe-bande, passe-haut, coupe-bande et passe-tout avec les approximations de Butterworth, Chebyshev, Cauer, et Bessel. La sensibilité des circuits à leur composants fera l'objet du chapitre 4. Cette caractéristique essentielle des circuits, dont l'importance dépasse largement l'étude des filtres électriques, en est en effet un pré-requis indispensable à l'étude des structures utilisées pour la synthèse des filtres, par laquelle nous terminerons, au chapitre 5, en nous restreignant à la synthèse par cascade de cellules du second degré en technologie RCAO.

CHAPITRE 2

SPECIFICATIONS

2.1 Caractéristiques d'un filtre

Un filtre (linéaire) est caractérisé par sa *fonction de transfert isochrone* ou *réponse en fréquence*:

$$H(j\omega) = Y(j\omega) / X(j\omega) \quad (2.1)$$

On la décompose souvent en *réponse en amplitude* $A(\omega)$ et *réponse en phase* $\beta(\omega)$:

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\beta(\omega)} \quad (2.2)$$

On définit également l'*affaiblissement* $A_f(\omega)$, mesuré en décibels, et le *délai de groupe* $\tau(\omega)$, mesuré en secondes:

$$A_f(\omega) = -20 \log(A(\omega)) \quad (2.3)$$

$$\tau(\omega) = \frac{\partial(-\beta(\omega))}{\partial \omega} \quad (2.4)$$

Exemple 2.1

Visualisons sous Matlab la réponse en amplitude, la réponse en phase, l'affaiblissement, et le délai de groupe d'un filtre dont on connaît la fonction de transfert opérationnelle : $H(p)=1/p+1$:

`freqs([1],[1 1],logspace(-2,+2))`
montre la réponse de $1/(p+1)$ entre $10e-2$ et $10e2$ rad/s (Fig. 2.1.a). Pour obtenir l'affaiblissement et le délai de groupe, il faut demander explicitement (Fig. 2.1.b) :

```
[H,w]=freqs([1],[1 1],logspace(-2,+2));  
subplot(2,1,1)  
semilogx(w,-20*log10(abs(H)));  
xlabel('Frequency (radians)'); ylabel('Attenuation (dB)'); grid;  
subplot(2,1,2)  
semilogx(w(1:length(w)-1), -diff(unwrap(angle(H)))./diff(w));  
xlabel('Frequency (radians)'); ylabel('Group delay (s)'); grid;
```

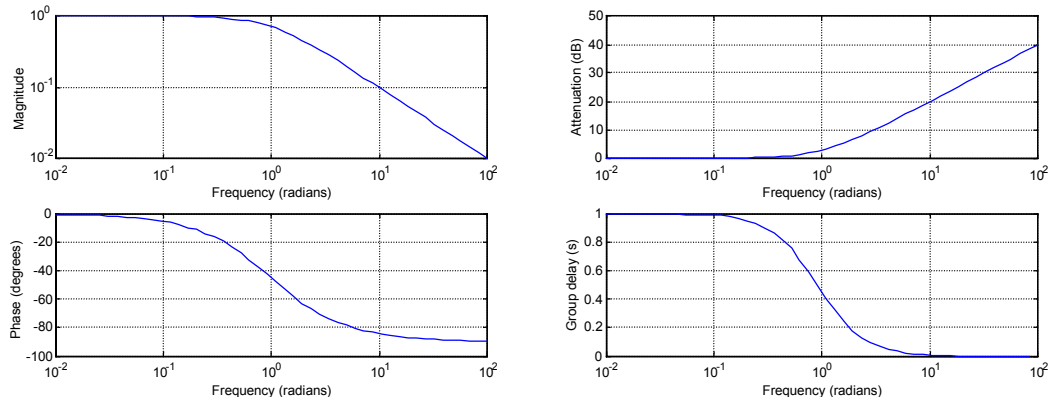


Fig. 2.1.a. (à gauche) Réponse en fréquence du filtre; b. (à droite) affaiblissement et délai de groupe.^(1 2)

2.2 Spécifications idéales

Une transformation n'apporte pas de distorsion du signal auquel elle est appliquée si elle restitue en sortie un signal $y(t)$ de même forme que le signal d'entrée $x(t)$. Le signal d'entrée peut par contre avoir subi une amplification ou un délai :

$$y(t) = Kx(t - t_0) \quad (2.5)$$

Ceci correspond, en transformée de Fourier, à une amplification du spectre d'amplitude et à un déphasage linéaire :

$$Y(j\omega) = KX(j\omega)\exp(-j\omega t_0) \quad (2.6)$$

et donc à une fonction de transfert de type :

$$H(j\omega) = K \exp(-j\omega t_0) \quad (2.7)$$

Si on considère maintenant un filtre, dont le rôle est de produire un signal de sortie correspondant à une plage de fréquences du signal d'entrée, il est clair que ce filtre doit, si on veut éviter toute distorsion, vérifier (2.7). Il doit donc présenter une réponse en amplitude constante et une réponse en phase linéaire et passant par 0, du moins dans la plage de fréquences utile, appelée *bande passante* (Fig. 2.2).

¹ On constate sur ce graphique que l'allure du délai de groupe n'est pas celle attendue a priori au vu de l'allure de la réponse en phase. Il faut cependant se souvenir que le délai de groupe est la dérivée de la phase en fonction de la pulsation, et non la dérivée de la phase en fonction du log de la pulsation.

² On constate également que le délai de groupe n'est pas constant dans une zone qui va à peu près d'une décade avant à une décade après la fréquence de coupure. Cette constatation peut être généralisée aux systèmes plus complexes.

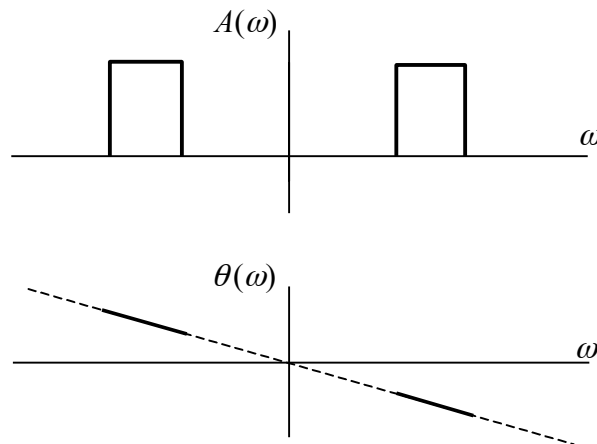


Fig. 2.2. Conditions de non-distorsion d'un signal par un filtre : réponses en amplitude et en phase.

En pratique, on admet parfois que le déphasage d'un filtre ne s'annule pas pour $\omega=0$:

$$H(j\omega) = K \exp(-j\omega t_0 + \alpha) \quad (\alpha \neq n2\pi) \quad (2.8)$$

Ceci peut impliquer une distorsion de la forme du signal reçu.

Exemple 2.2

Soit un signal $x(t) = \cos(50t) + \cos(43t)$ passant à travers un filtre de réponse $A(\omega) = 1$ et $\beta(\omega) = -0.03\omega$. Visualisons la sortie de ce filtre. Même chose si $\beta(\omega) = -0.03\omega + 6.8\pi$. Même chose si $\beta(\omega) = -\omega^2$ (Fig. 2.3).

```
t=(0:0.01 :2);
subplot(2,1,1);
plot(t,cos(50*t)+cos(43*t),' : ');
hold on;
plot(t,cos(50*t-0.03*50)+cos(43*t-0.03*43));
subplot(2,1,2);
plot(t,cos(50*t)+cos(43*t),' : ');
hold on;
plot(t,cos(50*t-0.03*50+6.8*pi)+cos(43*t-0.03*43+6.8*pi));
```

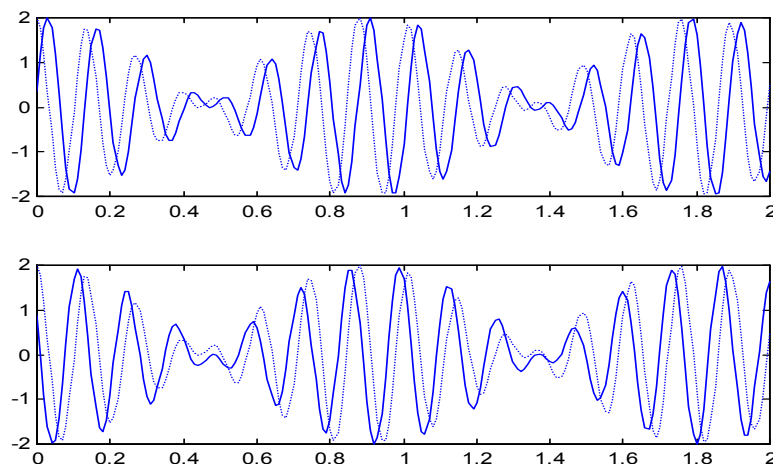


Fig. 2.3. Passage d'un signal à travers un filtre sans distorsion (haut) et à travers un filtre à phase linéaire non nulle en $\omega=0$.

Ce type de distorsion est cependant sans effet lorsque le filtre est utilisé pour démultiplexer des signaux *modulés*.

Exemple 2.3

Considérons la modulation d'amplitude de $\cos(\Omega t)$ par une porteuse $\cos(\omega_0 t)$:

$$x(t) = (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t \quad (2.9)$$

puisque $\cos a \cos b = 1/2 \cos(a-b) \cos(a+b)$, il vient :

$$x(t) = \cos \omega_0 t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t \quad (2.10)$$

ce qui donne, après passage dans un filtre de déphasage $\beta = -\omega t_0 + \alpha$ ($\alpha \neq n2\pi$) :

$$y(t) = \cos(\omega_0 t - \omega_0 t_0 + \alpha) + \frac{m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t - (\omega_0 + \Omega)t_0 + \alpha] + \frac{m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t - (\omega_0 - \Omega)t_0 + \alpha] \quad (2.11)$$

et finalement, après application de la même identité en sens inverse :

$$y(t) = [1 + m \cos(\Omega t - \Omega t_0)] \cos(\omega_0 t - \omega_0 t_0 + \alpha) \quad (2.12)$$

On constate que la porteuse et son enveloppe sont décalées dans le temps, mais que la forme du signal d'enveloppe reste inchangée. On peut étendre ce raisonnement aux signaux d'enveloppe quelconques.

On considère donc en général qu'un filtre est sans distorsion significative lorsqu'il présente une réponse en amplitude constante et un délai de groupe constant dans sa bande passante.

2.3 Spécifications en amplitude

On catégorise les filtres en fonction du type de modification qu'ils imposent sur leur entrée. Les filtres réalisant des modifications du spectre d'amplitude sont classés en filtres *passe-bas*, *passe-bande*, *passe-haut*, ou *coupe-bande*.

La forme générale de la fonction de transfert opérationnelle d'un filtre est :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (2.13)$$

L'ordre du filtre est n , qui doit bien entendu satisfaire à $n \geq m$. Les zéros de $N(p)$ sont les *zéros* du filtre; les zéros de $D(p)$ sont les *pôles* du filtre. Les pôles du filtre doivent être situés à gauche de l'axe imaginaire pour que le filtre soit stable. $D(p)$ doit pour ce faire être un polynôme dit de *Hurwitz*.

Nous étudions ici la manière de spécifier divers types de filtres. Nous verrons plus loin (chapitre 3) comment établir des fonctions de transfert qui permettent de respecter ces spécifications.

Les spécifications d'un *filtre passe-bas* typique sont données à la Fig. 2.4. Sa *bande passante* se situe entre 0 et ω_c (où c est mis pour "cut-off") et sa *bande*

atténuée s'étend de ω_s (où *s* est mis pour "stop") à l'infini. On accepte une certaine variation maximale A_p (ou *ripple*) de la courbe d'affaiblissement en bande passante (où *M* est mis pour "maximum"), et on impose que l'atténuation en bande atténuée soit supérieure à une valeur minimale A_s (où *m* est mis pour "minimum").

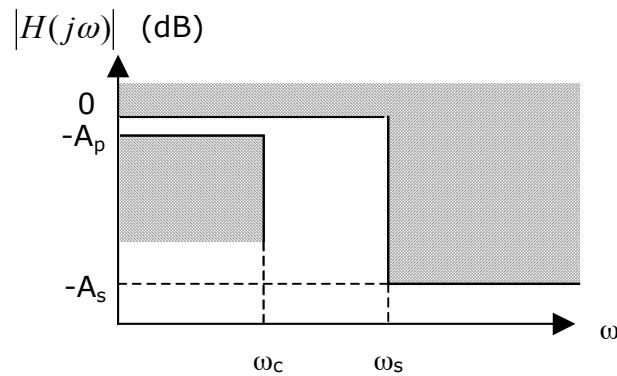


Fig. 2.4. Spécifications en amplitude d'un filtre passe-bas.

Un *filtre passe-haut* a des spécifications inversées (Fig. 2.5) : sa bande atténuée va de 0 à ω_s , et sa bande passante de ω_c à l'infini.³

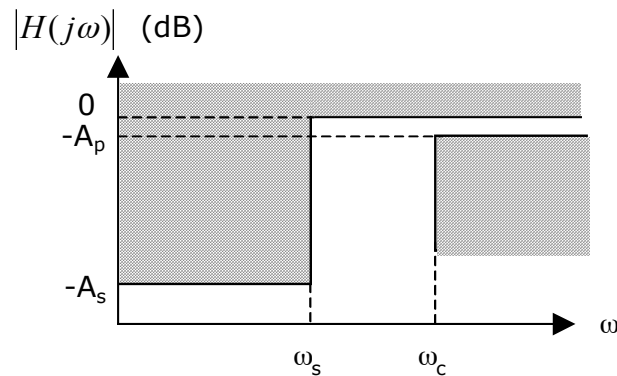


Fig. 2.5. Spécifications en amplitude d'un filtre passe-haut.

Un *filtre passe-bande* (Fig. 2.6) a deux bandes atténuées, de 0 à ω_{s-} et de ω_{s+} à l'infini. Il laisse passer les fréquences entre ω_{c-} et ω_{c+} . En général, la largeur des bandes de transition est quelconque. On parle de *filtre à symétrie géométrique* lorsqu'on a $\omega_{s+}/\omega_{c+} = \omega_{c-}/\omega_{s-}$, ce qui implique que les bandes de transition soient de même largeur sur un graphique logarithmique.

³ En pratique, la bande passante d'un passe-haut est toujours limitée vers le haut par la réponse en fréquence des éléments qui le composent. En technologie RAO, c'est l'amplificateur opérationnel qui limite la bande passante, à quelques centaines de kHz tout au plus.

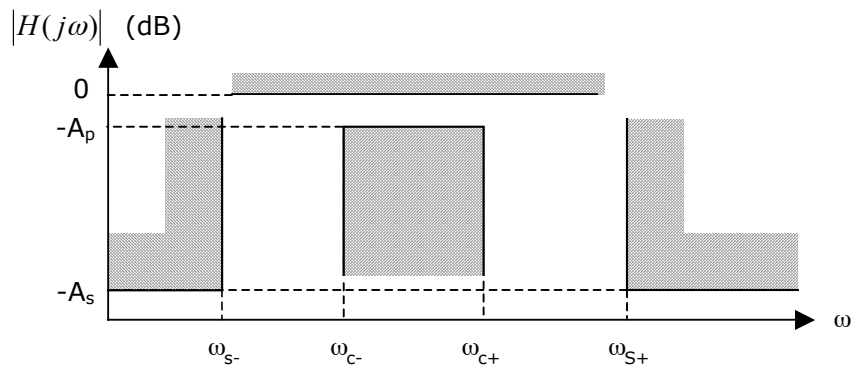


Fig. 2.6. Spécifications en amplitude d'un filtre passe-bande.

Les spécifications d'un *filtre coupe-bande* sont inverses de celles d'un passe-bande (Fig. 2.7).

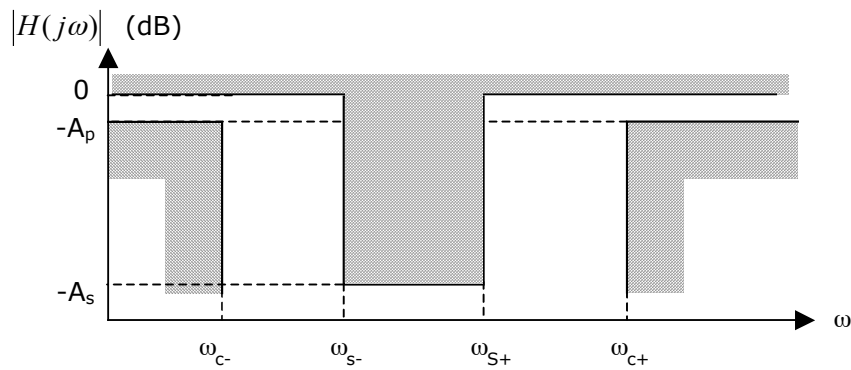


Fig. 2.7. Spécifications en amplitude d'un filtre coupe-bande.

Il arrive que l'on doive réaliser la synthèse de filtres aux spécifications plus complexes. La bande passante et/ou la bande atténuée peuvent ainsi être composées de plusieurs bandes avec des spécifications d'atténuation distinctes (voir Fig. 2.8 par exemple).

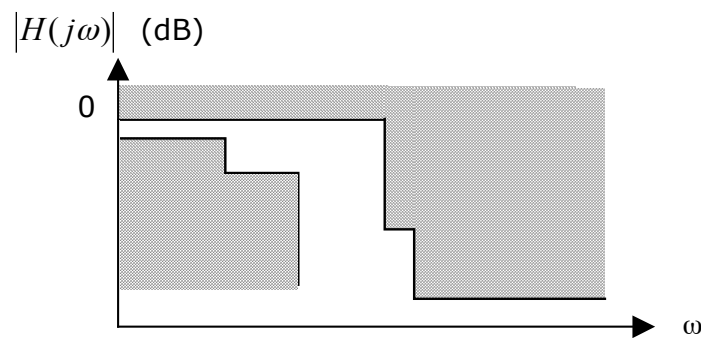


Fig. 2.8. Spécifications en amplitude d'un filtre passe-bas complexe

2.4 Spécifications en phase ou en délai

La condition de non-distorsion sur la phase, mentionnée au point 2.2, n'est en général pas requise pour les signaux audio. L'oreille humaine est en effet dans une large mesure insensible à un déphasage sur le signal perçu, à condition que ce déphasage soit constant dans le temps. Cette condition est par contre très importante lorsqu'on cherche à transmettre des signaux vidéo, ou n'importe quel type de signal numérique (0/1). Une distorsion de phase implique en effet une modification de la forme de ces signaux, ce qui peut en fausser la perception (signaux vidéo) ou l'interprétation (signaux numériques).

Or, pour vérifier de manière efficiente les spécifications en amplitude, les techniques d'approximation (voir chapitre 3) placent systématiquement les zéros de $H(z)$ sur l'axe imaginaire. Le filtre ainsi obtenu est donc à *minimum de phase*.

Rappel

Un système à minimum de phase est un système dont les zéros sont à gauche (ou sur) l'axe imaginaire. Considérons en effet deux systèmes dont le premier est à minimum de phase, et dont le second diffère du premier en ceci que ses zéros sont les symétriques de ceux du premier par rapport à l'axe imaginaire (Fig. 2.9). Il est clair que ces deux systèmes possèdent la même réponse en amplitude (en vertu de l'interprétation géométrique de la réponse en amplitude, qui est le produit des normes des vecteurs $j\omega - z_i$ divisé par le produit des normes des vecteurs $j\omega - p_i$). Par contre, la réponse en phase du premier est partout inférieure à celle du second (en vertu de l'interprétation géométrique de la réponse en phase, qui est la somme des phases des vecteurs $j\omega - z_i$ moins la somme des phases des vecteurs $j\omega - p_i$).

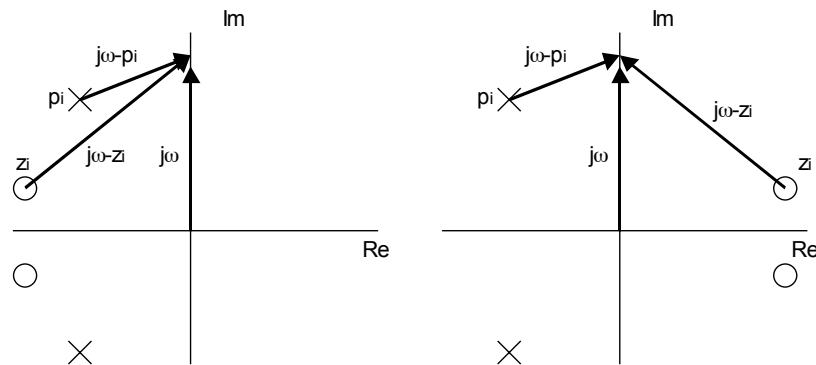


Fig. 2.9. Deux systèmes à même réponse en amplitude. Celui de gauche est à minimum de phase.

On peut montrer que la réponse en amplitude et la réponse en phase d'un système à minimum de phase ne sont pas indépendantes. Elles vérifient des relations complexes appelées *relations de Bayard-Bode*, qui permettent de trouver la réponse en phase du système, connaissant sa réponse en amplitude. Cette réponse en phase ne satisfait pas en général aux conditions de non-distorsion.

On cherche donc à corriger la courbe de phase (ou de délai), en multipliant $H(p)$ par une fonction *passé-tout* $H_{AP}(p)$ (AP étant mis pour « all pass »). Un *passé-tout* est un filtre dont les zéros se trouvent dans le demi-plan de droite, en symétrie horizontale avec ses pôles. Ceci implique que :

$$H_{AP}(p) = \pm \frac{P(p)}{P(-p)} \quad (2.14)$$

où $P(p)$ est un polynôme quelconque.

La réponse en amplitude d'un tel système est égale à l'unité (cf. interprétation géométrique de la réponse en amplitude). Sa réponse en phase est par contre égale à la somme des contributions des zéros moins la somme des contributions des pôles, à π près (vu le signe \pm). Et comme la contribution de chaque pôle est égale à π moins la contribution du zéro dont il est le symétrique, la réponse en phase globale est égale à deux fois la phase du numérateur, à π près :

$$\beta_{AP}(\omega) = 2 \arctan\left(\frac{P_{\Im}(\omega)}{P_{\Re}(\omega)}\right) \mp \pi \quad (2.15)$$

Cette réponse en phase, qui peut a priori être d'allure quelconque, s'additionne à la phase du filtre à minimum de phase, pour constituer le filtre final. Le filtre passe-tout qui permet ainsi de vérifier a posteriori les conditions de non-distorsion est appelé *égaliseur de délai*.

CHAPITRE 3

APPROXIMATION

Le but de l'approximation est de transformer des spécifications portant sur l'affaiblissement ou le déphasage d'un filtre en une fonction de transfert qui les vérifie. Nous nous intéresserons plus particulièrement ici à l'approximation de l'affaiblissement. Si la phase ou le délai de groupe du filtre doivent également respecter des spécifications précises, il faudra se souvenir de corriger la phase des filtres obtenus, en ajoutant des cellules correctrices de phase ⁴.

Les filtres du second degré sont les plus simples que l'on puisse imaginer. Leurs coefficients sont en effet directement interprétables sur la fonction de transfert du filtre. Le problème de l'approximation est alors trivial (3.1). Ces filtres ne permettent cependant pas de répondre à des spécifications quelconques.

Pour les filtres de degrés plus élevés, on distingue deux méthodes générales d'approximation: la première, dite *analytique*, où la fonction de transfert $H(p)$ est calculée à partir de formules mathématiques simples; la seconde, dite *numérique*, où la fonction de transfert est le résultat d'algorithmes numériques complexes nécessitant l'usage d'un ordinateur; seule l'approximation analytique sera abordée ici (3.2).

3.1 Les filtres du second degré

Les filtres (ou *sections*) du second degré ont la forme générale :

$$H(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{b_2 (p - z_1)(p - z_1^*)}{(p - p_1)(p - p_1^*)} \quad (3.1)$$

que l'on trouve aussi souvent sous la forme :

$$H(p) = K \cdot \frac{p^2 + 2\sigma_z \cdot p + \omega_z^2}{p^2 + 2\sigma_p \cdot p + \omega_p^2} = K \cdot \frac{p^2 + (\omega_z / Q_z) \cdot p + \omega_z^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2} \quad (3.2)$$

où σ_p , ω_p , et Q_p (resp. σ_z , ω_z , et Q_z) sont respectivement l'opposé de la partie réelle, le module, et le facteur de qualité des pôles (resp. des zéros). Certaines de ces grandeurs ont une interprétation graphique immédiate (Fig. 3.1).

⁴ Ces techniques ne seront cependant pas vues dans ce cours d'introduction, à l'exception de celle ébauchée à la section 3.1.5.

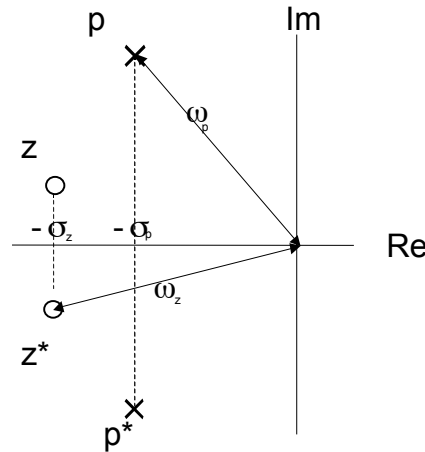


Fig. 3.1. Pôles et zéros d'un filtre du second degré quelconque

On trouvera ci-dessous les caractéristiques des filtres du second degré de type passe-bas, passe-bande, passe-haut, coupe-bande, et passe-tout. Pour chaque filtre, il est facile de trouver des coefficients qui respectent des spécifications données (à condition qu'elles soient très peu contraignantes, vu le faible nombre de degrés de liberté dont on dispose).

3.1.1 La section "passe-bas"

La fonction de transfert de la section passe-bas est donnée par :

$$H(p) = K \cdot \frac{\omega_p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2} \quad (3.3)$$

expression dans laquelle Q_p représente le facteur de qualité de la section du second degré; les pôles de $H(p)$ sont complexes si $Q_p > 0.5$ (ce qui correspond à $\sigma_p < \omega_p$).

Exemple 3.1

Affichons la courbe de Bode en amplitude et le diagramme poles-zéros d'un filtre passe-bas du second degré, de gain en bande passante égal à 10, de fréquence de coupure égale à 20 rad/s, et de facteur de qualité égal à 10 (Fig. 3.2)

```
freqs([4000],[1,2,400],logspace(0,3));
zplane([], [1,2,400]);
```

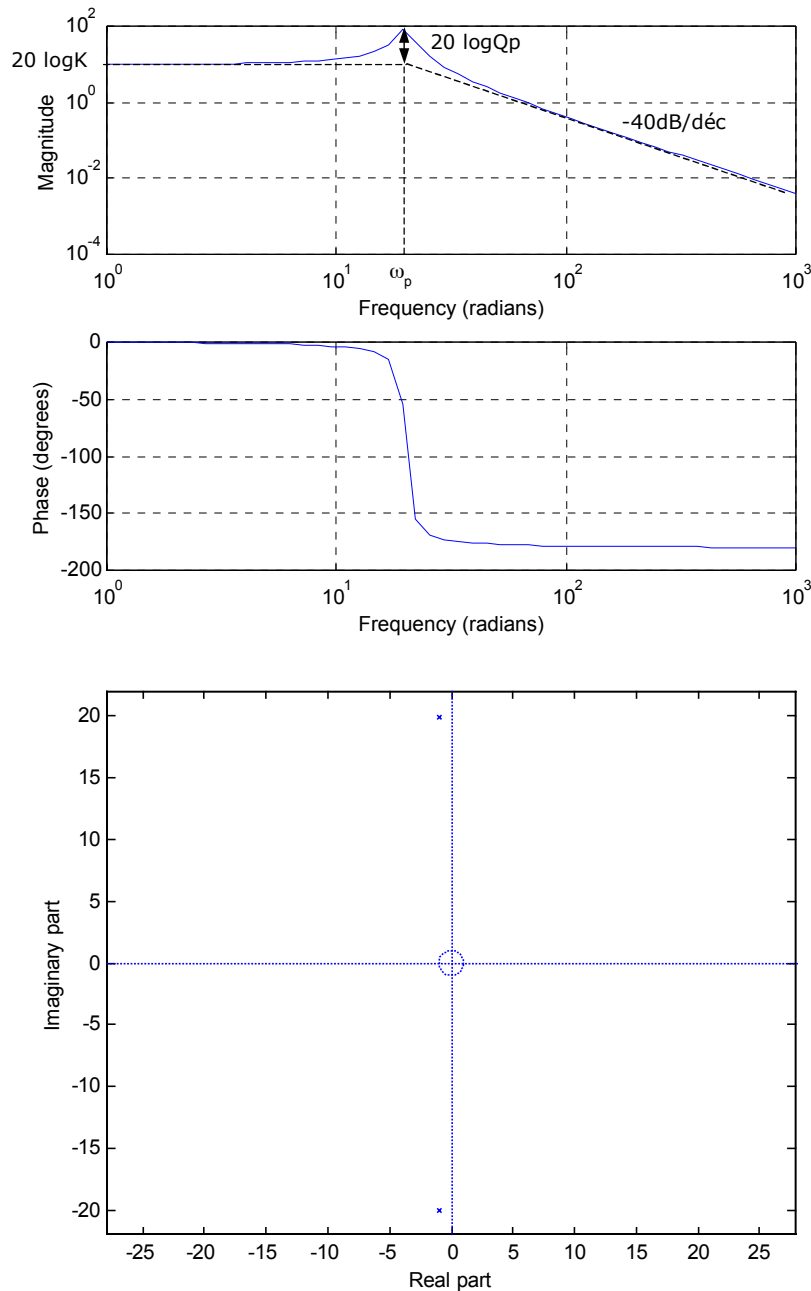



Fig. 3.2. Courbe de Bode et diagramme poles-zéros d'un filtre passe-bas du second degré.

La courbe asymptotique de Bode associée (dans le cas de racines complexes), ainsi que la courbe réelle, ont une allure typique (Fig. 3.2). La courbe de gain logarithmique part de $20 \log(K)$ en DC, et tombe à 40 dB/décade au delà de la fréquence de coupure ω_p (les deux pôles étant de même module, leurs contributions à la courbe asymptotique globale sont identiques). L'examen de cette figure explique bien le nom porté par Q_p .

3.1.2 La section "passe-haut"

La fonction de transfert de la section du second degré de type passe-haut est donnée par :

$$H(p) = K \cdot \frac{p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2} \quad (3.4)$$

et sa courbe de gain logarithmique est présentée sur la figure ci-dessous. Le double zéro en 0 annule la paire pôles pour les hautes fréquences et assure une atténuation tendant vers l'infini en 0.

Exemple 3.2

Affichons la courbe de Bode en amplitude et le diagramme poles-zéros d'un filtre passe-haut du second degré, de gain en bande passante égal à 10, de fréquence de coupure égale à 20 rad/s, et de facteur de qualité égal à 10 (Fig. 3.3)

```
freqs([10 0 0],[1,2,400],logspace(0,3));  
zplane([10 0 0], [1,2,400]);
```

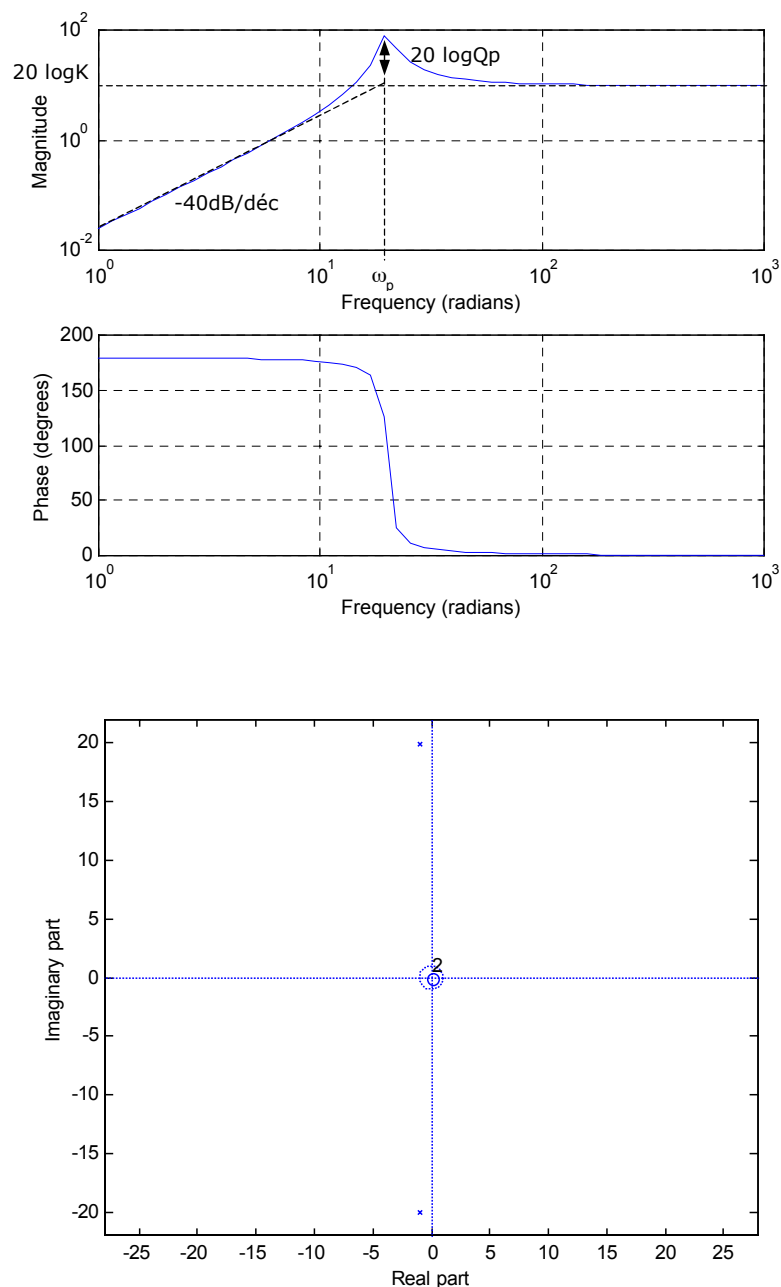


Fig. 3.3. Courbe de Bode et diagramme poles-zéros d'un filtre passe-haut du second degré.

3.1.3 La section "passe-bande"

La fonction de transfert de la section du second degré de type passe-bande est donnée par:

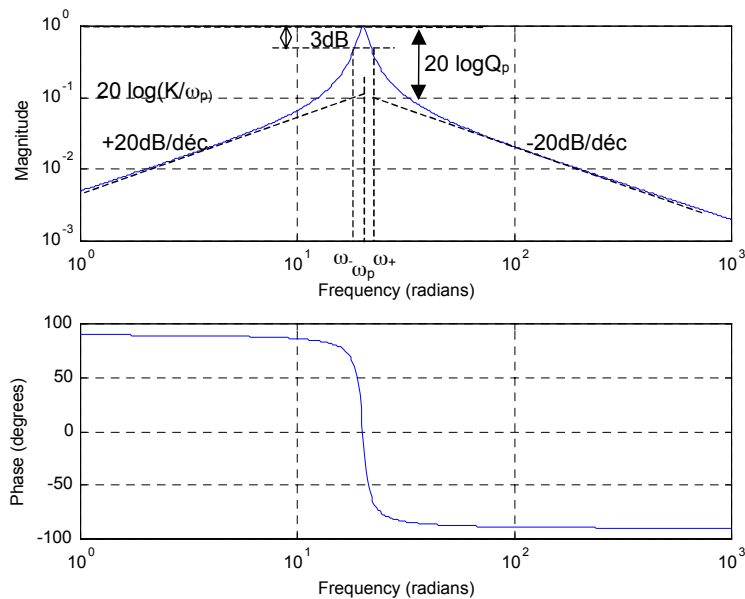
$$H(p) = K \cdot \frac{(\omega_p / Q_p) \cdot p}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2} \quad (3.5)$$

et sa courbe de gain logarithmique est présentée à la figure ci-dessous. Le zéro en 0 n'annule qu'un pôle en hautes fréquences, ce qui impose une atténuation infinie en 0 et l'infini.

Exemple 3.3

Affichons la courbe de Bode en amplitude et le diagramme poles-zéros d'un filtre passe-bande du second degré, de gain en bande passante égal à 10, de fréquence centrale de bande passante égale à 20 rad/s, et de facteur de qualité égal à 10 (Fig. 3.4)

```
fregs([2,0],[1,2,400],logspace(0,3,500));  
zplane([2,0],[1,2,400]);
```



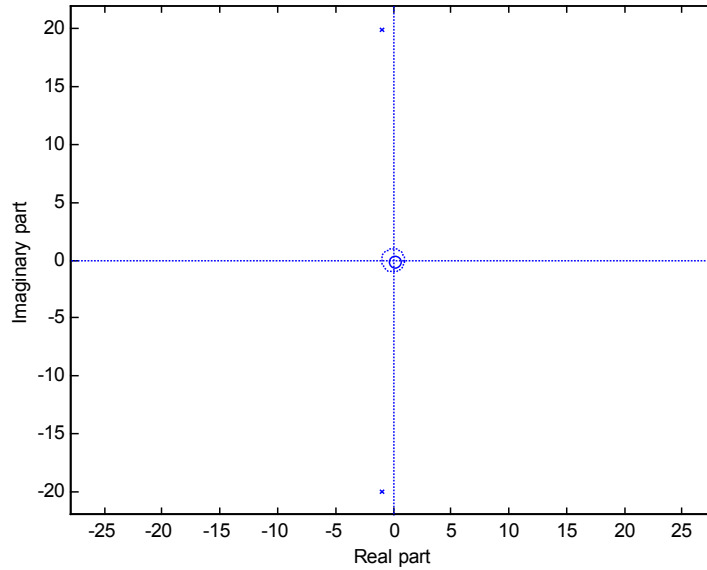


Fig. 3.4. Courbe de Bode et diagramme poles-zéros d'un filtre passe-bande du second degré.

Si on appelle ω_+ et ω_- les deux pulsations à 3 dB du maximum (ce qui correspond, en amplitude, à un facteur $1/\sqrt{2}$), on peut montrer que ces fréquences sont en symétrie géométrique par rapport à ω_p et que la bande passante est inversement proportionnelle à Q_p :

$$\omega_+ \cdot \omega_- = \omega_p^2 \quad \text{et} \quad \omega_+ - \omega_- = \omega_p / Q_p \quad (3.6)$$

3.1.4 La section "réjecteur de fréquence"

La fonction de transfert de la section du second degré de type réjection de fréquence se présente sous la forme suivante :

$$H(p) = K \cdot \frac{p^2 + (\omega_z / Q_z) \cdot p + \omega_z^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2} \quad (3.7)$$

On distingue les réjecteurs de type « passe-bas », « passe-haut », et les réjecteurs « symétriques », selon que $\omega_p < \omega_z$, $\omega_z < \omega_p$, ou $\omega_z = \omega_p$.

La courbe de gain logarithmique est présentée à la figure ci-dessous dans le cas « passe-bas ».

Exemple 3.4

Affichons la courbe de Bode en amplitude et le diagramme poles-zéros d'un filtre réjecteur de fréquences de type passe-bas du second degré, de largeur de bande passante égale à 20 rad/s, de fréquence de réjection égale à 30 rad/s (avec 60 dB de réjection), et de facteur de qualité de la paire de pôles égal à 10 (Fig. 3.5).

Comme on ne précise pas le facteur de qualité de la paire de pôles, on choisit par exemple 1 pour assurer une bande passante plate.

```
fregs(4/9*[1,30/1000,900],[1,20/10,400],logspace(0,3));
zplane(4/9*[1,30/1000,900],[1,20/10,400]);
```

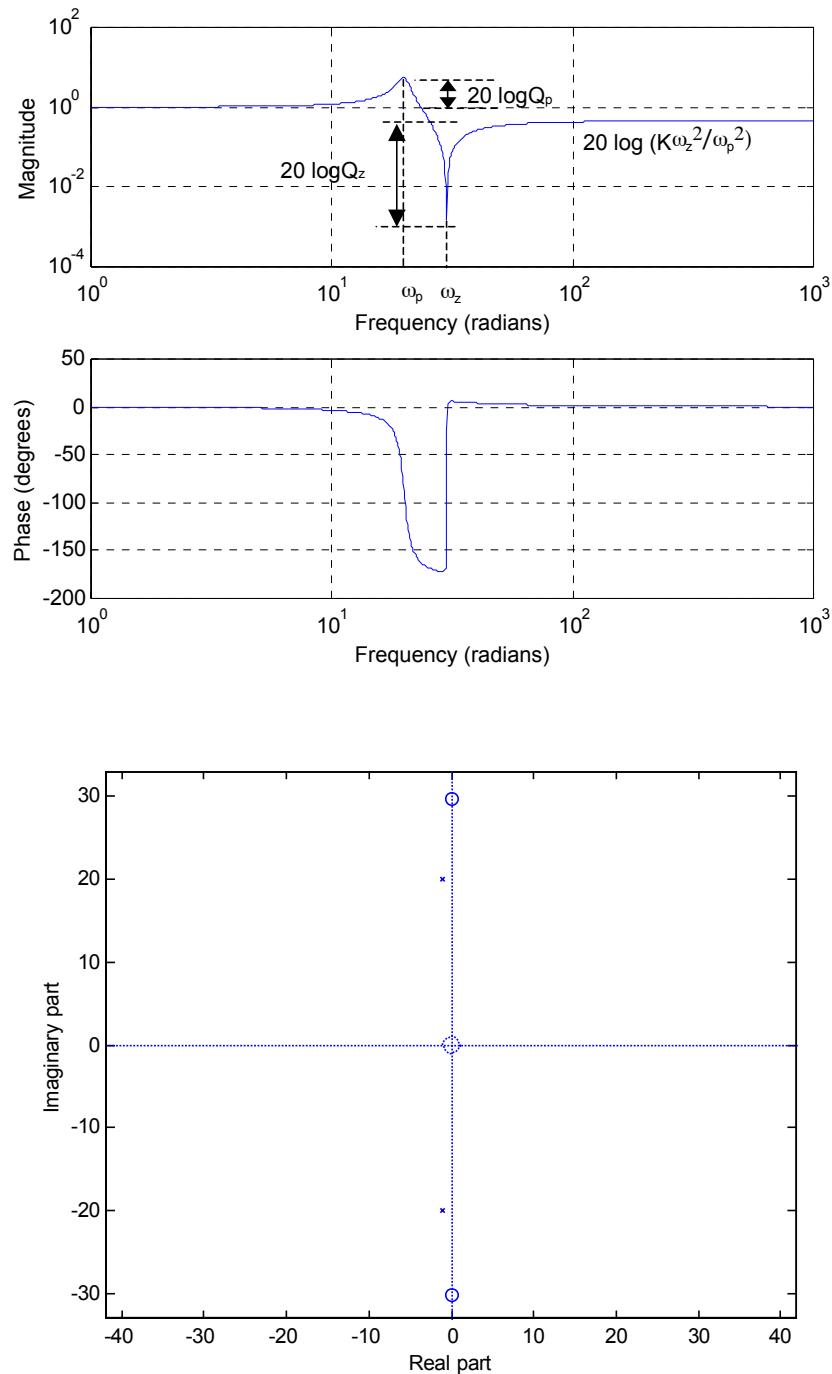


Fig. 3.5. Courbe de Bode et diagramme poles-zéros d'un filtre réjecteur de fréquence du second degré.

On remarque que si Q_z tend vers l'infini, la pulsation ω_z est d'autant mieux éliminée, ce qui justifie le nom de cette section du second degré.

3.1.5 La section "passe-tout"

La fonction de transfert de la section du second degré de type passe-tout se présente sous la forme suivante (qui vérifie bien 2.14) :

$$H(p) = K \cdot \frac{p^2 - (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2} \quad (3.8)$$

Ses pôles sont en symétrie horizontale par rapport à ses zéros. Il est clair que $|H(j\omega)| = 1$ quelque soit la valeur de ω ce qui justifie le nom de la section, qui s'appelle aussi *déphaseur pur* ou *cellule correctrice de phase* car elle est utilisée pour modifier la phase d'un système.

Exemple 3.5

Affichons les pôles et les zéros d'un filtre passe-tout du second degré, de fréquence caractéristique égale à 1 rad/s, pour des facteurs de qualité égal à 1 (Fig. 3.6)

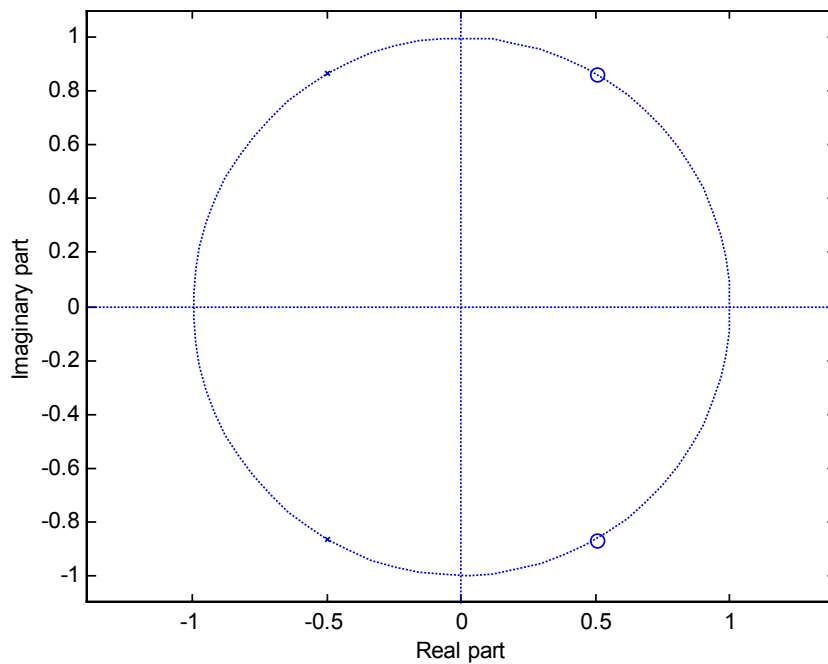


Fig. 3.6. pôles et zéros d'un filtre passe-tout du second degré.

Affichons le délai de groupe de ce même filtre pour des facteurs de qualité allant de 0.02 à 50 (Fig. 3.7).

```
for q=[0.02,0.1,0.3,1/sqrt(3),2,5,20,50]
w=0:0.01:3;
h=freqs([1 -1/q 1],[1 1/q 1],w);
a=unwrap(angle(h));
delay=-[0 diff(a)./diff(w)];
semilogy(w,delay);
hold on;
end;
```

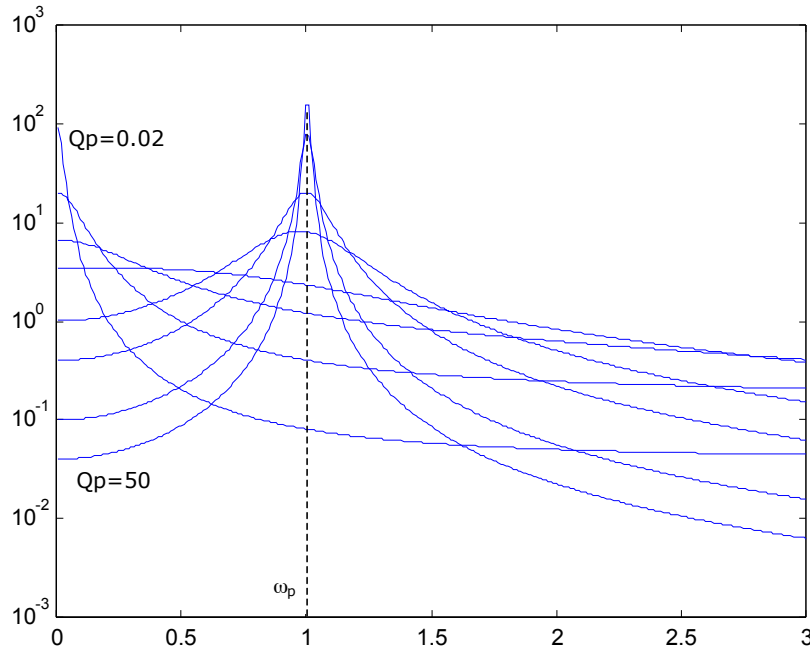


Fig. 3.7. Délai de groupe d'un filtre passe-tout du second degré, pour diverses valeurs du facteur de qualité.

On montre que la valeur $Q_p = 1/\sqrt{3}$ donne la courbe la plus plate. Ces courbes indiquent une forte distorsion de délai de groupe pour les grandes valeurs du facteur de qualité.

On peut montrer par ailleurs que, à même valeur de ω_p et de Q_p , les courbes de délai de groupe des sections passe-bas, passe-haut, passe-bande et réjecteur de bande du second degré sont identiques, et valent la moitié de celle de la section passe-tout. On en déduit que ces sections introduisent une distorsion de délai de groupe d'autant plus importante que leur facteur de qualité est important. Il est donc nécessaire, si le délai de groupe doit être maintenu constant, d'utiliser des sections passe-tout du second degré pour corriger la phase.

Lorsque les spécifications en délai de groupe ne sont pas très sévères et que le degré du filtre à corriger est faible, on peut utiliser un graphique comme celui de la Fig. 3.7 pour choisir à vue la ou les cellules correctrices à utiliser.

3.2 Approximation analytique d'un passe-bas normalisé degré quelconque

Nous commencerons par l'approximation analytique d'un filtre passe-bas normalisé en fréquence. Nous verrons en effet plus loin (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) que les spécifications en amplitude de filtres quelconques peuvent se réduire à celles de ce type de filtre, après transformation en fréquence ad-hoc.

La figure ci-dessous donne les spécifications générales en amplitude d'un *filtre passe-bas normalisé* (en fréquence). La variable de fréquence y est explicitement

notée $\Omega (= \omega/\omega_c)$ ⁵, pour ne pas oublier que les développements qui vont suivre se rapporteront à des spécifications normalisées : $\Omega_c = 1$. A_p et A_s sont respectivement l'atténuation maximale admise en bande passante, et l'atténuation minimale requise en bande atténuée.

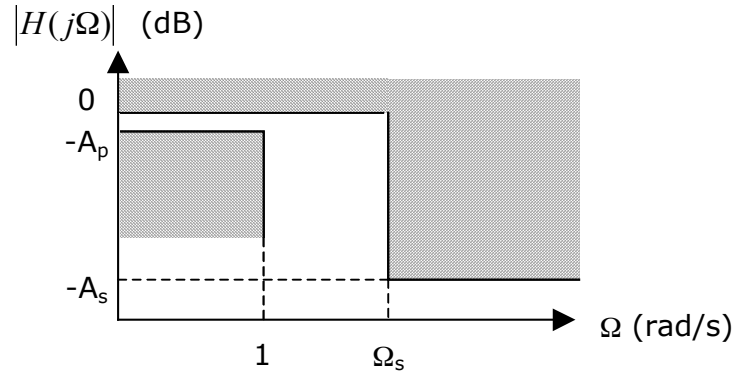


Fig. 3.8. Spécifications en amplitude du filtre passe-bas normalisé.

Le problème de l'approximation analytique peut donc être posé ainsi : *positionner les pôles et les zéros de $H(p)$ de façon à respecter les spécifications sur $|H(j\Omega)|$ données à la Fig. 3.8.*

Ces contraintes tendent toujours vers les conditions idéales : 0 dB en bande passante, et une atténuation infinie dans la bande atténuée. Or, imposer une atténuation infinie correspond bien entendu à placer les zéros de $|H(j\Omega)|$ (c.à.d. aux zéros de $H(p)$ situés sur l'axe imaginaire) dans la bande atténuée; par contre, imposer une valeur unitaire à $|H(j\Omega)|$ ne correspondent pas à placer les pôles de $H(p)$ à un endroit particulier (placer ces pôles sur l'axe imaginaire en bande passante conduirait à un gain infini, et non pas unitaire). Pour simplifier le problème, on passe donc plutôt pas le calcul d'une fonction $K(j\omega)$, appelée *fonction caractéristique*, dont on va s'arranger pour que ses zéros et ses pôles correspondent précisément aux fréquences pour lesquelles $|H(j\Omega)|$ vaut 1 ou 0 (que l'on appelle parfois *zéros et pôles d'affaiblissement*, respectivement). Il suffit pour cela de poser :

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\Omega)|^2} \quad (3.9)$$

$$|K(j\Omega)|^2 = \frac{1}{|H(j\Omega)|^2} - 1 = \frac{|D(j\Omega)|^2 - |N(j\Omega)|^2}{|N(j\Omega)|^2} \quad (3.10)$$

Il est clair que les zéros de $|K(j\Omega)|$ (c.à.d. les zéros de $K(p)$ situés sur l'axe imaginaire) correspondent aux fréquences où l'atténuation vaut 0 dB (c.-à-d. aux zéros de l'affaiblissement); les pôles de $|K(j\Omega)|$ (c.à.d. les pôles de $K(p)$ situés

⁵ En toute rigueur, nous devrions donc également noter P la variable complexe résultant de la normalisation de p . Nous ne le ferons pas ici, pour ne pas alourdir les notations. Nous nous en souviendrons cependant à la section 3.3.

sur l'axe imaginaire) correspondent aux fréquences où l'atténuation est infinie (aux zéros de $|H(j\Omega)|$, c.-à-d. aux pôles de l'affaiblissement).

Le problème de l'approximation analytique devient alors : *positionner les pôles et les zéros de $K(p)$ de façon à respecter les spécifications sur $|H(j\Omega)|$ données à la Fig. 3.8. Retrouver ensuite le $H(p)$ correspondant.*

La Fig. 3.9 donne l'allure d'une fonction $|K(j\Omega)|^2$ répondant à ces spécifications, ainsi que l'allure de la courbe de gain logarithmique correspondante.

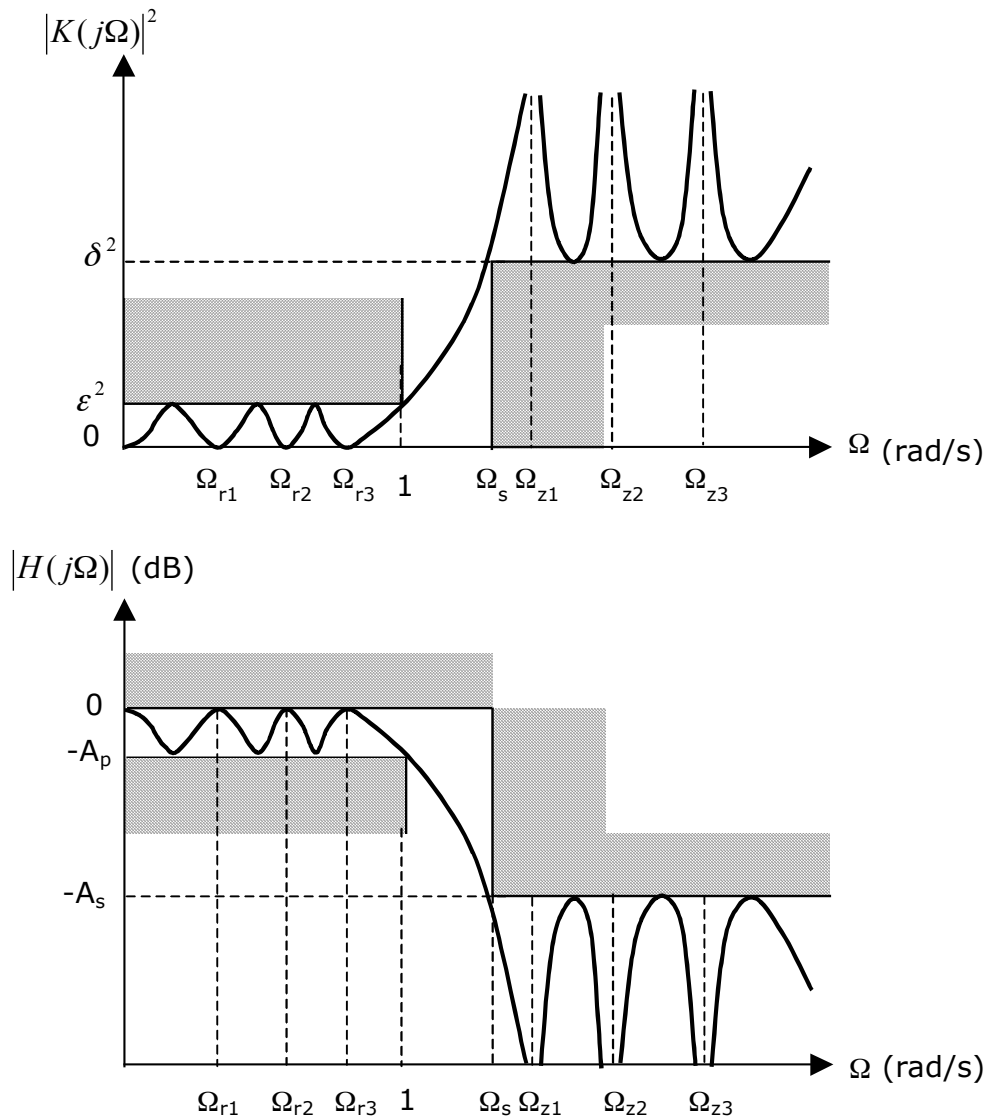


Fig. 3.9. Spécifications sur $|K(j\Omega)|^2$ permettant de respecter les spécifications de la Fig. 3.8 ⁶ et allure de la courbe de gain logarithmique correspondante.

Les valeurs de δ et ε de la Fig. 3.9 sont évidemment liées aux valeurs de A_p et A_s par :

⁶ Il est important de noter sur la figure du haut que l'axe des ordonnées n'est pas en dB.

$$\begin{aligned} 10\log(1 + \varepsilon^2) &= A_p \quad \text{ou} \quad \varepsilon^2 = 10^{A_p/10} - 1 \\ 10\log(1 + \delta^2) &= A_s \quad \text{ou} \quad \delta^2 = 10^{A_s/10} - 1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Il apparaît clairement à la Fig. 3.9 que les zéros et les pôles de $K(p)$ sont situés sur l'axe imaginaire. Les premiers sont situés dans la bande passante et sont appelés *zéros de réflexion* ($\Omega_{r1}, \Omega_{r2}, \Omega_{r3}, \dots$) : aux fréquences correspondantes, le signal passe à travers le filtre sans être atténué; les seconds sont situés en bande atténuée et sont appelés *zéros de transmission* ($\Omega_{z1}, \Omega_{z2}, \Omega_{z3}, \dots$) : ces sont les zéros de $|H(j\Omega)|$.

En supposant qu'on ait pu déterminer une fonction $|K(j\Omega)|^2$ qui respecte les spécifications de la Fig. 3.9, il est facile de trouver $|H(j\Omega)|^2$ par (3.9).

Et comme :

$$|H(j\Omega)|^2 = H(p)H(-p) \Big|_{p=j\Omega} \quad (3.12)$$

il est toujours possible de retrouver au moins une valeur de $H(p)H(-p)$ en remplaçant Ω par p/j dans $|H(j\Omega)|^2$ ⁷.

Le dernier problème à résoudre consiste alors à répartir les zéros et les pôles de $H(p)H(-p)$ entre $H(p)$ et $H(-p)$. Ceci ne pose aucun problème pour les pôles puisque tous les pôles situés dans le demi-plan de gauche sont ceux de $H(p)$. La répartition des zéros de $H(p)H(-p)$ est également univoque dans la mesure où ils seront dans la pratique tous situés sur l'axe imaginaire.

3.2.1 L'approximation de BUTTERWORTH

La façon la plus simple de respecter les spécifications de la Fig. 3.9 est d'imposer (voir Fig. 3.10) :

$$K(j\Omega) = \varepsilon \cdot \Omega^n \quad (3.13)$$

en fixant n de façon que :

$$|K(j\Omega_s)|^2 \geq \delta^2 \quad (3.14)$$

⁷ En mathématiques, cette opération porte le nom de *prolongement analytique*.

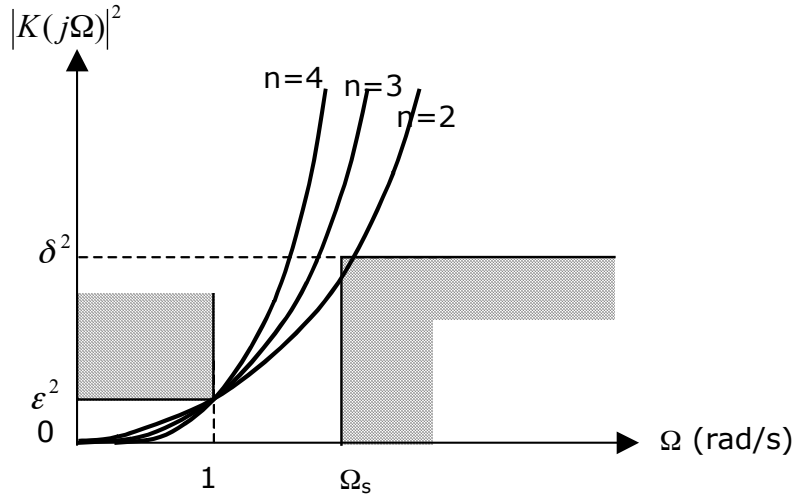


Fig. 3.10. Fonction caractéristique du filtre passe-bas de Butterworth.

C'est ce que l'on appelle *l'approximation de Butterworth*. Il s'agit d'une approximation polynomiale: la fonction caractéristique est un polynôme. Les zéros de réflexion se trouvent tous à l'origine et il n'y a pas de zéros de transmission. On parle d'approximation *méplate* (c.-à-d. maximallement plate) à l'origine : on montre facilement que ce type de fonction caractéristique conduit à imposer que toutes les dérivées de $|H(j\Omega)|^2$ soient nulles pour $\Omega = 0$.

La condition (3.14) conduit à :

$$\begin{aligned} |K(j\Omega_s)|^2 &= \delta^2 \\ \varepsilon^2 \Omega_s^{2n} &= \delta^2 \\ n &= \frac{\log \frac{\delta^2}{\varepsilon^2}}{2 \cdot \log \Omega_s} \end{aligned} \quad (3.15)$$

ce qui donne finalement :

$$n = \left\lceil \frac{\log \frac{10^{As/10} - 1}{10^{-As/10} - 1}}{2 \cdot \log \Omega_s} \right\rceil + 1 \quad (3.16)$$

où $[x]$ représente la partie entière de x , puisque le degré doit par définition être un entier.

Le choix de (3.13) conduit à :

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}} \quad (3.17)$$

et le remplacement de Ω^2 par $-p^2$ (prolongement analytique) donne :

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1 - \varepsilon^2 p^{2n}} \quad (3.18)$$

On en conclut que $H(p)H(-p)$ ne possède pas de zéros, et que ses $2n$ pôles sont les racines de :

$$1 - \varepsilon^2 p^{2n} = 0 \quad (3.19)$$

Ceux-ci sont donc situés sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{1/\varepsilon}$. On ne retient pour $H(p)$ que les n pôles à gauche de l'axe imaginaire (voir Fig. 3.11) :

$$p_k = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}} e^{j\pi + \frac{2k-1}{2n}\pi} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.20)$$

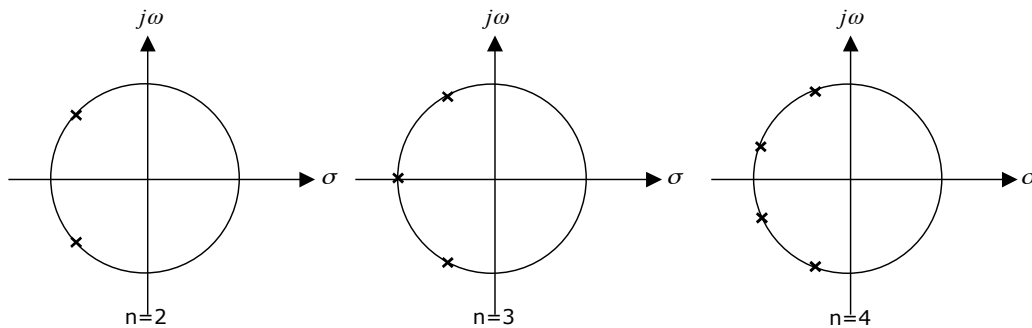


Fig. 3.11. Localisation des pôles des filtres de BUTTERWORTH

Il est intéressant de calculer le comportement asymptotique de la courbe de gain logarithmique :

$$\begin{aligned} 20 \log |H(j\Omega)|_{\Omega \rightarrow \infty} &= 10 \log \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}} \right) \\ &\approx -10 \log \varepsilon^2 - 20.n. \log \Omega \end{aligned} \quad (3.21)$$

On retrouve bien dans cette expression la classique chute en -20dB/décade fois le nombre de pôles du filtre.

Exemple 3.6

Calculons l'approximation de Butterworth pour le filtre passe-bas normalisé de la Fig. 3.12.

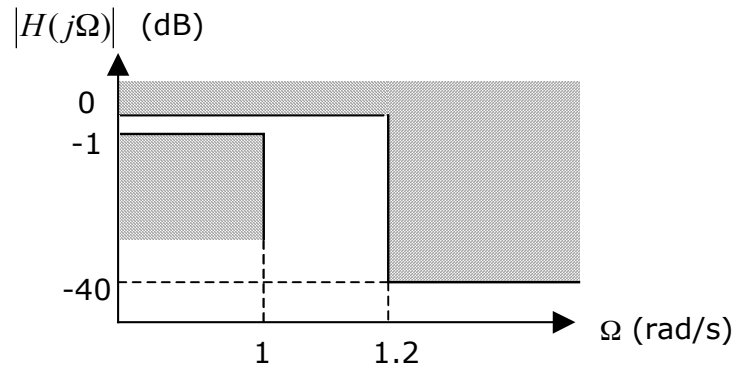


Fig. 3.12. Filtre passe-bas normalisé simple.

Matlab fournit un degré 29, et renvoie la fréquence de fin de bande passante à 3dB (qui n'est utile que pour la suite de l'approximation). On vérifiera à titre d'exercice que la formule (3.16) donne le même degré.

```
[n,wn]=buttord(1,1.2,1,40,'s')
n =
    29
wn =
    1.0238
```

Cherchons maintenant à calculer $H(p)$:

```
[z,p,k]=buttap(n);
```

Cette fonction ne retourne malheureusement pas directement l'approximation souhaitée, mais plutôt l'approximation correspondant à une valeur unitaire de ε (c.-à.-d. à une valeur de A_p égale à 3dB, et à des pôles sur le cercle de rayon unité). On obtient facilement l'approximation recherchée en multipliant les pôles par $\sqrt[n]{1/\varepsilon}$:

```
eps=sqrt(10^(1/10)-1);
p=p*(1/eps)^(1/n);
D=poly(p);
N=D(n+1);
zplane([],D)
```

Le tracé des poles et zéros de la fonction de transfert obtenue par approximation de Butterworth correspond à la théorie (Fig. 3.13).

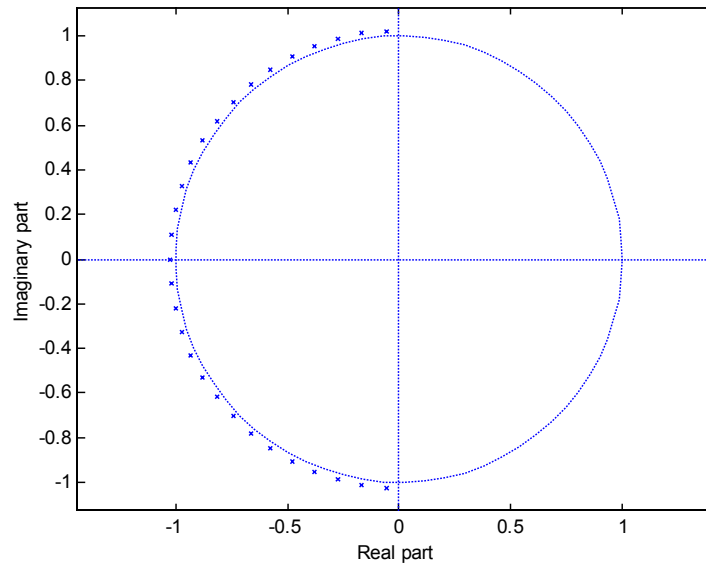


Fig. 3.13. Pôles et zéros de l'approximation de Butterworth d'un passe-bas normalisé.

On affiche la réponse en fréquence (Fig. 3.14).

```
freqs(N,D);
```

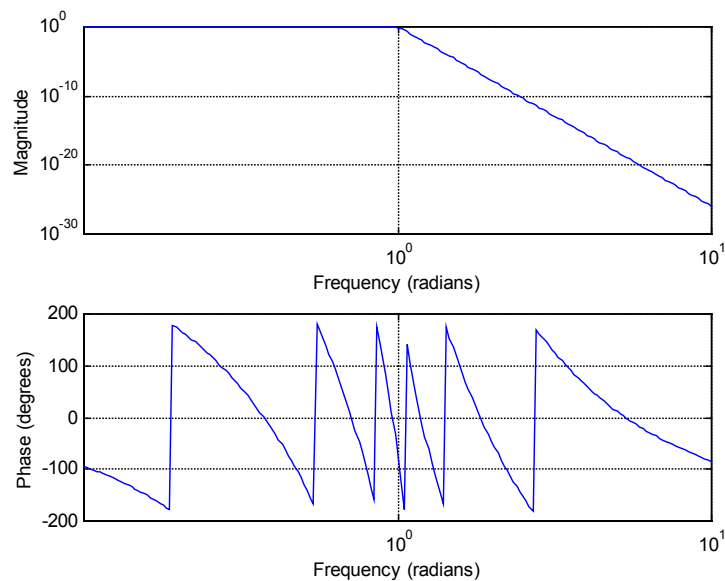


Fig. 3.14. Réponse en fréquence de l'approximation de Butterworth.

La phase est calculée modulo 2π , ce qui explique son allure cahotique. Il est également intéressant d'afficher le délai de groupe (Fig. 3.15).

```
[H,w]=freqs(N,D);
subplot(2,1,2);
semilogx(w(1:length(w)-1), -diff(unwrap(angle(H)))./diff(w));
xlabel('Frequency (radians)'); ylabel('Group delay (s)'); grid;
```

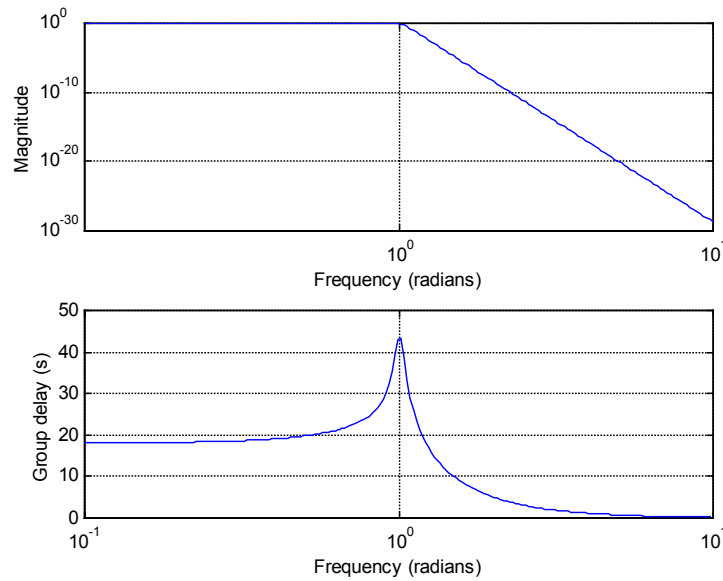


Fig. 3.15. Gain et délai de groupe de l'approximation de Butterworth d'un passe-bas normalisé.

3.2.2 L'approximation de Chebyshev

La courbe d'affaiblissement des filtres de Butterworth varie d'une façon monotone, ce qui implique que l'écart entre les spécifications et la courbe de gain dans la bande passante sera toujours minimal à la fréquence de coupure et maximal à l'origine. De même, cet écart est petit au droit de Ω_s , et plus grand partout ailleurs en bande atténuée. Bref, le filtre de Butterworth est trop bon presque partout, d'où son degré exagérément élevé.

Une approximation plus efficace, qui doit conduire à une diminution du degré pour les mêmes spécifications, consiste à répartir l'erreur de façon plus uniforme dans la bande passante, en choisissant :

$$K(j\Omega) = \varepsilon C_n(\Omega) \quad (3.22)$$

où $C_n(\Omega)$ serait un polynôme oscillant entre -1 et 1, de sorte que $|K(j\Omega)|^2$ oscillerait entre 0 et ε^2 (voir Fig. 3.16) et où n serait fixé de façon que (3.14) soit toujours vérifié.

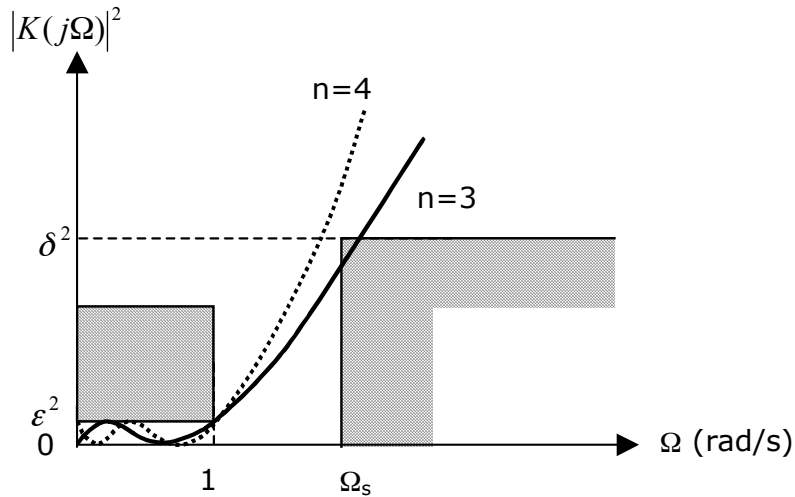


Fig. 3.16. Fonction caractéristique du filtre passe-bas de Chebyshev (type I)

Ces polynômes $C_n(\Omega)$ existent : ce sont les polynômes de Chebyshev. L'approximation qui y correspond est appelée *approximation de Chebyshev de type I* (directe). Elle possède des zéros de réflexion en bande passante, mais pas de zéros de transmission.

Rappel : les polynômes de Chebyshev

On appelle polynôme de *Chebyshev* d'ordre n le polynôme défini par :

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos[n(\arccos x)] & \text{pour } |x| \leq 1 \\ \cosh[n(\operatorname{arccosh} x)] & \text{pour } |x| > 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

Contrairement à ce qu'il y paraît de prime abord, ce sont bien des polynômes. On peut en effet montrer à l'aide de formules trigonométriques classiques que l'on a :

$$C_{n+1}(x) = 2x.C_n(x) - C_{n-1}(x) \quad (3.24)$$

avec $C_1(x) = x$ et $C_0(x) = 1$

Les polynômes de *Chebyshev* passent par les points caractéristiques suivants :

$$C_n(1) = \pm 1 \quad \text{et} \quad C_n(0) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \quad (3.25)$$

Pour $|x| \leq 1$, $C_n(x)$ oscille n fois entre 1 et -1 (ou, ce qui revient au même, $C_n(x)^2$ présente n extrema entre 0 et 1) tandis que pour $|x| > 1$, ces polynômes sont monotones croissants. La Fig. 3.17 représente l'allure de $C_n^2(x)$ pour différentes valeurs de n .

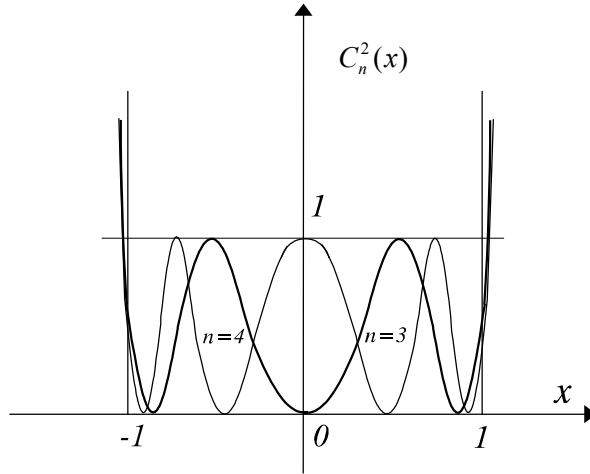


Fig. 3.17. Allure (du carré) des polynômes de Chebyshev.

La condition (3.14) devient alors :

$$\begin{aligned}
 |K(j\Omega_s)|^2 &= \delta^2 \\
 \varepsilon^2 \cosh^2(n \operatorname{arccosh} \Omega_s) &= \delta^2 \\
 n &= \frac{\operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}}}{\operatorname{arccosh} \Omega_s}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

ce qui donne finalement :

$$n = \left\lceil \frac{\operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{10^{A_m/10} - 1}{10^{A_m/10} - 1}}}{\operatorname{arccosh} \Omega_s} \right\rceil + 1 \tag{3.27}$$

où $[x]$ représente la partie entière de x , puisque le degré doit par définition être un entier, et $\operatorname{arccosh}$ peut être calculé par :

$$\operatorname{arccosh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \tag{3.28}$$

Le choix de (3.22) conduit à :

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\Omega)} \tag{3.29}$$

On en conclut (après remplacement de Ω par p/j) que $H(p)H(-p)$ ne possède pas de zéros, et que ses $2n$ pôles sont les racines de :

$$1 + \varepsilon^2 C_n^2(p/j) = 0 \tag{3.30}$$

On montre facilement que ceux-ci sont donc situés sur une ellipse :

$$p_k = \left[\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \cdot \sinh(v) \right] + j \left[\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \cdot \cosh(v) \right] \quad (k = 1, 2, \dots, 2n) \quad (3.31)$$

avec

$$v = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (3.32)$$

Enfin, comme pour l'approximation de Butterworth, il est intéressant de calculer le comportement asymptotique de la courbe de gain logarithmique. On montrera à titre d'exercice qu'il vaut :

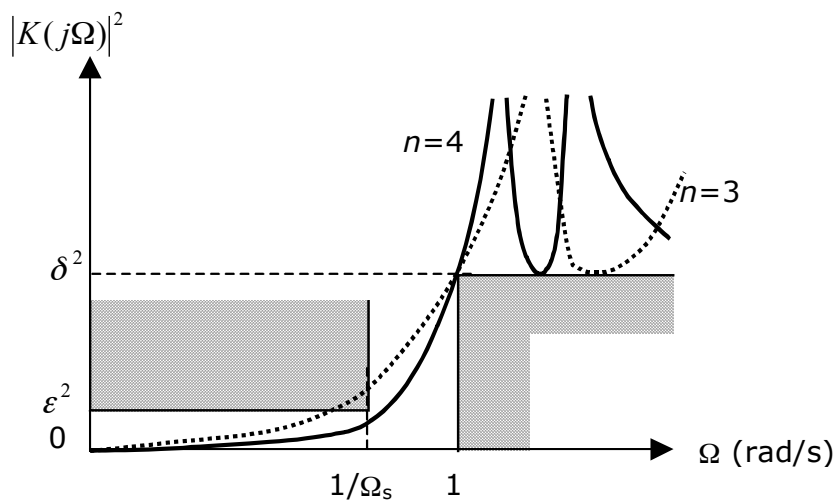
$$\begin{aligned} 20 \log |H(j\Omega)| \Big|_{\Omega \rightarrow \infty} &= 10 \log \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\Omega)} \right) \\ &\approx -10 \cdot \log \varepsilon^2 - 20n \cdot \log \Omega - 6,0206 \cdot (n-1) \end{aligned} \quad (3.33)$$

On en conclut que, à degré égal, un filtre de Chebyshev présente toujours une atténuation plus grande en bande atténuée qu'un filtre de Butterworth. Il est donc clair que pour respecter les mêmes spécifications un filtre de Chebyshev nécessitera toujours un degré inférieur ou égal à un filtre de Butterworth⁸.

On pourrait également répartir l'erreur de façon plus uniforme en bande atténuée, en inversant la formule précédente :

$$K(j\Omega) = \frac{\delta}{C_n(1/\Omega)} \quad (3.34)$$

C'est l'*approximation de Chebyshev de type II* (inverse; voir Fig. 3.18). Cette approximation force la courbe de gain à passer par (1 rad/s, - A_s dB). La courbe est donc ici normalisée par rapport au début de la bande atténuée.



⁸ En pratique, l'approximation de Butterworth n'est utilisée que lorsqu'il est fondamental d'avoir une courbe de gain très plate en bande passante. Son intérêt est donc plutôt didactique.

Fig. 3.18. Fonction caractéristique du filtre passe-bas de Chebyshev Inverse (type II)

On peut montrer que, pour des spécifications identiques, Chebyshev I et Chebyshev II sont de degrés identiques. Ils approximent donc aussi bien l'un que l'autre les spécifications en amplitude. Par contre, leurs réponses en phases sont très différentes. Les pôles de l'approximation de Chebyshev I ont des facteurs de qualité plus élevés, ce qui conduit à des délais de groupes moins constants en fréquence (voir l'exemple ci-dessous).

Exemple 3.7

Calculons les approximations de chebyshev I et II pour le filtre passe-bas normalisé de la Fig. 3.12.

Matlab fournit un degré 10. On vérifiera à titre d'exercice que la formule (3.27) donne le même degré. Le tracé des poles et zéros de la fonction de transfert est donné à la Fig. 3.13.

```
[n1,wn1]=cheblord(1,1.2,1,40,'s')
[z1,p1,k1]=cheblap(n1,1);
zplane(z1,p1)
[n2,wn2]=cheb2ord(1,1.2,1,40,'s')
[z2,p2,k2]=cheb2ap(n2,40);
%imposer omegas comme debut de bande atténuée
[N2,D2]=lp2lp(k2*poly(z2),poly(p2),1.2);9
figure(2)
zplane(N2,D2)
```

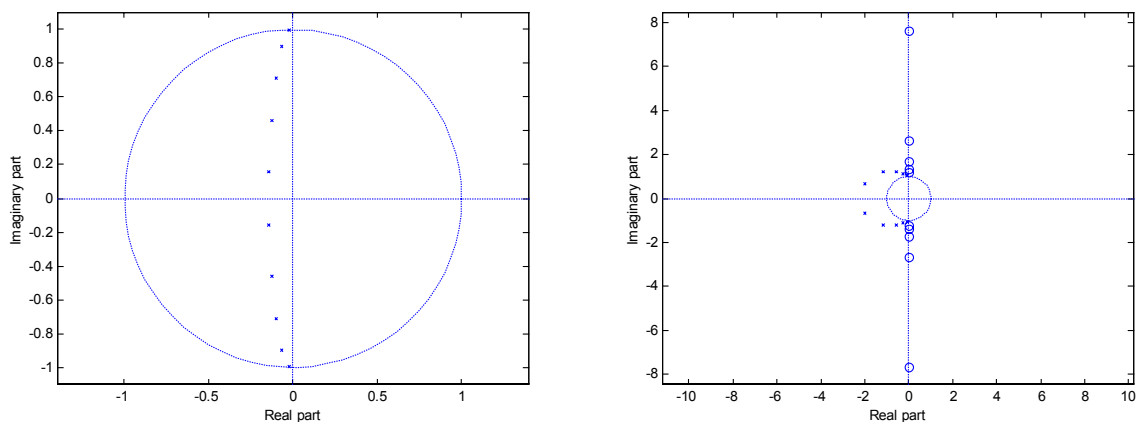


Fig. 3.19. Pôles et zéros de l'approximation de Chebyshev d'un passe-bas normalisé.
(gauche : Chebyshev I; droite : Chebyshev II)

On affiche la réponse en fréquence, en remplaçant la courbe de phase par celle de délai de groupe (Fig. 3.14).

```
N1=k1*poly(z1);
D1=poly(p1);
freqs(N1,D1);
[H1,w1]=freqs(N1,D1);
subplot(2,1,2);
```

⁹ Ceci constitue en fait une transformation de fréquence; nous verrons plus loin comment on la réalise.

```
semilogx (w1(1:length(w1)-1), -diff(unwrap(angle(H1)))./diff(w1));
xlabel('Frequency (radians)'); ylabel('Group delay (s)'); grid;
figure(2)
fregs(N2,D2);
[H2,w2]=fregs(N2,D2);
subplot(2,1,2);
semilogx (w2(1:length(w2)-1), -diff(unwrap(angle(H2)))./diff(w2));
xlabel('Frequency (radians)'); ylabel('Group delay (s)'); grid;
```

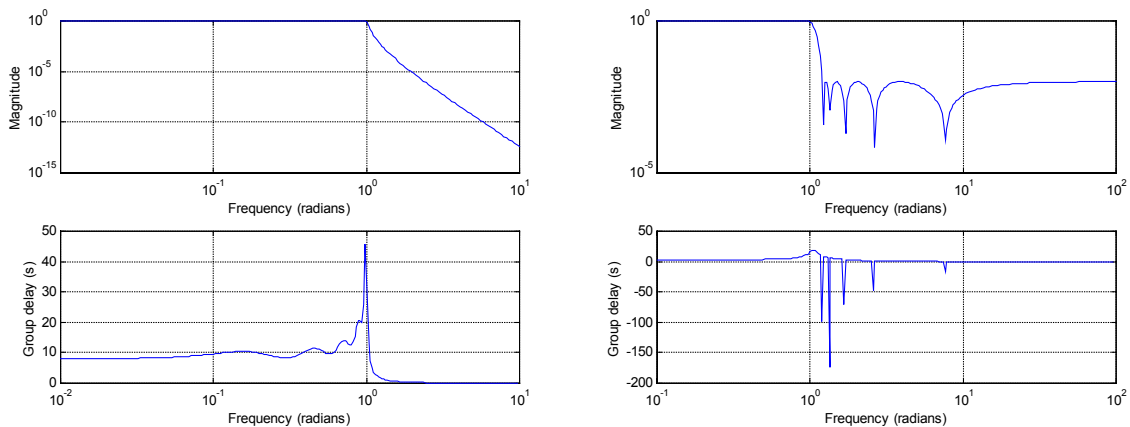


Fig. 3.20. Gain et délai de groupe de l'approximation de Chebyshev d'un passe-bas normalisé (gauche : Chebyshev I; droite : Chebyshev II).

On remarque bien une ondulation de la courbe de gain dans la bande passante pour Chebyshev I, au contraire de Chebyshev II. La courbe de délai de groupe de Chebyshev I ressemble assez à celle de Butterworth (à spécifications inchangées). Celle de Chebyshev II est beaucoup plus plate, si l'on fait abstraction des changements de signe brutaux de la phase dus à la présence de zéros sur l'axe imaginaire¹⁰. On la préférera donc à l'approximation de Chebyshev I pour les signaux sensibles à un décalage de phase non linéaire (signaux vidéo, signaux informatiques).

3.2.3 L'approximation de Cauer (ou *elliptique*)

Nous avons vu à la section précédente que l'approximation est meilleure si on parvient à répartir l'erreur d'approximation de façon plus égale dans la bande passante ou dans la bande atténuée. On doit donc pouvoir obtenir une approximation plus efficace encore en acceptant des ondulations de courbe de gain dans la bande passante *et* dans la bande atténuée. La fonction caractéristique correspondante doit donc être cette fois une fraction rationnelle, présentant des zéros de réflexion *et* de transmission :

$$K(j\Omega) = \varepsilon.R_n(\Omega) \quad (3.35)$$

¹⁰ Il est à remarquer que la courbe de délai de groupe pour Chebyshev II (et nous verrons que c'est également le cas pour l'approximation de Cauer) est ponctuée de pics aigus. Chaque fois que la courbe de gain passe par une fréquence correspondant à un zéro sur l'axe imaginaire, on obtient en effet un brusque changement de signe de la courbe de phase, et donc un pic de délai de groupe. Ces pics n'ont pas d'importance en pratique, puisqu'ils sont situés en bande atténuée, et n'influencent donc pas beaucoup les phases des composantes spectrales en sortie du filtre.

Une telle fraction rationnelle existe, et son calcul conduit à l'élaboration d'une théorie faisant intervenir les fonctions elliptiques, d'où le nom d'*approximation elliptique* (ou de Cauer, du nom de l'ingénieur qui l'a mise au point). L'allure de la fonction caractéristique correspond assez bien à une combinaison de l'allure d'une approximation de Chebyshev I en bande passante, et d'une approximation Chebyshev II en bande atténuée (Fig. 3.21). L'estimation des paramètres de cette fonction est cependant nettement plus complexe. On se sert aujourd'hui systématiquement d'outils logiciels pour l'obtenir.

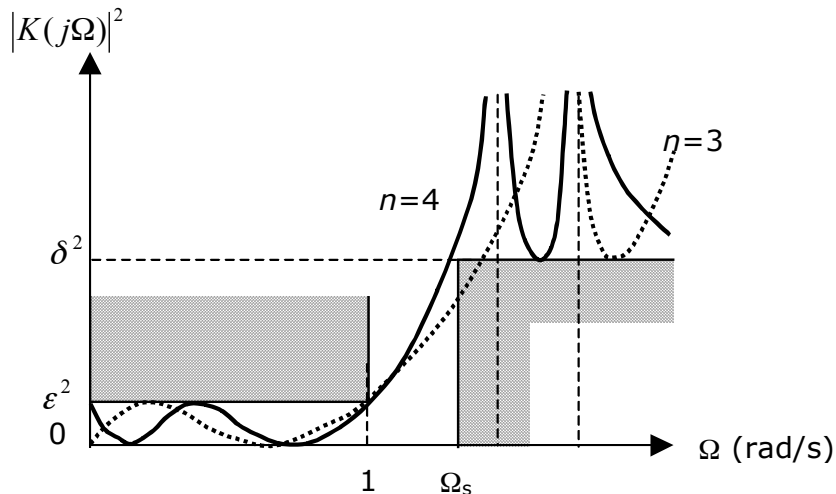


Fig. 3.21. Allure de la fonction caractéristique elliptique d'ordre 4

Exemple 3.8

Calculons l'approximation de Cauer pour le filtre passe-bas normalisé de la Fig. 3.12.

Matlab fournit un degré 5.

```
[n,wn]=ellipord(1,1.2,3,40,'s')
[z,p,k]=ellipap(n,3,40);
zplane(z,p)
```

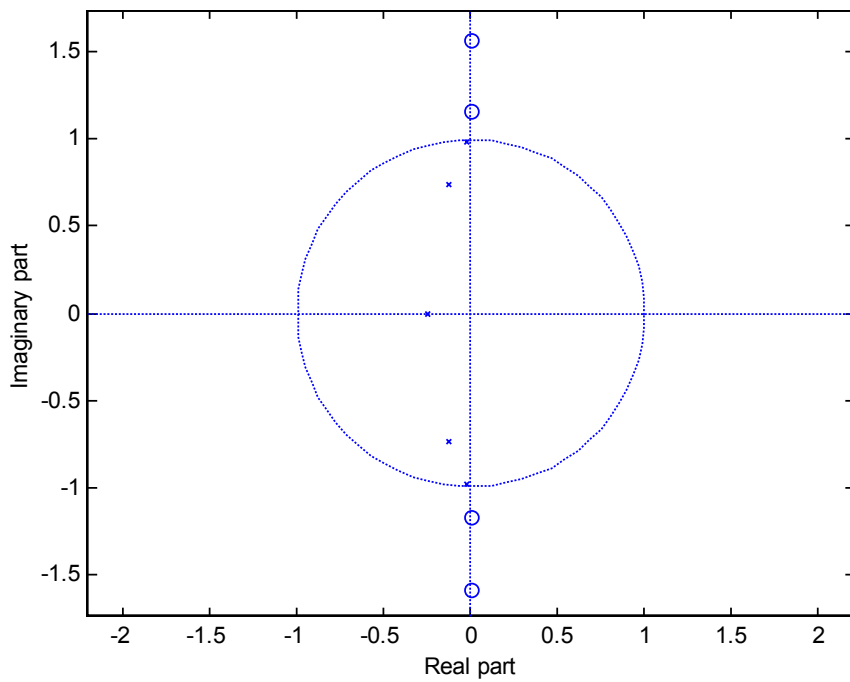


Fig. 3.22. Pôles et zéros de l'approximation de Cauer d'un passe-bas normalisé.

On affiche la réponse en fréquence, en remplaçant la courbe de phase par celle de délai de groupe (Fig. 3.14).

```
N= k*poly(z);
D= poly(p);
freqs(N,D);
[H,w]=freqs(N,D);
subplot(2,1,2);
semilogx (w(1:length(w)-1), -diff(unwrap(angle(H)))./diff(w));
xlabel('Frequency (radians)'); ylabel('Group delay (s)'); grid;
```

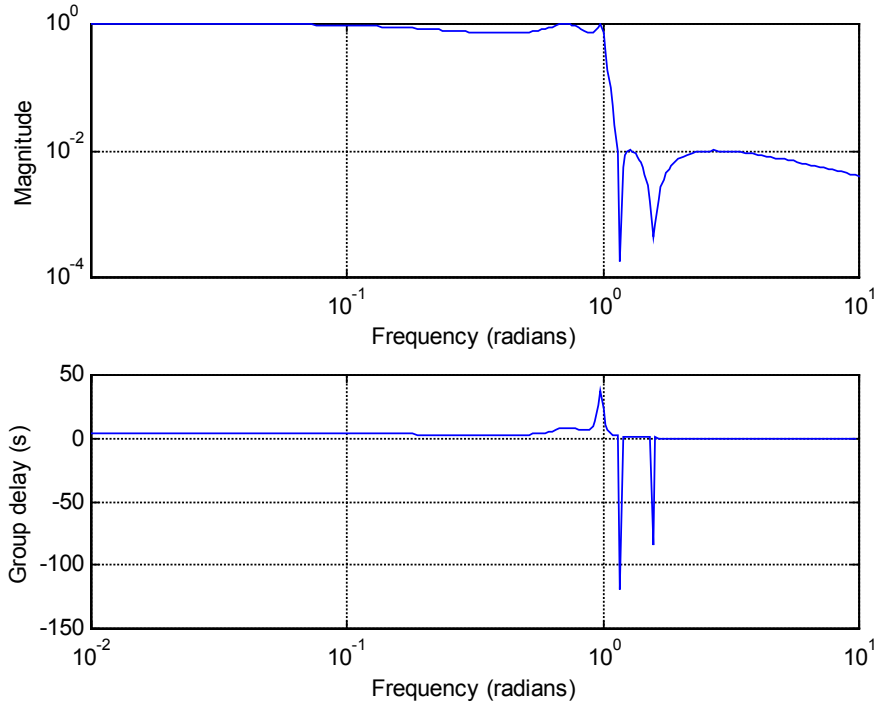


Fig. 3.23. Gain et délai de groupe de l'approximation de Cauer d'un passe-bas normalisé.

On remarque bien une ondulation de la courbe de gain dans la bande passante I et dans la bande atténuée. La courbe de délai de groupe est comparable à celle de Chebyshev II (à spécifications inchangées).

3.2.4 L'approximation de Bessel (ou de Thomson)

L'examen de l'évolution du délai de groupe des filtres décrits dans les sections précédentes montre que celui-ci est loin d'être linéaire, spécialement au voisinage de la fréquence de coupure du filtre passe-bas. L'approximation dite *de Bessel* vise à la mise au point d'un passe-bas normalisé dont le délai de groupe est maximalelement constant à l'origine. Son élaboration fait intervenir des polynômes de Bessel, d'où son nom (on l'appelle parfois aussi approximation *de Thomson*, du nom de l'ingénieur à qui elle est due).

Les filtres de Bessel sont des filtres polynomiaux (comme les filtres de Butterworth et de Chebyshev I : ils ne présentent que des pôles):

$$H(p) = \frac{b_0^n}{\sum_{i=0}^n b_i^n \cdot p^i}, \text{ où } b_i^n = \frac{(2n-1)!}{2^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)!} \quad (3.36)$$

On montrera en guise d'exercice que, lorsque n tend vers l'infini, on a bien :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(p) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot p^i} = e^{-p} \quad (3.37)$$

ce qui correspond bien au cas idéal d'un filtre à déphasage linéaire¹¹, comme exposé à la section 2.2.

Comme les filtres de Butterworth, les filtres de Bessel demandent des degrés importants pour vérifier des spécifications sur l'affaiblissement, ce qui les rend difficiles à utiliser (il vaut mieux utiliser un filtre de Caueur auquel on ajoute des cellules correctrices de phase). On n'a de plus qu'un seul degré de liberté (n) pour vérifier des spécifications qui portent à la fois sur le gain et sur le délai.

Exemple 3.9

Calculons l'approximation de Bessel pour un ordre allant de 3 à 10, et affichons les courbes de gain et de délai de groupe correspondantes (Fig. 3.24).

```
for j=3:10
[z,p,k]=besselap(j);
[H,w]=freqs(k,poly(p),logspace(-1,1));
subplot(2,1,1);
loglog(w,abs(H));
xlabel('Frequency (radians)'); ylabel('Magnitude'); grid;
hold on;
subplot(2,1,2);
semilogx(w(1:length(w)-1),-diff(unwrap(angle(H)))./diff(w));
xlabel('Frequency (radians)'); ylabel('Group delay (s)'); grid;
hold on;
end;
```

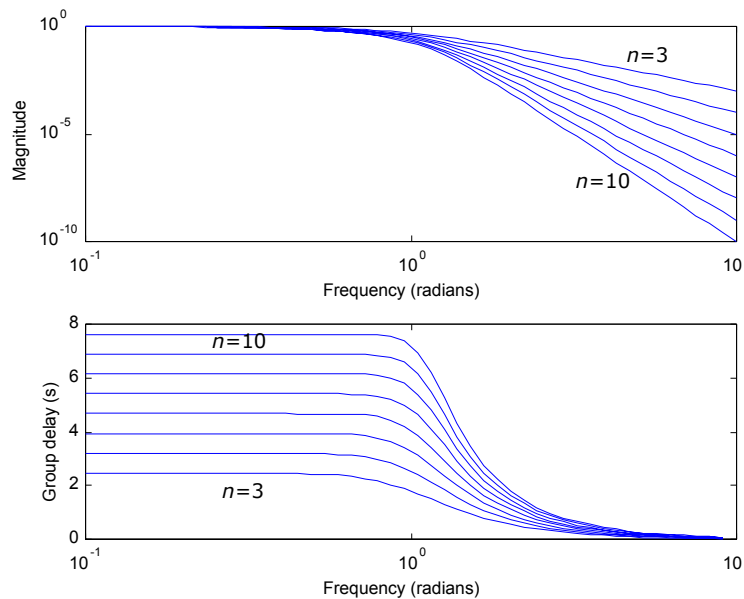


Fig. 3.24. Gain et délai de groupe de l'approximation de Bessel ($n= 3$ à 10).

Affichons les diagramme des pôles et zéros pour l'ordre 10 (Fig. 3.25)

¹¹ Dans ce cas-ci, il s'agit même d'un filtre à délai égal à 1 s. L'expression (3.36) est en effet donnée pour un passe-bas normalisé par rapport à l'inverse du délai de groupe, plutôt que par rapport à la fréquence de coupure.

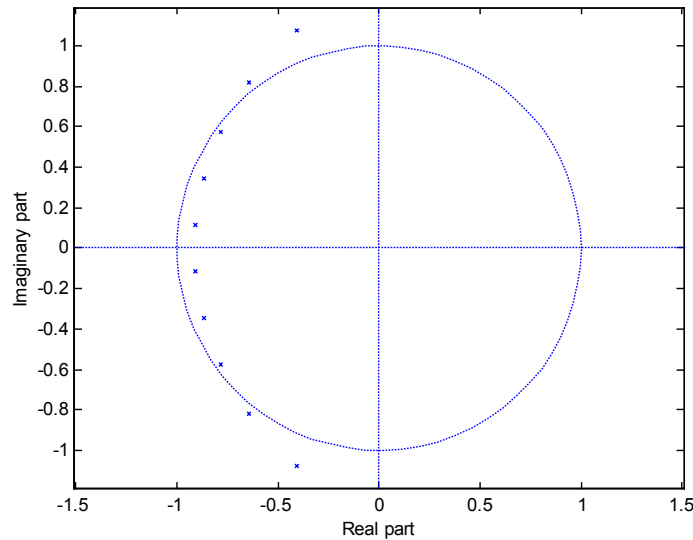


Fig. 3.25. Pôles et zéros de l'approximation de Bessel d'ordre 10.

3.3 Approximation analytique de filtres quelconques – transformations de fréquence

Les méthodes d'approximation analytique décrites précédemment s'appliquent au calcul de la fonction de transfert de filtres passe-bas normalisés. Elles conduisent à l'obtention de fonctions de transfert opérationnelles normalisées $H(P)$ ou isochrones normalisées $H(j\Omega)$.

L'approximation d'un filtre quelconque (ni normalisé, ni même passe-bas) de spécifications connues sur $H(j\omega)$ s'effectue en trois étapes :

1. Trouver une fonction associant à toute fréquence ω des spécifications réelles une fréquence Ω des spécifications du passe-bas normalisé :

$$\Omega = f(\omega) \quad (3.38)$$

et en déduire les spécifications du passe-bas normalisé.

2. Réaliser l'approximation de ce passe-bas normalisé : $H(P)$
3. Obtenir $H(p)$ en remplaçant P dans $H(P)$ par sa valeur tirée de (3.38) :

$$\frac{P}{j} = f\left(\frac{p}{j}\right) \quad (3.39)$$

Il est clair que, si on veut que $H(p)$ reste une fraction rationnelle, la transformation de fréquence $f()$ doit elle-même être une fraction rationnelle. Dans les sections qui suivent, nous passons en revue les transformations de fréquence nécessaires à l'approximation des passes-bas, passe-hauts, passe-bandes, et coupe-bandes non normalisés.

3.3.1 Passe-bas vers passe-bas

A partir des spécifications d'un filtre passe-bas quelconque, on désire trouver les spécifications d'un filtre normalisé passe-bas normalisé. La transformation consiste en (Fig. 3.26):

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (3.40)$$

c'est-à-dire :

$$P = \frac{p}{\omega_c} \quad (3.41)$$

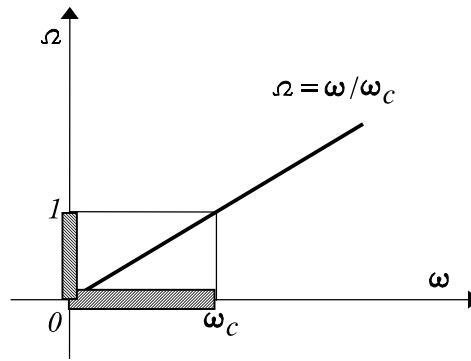


Fig. 3.26 Transformation passe-bas vers passe-bas
(les bandes passantes sont indiquées en hachuré)

On remarque qu'à la bande passante $(0, \omega_c)$ du filtre passe-bas de départ correspond par à la bande passante $(0, 1)$ du filtre normalisé, ce qui est le résultat recherché.

Cette transformation peut aussi servir à la *dénormalisation en fréquence* de n'importe quel filtre par rapport à la pulsation de référence ω_c . On remarque cependant en pratique (voir Exemple 3.10) que ce type de dénormalisation conduit le plus souvent à des valeurs très disparates pour les coefficients, ce qui provoque parfois des erreurs d'arrondi sur ordinateur. On préfère donc en général conserver une approximation normalisée en fréquence, en ne réalisant la dénormalisation qu'après avoir calculé les composants du filtre (voir 3.4).

3.3.2 Passe-bas vers passe-haut

La transformation est définie par (Fig. 3.27):

$$\Omega = -\frac{\omega_c}{\omega} \quad (3.42)$$

c'est-à-dire :

$$P = \frac{\omega_c}{p} \quad (3.43)^{12}$$

¹² Le choix de $\Omega = \frac{\omega_c}{\omega}$ aurait conduit à $P = -\frac{\omega_c}{p}$, ce qui aurait eu pour effet fâcheux de faire passer les pôles du passe-bas normalisé à gauche de l'axe imaginaire.

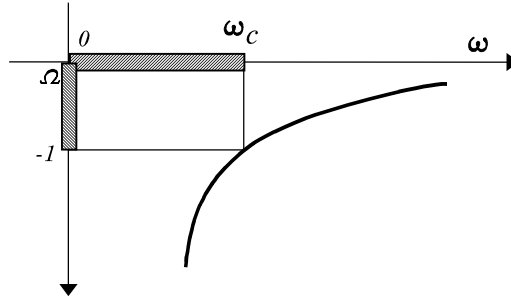


Fig. 3.27 Transformation passe-bas en passe-haut

On remarque que la bande passante du filtre passe-haut (ω_c, ∞) est transformée en la bande passante $(0, -1)$ du filtre normalisé¹³.

3.3.3 Passe-bas vers passe-bande

La transformation est définie par (Fig. 3.28):

$$\Omega = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{B \cdot \omega} \quad (3.44)$$

où B et ω_0 sont respectivement la largeur de bande et la fréquence centrale (moyenne géométrique des extrémités des bandes passantes, ou moyenne arithmétique sur un graphique logarithmique) du filtre :

$$\begin{aligned} B &= \omega_{c+} - \omega_{c-} \\ \omega_0^2 &= \omega_{c+} \cdot \omega_{c-} \end{aligned} \quad (3.45)$$

c'est-à-dire :

$$P = \frac{p^2 + \omega_0^2}{B \cdot p} \quad (3.46)$$

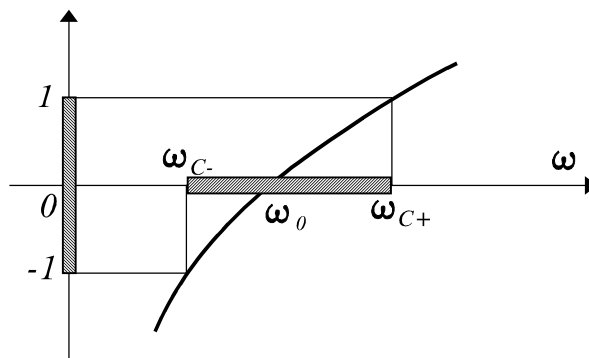


Fig. 3.28 Transformation passe-bas en passe-bande

¹³ La bande $(-\infty, -\omega_c)$ est par ailleurs transformée en la bande passante $(0, +1)$

On remarque que la bande passante $(\omega_{c-}, \omega_{c+})$ du filtre passe-bande est transformée en la bande $(-1, 1)$ du filtre normalisé à la condition que les relations (3.45) soient respectées. Ces relations ont en effet été obtenues à partir des équations suivantes:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\omega_{c+}^2 - \omega_0^2}{B \cdot \omega_{c+}} \\ -1 &= \frac{\omega_{c-}^2 - \omega_0^2}{B \cdot \omega_{c-}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

La transformation inverse en fréquence est déduite de (3.44) :

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B \cdot \Omega}{2}\right)^2} + \frac{B \cdot \Omega}{2} \\ \omega_- &= \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B \cdot \Omega}{2}\right)^2} - \frac{B \cdot \Omega}{2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

ce qui montre qu'à chaque valeur de Ω correspondent deux valeurs de ω et que l'on a toujours $\omega_{c+} \cdot \omega_{c-} = \omega_0^2$, c'est-à-dire que les caractéristiques des filtres passe-bande obtenus par transformation d'un filtre passe-bas normalisé sont en symétrie géométrique autour de ω_0 . On ne pourra donc qu'engendrer une catégorie très particulière de filtres passe-bande: ceux pour lesquels les spécifications des deux bandes atténuées sont quasi les mêmes et en symétrie géométrique. Il est clair que pour bon nombre de filtres passe-bande ne respectant pas ces conditions, d'autres méthodes (numériques, cette fois) de calcul de leur fonction de transfert conduiront à des filtres de degré plus faible donc plus économiques à réaliser.

Exemple 3.10

Calculons l'approximation de Chebyshev I d'un filtre passe-bande dont les spécifications sont données à la Fig. 3.31.

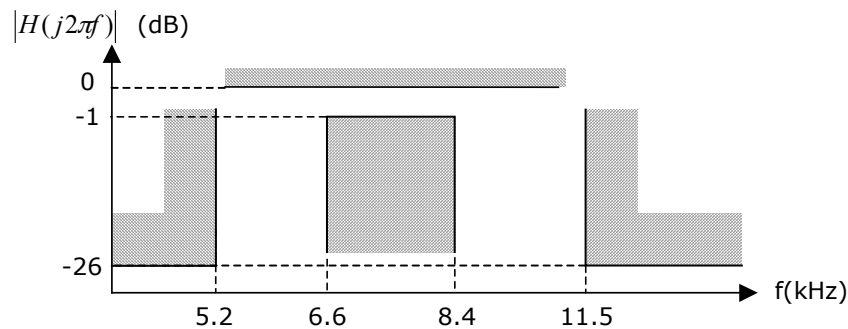


Fig. 3.29. Spécifications du filtre passe-bande.

On commence par appliquer la transformation de fréquence (3.44), ce qui conduit à (Fig. 3.30):

$$\omega_0 = 7446 \cdot 2 \cdot \pi \quad \Omega_{s-} = -3.03 \quad \Omega_{s+} = 3.71$$

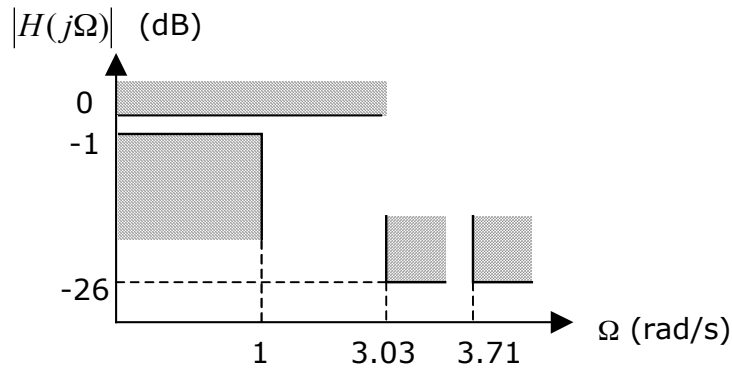


Fig. 3.30. Spécifications du passe-bas normalisé.

Les spécifications n'étant pas symétriques, on les rend symétriques en ne retenant que les spécifications les plus contraignantes en bande atténuée (3.03, -26dB) :

```
[n,wn]=cheblord(1,3.03,1,26,'s')
n=
    3
[z,p,k]=cheblap(n,1);
N=poly(z)*k
N =
    0.4913
D=poly(p)
D =
    1.0000    0.9883    1.2384 + 0.0000i    0.4913 - 0.0000i
```

Ce qui correspond (aux arrondis de calcul près : les coefficients doivent bien entendu être réels) à :

$$H_{LP}(P) = \frac{0.491}{P^3 + 0.988P^2 + 1.238P + 0.491}$$

Et l'application la transformation (3.46) transforme cette fraction rationnelle de degré 3 en une fraction rationnelle de degré 6 :

```
[N,D]=lp2bp(N,D,1,(8400-6600)*2*pi/sqrt(6600*2*pi*8400*2*pi))
N =
    0.0069    0.0000   -0.0000    0.0000
D =
    1.0000    0.2389    3.0724    0.4848    3.0724    0.2389    1.0000
```

$$H_{BP}(p) = \frac{0.00693p^3}{p^6 + 0.239p^5 + 3.0724p^4 + 0.485p^3 + 3.0724p^2 + 0.239p + 1}$$

Notons au passage que la dénormalisation n'a été effectuée que partiellement : on a gardé une valeur unitaire pour la fréquence centrale ω_0 . Si l'on impose ω_0 à sa vraie valeur, on trouve en effet des polynômes dont les coefficients auraient été très disparates, ce qui nuit à la précision des résultats:

```
N=
    1.0e+013 *
    0          0          0    1.98535055274046
    0          0          0
D =
    1.0e+028 *
```

```

0.000000000000000  0.000000000000000  0.000000000000000  0.000000000000002
0.00000000175628   0.00001624679370   1.04845278464242

```

La dénormalisation finale par rapport à ω_0 pourra se faire à la synthèse du circuit, en modifiant directement les valeurs des éléments utilisés.

Notons également que l'on aurait pu obtenir ce résultat plus rapidement sous Matlab :

```

[n,wn]=cheblord([6600 8400]/sqrt(6600*8400),[ 5200 11500]/sqrt(6600*8400),1,26,'s');
[N,D]=cheby1(n,1,wn,'s')
N =
      0      0      0  0.0069      0      0      0
D =
  1.0000  0.2389  3.0724  0.4848  3.0724  0.2389  1.0000

```

On peut vérifier que la fonction `cheby1` réalise bien en fait l'ensemble des opérations décrites plus haut (changement de fréquence, choix des spécifications qui couvrent toutes les autres, approximation, dénormalisation). L'utilisation de cette fonction est cependant limitée aux filtres simples : il est impossible de spécifier des atténuations différentes dans chacun des bandes atténuées.

La réponse en fréquence du filtre, et son diagramme pôles-zéros, sont données à la Fig. 3.31.

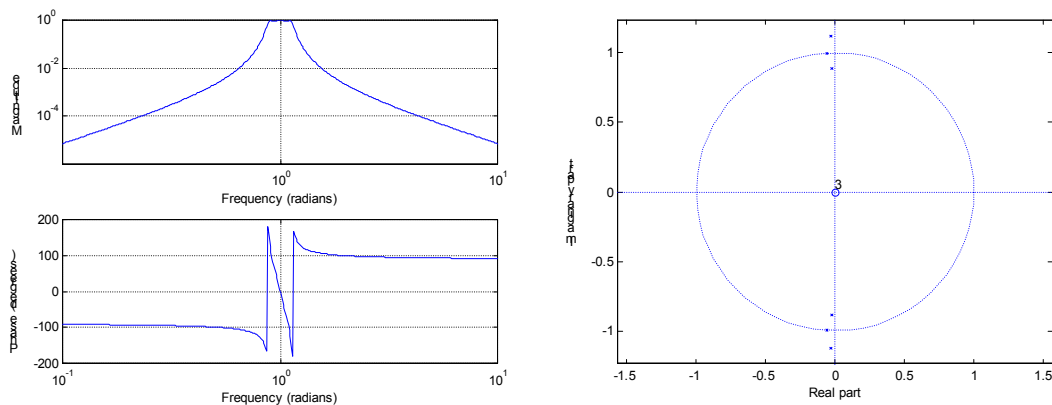


Fig. 3.31. Réponse en fréquence et diagramme pôles-zéros du filtre passe-bande, normalisé par rapport à ω_0 .

3.3.4 Passe-bas vers coupe-bande

La transformation est définie par (Fig. 3.32):

$$\Omega = \frac{B\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.49)$$

où B et ω_0 sont respectivement la largeur de bande et la fréquence centrale (moyenne géométrique des extrémités des bandes passantes, ou moyenne arithmétique sur un graphique logarithmique) du filtre :

$$\begin{aligned} B &= \omega_{c+} - \omega_{c-} \\ \omega_0^2 &= \omega_{c+} \cdot \omega_{c-} \end{aligned} \quad (3.50)$$

c'est-à-dire :

$$P = \frac{B \cdot p}{p^2 + \omega_0^2} \quad (3.51)$$

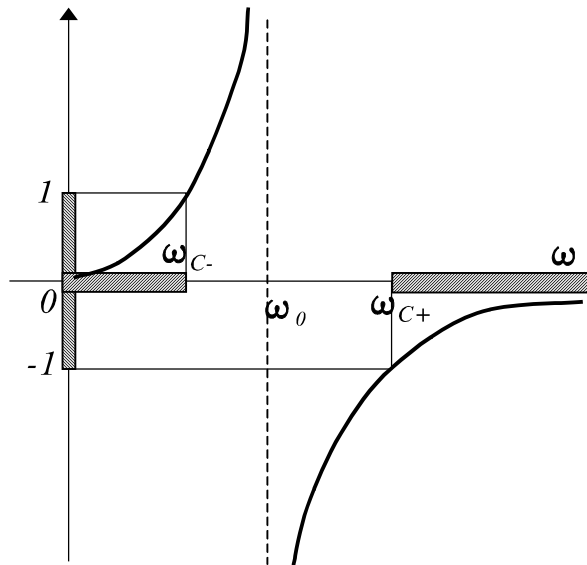


Fig. 3.32 Transformation passe-bas en coupe-bande

On voit que la transformation (3.49) transforme bien un filtre coupe-bande en filtre passe-bas normalisé à la condition que les relations (3.50) soient exactes et que le filtre coupe-bande présente une symétrie géométrique, entraînant les mêmes remarques que pour les filtres passe-bande.

3.4 Dénormalisation en fréquence et en impédance

En général, on mène les approximations sur des spécifications normalisées en fréquences, et on réalise la synthèse (chapitre 5) sur les approximations ainsi obtenues. Il est en effet très facile de dénormaliser un filtre en fréquence, lorsqu'on connaît ses composants : il suffit de diviser les capacités par la pulsation de normalisation (ω_c)¹⁴.

Dans le même ordre d'idées, on réalise en général la synthèse proprement dite en choisissant des valeurs normalisées pour certaines impédances (résistances de 1 Ohm, capacités de 1 Farad), et on dénormalise le niveau d'impédance général en dernier lieu. Il est en effet facile de montrer que la fonction de transfert d'un circuit électrique n'est pas modifiée lorsqu'on modifie toutes les impédances par une constante (multiplier les résistances et les inductances par R_0 , diviser les capacités par R_0).

Exercices

Exercice 3.1

¹⁴ Et si le circuit comportait des inductances, on diviserait de même leur valeur par la pulsation de normalisation.

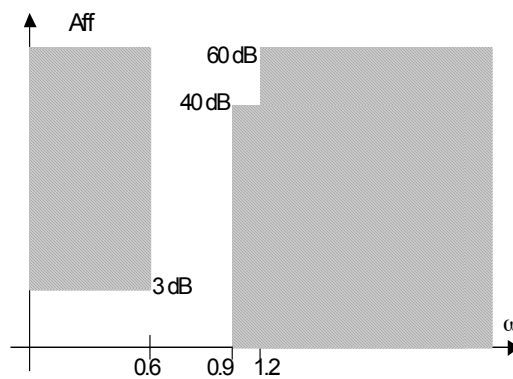
A l'aide d'un simple voltmètre, on cherche à mesurer, avec une précision de 1%, l'amplitude d'un signal sinusoïdal à 320 Hz dont l'amplitude est de l'ordre de 1 Volt. Ce signal est perturbé par un résidu du réseau à 50 Hz dont l'amplitude maximale est du même ordre de grandeur que celle du signal à mesurer. Concevoir la fonction coupe-bande du second degré qui permettra de faire la mesure.

Exercice 3.2

Dans une enceinte acoustique composée de 3 haut-parleurs (grave 20-100 Hz, medium 100-2000 Hz, aigu 2000-20000Hz), on cherche à n'envoyer à chaque haut-parleur que les composantes spectrales pour lesquelles il a été conçu. Concevoir les fonctions passe-bas, passe-bande, et passe-haut du second degré nécessaires.

Exercice 3.3

On cherche les degrés d'approximations de Butterworth, Chebyshev I et II, et Causer pour le filtre passe bas dont les spécifications en amplitude sont données à la figure suivante :



Solution

On peut décomposer ce type de spécifications en deux passe-bas élémentaires ($\Omega_s = 0.9/0.6 = 1.5$ et $A_s = 40$; $\Omega_s = 1.2/0.6 = 2$ et $A_s = 60$), sachant que la solution à retenir est bien entendu celle qui satisfait simultanément aux deux.

Pour les approximations de Butterworth et Chebyshev I, dont les courbes d'affaiblissement passent toutes exactement par le point (1,3dB) et sont d'autant plus croissantes au delà de la bande passante que le degré est grand, il est clair que la solution à retenir sera celle de degré le plus élevé :

```
[n,wn]=buttord(0.6,0.9,3,40,'s')15
n =
    12
[n,wn]=buttord(0.6,1.2,3,60,'s')
n =
    10
[n,wn]=cheb1ord(0.6,0.9,3,40,'s')
n =
     6
[n,wn]=cheb1ord(0.6,1.2,3,60,'s')
n =
     6
```

On garde donc respectivement un degré 12 et 6 pour Butterworth et Chebyshev I.

¹⁵ Matlab réalise automatiquement la normalisation en fréquence. On aurait donc obtenu le même résultat avec :

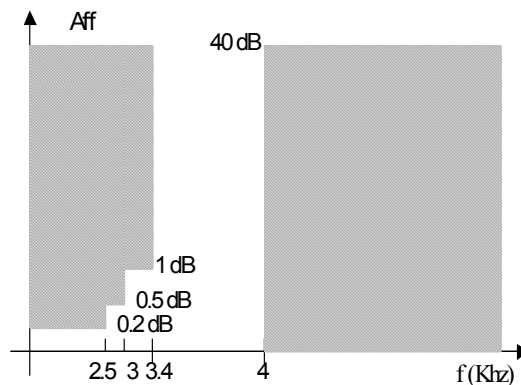
```
[n,wn]=buttord(0.6,0.9,3,40,'s')
```


Pour Chebyshev2 et Cauer, on doit imposer l'atténuation maximale présente dans les spécifications pour la bande atténuée, mais la fréquence à laquelle cette atténuation doit être satisfaite peut en principe être ajustée (par essais successifs, à l'aide d'un ordinateur) quelque part entre 0.9 et 1.2. On choisit en général le cas extrême ($\Omega_s = 1.5$ et $A_m=60$) :

```
[n,wn]=cheb2ord(0.6,1.2,3,60,'s')
n =
    6
[n,wn]=ellipord(0.6,1.2,3,60,'s')
n =
    5
```

Exercice 3.4

On cherche les degrés de approximations de Butterworth, Chebyshev I et II, et Cauer pour le filtre passe bas dont les spécifications en amplitude sont données à la figure suivante :



Solution

On peut décomposer ce type de spécifications en trois passe-bas élémentaires (0-2500 à 0.2dB et 4000-Inf à 40dB; 0-3000 à 0.5dB et 4000-Inf à 40dB; 0-3400 à 1dB et 4000-Inf à 40dB), sachant que la solution à retenir est celle qui satisfait simultanément aux deux.

Pour l'approximation de Butterworth, il n'est pas évident a priori de trouver lequel des trois ensembles de spécifications conduit à une courbe d'affaiblissement qui couvre les deux autres. On peut donc les tester un à un et vérifier :

```
[n,wn]=buttord(2500,4000,0.2,40,'s')16
n=
    14
[z,p,k]=buttap(n);
eps=sqrt(10^(0.2/10)-1);
p=p*(1/eps)^(1/n);
D=poly(p);
N=D(n+1);
aff=20*log10(abs(freqls(N,D,[3000/2500 3400/2500])))
aff =
    -9.4294   -24.1405
[n,wn]=buttord(3000,4000,0.5,40,'s')
n =
    20
```

¹⁶ En toute rigueur, on devrait fournir des valeurs de pulsation, et non de fréquences, en entrée de la fonction de calcul du degré. Ca n'a pas d'importance ici, dans la mesure où le degré d'un filtre n'est fonction que des rapports de fréquence (c'est d'ailleurs ce qui permet le passage par un filtre normalisé en fréquence).

```

[z,p,k]=buttapp(n);
eps=sqrt(10^(0.2/10)-1);
p=p*(1/eps)^(1/n);
D=poly(p);
N=D(n+1);
aff=20*log10(abs(freqs(N,D,[2500/3000 3400/3000])))
    aff =
        -0.0001    -9.0527
[n,wn]=buttord(3400,4000,1,40,'s')
    n =
        33
[z,p,k]=buttapp(n);
eps=sqrt(10^(0.2/10)-1);
p=p*(1/eps)^(1/n);
D=poly(p);
N=D(n+1);
aff=20*log10(abs(freqs(N,D,[2500/3400 3000/3400])))
    aff =
        1.0e-004 *
        -0.0000    -0.5290

```

On retient donc un degré 33 pour Butterworth. Notons en passant que le calcul sur les spécifications extrêmes (0-3400 à 0.2dB et 4000-Inf à 40dB) fournit un ordre 38.

Pour l'approximation de Chebyshev I et de Cauer, on doit imposer une atténuation minimale en bande passante (0.2dB), mais on peut chercher à optimiser numériquement la position optimale de la fréquence de coupure à imposer. On adopte en général les spécifications extrêmes (0-3400 à 0.2dB et 4000-Inf à 40dB) :

```

cheb1ord(3400,4000,0.2,40,'s')
    n =
        12
ellipord(3400,4000,0.2,40,'s')
    n =
        6

```

Pour Chebyshev II, dont les courbes d'affaiblissement passent toutes exactement par le point (4000Hz, 40dB) et prennent des valeurs d'autant plus faibles en bande passante que le degré est grand, il est clair que la solution à retenir sera celle de degré le plus élevé:

```

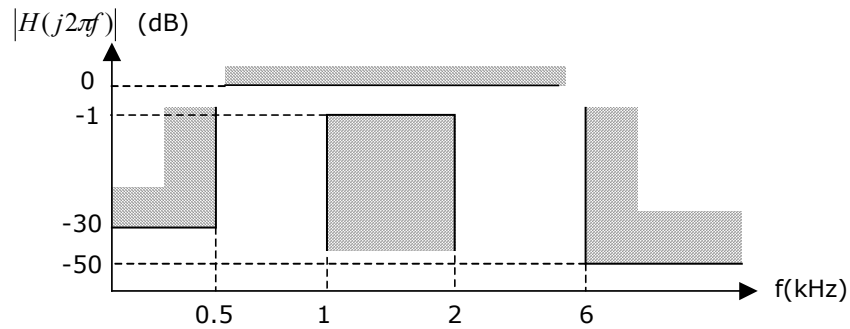
[n,wn]=cheb2ord(2500,4000,0.2,40,'s')
    n=
        7
[n,wn]=cheb2ord(3000,4000,0.5,40,'s')
    n =
        8
[n,wn]=cheb2ord(3400,4000,1,40,'s')
    n =
        8

```

On retient donc un degré 8 pour Chebyshev II.

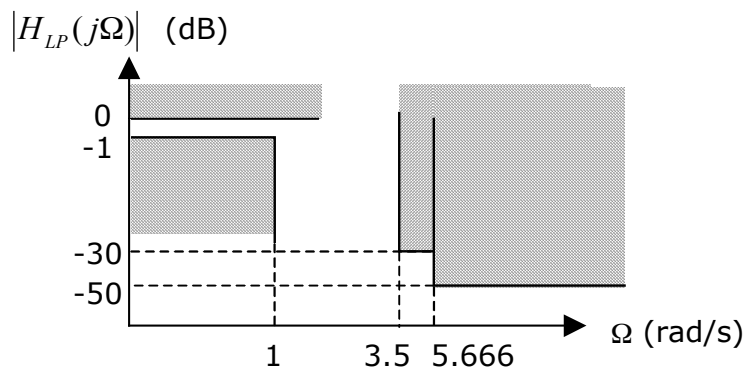
Exercice 3.5

On désire calculer, pour quatre types d'approximation (Butterworth, Chebyshev I, Chebyshev II, et Cauer), et en passant explicitement par un changement de fréquence vers un filtre passe-bas normalisé, la fonction de transfert d'un filtre passe-bande dont les spécifications sont données à la figure suivante :



Solution

La transformation du passe-bande en passe-bas normalisé conduit aux spécifications suivantes :



a. Butterworth

Le gain logarithmique étant d'autant plus faible dans la bande atténuée que le degré est élevé, le degré du filtre sera imposé par les spécifications les plus contraignantes entre les deux points de cassures potentiels : -30 dB à 3.5 et -50 dB à 5.666. On trouve dans le premier cas :

```
[n,wn]=buttord(1,3.5,1,30,'s')
n =
    4
```

```
[n,wn]=buttord(1,5.666,1,50,'s')
n =
    4
```

ou, de façon plus explicite :

$$n = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{10^3 - 1}{10^{0.1} - 1}\right)}{2 \cdot \log(3.5)} \right\rceil + 1 = [3,296] + 1 = 4$$

$$n = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{10^5 - 1}{10^{0.1} - 1}\right)}{2 \cdot \log(5.666)} \right\rceil + 1 = [3,708] + 1 = 4$$

On retient donc la valeur $n=4$.

```
[z,p,k]=buttap(n);
eps=sqrt(10^(1/10)-1);
```

```
p=p*(1/eps)^(1/n);
D=poly(p);
N=D(n+1);
```

On peut facilement calculer (sous Matlab ou à la machine) que l'affaiblissement obtenu dans la bande atténuée est de 37.66 dB en $\Omega = 3,5$ et de 54.39 dB en $\Omega = 5,666$:

```
20*log10(abs(freqs(N,D,[3.5 5.666])))
ans =
    -37.6579    -54.3939
```

On procède ensuite au changement de fréquence, mais on maintient une valeur normalisée pour la fréquence centrale du filtre (la dénormalisation finale sera faite à la synthèse proprement dite) :

```
[Nbut,Dbut]=lp2bp(N,D,1,1000*2*pi/sqrt(2000*2*pi*1000*2*pi))
Nbut =
    0.4913    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
Dbut =
    1.0000    2.1878    6.3931    8.0967    11.2776    8.0967    6.3931
    2.1878    1.0000
```

b. Chebyshev I

Par un raisonnement semblable à celui qui a été tenu pour le filtre de Butterworth :

```
[n,wn]=cheblord(1,3.5,1,30,'s')
n =
     3
[n,wn]=cheblord(1,5.666,1,50,'s')
n =
     3
```

ou, de façon plus explicite :

$$n = \left\lceil \frac{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\frac{10^3 - 1}{10^{0,1} - 1}}\right)}{\operatorname{arccosh}(3,5)} \right\rceil + 1 = [2,505] + 1 = 3$$

$$n = \left\lceil \frac{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\frac{10^5 - 1}{10^{0,1} - 1}}\right)}{\operatorname{arccosh}(5,666)} \right\rceil + 1 = [2,944] + 1 = 3$$

```
[z,p,k]=cheblap(n,1);
N=k*poly(z);
D=poly(p);
```

L'affaiblissement réalisé vaut 38,27 dB en $\Omega = 3,5$ et 51,17 dB en $\Omega = 5,666$.

```
20*log10(abs(freqs(N,D,[3.5 5.666])))
ans =
    -38.2689    -51.1642
```

et finalement :

```
[Ncheb1,Dcheb1]=lp2bp(N,D,1,1000*2*pi/sqrt(2000*2*pi*1000*2*pi))
Ncheb1 =
    0.1737    0.0000 - 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
Dcheb1 =
```

```

1.0000          0.6989 + 0.0000i    3.6192 + 0.0000i    1.5714 + 0.0000i
3.6192 + 0.0000i    0.6989 + 0.0000i    1.0000 - 0.0000i

```

c. Chebyshev II

On considère les spécifications les plus contraignantes (50dB en 3.5) :

```

[n,wn]=cheb2ord(1,3.5,1,50,'s')
n=
    4

```

```

[z,p,k]=cheb2ap(n,50);
N=k*poly(z);
D=poly(p);
[N,D]=lp2lp(N,D,3.5);17

```

L'affaiblissement réalisé $\Omega = 3,5$ et en $\Omega = 5,666$ vaut :

```

20*log10(abs(freqs(N,D,[3.5 5.666])))
ans =
   -50.0000   -51.0336
[Ncheb2,Dcheb2]=lp2bp(N,D,1,1000*2*pi/ sqrt(2000*2*pi*1000*2*pi))
Ncheb2 =
    0.0032          0.0000 + 0.0000i    0.1676 - 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
    1.2780 - 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.1676 - 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
    0.0032 - 0.0000i
Dcheb2 =
    1.0000          2.5382 + 0.0000i    7.2218 + 0.0000i    10.0275 + 0.0000i
   13.3928 + 0.0000i    10.0275 + 0.0000i    7.2218 + 0.0000i    2.5382 + 0.0000i
    1.0+ 0.0000i

```

d. Cauer

On considère les spécifications les plus contraignantes (50dB en 3.5) :

```

[n,wn]=ellipord(1,3.5,1,50,'s')
n=
    3

```

```

[z,p,k]=ellipap(n,1,50);
N= k*poly(z);
D= poly(p);

```

L'affaiblissement réalisé $\Omega = 3,5$ et en $\Omega = 5,666$ vaut :

```

20*log10(abs(freqs(N,D,[3.5 5.666])))
ans =
   -50.9526   -50.6055
[Nel,Del]=lp2bp(N,D,1,1000*2*pi/ sqrt(2000*2*pi*1000*2*pi))
Nel =
    0.0227    0.0000    0.2249    0.0000    0.0227    0.0000
Del =
    1.0000    0.6953    3.6205    1.5701    3.6205    0.6953    1.0000

```

Nous pouvons maintenant nous permettre d'afficher les réponses en fréquences de ces filtres :

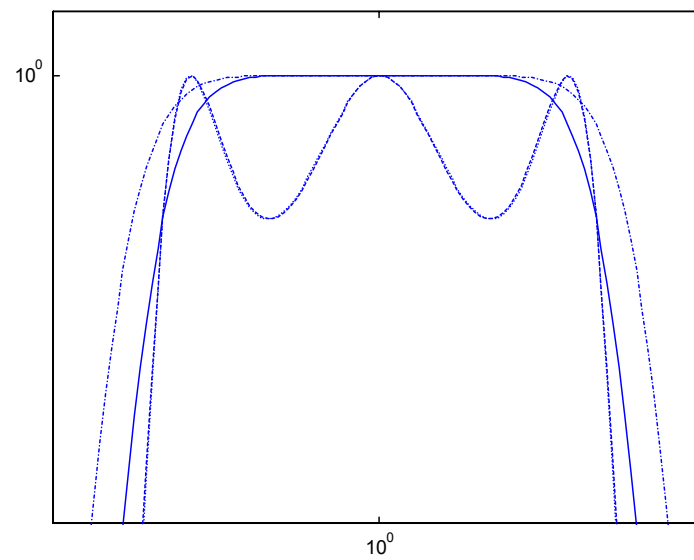
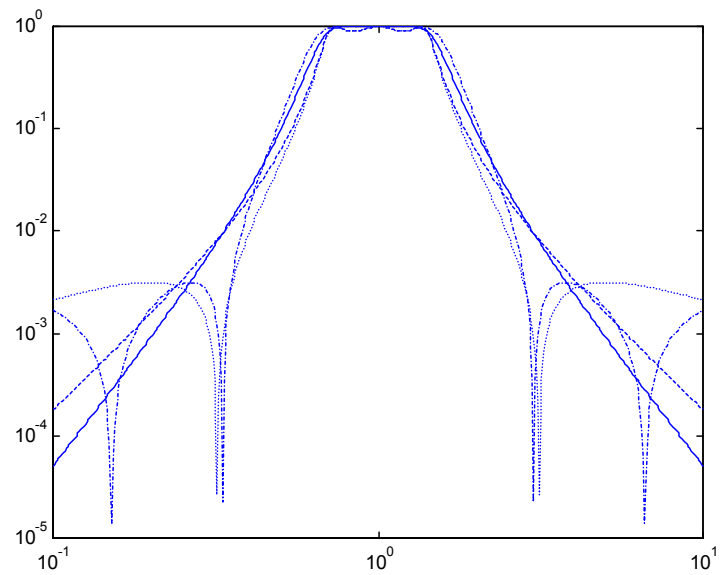
```

[H,w]=freqs(Nbut,Dbut,logspace(-1,1,500));
loglog(w,abs(H));
hold on;

```

¹⁷ Ceci constitue en fait une transformation de fréquence; nous verrons plus loin comment on la réalise.

```
[H,w]=freqs(Ncheb1,Dcheb1,logspace(-1,1,500));
loglog(w,abs(H),'--');
[H,w]=freqs(Ncheb2,Dcheb2,logspace(-1,1,500));
loglog(w,abs(H),'-.'');
[H,w]=freqs(Nel,Del,logspace(-1,1,500));
loglog(w,abs(H),' ':'');
```



CHAPITRE 4

SENSIBILITE

Nous verrons au chapitre suivant comment on réalise en pratique des circuits électriques (LC : inductances et capacités) et électroniques (RCAO : résistances, capacités, et amplis ops) qui possèdent une transmittance donnée. Avant d'aborder ce problème, il nous fait cependant étudier la *sensibilité* de tels circuits à leurs composants (R, C, AO).

Les composants sont affectés d'imprécisions et d'effets parasites qui déforment leurs caractéristiques. Les imperfections les plus importantes sont:

- Les valeurs des résistances et des capacités différentes des valeurs nominale. Ces valeurs nominale sont en effets garanties par les constructeurs avec une tolérance qui peut aller jusque 20%.
- Le gain fini des amplificateurs opérationnels, et dépendant de la fréquence;
- La dépendance des éléments passifs et des amplificateurs opérationnels à la température et le vieillissement.
- On pourrait ajouter certains facteurs comme les capacités parasites, les variations d'impédances d'entrée et de sortie des amplificateurs opérationnels, mais leur influence sur le comportement des filtres est mineure.

L'étude de la sensibilité d'un circuit à ces variations conditionne le choix des structures que nous retiendrons pour la synthèse.

4.1 Définition

Soit une fonction f (gain logarithmique, facteur de qualité, position d'un pôle, d'un zéro, etc.) d'un ensemble de paramètres x_1, x_2, \dots, x_k (valeurs des résistances, capacités, gains des amplis ops, fréquence, etc.); on la note donc $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Imaginons qu'on modifie légèrement les valeurs des paramètres x_1, x_2, \dots, x_k autour d'une valeur de départ $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0$. Il est clair qu'on peut toujours écrire, *au premier ordre*, que la variation (absolue) de f est une combinaison linéaire des variations élémentaires des paramètres :

$$\Delta f \approx \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_i^0} \Delta x_i \quad (4.1)$$

On en déduit que la *variation relative* de f (c.-à-d. la variation de f rapportée à sa valeur initiale f_0) est elle même une combinaison linéaire des variations relatives des paramètres :

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{x_i^0} \Delta x_i = \sum_i \left[\frac{x_i}{f} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{x_i^0} \frac{\Delta x_i}{x_i^0} \quad (4.2)$$

Les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelés *sensibilités* de P par rapport à chacun des x_1, x_2, \dots, x_k :

$$S_{x_i}^f = \left[\frac{x_i}{f} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{x_i^0} \quad (4.3)$$

La sensibilité n'est donc rien d'autre que l'expression mathématique de réponse à la question suivante : "si on modifie tel paramètre de $n\%$, de combien de $\%$ (m) la grandeur f varie-t-elle ?". Le rapport m/n est la sensibilité de f par rapport à ce paramètre.

Il est fondamental à ce stade de bien comprendre également que la sensibilité $S_{x_i}^f$ est fonction du point de repos x_i^0 . Ainsi, si on considère par exemple une grandeur $f(R, \omega)$ fonction de la valeur d'une résistance et de la fréquence, il est clair que S_R^f est une fonction de la fréquence. On la notera donc plutôt $S_R^f(\omega)$.

Exemple 4.1

Calculons la sensibilité d'un polynôme $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ par rapport à un de ses coefficients a_i :

$$S_{a_i}^p = \frac{a_i}{p(x)} \frac{\partial p(x)}{\partial a_i} = \frac{a_i x^i}{p(x)} \quad (4.4)$$

Il est clair que cette sensibilité est fonction de x , et tend vers l'infini au droit de tous les zéros du polynôme. On résume souvent cette constatation en disant qu'un polynôme est très sensible à une variation de ses coefficients.

De la même façon, les sensibilités d'une fraction rationnelle :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

par rapport à un de ses coefficients a_i ou b_i est donnée par :

$$S_{a_i}^{H(p)} = \frac{a_i}{H(p)} \frac{\partial H(p)}{\partial a_i} = - \frac{a_i p^i}{D(p)} \quad \text{et} \quad S_{b_i}^{H(p)} = \frac{b_i}{H(p)} \frac{\partial H(p)}{\partial b_i} = \frac{b_i p^i}{N(p)} \quad (4.5)$$

Ces sensibilités sont elles aussi fonction de p , et tendent vers l'infini au droit de tous les zéros ou pôles du polynôme.

4.2 Propriétés

On vérifiera à titre d'exercice les propriétés suivantes (où k est une constante et où f et g sont deux fonctions de x) :

$$S_x^{kf} = S_x^f \quad (4.6)$$

$$S_x^{1/f} = -S_x^f \quad (4.7)$$

$$S_x^{f^n} = n S_x^f \quad (4.8)$$

$$S_x^{fg} = S_x^f + S_x^g \quad (4.9)$$

$$S_x^{f(g)} = S_x^f S_x^g \quad (4.10)$$

$$S_x^{k+f} = \frac{f}{k+f} S_x^f \quad (4.11)$$

4.3 Sensibilité d'une section du second degré à ses composants

Considérons une fonction de transfert générale du second degré :

$$H(p) = K \cdot \frac{p^2 + (\omega_z / Q_z) \cdot p + \omega_z^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2} \quad (4.12)$$

où ω_p et Q_p sont respectivement la pulsation de cassure et le facteur de qualité des pôles de la cellule du second degré.

Nous nous intéresserons ici à la sensibilité de $|H(j\omega)|$ par rapport aux paramètres de l'équation (4.12) et, en particulier, à sa sensibilité *dans sa bande passante*, ce qui revient à ne considérer que les sensibilités par rapport aux pôles, puisque nous avons vu qu'au chapitre 3 que les caractéristiques de la bande passante dépendent essentiellement de leur position (la position des zéros influant essentiellement sur l'allure de la bande atténuée).

Si x représente la valeur d'un composant quelconque du circuit implémentant (4.12), on peut toujours écrire (pour les sensibilités en bande passante) :

$$S_x^{|H|} \approx S_x^K + S_{\omega_p}^{|H|} S_x^{\omega_p} + S_{Q_p}^{|H|} S_x^{Q_p} \quad (4.13)$$

Calculons l'expression des sensibilités apparaissant dans (4.13) :

$$S_{\omega_p}^{|H|} = \frac{1}{2} S_{\omega_p}^{|H|^2}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{|N(j\omega)|^2}{|D(j\omega)|^2} = \frac{|N(j\omega)|^2}{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + (\omega \cdot \frac{\omega_p}{Q_p})^2} \quad (4.14)$$

$$S_{\omega_p}^{|H|} = -\frac{1}{2} S_{\omega_p}^{|D|^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial |D(j\omega)|^2}{\partial \omega_p} \frac{\omega_p}{|D(j\omega)|^2} \quad (4.15)$$

$$S_{\omega_p}^{|H|} = \frac{2(\omega_p^2 - \omega^2) + (\omega \cdot \frac{\omega_p}{Q_p})^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\omega \cdot \frac{\omega_p}{Q_p})^2} \quad (4.16)$$

On trouve de même, par un calcul analogue :

$$S_{Q_p}^{|H|} = \frac{(\omega \cdot \frac{\omega_p}{Q_p})^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\omega \cdot \frac{\omega_p}{Q_p})^2} \quad (4.17)$$

Si on calcule ces sensibilités dans un domaine entourant ω_p , on obtient facilement les valeurs maximales suivantes :

$$\max(S_{Q_p}^{|H|})=1 \quad \text{en } \omega = \omega_p \quad (4.18)$$

$$\max(S_{\omega_p}^{|H|}) \approx \frac{Q_p}{1 + \frac{1}{Q_p}} \quad \text{en } \omega \approx \omega_p \left(1 + \frac{1}{2Q_p}\right) \quad (\text{quand } Q_p \text{ est grand}) \quad (4.19)$$

$$\min(S_{\omega_p}^{|H|}) \approx -\frac{Q_p}{1 - \frac{1}{Q_p}} \quad \text{en } \omega \approx \omega_p \left(1 - \frac{1}{2Q_p}\right) \quad (\text{quand } Q_p \text{ est grand}) \quad (4.20)$$

Les courbes correspondantes sont présentées aux Fig. 4.1 et Fig. 4.2. On y observe que les sensibilités sont toujours maximales au droit des fréquences de cassure. Il est également important de constater que les échelles respectives de ces figures sont très différentes : la sensibilité de $|H(j\omega)|$ à ω_p (c.-à-d. par rapport au module des pôles) est de l'ordre de Q_p fois supérieure à la sensibilité de $|H(j\omega)|$ à Q_p (c.-à-d. par rapport à la position angulaire des pôles)! Cette conclusion est d'autant plus importante que, pour les filtres sélectifs, les facteurs de qualité prennent des valeurs importantes.

Cette dernière remarque est par ailleurs totalement indépendante des circuits qui seront utilisés en pratique pour implémenter une cellule du second degré. Il s'ensuit, selon (4.13) que, si on veut que la variations de $|H(j\omega)|$ par rapport aux éléments d'un circuit implémentant une cellule du second degré ne soit pas influencée de façon prépondérante par la sensibilité de $|H(j\omega)|$ par rapport à ω_p , *il convient si possible de choisir des structures dont la fréquence de cassure présente une faible sensibilité par rapport aux éléments.*

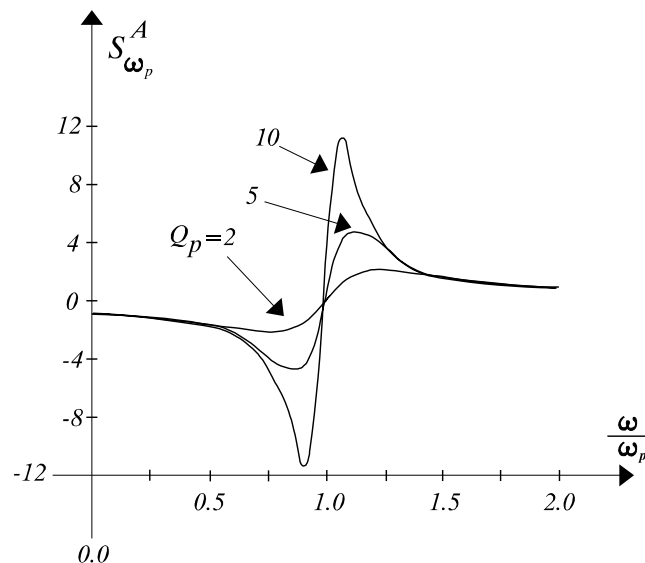
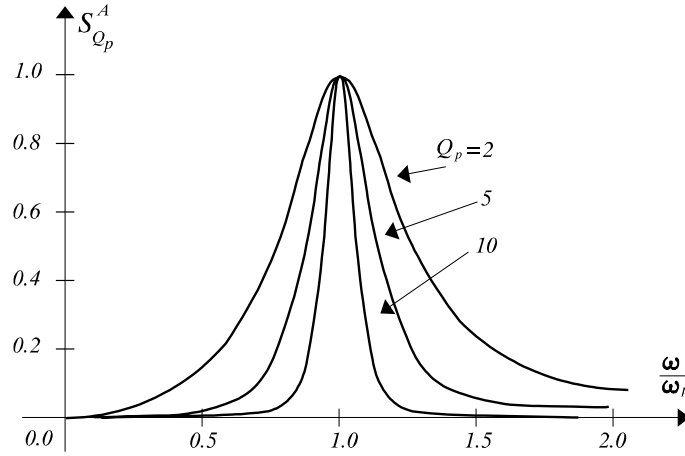


Fig. 4.1 Courbes de sensibilité à ω_p en fonction de la fréquence normalisée ω / ω_p Fig. 4.2 Courbes de sensibilité à Q_p en fonction de la fréquence normalisée ω / ω_p

4.4 Sensibilité d'un filtre de degré quelconque à ses composants

Considérons à présent la forme générale :

$$H(p) = \prod_i H_i(p) = \prod_i K_i \cdot \frac{p^2 + (\omega_{z_i} / Q_{z_i}) \cdot p + \omega_{z_i}^2}{p^2 + (\omega_{p_i} / Q_{p_i}) \cdot p + \omega_{p_i}^2} \quad (4.21)$$

L'expression (4.13) devient :

$$S_x^{[H]} \approx \sum_i S_x^{K_i} + \sum_i S_{\omega_{p_i}}^{[H]} S_x^{\omega_{p_i}} + \sum_i S_{Q_{p_i}}^{[H]} S_x^{Q_{p_i}} \quad (4.22)$$

Il est clair par conséquent qu'une implémentation directe de la fonction de transfert $H(p)$ conduirait à une grande sensibilité aux éléments, dans la mesure où une modification de n'importe lequel des éléments pourrait avoir une influence sur la position de n'importe quel pôle.

Pour contourner ce problème, on a classiquement recours à deux types de structures : la *cascade de cellules du second degré* et la *simulation de circuits LC en échelle*.

4.4.1 Cascade de cellules du second degré

Une réalisation par cascade de cellules du second degré présente l'avantage que chaque élément n'influe que sur les valeurs d'une paire de pôles, ce qui permettra de réduire la sensibilité globale du filtre à ses éléments. L'expression (4.22) devient :

$$S_x^{[H]} \approx S_x^{K_i} + S_{\omega_{p_i}}^{[H]} S_x^{\omega_{p_i}} + S_{Q_{p_i}}^{[H]} S_x^{Q_{p_i}} \quad (4.23)$$

où l'indice i indique la cellule à laquelle appartient le composant x .

Ce type de structure est par ailleurs plus simple à concevoir, et plus modulaire (les blocs du second degré se ressembleront souvent très fort).

Il reste maintenant à étudier les sensibilités de ω_{p_i} par rapport aux composants de la cellule.

4.4.1.1 Sensibilité par rapport aux composants passifs

Malheureusement, les sensibilités des ω_{p_i} par rapport aux composants passifs ne peuvent être rendues arbitrairement faibles. Ainsi, nous verrons par exemple au chapitre 5 que la pulsation ω_{p_i} d'une cellule élémentaire avec deux capacités est toujours inversement proportionnelle à la racine carrée des capacités ce qui conduit à :

$$S_C^{\omega_{p_i}} = -1/2$$

Ceci limite considérablement l'utilisation des filtres cascade à cause de leur sensibilité à la précision des éléments passifs et peut donc demander de pouvoir régler les valeurs des ω_{p_i} et des Q_{p_i} par ajustage¹⁸ des valeurs des composants lorsque la valeur de Q_{p_i} devient importante.

4.4.1.2 Sensibilité par rapport au gain de l'ampli op – Produit gain-sensibilité

Un amplificateur opérationnel présente toujours un gain *en boucle ouverte* fini A_0 , dont la variation par rapport à la valeur nominale peut être importante (60% par exemple).

Afin de réduire la sensibilité du circuit à ces variations de gain, on monte en général l'ampli op en contre-réaction positive (ampli non-inverseur) ou négative (ampli inverseur). Ces configurations sont données à la Fig. 4.3.

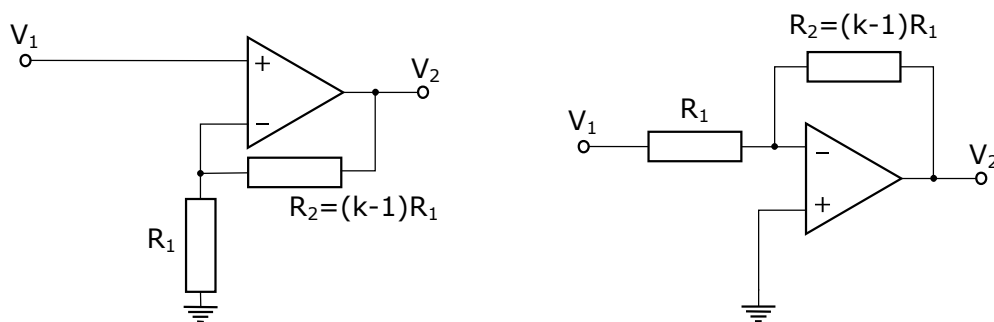


Fig. 4.3 a. Ampli op en contre-réaction positive. b. Contre-réaction négative.

Les gains en boucle fermée sont donnés respectivement par :

¹⁸ Les composants sont fournis par les constructeurs avec une certaine tolérance sur leur valeur nominale. L'ajustage consiste à mesurer la valeur réelle d'un élément, et éventuellement à la modifier en conséquence. Cette opération est bien évidemment coûteuse, et on l'évite autant que possible.

$$H^+ = \frac{V_2}{V_1} = \frac{K}{1 + K/A_0} \approx K \quad (4.24)$$

$$H^- = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{K-1}{1 + K/A_0} \approx -(K-1) \quad (4.25)$$

Et on obtient facilement les sensibilités de ces gains par rapport à A_0 :

$$S_{A_0}^{H^+} = \frac{K/A_0}{1 + K/A_0} = \frac{H^+}{A_0} \quad (4.26)$$

$$S_{A_0}^{H^-} = \frac{K/A_0}{1 + K/A_0} \approx -\frac{H^-}{A_0} \quad (K \gg 1) \quad (4.27)$$

On constate effectivement que cette sensibilité est nettement inférieure à 1 (sa valeur initiale, en boucle ouverte).

Intéressons-nous à présent à la sensibilité d'une grandeur quelconque P (ω_p ou Q_p) d'une cellule du second degré par rapport à A_0 :

$$S_{A_0}^P = S_{H^+}^P S_{A_0}^{H^+} = \frac{H^+}{A_0} S_{H^+}^P = \frac{\Gamma_{A_0}^P}{A_0} \quad (4.28)$$

où on introduit la notion de *produit gain-sensibilité* $\Gamma_{A_0}^P$, produit du gain en boucle fermée par la sensibilité de P à ce gain en boucle fermée. Au contraire de $S_{A_0}^P$ (qui est inversement proportionnelle à A_0), $\Gamma_{A_0}^P$ est indépendante de l'ampli op utilisé, mais est par contre fonction de la structure utilisée pour la contre-réaction. C'est donc plutôt cette grandeur qu'on cherche à minimiser lors du choix des structures pour l'implémentation des cellules du second degré.

Pour chaque structure du second degré, les variations relatives des ω_{p_i} et des Q_{p_i} par rapport aux résistances, capacités et gains des amplificateurs seront finalement données par :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \omega_p}{\omega_p} &= \sum_{i=1}^{N_C} S_{C_i}^{\omega_p} \cdot \frac{\Delta C_i}{C_i} + \sum_{i=1}^{N_R} S_{R_i}^{\omega_p} \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} + \sum_{i=1}^{N_{AO}} \Gamma_{A_i}^{\omega_p} \cdot \frac{\Delta A_i}{A_i^2} \\ \frac{\Delta Q_p}{Q_p} &= \sum_{i=1}^{N_C} S_{C_i}^{Q_p} \cdot \frac{\Delta C_i}{C_i} + \sum_{i=1}^{N_R} S_{R_i}^{Q_p} \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} + \sum_{i=1}^{N_{AO}} \Gamma_{A_i}^{Q_p} \cdot \frac{\Delta A_i}{A_i^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.4.2 Simulation de circuits LC en échelle

Si on reprend l'expression générale de la sensibilité de $H(p)$ par rapport à un composant x , il vient :

$$S_x^H = \frac{x}{N(p)D(p)} \left(D(p) \frac{\partial N(p)}{\partial x} - N(p) \frac{\partial D(p)}{\partial x} \right) \quad (4.30)$$

Il est alors possible de minimiser la sensibilité en rendant le numérateur de cette expressions aussi petit que possible, de façon à contrebalancer les petites valeurs prises par le dénominateur à proximité des pôles et des zéros.

Cette approche conduit à des structures dites *par simulation de circuits LC en échelle*. Ces structures jouent un rôle important pour la synthèse de filtres très sélectifs (là où la cascade de cellules du second degré devient trop sensible).

Nous ne les étudierons cependant pas ici.

CHAPITRE 5

SYNTHESE

La tendance actuelle de miniaturisation des filtres conduit à l'élimination des inductances grâce à l'utilisation de composants actifs tels que les amplificateurs opérationnels: ce sont les filtres "actifs". La théorie des filtres actifs comportent plusieurs classes de méthodes que l'on peut grouper essentiellement en deux grandes catégories: les filtres actifs qui "imitent" les filtres LC et les filtres actifs constitués d'une mise en cascade de cellules élémentaires du second ordre; c'est l'étude de ces derniers qui constitue le propos de ce chapitre.

La mise en cascade de cellules élémentaires du second ordre constitue en effet la méthode la plus fréquemment utilisée de conception de filtres actifs *répondant à des spécifications modérées*.

Les raisons de ce choix sont simples. Dans les systèmes de communications et de traitement de données modernes, on utilise du traitement numérique des signaux qui ne demande que de périphériques analogiques simples (filtres de garde, filtres anti-recouvrement). D'un autre côté, les exigences de faible consommation de puissance sont de plus en plus impératives. Dans de telles applications, la conception de filtres actifs par cascade de cellules du second ordre construites autour d'un seul amplificateur opérationnel paraît une solution quasi idéale. Pour des filtres plus sélectifs, c'est-à-dire pour des filtres pour lesquels des conditions de faible sensibilité aux composants sont indispensables, on peut utiliser des cellules élémentaires qui comprennent plusieurs amplificateurs opérationnels.

La conception par mise en cascade de cellules élémentaires présente en outre le grand avantage d'une extrême simplicité, de réglages faciles et d'une faible consommation de puissance. Dans la plupart des applications industrielles, ces filtres se caractérisent par un faible volume de production et l'utilisation de technologies peu sophistiquées.

Comme nous l'avons fait pour l'approximation, nous envisagerons successivement la synthèse de fractions rationnelles du premier (5.1) et second degré (5.2, 5.3) et la synthèse de fractions rationnelles quelconques par mise en cascade de cellules du second degré (5.4).

5.1 Synthèse de cellules du premier degré

Il s'agit d'un problème trivial. Imaginons que l'on cherche à synthétiser une des deux formes générales :

$$H(p) = K \frac{p+b}{p+a} \quad (5.1)$$

$$H(p) = K \frac{1}{p+a} \quad (5.2)$$

Un simple circuit passif RC suffit pour l'obtenir (Fig. 5.1).¹⁹

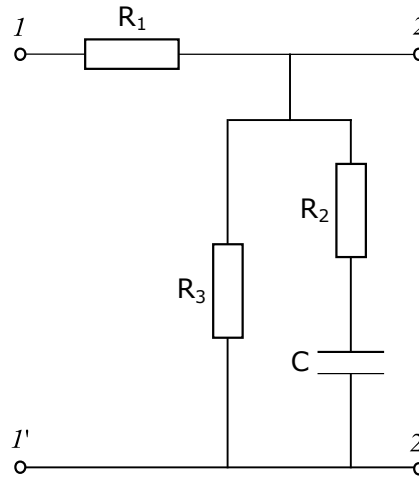


Fig. 5.1 Cellule générale du premier degré.

On montrera en effet à titre d'exercice que :

$$H(p) = \frac{R_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3)} \frac{p + \frac{1}{R_2 C}}{p + \frac{1}{C(R_2 + R_3)}} \quad (5.3)$$

On obtient alors facilement la valeur des éléments en identifiant cette expression avec les précédentes²⁰.

Il est important de noter que ce type de cellule ne synthétise la transmittance désirée que si elle est connectée à une source de tension parfaite (d'impédance nulle) et à une charge d'impédance infinie. Dans le cas contraire, il faut éventuellement utiliser des amplis opérationnels jouant le rôle d'isolateurs d'impédance.

5.2 Synthèse de cellules du second degré

Un nombre impressionnant de structures ont été proposées dans la littérature pour synthétiser les cellules du second degré. Des études exhaustives relatives à la sensibilité de ces structures par rapport à leurs composants actifs et passifs (voir par exemple [8]) ont finalement conduit à une liste de structures optimales, dont le choix dépend essentiellement du facteur de qualité des pôles à

¹⁹ Ce n'est d'ailleurs pas le seul circuit possible.

²⁰ Ceci conduira, pour l'expression (5.2), à imposer R_2 à 0.

synthétiser. Puisqu'il a été montré à la section 4.3 que la sensibilité des sections du second degré à ω_p est une fonction directe du facteur de qualité Q_p , il paraît en effet assez naturel d'introduire des structures de cellules du second degré différentes suivant les domaines de valeur du facteur de qualité :

- Structures pour facteurs de qualité inférieurs à 2 (5.2.1).
- Structures pour facteurs de qualité compris entre 2 et 20 (5.2.2).
- Structures pour facteurs de qualité supérieurs à 20 (5.2.3).

5.2.1 Structures des sections du second degré à facteur de qualité inférieur à 2

Les cellules à faible valeur des facteurs de qualité sont faiblement sensibles. On essaye de les choisir les plus simples possibles. Deux topologies sont utilisées en pratique, suivant que l'on utilise les amplificateurs opérationnels en réaction positive (Fig. 5.2 bas) ou en réaction négative (Fig. 5.2 haut).

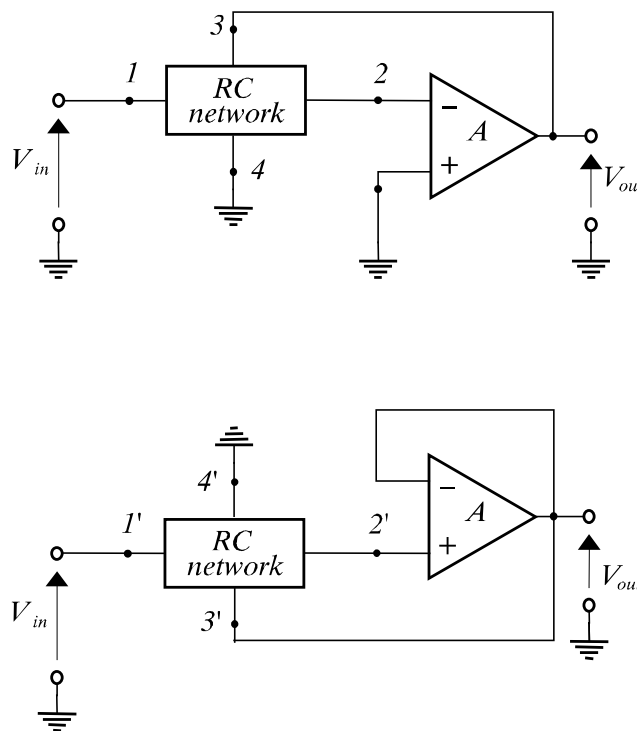


Fig. 5.2 Structures des sections à faible facteur de qualité
haut : réaction négative bas : réaction positive

La structure RC passive qui apparaît dans ces structures (et qui généralise les contre-réactions simples qui avait été décrite à la section 4.4.1.2) peut être décrite par deux fonctions de transfert élémentaires :

$$T_{12}(p) = \frac{n_{12}(p)}{d(p)} = \frac{V_2}{V_1} \bigg|_{V_3=0}$$

$$T_{32}(p) = \frac{n_{32}(p)}{d(p)} = \frac{V_2}{V_3} \bigg|_{V_1=0}$$
(5.4)²¹

Il est bien connu que les pôles des fonctions de transfert RC passives sont situés sur l'axe réel négatif et que par conséquent il n'est pas possible des les utiliser pour la synthèse des fonction de transfert résultant des théories de l'approximation; par contre, lorsqu'on les utilise en contre-réaction avec des amplis ops, nous allons voir qu'il est possible de synthétiser des pôles complexes conjugués.

Dans le cas de la réaction négative, on peut en effet écrire :

$$V_{out} = A.(V_+ - V_-) = V_3 \quad V_+ = 0 \quad V_{in} = V_1$$

$$V_- = V_2 = T_{12}(p).V_1 + T_{32}(p).V_3$$
(5.5)

d'où l'on peut tirer :

$$H(p) = V_{out} / V_{in} = -A. \frac{T_{12}(p)}{1 + A.T_{32}(p)}$$
(5.6)

Comme le gain de l'amplificateur en boucle ouverte est très important ($A \gg 1$), cette relation devient :

$$H(p) = -\frac{n_{12}(p)}{n_{13}(p)}$$
(5.7)

Les pôles et les zéros de la fonction de transfert sont les zéros de fonctions de transfert de réseaux RC passifs : ils peuvent donc être quelconques.

Dans le cas de la structure à réaction positive, on a :

$$V_{out} = \beta.V_- (\beta \approx 1) \quad V_+ = V_- = V_2 \quad V_{in} = V_2$$

$$V_- = V_2 = T_{12}(p).V_1 + T_{32}(p).V_3$$
(5.8)

d'où l'on tire :

$$H(p) = V_{out} / V_{in} = \beta. \frac{T_{12}(p)}{1 - \beta.T_{32}(p)}$$
(5.9)

Comme $\beta \approx 1$, cette relation devient :

$$H(p) = \frac{n_{12}(p)}{d(p) - n_{32}(p)}$$
(5.10)

De l'examen du dénominateur de cette dernière équation (une différence de deux polynômes), il est clair que les pôles de la fonction de transfert peuvent être complexes.

²¹ On peut démontrer que les dénominateurs de ces deux fractions rationnelles sont nécessairement identiques.

L'annexe I passe en revue les différents types de sections du second ordre à faible facteur de qualité et en donne la structure ainsi qu'un algorithme de calcul des éléments. On peut vérifier que la fonction produit gain-sensibilité associée à ω_p est nulle pour l'ensemble de ces structures, ce qui n'est pas le cas pour celle qui est associée à Q_p , dont la valeur est fournie pour chaque structure. Le choix optimum des valeurs des composants passifs vise donc en principe à minimiser cette fonction produit gain-sensibilité.

Remarque: Pour toutes les cellules décrites à l'annexe I, on constate au vu des équations qu'il est impossible de régler indépendamment les valeurs de ω_p et Q_p . Ce fait ne prête pas à conséquence puisque le facteur de qualité (et par conséquent la sensibilité $S_{\omega_p}^{|H|}$) est faible. Lorsque le facteur de qualité augmente, il est indispensable de pouvoir régler indépendamment les valeurs de ω_p et Q_p , ce qui exige de nouvelles structures pour les sections du second degré.

Exemple 5.1

La structure passe-bas de l'annexe I.1 est reprise à la Fig. 5.3.

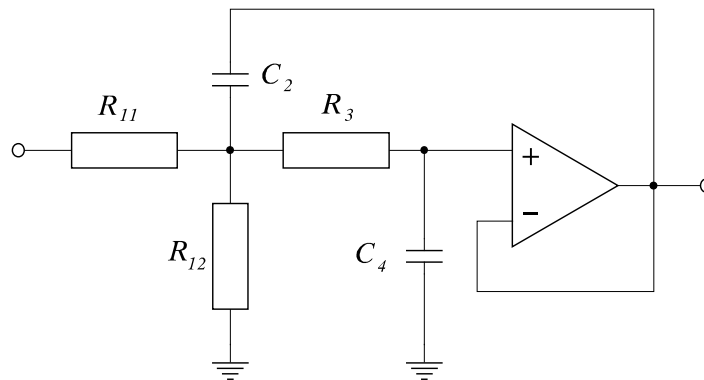


Fig. 5.3 Structure passe-bas pour faible facteur de qualité

Le réseau RC qui y correspond est représenté à la Fig. 5.4 (où R_1 correspond à la mise en parallèle de R_{11} et R_{12} : on remplace la tension d'entrée et ces deux résistances par leur équivalent de Thévenin).

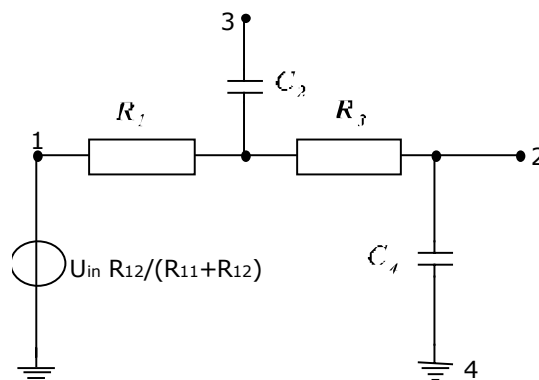


Fig. 5.4 Réseau RC pour Structure passe-bas pour faible facteur de qualité

On trouve facilement les fonctions de transfert élémentaires (et on remarque en passant que leurs numérateurs sont bien identiques) :

$$T_{12}(p) = \frac{n_{12}(p)}{d(p)} = \frac{\frac{1}{pC_2} \frac{1}{pC_4}}{R_1 \left(\frac{1}{pC_2} + R_3 + \frac{1}{pC_4} \right) + \frac{1}{pC_2} \left(R_3 + \frac{1}{pC_4} \right)}$$

$$T_{32}(p) = \frac{n_{32}(p)}{d(p)} = \frac{R_1 \frac{1}{pC_4}}{R_1 \left(\frac{1}{pC_2} + R_3 + \frac{1}{pC_4} \right) + \frac{1}{pC_2} \left(R_3 + \frac{1}{pC_4} \right)}$$
(5.11)

On en déduit $H(p)$:

$$H(p) = \frac{n_{12}(p)}{d(p) - n_{32}(p)} = \frac{\frac{1}{pC_2} \frac{1}{pC_4}}{R_1 \left(\frac{1}{pC_2} + R_3 + \frac{1}{pC_4} \right) + \frac{1}{pC_2} \left(R_3 + \frac{1}{pC_4} \right) - R_1 \frac{1}{pC_4}}$$

$$= \frac{1}{pC_4 R_1 + p^2 C_4 C_2 R_3 R_1 + pC_4 R_3 + 1}$$

$$= \frac{1}{p^2 + p \left(\frac{1}{C_2 R_3} + \frac{1}{C_2 R_1} \right) + \frac{1}{C_4 C_2 R_3 R_1}}$$
(5.12)

Et il vient donc :

$$\omega_p^2 = \frac{1}{R_1 R_3 C_2 C_4}$$
(5.13)

$$Q_p = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_3 C_2 C_4}} \left(\frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right)$$

$$= \frac{R_3 R_1 C_2}{\sqrt{R_1 R_3 C_2 C_4}} \frac{1}{R_1 + R_3}$$

$$= \frac{\sqrt{R_3 C_2}}{\sqrt{R_1 C_4}} \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_1}}$$
(5.14)

Et comme $H(j\omega)$ tend vers 1 quand ω tend vers 0, on voit que K est réglé par le choix de R_{11} et R_{12} :

$$K = \frac{R_{12}}{R_{11} + R_{12}}$$
(5.15)

A titre d'exercice, on recommencera les calculs de $H(p)$ en ne faisant plus l'hypothèse d'un gain infini, ce qui invaliderait (5.7). On obtient alors une expression de ω_p et Q_p qui dépend du gain A . L'examen des produits gain sensibilité conduit à :

$$\Gamma_A^{\omega_p} = 0$$
(5.16)

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \sqrt{C_2 R_1 / C_4 R_3} \quad (5.17)$$

Les relations (5.13) et (5.14) peuvent bien entendu être inversées, de façon à fournir les valeurs des éléments R_1 , R_3 , C_1 , et C_4 connaissant ω_p et Q_p (puis R_{11} et R_{12} connaissant R_1 et K). On s'impose par exemple les valeurs de C_2 et C_4 , et on peut montrer à titre d'exercice que R_1 et R_3 sont bien celles mentionnées à l'annexe I.1. L'inversion fait d'ailleurs apparaître une condition sur les valeurs des éléments.

Notons enfin que la valeur optimale des éléments sera en principe celle qui conduit également à minimiser la valeur de (5.17).

5.2.2 Structures des sections du second degré à facteur de qualité compris entre 2 et 20

Ces structures sont obtenues à partir de celles de la section précédente en les modifiant légèrement pour permettre le réglage de ω_p et Q_p (Fig. 5.5). On les trouve souvent dans la littérature sous le nom de *filtres de Sallen et Key*.

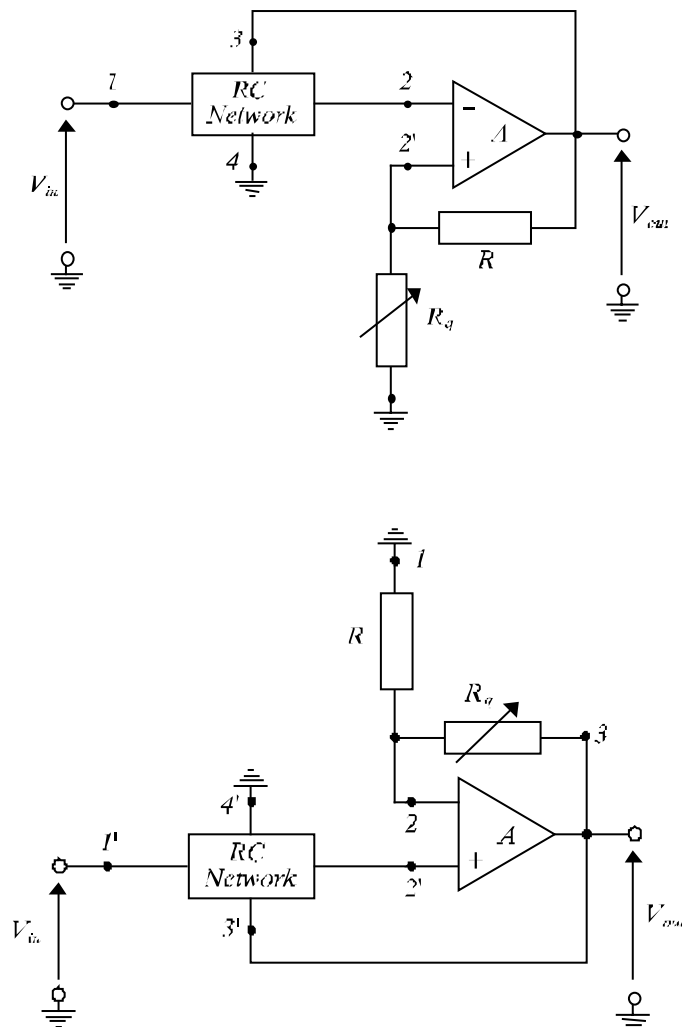


Fig. 5.5 Structures générales pour $2 \leq Q_p \leq 20$
 haut : réaction négative
 bas : réaction positive

La structure à réaction négative diffère de celle de la Fig. 5.2 par le fait qu'on a inclus une réaction positive α dans le circuit; on a donc :

$$\alpha = \frac{R_q}{R_q + R} \quad V_{out} = V_3 = V_+ / \alpha$$

$$V_{out} = A.(V_+ - V_-) \quad V_{in} = V_1 \quad (5.18)$$

$$V_2 = V_- = T_{12}(p).V_1 + T_{32}(p).V_3$$

d'où l'on tire :

$$H(p) = V_{out} / V_{in} = -A. \frac{T_{12}(p)}{1 + A.(T_{32}(p) - \alpha)} \quad (5.19)$$

En tenant compte de la valeur importante du gain en boucle ouverte de l'amplificateur opérationnel, cette expression conduit à :

$$H(p) = -\frac{n_{12}(p)}{n_{32}(p) - \alpha.d(p)} \quad (5.20)$$

Dans le cas de la structure à réaction positive, la comparaison des Fig. 5.2 et Fig. 5.5 montre que la seule différence est que le gain en boucle fermée est maintenant β différent de l'unité :

$$\beta = 1 + R_q / R \quad (5.21)$$

ce qui conduit à :

$$H(p) = \frac{n_{12}(p)}{d(p) - \beta.n_{32}(p)} \quad (5.22)$$

L'annexe II donne la liste des différentes sections élémentaires à facteur de qualité moyen, ainsi que leur mode de calcul. Comme dans la section précédente, on peut montrer que la fonction produit gain-sensibilité associée à ω_p est nul pour ces structures.

5.2.3 Structures des sections du second degré à facteur de qualité supérieur à 20

Les cellules présentées à la section précédente sont limitées à des facteurs de qualité inférieur à 20 pour deux raisons: le réglage devient impossible pour $Q_p > 20$ et la sensibilité à certains composants passifs est directement proportionnelle à la valeur de Q_p .

Pour pouvoir réaliser des facteurs de qualité plus élevés, il est nécessaire d'augmenter le nombre d'amplificateurs opérationnels. De nombreuses cellules à plusieurs amplis opérationnels ont été proposées dans la littérature, dont seul un petit nombre s'est finalement avéré utile (parce que diminuant la sensibilité du circuit aux composants passifs). Parmi ces cellules, celles utilisant le *convertisseur d'impédance généralisé d'Antoniuou* (Fig. 5.6) sont les plus répandues. Ce circuit est canonique²² en nombre de capacités (2), comme on

²² Un circuit est *canonique* pour un type de composant lorsqu'il comprend le nombre minimal de ce composant tout en réalisant la fonction désirée.

peut le constater sur les différentes implémentations présentées à l'annexe III. On montre par ailleurs qu'on obtient la sensibilité minimale si les deux capacités sont choisies identiques et si toutes les résistances sauf une sont égales à une valeur R_0 , avec :

$$R_0 = 1/(\omega_p C) \quad (5.23)$$

La résistance restante est calculée pour fixer la valeur du facteur de qualité :

$$R_q = R_0 Q_p = Q_p / (\omega_p C) \quad (5.24)$$

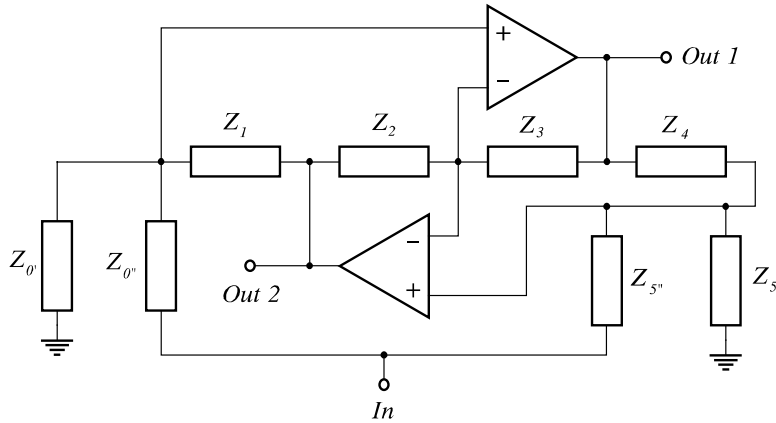


Fig. 5.6 Schéma général des cellules à haut Q_p

L'examen de cette dernière relation montre la grande facilité de réglage de Q_p . En pratique, il n'est pas nécessaire de réaliser exactement la valeur R_0 : il est plus facile d'utiliser une valeur standard R_d proche de R_0 . De plus, cette différence entre R_0 et R_d peut être compensée par une simple résistance R_c dans le circuit de valeur :

$$R_c = R_0^2 / R_d \quad (5.25)$$

Ces circuits sont donc faciles à régler. On montre par ailleurs qu'ils sont optimum du point de vue de la sensibilité, qu'ils présentent de plus un minimum de bruit et un maximum de dynamique. Leur inconvénient est de nécessiter deux amplis opérationnels, ce qui en augmente le prix et la consommation.

5.3 La section du second degré généralisée

La structure des cellules du second degré présentée jusqu'à présent dépend de la fonction de transfert réalisée par cette cellule. Il existe également une *cellule du second degré universelle* qui, pour une structure figée, permet de réaliser n'importe quelle fonction de transfert du second ordre.

Soit la fonction de transfert :

$$H(p) = V_s / V_i = \frac{N(p)}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2} \quad (5.26)$$

Le réarrangement de cette équation conduit à :

$$V_s = -1/Q_p \cdot \left(\frac{V_s}{p/\omega_p} \right) - \frac{V_s}{p^2/\omega_p^2} + \frac{N(p)}{p^2} \cdot V_i \quad (5.27)$$

Si on considère par exemple que $N(p) = K \cdot p^2$ et que l'on pose $T = 1/\omega_p$, l'équation (5.27) peut être implémentée par le schéma fonctionnel de la Fig. 5.7, comprenant deux intégrateurs. Puisque V_s est une fonction passe-haut, (V_s/pT) est une fonction passe-bande et $(V_s/p^2 T^2)$ est une fonction passe-bas: les trois fonctions sont disponibles simultanément avec les mêmes ω_p et Q_p .

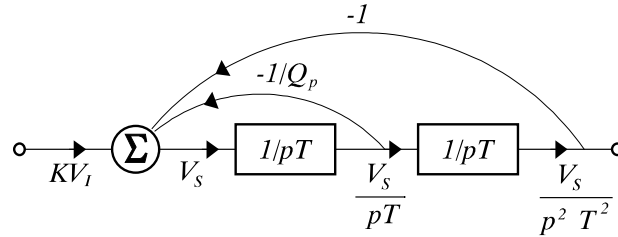


Fig. 5.7 Schéma fonctionnel de la cellule généralisée

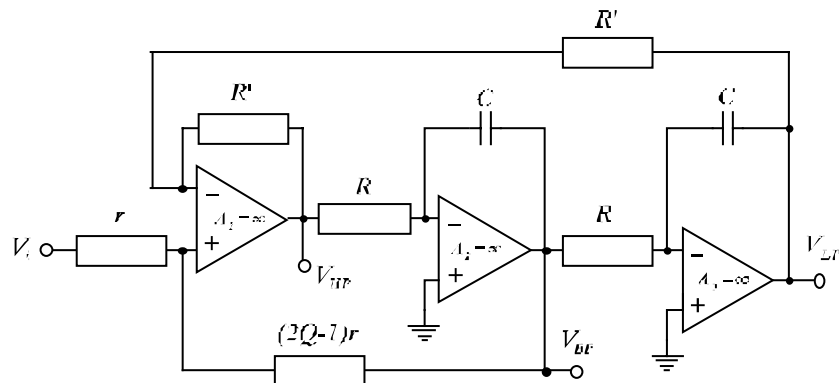
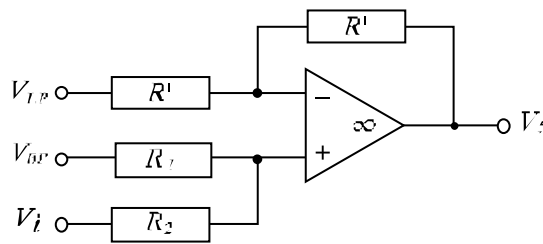
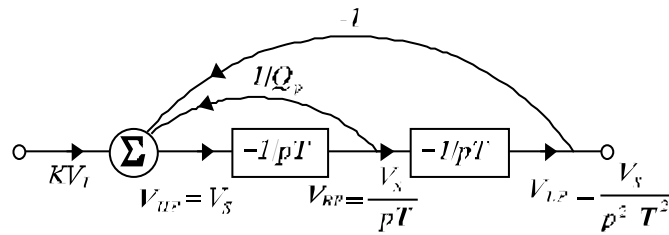


Fig. 5.8 La cellule biquadratique généralisée de type KHN

Ce schéma fonctionnel peut être réalisé de différentes façons qui diffèrent dans la réalisation des deux intégrateurs et dans celle du sommateur. Puisque les circuits intégrateurs sont facilement réalisables par un circuit comportant un seul amplificateur opérationnel (à condition de changer leur signe), il est naturel de réarranger le schéma bloc de la Fig. 5.7 en celui de la Fig. 5.8 (haut).

La fonction de transfert du sommateur vaut :

$$V_S = K.V_I + 1/Q_p.V_{BP} - V_{LP}$$

Une réalisation d'un tel sommateur est présentée à la Fig. 5.8 (milieu) avec comme fonction de transfert :

$$V_S = \frac{2R_1}{R_1 + R_2}.V_I + \frac{2R_2}{R_1 + R_2}.V_{BP} - V_{LP}$$

De ces deux dernières équations, on déduit :

$$R_1 / R_2 = 2Q_p - 1 \quad K = 2(1 - 1/2Q_p)$$

Le circuit complet est présenté à la Fig. 5.8 (bas). Ce circuit est connu dans la littérature sous le nom de *cellule biquadratique KHN* (Kervin, Huelsman, et Newcomb).

On montre par ailleurs que cette cellule présente de faibles sensibilité aux composants passifs et actifs.

On peut déduire de cette cellule une structure légèrement différente qui présente l'avantage de n'utiliser que des amplificateurs opérationnels dont l'entrée $+$ est connectée à la référence de potentiel (Fig. 5.9). Cette structure est obtenue en modifiant le schéma bloc Fig. 5.8 (bas) en celui de la Fig. 5.9 (haut) dans lequel la sommation s'effectue dans un circuit intégrateur, ce qui permet de rendre tous les poids positifs. Cette cellule est appelée la *cellule biquadratique de Tow-Thomas*. L'avantage de cette cellule est que le facteur de qualité Q_p est déterminé par la résistance $Q.R$ et est donc facilement réglable. De plus, le gain K est fixé par la résistance d'entrée et peut donc être ajusté sans modifier ω_p et Q_p . Le seul désavantage de cette cellule est que l'on ne sait plus réaliser la fonction de type passe-haut.

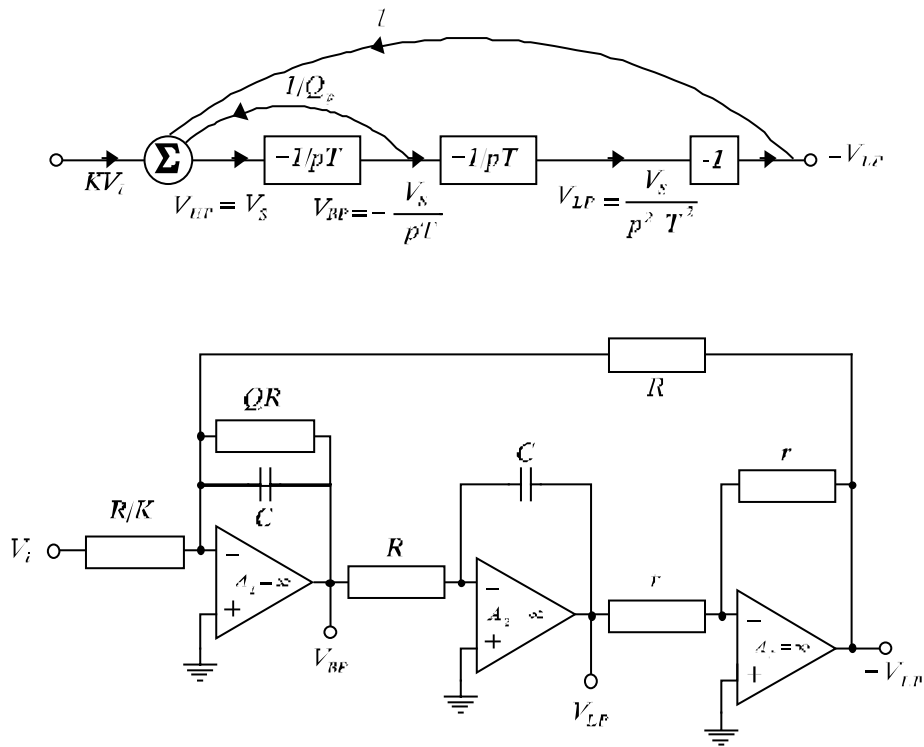


Fig. 5.9 La cellule biquadratique de TOW-THOMAS

Dans le cas d'un filtre passe-bande, on obtient :

$$H(p) = V_S / V_I = \frac{-K\omega_p \cdot p}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

Les deux structures présentées permettent la réalisation des cellules de type passe-bas, passe-bande et passe-haut mais ne peuvent réaliser les cellules de type réjecteur de fréquence et passe-tout. Il est cependant facile de modifier la cellule *KHN* en lui ajoutant une cellule de sommation qui permet de réaliser une cellule quelconque comme le montre la Fig. 5.10.

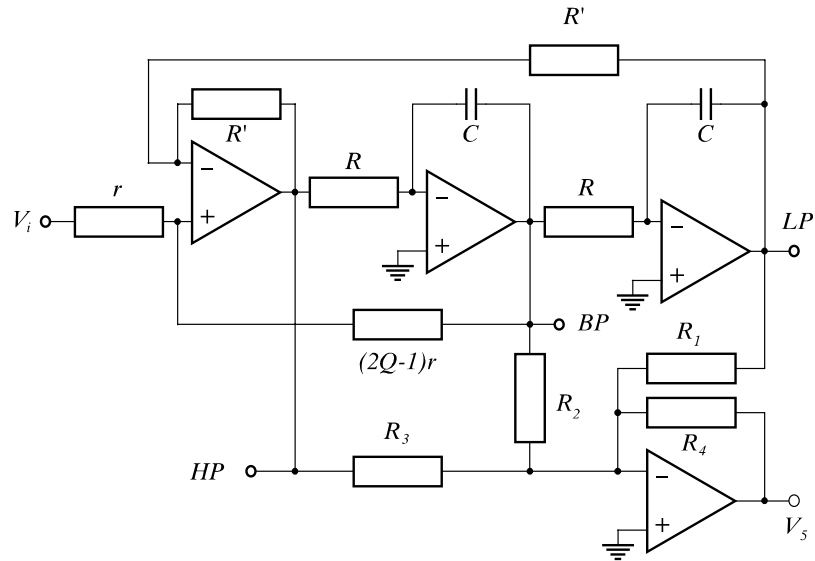


Fig. 5.10 La cellule biquadratique KHN modifiée

Cette dernière structure peut encore être modifiée pour éliminer un amplificateur opérationnel, ce qui conduit à la cellule générale de la Fig. 5.11, dont la fonction de transfert vaut:

$$H(p) = V_s / V_i = - \frac{r / R_3 \cdot p^2 + p \cdot (\omega_p / Q_p) \cdot (r / R_3 - Q \cdot R / R_1) + \omega_p^2 \cdot R / R_2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec $\omega_p = 1/RC$. L'examen de la forme de $H(p)$ montre bien que l'on peut réaliser n'importe quel type de cellule, en choisissant correctement la valeur de ses éléments.

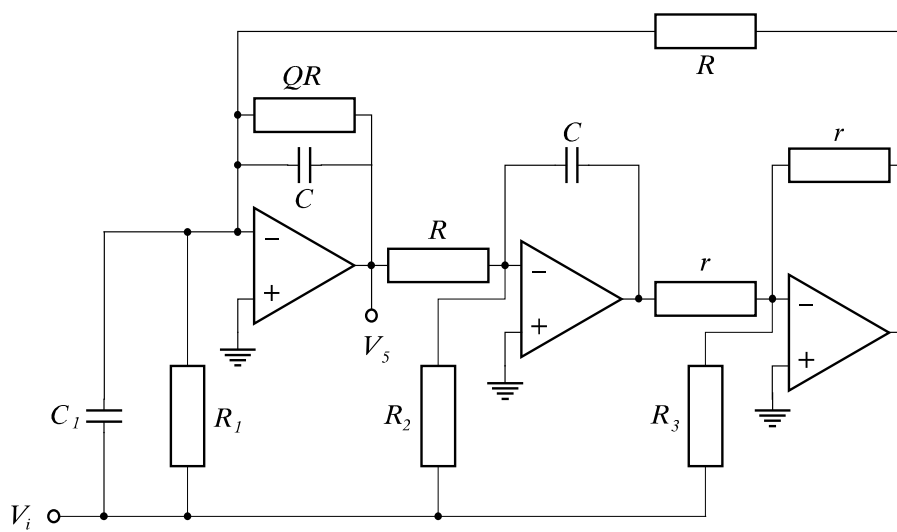


Fig. 5.11 La cellule biquadratique généralisée

5.4 Synthèse par cascade de cellules du second degré

Dans le cadre de la synthèse des filtres actifs, nous n'avons considéré jusqu'à présent que le calcul de sections du second degré. Il est clair que la synthèse d'un filtre va conduire à la mise en cascade de plusieurs sections du second degré ce qui conduit à deux problèmes distincts :

- La constitution optimale des blocs élémentaires du second degré, c'est-à-dire le problème de l'association pôles-zéros : comment réorganiser les fractions rationnelles en un produit de fractions rationnelles élémentaires (du premier et second degré) ? Et comment répartir la constante K du filtre au niveau de ces cellules élémentaires?
- Le choix de l'ordre de réalisation des cellules élémentaires correspondantes.

La résolution de ces deux problèmes dépend évidemment du critère d'optimisation utilisé; les critères qui peuvent être pris en compte sont :

1. Maximiser la dynamique du filtre, c'est-à-dire admettre des amplitudes importantes des signaux d'entrée de chaque cellule sans provoquer de distorsion du signal. Il faut donc éviter que des surtensions à la sortie de certaines cellules n'entraînent des distorsions dans la cellule suivante.
2. Maximiser le rapport signal à bruit. Le désavantage des filtres actifs est d'engendrer du bruit à l'intérieur du filtre, ce qui explique que le rapport signal à bruit est un paramètre important. Chaque ampli opérationnel produit un bruit qui lui est propre²³. Le bruit de chaque ampli est filtré par les sections qui le suivent. L'ordre des cellules a donc un effet sur le bruit délivré en sortie de la cascade.
3. Minimiser la sensibilité totale, qui dépendra des cellules composant la cascade, et donc de l'association pôles-zéros.
4. Minimiser l'offset en courant continu. Les éléments actifs génèrent des tensions d'offset continues qui peuvent être gênantes dans certaines applications. Il convient alors, dans la mesure du possible, de terminer la cascade par une cellule éliminant le continu.
5. Simplifier la procédure de réglage. Certaines structures sont plus faciles à régler que d'autres, d'où l'influence possible du groupement pôles-zéros.

Un des critères les plus importants pour le groupement pôles-zéros est de rendre maximum la dynamique du filtre. Il est facile de comprendre que ce but sera atteint si on respecte la règle suivante: *les pôles et zéros des cellules du second degré doivent être choisis tels que la réponse en fréquence de chaque cellule soit la plus plate possible dans le domaine de fréquence utile*. Ce critère est particulièrement important dans le cas des filtres qui possèdent des pôles de l'affaiblissement (c.-à-d. des zéros sur l'axe imaginaire), qui peuvent être utilisés pour compenser les résonances des pôles à facteur de qualité élevé. On combine

²³ Une des caractéristiques importantes des différents amplis ops vendus est d'ailleurs leur niveau de bruit. Pour certaines applications (médicales, par exemple), on est conduit à n'utiliser que des composants très peu bruyants, ce qui conduit évidemment à un coût plus élevé.

par conséquent les pôles de plus haut facteur de qualité de $H(p)$ avec le zéros qui leur sont les plus proches (Fig. 5.12).

Pour les mêmes raisons, les constantes associées à chaque cellule seront choisies telles que leur produit restitue la constante globale de $H(p)$ et *telles que le gain de chaque cellule soit similaire dans les domaines de fréquence utiles*. On évite ainsi des disparités inutiles (par exemple, une cellule passe-bas ayant un gain de 100 en bande passante qui serait suivie d'une autre cellule passe-bas ayant un gain de 0.01 en bande passante, pour synthétiser un filtre ayant un gain unitaire).

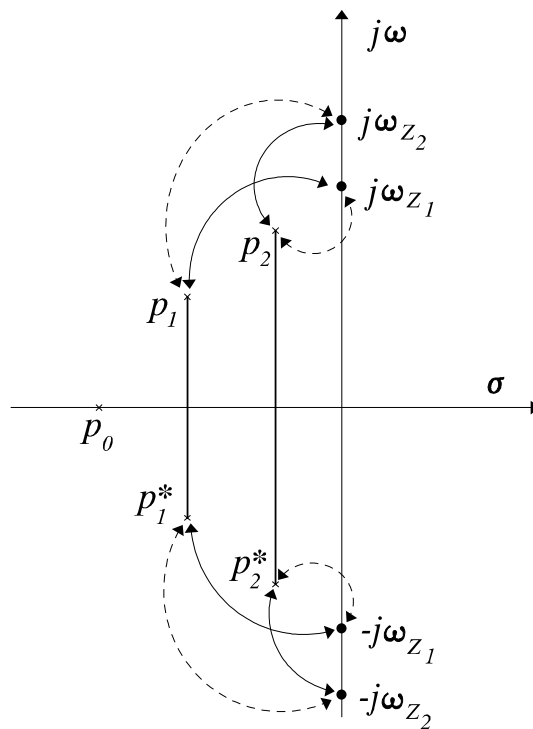


Fig. 5.12 Exemple de groupements pôles-zéros. En pratique, on retiendra le plus souvent le groupement en pointillé.

Les groupements pôles-zéros et les constantes de chaque cellule ayant été choisis, le seul paramètre restant est l'ordre de réalisation des cellules lors de la mise en cascade. Puisque les cellules sont isolées les unes des autres²⁴, la mise en cascade ne modifie ni la sensibilité totale, ni le réglage des cellules et à nouveau le paramètre important est la dynamique. On recherche donc la mise en cascade telle que le spectre du signal dans le domaine de fréquence utile reste aussi plat que possible à l'interface des cellules du second degré. Dans de nombreux cas, ce résultat est obtenu avec la mise en cascade telle que la valeur

²⁴ Chaque ampli opérationnel ayant une impédance d'entrée quasi-infinie et une impédance de sortie faible, on est bien dans le cas de cellules attaquées en entrée par une source de tension à peu près idéale, et débitant sur une charge infinie.

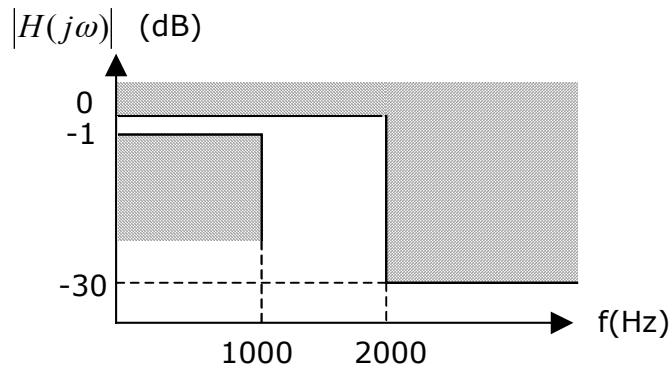
du facteur de qualité des cellules élémentaires va en croissant de l'entrée vers la sortie.

Il arrive parfois que d'autres considérations que la dynamique se présentent. On peut par exemple imposer que la première section soit du type passe-bas ou passe-bande en vue d'éliminer les hautes fréquences et ainsi éviter les problèmes de variation de pente du signal dans les amplificateurs²⁵. De façon semblable, on peut imposer une cellule de type passe-haut ou passe-bande comme dernière cellule en vue d'éliminer l'ondulation sur l'alimentation ou le bruit induit par les amplificateurs eux-mêmes. Dans ces différents cas, on optimisera les cellules restantes en suivant les règles énoncées ci-dessus.

Exercices

Exercice 5.1

On demande de réaliser un filtre passe-bas dont les spécifications sont les suivantes :



Solution

Le choix du type d'approximation s'étant porté sur les filtres de Chebyshev, on trouve facilement que le degré du filtre est de 4 et que sa fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{0.24565}{(p^2 + 0.67374p + 0.52858^2) \cdot (p^2 + 0.27907p + 0.99323^2)}$$

Ce type d'approximation ne présentant pas de zéro, le problème de l'association pôles-zéros ne se pose pas. Il reste donc simplement à choisir les constantes associées à chaque cellule, ce qui se fait en imposant un gain unitaire en continu pour chaque cellule :

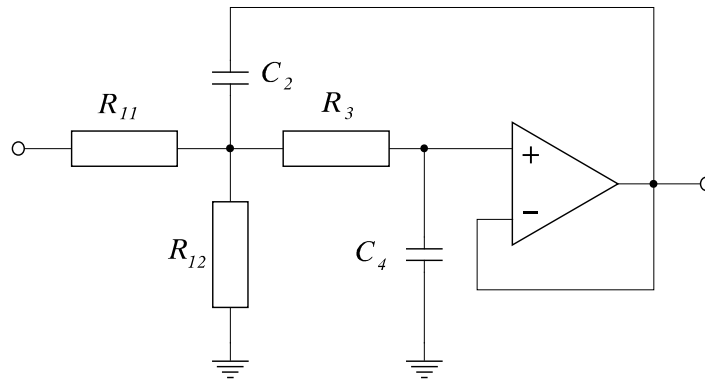
$$H(p) = \frac{0.52858^2}{p^2 + \frac{0.52858}{0.78455}p + 0.52858^2} \cdot \frac{0.891242 \cdot 0.99323^2}{p^2 + \frac{0.99323}{3.5590}p + 0.99323^2}$$

La première cellule a un facteur de qualité est faible, l'autre un facteur de qualité est moyen; ces deux cellules auront donc des structures différentes. La première cellule est réalisée par la structure décrite à la section I.1 de l'annexe I, avec :

$$\omega_p = 0.52858 \quad Q_p = 0.78455 \quad K = 1 \quad C_2 = 2.5 \quad C_4 = 1$$

²⁵ Une des imperfections des amplis ops est liée à la pente maximale admissible (*slew rate*) pour la pente du signal de sortie, au delà de laquelle le signal de sortie est distordu.

On obtient :

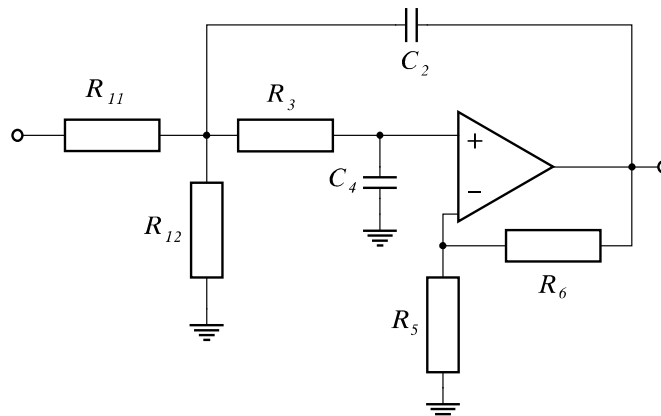


$$R_{11} = 1.0571962 \quad R_{12} = \infty \quad R_3 = 1.3542004$$

La deuxième cellule est décrite à la section II.1 de l'annexe II avec :

$$\omega_p = 0.99323 \quad Q_p = 3.5590 \quad K = 0.891242 \quad C_2 = C_4 = 1 \quad R_5 = 1$$

On obtient, avec la valeur de P qui conduit au produit gain-sensibilité minimum ($P=0.7476508$) :



$$R_1 = 1,1643961 \quad R_3 = 0,8705618 \quad R_6 = 1,5046983$$

$$K_0 = 2,5046983 \quad R_{11} = 3,2723558 \quad R_{12} = 1,8075859$$

La dénormalisation en fréquence est obtenue facilement en divisant les valeurs de capacités par $2\pi \cdot 1000$. La dénormalisation en impédance (indispensable ici si l'on veut que les éléments nécessaires correspondent à peu près aux valeurs standard fournies par les fabricants) est réalisée en choisissant une valeur de dénormalisation R , en multipliant toutes les valeurs des résistances par R et en divisant les valeurs des capacités par R .

Il reste alors, si on veut être complet, à remplacer les valeurs obtenues par des valeurs standard les plus proches fournies par les fabricants, et à vérifier que le filtre répond encore aux spécifications (ce qui peut demander de faire plusieurs essais de choix de valeurs standardisées).

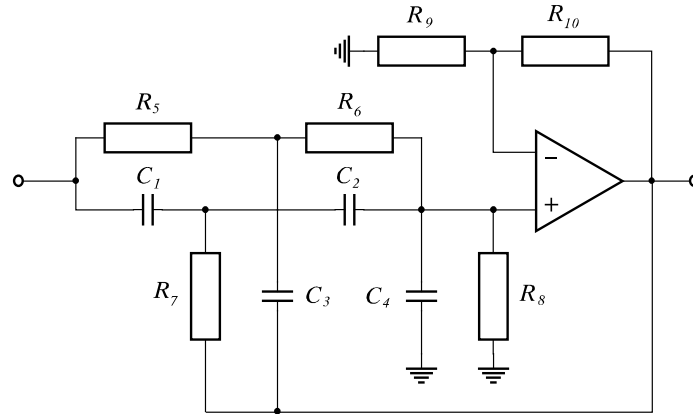
Exercice 5.2

On demande de réaliser un filtre passe-bas elliptique dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H(p) = 0.031376 \frac{(p^2 + 4.0203^2)}{(p + 0.50740)(p^2 + \frac{0.999725}{2.1001743} p + 0.999725^2)}$$

L'association pôle-zéro est triviale : le filtre sera constitué d'une cellule de type réjecteur de fréquence à moyen facteur de qualité (II.5) en cascade avec une cellule du premier degré. La cellule du premier degré doit bien évidemment être placée en fin de cascade, pour assurer une isolation d'impédance entre les deux cellules.

On obtient pour la cellule du second degré :



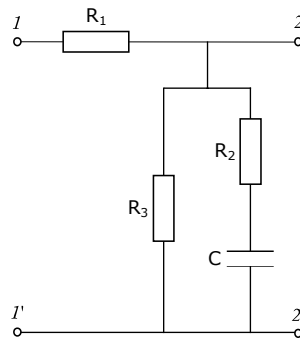
$$C_1 = C_2 = C_3 = 1 \quad C_4 = 8 \quad R_9 = 1$$

$$R_5 = 0.24873765 \quad R_6 = 0.49747531 \quad R_7 = 0.08291255$$

$$R_8 = 14.5691338 \quad R_9 = 1 \quad R_{10} = 5.50531902$$

$$K = 0.3826658$$

On constate que la synthèse de cette section conduit à un gain en continu de l'ordre de 15,83 dB . La cellule du premier degré est donc constituée d'un diviseur résistif (nécessaire car la section réjecteur de fréquence introduit un gain en continu de l'ordre de 15,83 dB) et d'une capacité en shunt sur la sortie de valeurs (obtenue à partir de la Fig. 5.1):

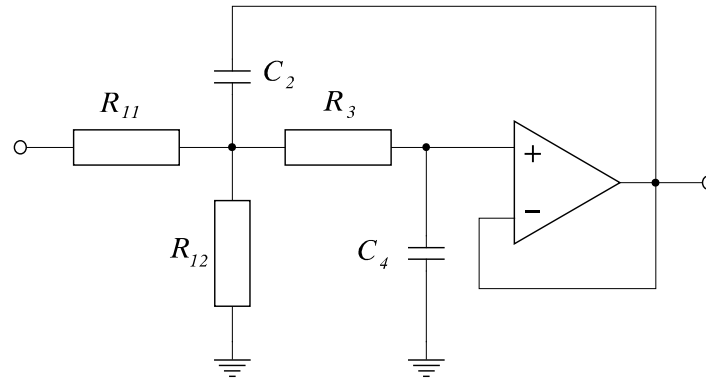


$$C = 1 \quad R_1 = 12.196131 \quad R_2 = 0 \quad R_3 = 2.3506912$$

La dénormalisation en impédance est faite comme pour l'exercice précédent.

ANNEXE I
CELLULES DU SECOND DEGRE
A FACTEUR DE QUALITE
INFERIEUR A 2

I.1 Passe-bas à faible facteur de qualité



$$H(p) = K \cdot \frac{\omega_p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$R_1 = \frac{R_{11} \cdot R_{12}}{R_{11} + R_{12}} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot C_4}$$

$$K = \frac{R_{12}}{R_{11} + R_{12}} \quad Q_p = \frac{\sqrt{(R_3 \cdot C_2) / (R_1 \cdot C_4)}}{1 + R_3 / R_1}$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot \sqrt{(C_2 \cdot R_1) / (C_4 \cdot R_3)}$$

Calcul des composants :

- fournir en données : f_p, Q_p, C_2, C_4 et $K (\leq 1)$ (!!! il faut $C_2 \geq 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_4$)
- calculer :

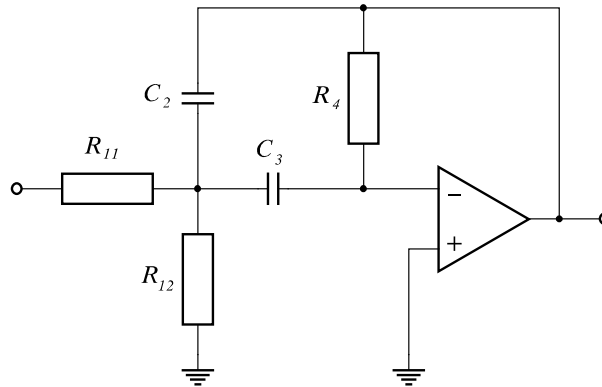
$$P = \left(\frac{1}{2Q_p^2} \cdot \frac{C_2}{C_4} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q_p^2} \cdot \frac{C_2}{C_4} - 1 \right)^2 - 1}$$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot \sqrt{P \cdot C_2 \cdot C_4}} \quad R_3 = P \cdot R_1$$

- si $K=1$ alors $R_{11} = R_1$ $R_{12} = \infty$
sinon : $R_{11} = R_1 K$ $R_{12} = R_1 / (1 - K)$

I.2 Passe-bande à faible facteur de qualité

I.2.1 Passe-bande de type R à faible facteur de qualité



$$H(p) = -K \cdot \frac{(\omega_p / Q_p) \cdot p}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$R_1 = \frac{R_{11} \cdot R_{12}}{R_{11} + R_{12}} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_4}$$

$$K = \frac{R_{12}}{R_{11} + R_{12}} \cdot K_0 \quad Q_p = \frac{\sqrt{(R_4 \cdot C_2) / (R_1 \cdot C_3)}}{1 + C_2 / C_3}$$

$$K_0 = \Gamma_A^{Q_p} = Q_p^2 \cdot (1 + C_3 / C_2)$$

Calcul des composants :

- fournir en données : f_p , Q_p , C_2 , C_3 et K
- calculer :

$$P = Q_p^2 \cdot (2 + C_2 / C_3 + C_3 / C_2)$$

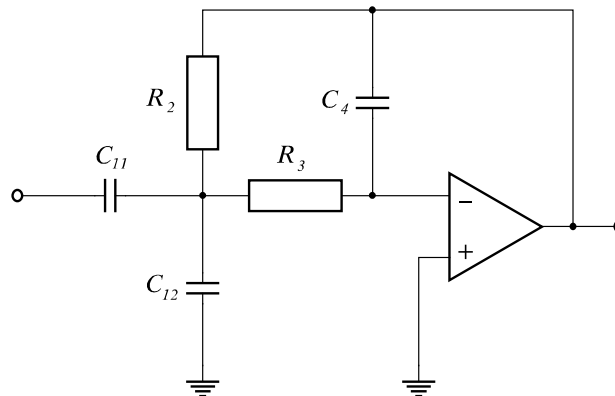
$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot \sqrt{P \cdot C_2 \cdot C_3}} \quad R_4 = P \cdot R_1$$

$$K_0 = Q_p^2 \cdot (1 + C_3 / C_2)$$

- si $K = K_0$ ou $K > K_0$ alors $R_{11} = R_1$ $R_{12} = \infty$
sinon : $R_{11} = R_1 \cdot K_0 / K$ $R_{12} = R_1 \cdot K_0 / (K_0 - K)$

I.2.2

Passe-bande de type C à faible facteur de qualité



$$H(p) = -K \cdot \frac{(\omega_p / Q_p) \cdot p}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$C_1 = C_{11} + C_{12} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{C_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot C_4}$$

$$K = \frac{C_{11}}{C_{11} + C_{12}} \cdot K_0 \quad Q_p = \frac{\sqrt{(R_3 \cdot C_1) / (R_2 \cdot C_4)}}{1 + R_3 / R_2}$$

$$K_0 = \Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot \sqrt{(C_1 \cdot R_2) / (C_4 \cdot R_3)}$$

Calcul des composants :

- fournir en données: f_p , Q_p , C_{11} , C_{12} (peut valoir 0) et C_4 (!!! Il faut que $(C_{11} + C_{12}) \geq 4Q_p^2 \cdot C_4$)
- calculer:

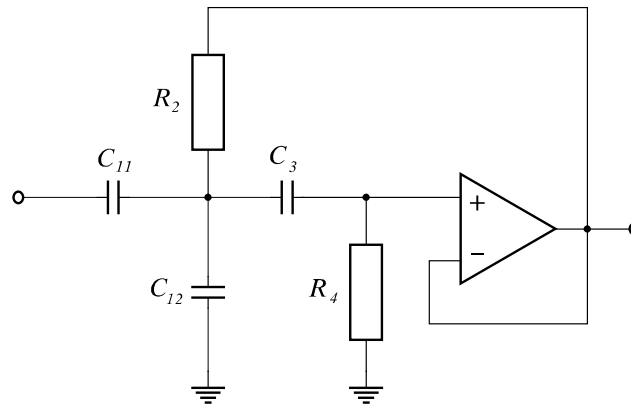
$$C_1 = C_{11} + C_{12}$$

$$P = \left(\frac{1}{2Q_p^2} \cdot \frac{C_1}{C_4} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q_p^2} \cdot \frac{C_1}{C_4} - 1 \right)^2 - 1}$$

$$R_2 = \frac{1}{1\pi f_p \cdot \sqrt{P \cdot C_1 \cdot C_4}} \quad R_3 = P \cdot R_2$$

$$K_0 = Q_p \cdot \sqrt{C_1 / (P \cdot C_4)} \quad K = K_0 \cdot C_{11} / C_1$$

I.3 Passe-haut à faible facteur de qualité



$$H(p) = K \cdot \frac{p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$C_1 = C_{11} + C_{12} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{C_1 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot R_4}$$

$$K = \frac{C_{11}}{C_{11} + C_{12}} \quad Q_p = \frac{\sqrt{(R_4 \cdot C_1) / (R_2 \cdot C_3)}}{1 + C_1 / C_3}$$

Calcul des composants :

- fournir en données: f_p , Q_p , C_{11} , C_{12} (peut valoir 0) et C_3
- calculer :

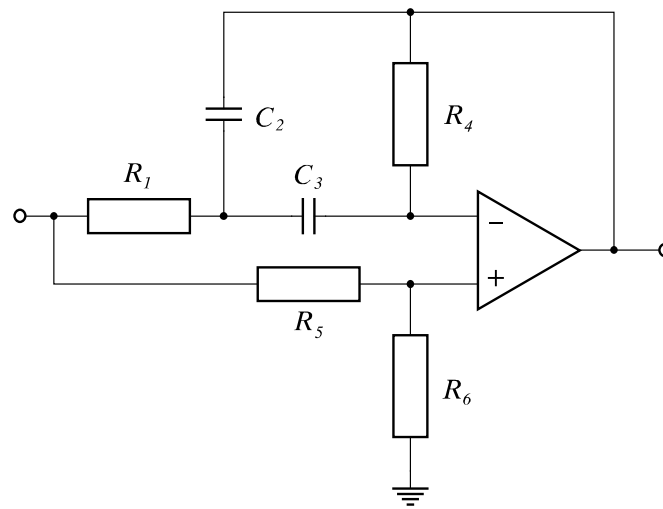
$$C_1 = C_{11} + C_{12}$$

$$P = Q_p^2 \cdot (2 + C_1 / C_3 + C_3 / C_1)$$

$$R_2 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot \sqrt{P \cdot C_1 \cdot C_3}} \quad R_4 = P \cdot R_2$$

$$K = C_{11} / C_1$$

I.4 Passe-tout à faible facteur de qualité



$$H(p) = K \cdot \frac{p^2 - (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec:

$$\omega_p^2 = \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_4} \quad 2 \cdot \left(\frac{1}{R_4 \cdot C_2} + \frac{1}{R_4 \cdot C_3} \right) = \frac{1}{R_1 \cdot C_2} \cdot \frac{R_5}{R_6}$$

$$K = \frac{R_6}{R_5 + R_6} \quad Q_p = \frac{\sqrt{R_4 / R_1}}{\sqrt{C_2 / C_3} + \sqrt{C_3 / C_2}}$$

Calcul des composants :

- fournir en données: f_p , Q_p , C_2 , C_3 et R_6 (en option)
- calculer :

$$P = Q_p^2 \cdot (2 + C_2 / C_3 + C_3 / C_2)$$

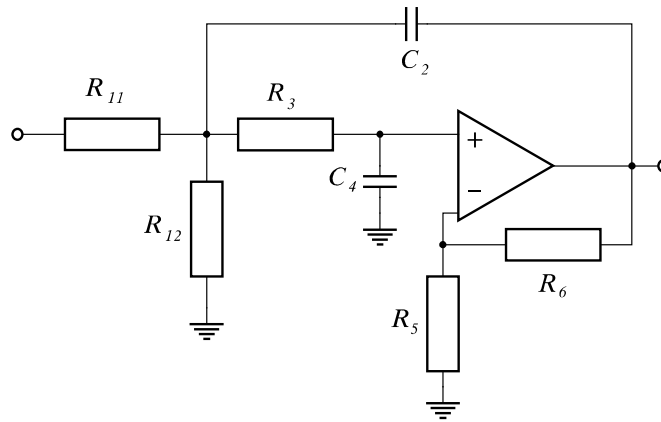
$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot \sqrt{P \cdot C_2 \cdot C_3}} \quad R_4 = P \cdot R_1$$

- si $R_6 = 0$ alors $R_6 = 10000$
- calculer :

$$R_5 = R_6 \cdot (1 + C_2 / C_3) \cdot 2 / P \quad K = R_6 / (R_5 + R_6)$$

ANNEXE II
CELLULES DU SECOND DEGRE A
FACTEUR DE QUALITE COMPRIS
ENTRE 2 ET 20

II.1 Passe-bas à moyen facteur de qualité



$$H(p) = K \cdot \frac{\omega_p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

$$R_1 = \frac{R_{11} \cdot R_{12}}{R_{11} + R_{12}}$$

$$\omega_p^2 = \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot C_4}$$

$$K = \frac{R_{12}}{R_{11} + R_{12}} \cdot (1 + R_6 / R_5)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{(R_3 \cdot C_2) / (R_1 \cdot C_4)}}{1 + R_3 / R_1 - R_6 \cdot C_2 / (R_5 \cdot C_4)}$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot \sqrt{(R_1 \cdot C_2) / (R_3 \cdot C_4)} \cdot (1 + R_6 / R_5)^2$$

Réglage : f_p par R_3 et Q_p par R_6

Calcul des composants :

- fournir en données: f_p , Q_p , C_2 , C_4 , K , R_5 (en option)
- pour obtenir le produit gain-sensibilité minimum, utiliser la valeur de P suivante :

$$P = \frac{C_2 / C_4}{36 Q_p^2} \left[\sqrt{1 + 12 Q_p^2 \cdot (1 + C_4 / C_2)} + 1 \right]^2$$

- calculer :

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot \sqrt{P \cdot C_2 \cdot C_4}} \quad R_3 = P \cdot R_1$$

- affecter à R_5 la valeur nominale de résistance et calculer :

$$R_6 = R_5 \left[(1 + P) \cdot C_4 / C_2 - 1 / Q_p \cdot \sqrt{P \cdot C_4 / C_2} \right] \quad K_0 = 1 + R_6 / R_5$$

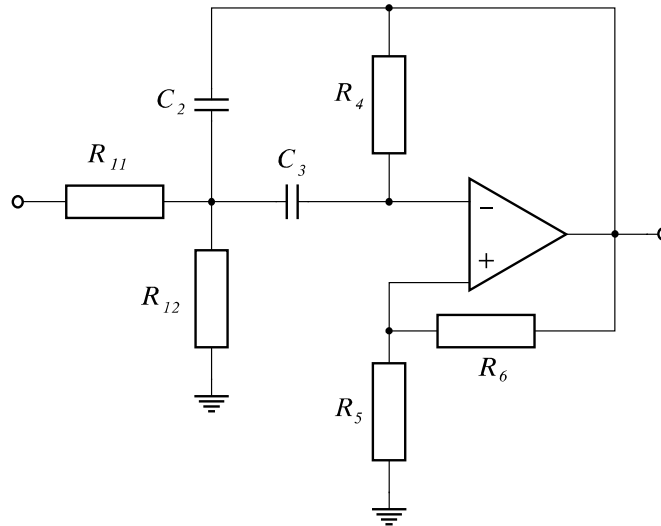
$$GSP = Q_p \cdot K_0^2 \cdot \sqrt{C_2 / (P \cdot C_4)}$$

- si $K = K_0$ ou $K > K_0$ alors $R_{11} = R_1$, $R_{12} = \infty$ et $K = K_0$
sinon $R_{11} = R_1 \cdot K_0 / K$, $R_{12} = R_1 \cdot K_0 / (K_0 - K)$

NB : On peut éventuellement recommencer les calculs avec une autre valeur de P choisie par l'utilisateur.

II.2 Passe-bande à moyen facteur de qualité

II.2.1 Passe-bande de type R à moyen facteur de qualité



$$H(p) = -K \cdot \frac{(\omega_p / Q_p) \cdot p}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$R_1 = \frac{R_{11} \cdot R_{12}}{R_{11} + R_{12}} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_4}$$

$$K = \frac{R_{12}}{R_{11} + R_{12}} \cdot Q_p \cdot (1 + R_5 / R_6) \cdot \sqrt{(C_3 \cdot R_4) / (R_1 \cdot C_2)}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{(C_2 \cdot R_4) / (R_1 \cdot C_3)}}{1 + C_2 / C_3 - R_4 \cdot R_5 / (R_1 \cdot R_6)}$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot \sqrt{(C_3 \cdot R_4) / (R_1 \cdot C_2)} \cdot (1 + R_5 / R_6)^2$$

Réglage : f_p par R_4 et Q_p par R_5

Calcul des composants :

- fournir en données: f_p , Q_p , C_2 , C_3 , K , R_6 (en option)
- pour obtenir le terme produit gain-sensibilité minimum, utiliser la valeur de P suivante :

$$P = \frac{C_2 / C_3}{4Q_p^2} \cdot \left[\sqrt{1 + 12Q_p^2 \cdot (1 + C_3 / C_2)} - 1 \right]^2$$

- calculer :

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot \sqrt{P \cdot C_2 \cdot C_3}} \quad R_4 = P \cdot R_1$$

- affecter à R_6 la valeur nominale de résistance et calculer :

$$R_5 = R_6 \cdot \left[(1 + C_2 / C_3) / P - 1 / Q_p \cdot \sqrt{C_2 / (P \cdot C_3)} \right]$$

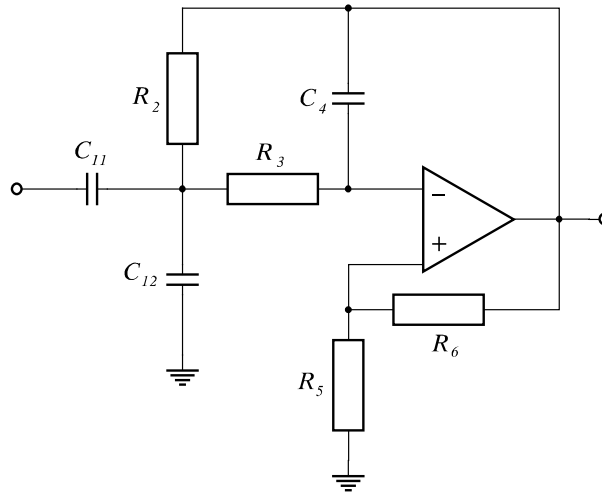
$$K_0 = Q_p \cdot (1 + R_5 / R_6) \cdot \sqrt{P \cdot C_3 / C_2}$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = (1 + R_5 / R_6) \cdot K_0$$

- si $K = K_0$ ou $K > K_0$, alors $R_{11} = R_1$, $R_{12} = \infty$ et $K = K_0$
 sinon $R_{11} = R_1 \cdot K_0 / K$, $R_{12} = R_1 \cdot K_0 / (K_0 - K)$

NB : On peut éventuellement recommencer les calculs avec une autre valeur de P choisie par l'utilisateur.

II.2.2 Passe-bande de type C à moyen facteur de qualité



(même $H(p)$ que pour la structure précédente)

$$C_1 = C_{11} + C_{12} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{C_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot C_4}$$

$$K = \frac{C_{11}}{C_{11} + C_{12}} \cdot Q_p \cdot (1 + R_5 / R_6) \cdot \sqrt{(C_1 \cdot R_2) / (R_3 \cdot C_4)}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{(R_3 \cdot C_1) / (R_2 \cdot C_4)}}{1 + R_3 / R_2 - C_1 \cdot R_5 / (C_4 \cdot R_6)}$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot \sqrt{(R_2 \cdot C_1) / (R_3 \cdot C_4)} \cdot (1 + R_5 / R_6)^2$$

Réglage : f_p par R_2 ou R_3 et Q_p par R_5

Calcul des composants :

- fournir en données : f_p , Q_p , C_{11} , C_{12} , C_4 , R_6 (en option)
- pour obtenir le terme produit gain-sensibilité minimum, utiliser la valeur de P suivante:

$$C_1 = C_{11} + C_{12}$$

$$P = \frac{C_1 / C_4}{36 Q_p^2} \cdot \left[\sqrt{1 + 12 Q_p^2 \cdot (1 + C_4 / C_1)} + 1 \right]^2$$

- calculer :

$$R_2 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot \sqrt{P \cdot C_1 \cdot C_4}} \quad R_3 = P \cdot R_2$$

- affecter à R_6 la valeur nominale de résistance et calculer :

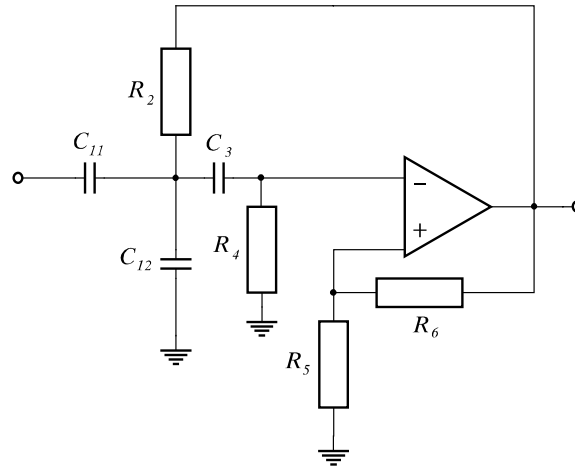
$$R_5 = R_6 \cdot \left[(1 + P) \cdot C_4 / C_1 - 1 / Q_p \cdot \sqrt{P \cdot C_4 / C_1} \right]$$

$$K = C_{11} / C_1 \cdot (1 + R_5 / R_6) \cdot Q_p \cdot \sqrt{C_1 / (P \cdot C_4)}$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot (1 + R_5 / R_6)^2 \cdot \sqrt{C_1 / (P \cdot C_4)}$$

NB : On peut éventuellement recommencer les calculs avec une autre valeur de P choisie par l'utilisateur.

II.3 Passe-haut à moyen facteur de qualité



$$H(p) = K \cdot \frac{p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

$$C_1 = C_{11} + C_{12}$$

$$\omega_p^2 = \frac{1}{C_1 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot R_4}$$

$$K = \frac{C_{11}}{C_{11} + C_{12}} \cdot (1 + R_6 / R_5)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{(R_4 \cdot C_1 (R_2 \cdot C_3))}}{1 + C_1 / C_3 - R_4 \cdot R_6 / (R_2 \cdot R_5)}$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot \sqrt{(R_4 \cdot C_3) / (R_2 \cdot C_1)} \cdot (1 + R_6 / R_5)^2$$

Réglage : f_p par R_2 ou R_3 et Q_p par R_5

Calcul des composants :

- fournir en données : f_p , Q_p , C_{11} , C_{12} , C_4 , R_6 (en option)
- pour obtenir le terme produit gain-sensibilité minimum, utiliser la valeur de P suivante :

$$C_1 = C_{11} + C_{12} \quad P = \frac{C_1 / C_3}{4Q_p^2} \cdot \left[\sqrt{1 + 12Q_p^2 \cdot (1 + C_3 / C_1)} - 1 \right]^2$$

- calculer :

$$R_2 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot \sqrt{P \cdot C_1 \cdot C_3}} \quad R_4 = P \cdot R_2$$

- affecter à R_5 la valeur nominale de résistance et calculer :

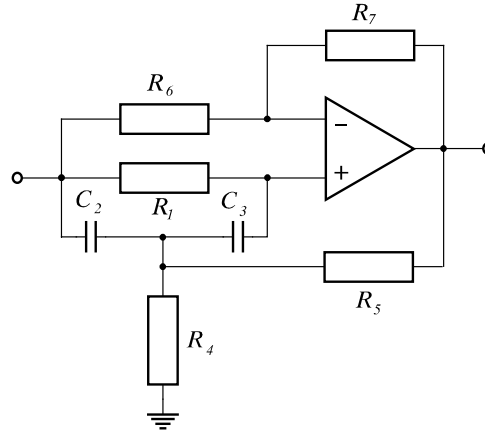
$$R_6 = R_5 \cdot \left[(1 + C_1 / C_3) \cdot 1 / P - 1 / Q_p \cdot \sqrt{C_1 / (P \cdot C_3)} \right]$$

$$K = C_{11} / C_1 \cdot (1 + R_6 / R_5)$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot (1 + R_6 / R_5)^2 \cdot \sqrt{P \cdot C_3 / C_1}$$

NB : On peut éventuellement recommencer les calculs avec une autre valeur de P choisie par l'utilisateur.

II.4 Passe-tout à moyen facteur de qualité



$$H(p) = \frac{p^2 - (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

$$R_p = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_p}$$

$$Q_p = \frac{\omega_p}{1/(R_1 \cdot C_2) + 1/(R_1 \cdot C_3) + 1/(R_4 \cdot C_2) - (R_7 / R_6) \cdot (R_5 \cdot C_2)}$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot \sqrt{(R_1 \cdot C_3) / (R_p \cdot C_2)} \cdot R_p / R_5 \cdot (1 + R_7 / R_6)^2$$

Réglage : f_p par R_1 , $|H(j\omega)| = 1$ par R_4 et Q_p par R_7

Calcul des composants :

- fournir en données: f_p , Q_p , C_2 , C_3 , R_6 (en option)
- pour obtenir le terme produit gain-sensibilité minimum, utiliser pour P :

$$x = C_2 / C_3 \quad P = \frac{2Q_p^2 \cdot (1+x) - x}{6Q_p^2 \cdot (1+x)^2} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{6Q_p^2 \cdot (1+x)^2}{2Q_p^2 \cdot (1+x) - x} \right)^2 \cdot \frac{1}{3 \cdot (1+x)^2}} - 1 \right]$$

- calculer:

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot \sqrt{P \cdot C_2 \cdot C_3}} \quad R_p = P \cdot R_1$$

- affecter à R_6 la valeur nominale de résistance et calculer :

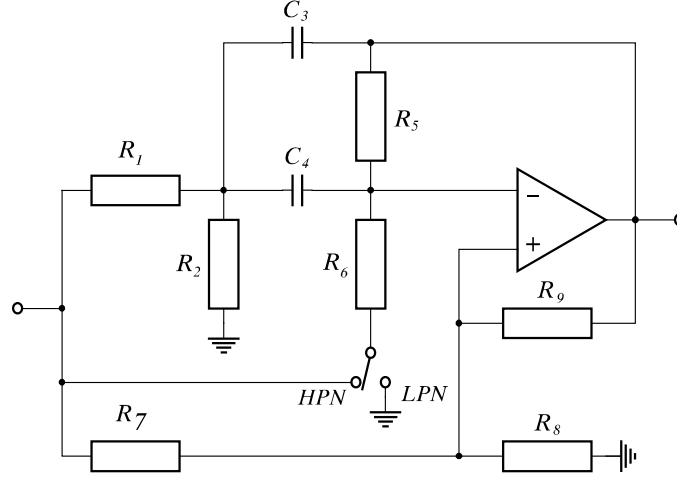
$$R_7 = R_6 \cdot \left[(1 + C_2 / C_3) \cdot P + 1 / Q_p \cdot \sqrt{P \cdot C_2 / C_3} \right]$$

$$\alpha = 1 - \frac{2 \cdot \sqrt{P \cdot C_2 / C_3}}{Q_p \cdot (1 + R_7 / R_6)} \quad R_5 = R_p / \alpha \quad R_4 = R_p / (1 - \alpha)$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = \alpha \cdot Q_p \cdot (1 + R_7 / R_6)^2 \cdot \sqrt{C_3 / (P \cdot C_2)}$$

NB : On peut éventuellement recommencer les calculs avec une autre valeur de P choisie par l'utilisateur.

II.5 Réjecteur de fréquence à moyen facteur de qualité



$$H(p) = K \cdot \frac{p^2 + \omega_z^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$K = \frac{R_8}{R_7 + R_8} \quad \omega_p^2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot C_4} \cdot \left[\frac{1}{R_5} - \frac{R_7 \cdot R_8}{R_6 \cdot R_9 \cdot (R_7 + R_8)} \right]$$

LPN (low-pass network : $\omega_z > \omega_p$) : cas passe-bas

$$\omega_z^2 = \frac{(R_1 + R_2) \cdot (R_5 + R_6)}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot R_5 \cdot R_6}$$

$$\frac{C_4}{R_2} + \frac{(C_3 + C_4) \cdot (R_5 + R_6)}{R_5 \cdot R_6} = \frac{C_4 \cdot R_7 \cdot (R_8 + R_9)}{R_1 \cdot R_8 \cdot R_9}$$

$$Q_p = \frac{\omega_p}{\frac{C_3 + C_4}{C_3 \cdot C_4} \cdot \left[\frac{1}{R_5} - \frac{R_7 \cdot R_8}{R_6 \cdot R_9 \cdot (R_7 + R_8)} - \frac{R_7 \cdot R_8 \cdot (R_1 + R_2)}{C_3 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_9 \cdot (R_7 + R_8)} \right]}$$

HPN (high-pass network : $\omega_z > \omega_p$) : cas passe-haut

$$\omega_z^2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot C_4} \cdot \left[\frac{1}{R_5} - \frac{R_7 \cdot (R_8 + R_9)}{R_6 \cdot R_8 + R_9} \right]$$

$$\frac{C_4}{R_2} + \frac{C_3 + C_4}{R_5} = \frac{R_7 \cdot (R_8 + R_9)}{R_8 \cdot R_9} \cdot \left(\frac{C_4}{R_1} + \frac{C_3 + C_4}{R_6} \right)$$

$$Q_p = \frac{\omega_p}{\frac{C_3 + C_4}{C_3 \cdot C_4} \cdot \left[\frac{1}{R_5} - \frac{R_7 \cdot R_8}{R_6 \cdot R_9 \cdot (R_7 + R_8)} \right] - \frac{R_7 \cdot R_8 \cdot (R_1 + R_2)}{C_3 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_9 \cdot (R_7 + R_8)}}$$

Calcul des composants (valable pour les deux cas):

- fournir en données: f_z , f_p , Q_p , C_3 , C_4 , K et R_9 (en option)

- dans la plage $0.1 < P < 0.3$, minimiser le produit gain-sensibilité :

- si $f_p = f_z$ alors arrêt sinon $x = 0.5 \cdot (1 + \text{sgn}(f_p - f_z))$

- calculer :

$$G = \frac{C_3}{2P} \cdot \frac{\omega_p}{Q_p} \cdot \left[\sqrt{1 + 4Q_p^2 \cdot P \cdot (1 + C_4/C_3)} - 1 \right]$$

$$K_0 = \frac{1 + P}{1 + (1 + C_4/C_3) \cdot \omega_z^2 \cdot (C_3/G)^2}$$

- si $K \geq K_0$ alors: $K = K_0$ et $R_1 = 1/G$ $R_2 = \infty$

sinon $R_1 = K_0/(G \cdot K)$ $R_2 = 1/(G \cdot (1 - K/K_0))$

- Calculer :

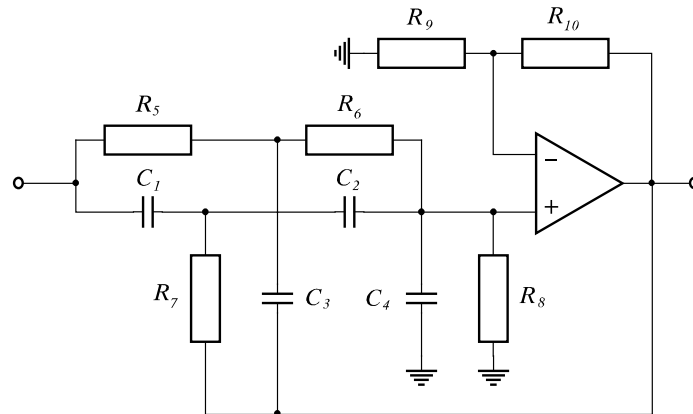
$$R_6 = \frac{G \cdot (1 + P) \cdot (1 - x/K)}{C_3 \cdot C_4 \cdot (\omega_z^2 - \omega_p^2)} \quad R_5 = \frac{1}{C_3 \cdot C_4 \cdot \omega_p^2 / G + P/R_6}$$

- $R_7 = R_9 \cdot P/K$ $R_8 = R_9 \cdot P/(1 - K)$ et on affecte à R_9 la valeur nominale de résistance. Calculer enfin :

$$\Gamma_A^{Q_p} = \frac{1 + P}{2} \cdot \left\{ \left| 1 - \frac{Q_p}{\omega_p} \cdot \left[\frac{G}{C_3} + \frac{(C_3 + C_4) \cdot (R_5 + R_6)}{C_3 \cdot C_4 \cdot R_5 \cdot R_6} \right] \right| + Q_p \cdot \left| 1 - \frac{G \cdot (R_5 + R_6)}{\omega_p^2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot R_5 \cdot R_6} \right| \right\}$$

Remarque

Cette cellule comporte peu de capacités (2), elle permet de minimiser la sensibilité via le choix de P , mais elle ne conduit pas à des possibilités de réglage, c'est pourquoi on utilise aussi une autre structure, qui correspond à la même fonction de transfert :



$$C_S = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad R_S = R_5 + R_6 \quad K = \frac{1 + R_{10}/R_9}{1 + C_4/C_S}$$

$$\omega_z^2 = \frac{1}{R_5 \cdot R_6 \cdot C_S \cdot C_3} = \frac{1}{R_S \cdot R_7 \cdot C_1 \cdot C_2}$$

$$\omega_p = \omega_z \cdot \sqrt{(1 + R_S/R_8)/(1 + C_4/C_S)}$$

$$Q' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(1 + C_2 / C_1) \cdot (1 + C_2 / C_3)}}$$

$$Q_p = Q' \cdot \frac{(1 + C_4 / C_S) \cdot \omega_p / \omega_z}{Q' \cdot (1 / (R_8 \cdot C_S \cdot \omega_z) + R_S \cdot C_S \cdot \omega_z) - R_{10} / R_9}$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot (1 + R_{10} / R_9)^2 \cdot \frac{\sqrt{R_5 \cdot C_3 / (R_6 \cdot C_S)} + \sqrt{R_S \cdot C_2 / (R_7 \cdot C_1)}}{(1 + C_4 / C_S) \cdot \omega_p / \omega_z}$$

Réglage : f_z avec R_5 , R_6 et R_7 itérativement; f_p avec R_8 ; Q_p avec R_{10}

Calcul des composants :

- fournir en données: f_z , f_p , Q_p , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , et R_9 (en option)

!!! il faut :

$$C_4 \geq (f_z^2 / f_p^2 - 1) \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

- calculer :

$$Q' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(1 + C_2 / C_1) \cdot (1 + C_2 / C_3)}} \quad C_S = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$R_5 = \frac{1}{2 \omega_z \cdot Q' \cdot (C_2 + C_3)} \quad R_6 = \frac{(1 + C_1 / C_2)}{R_5 \cdot \omega_z^2 \cdot C_2 \cdot C_3}$$

$$R_S = R_5 + R_6 \quad R_7 = \frac{1}{R_S \cdot \omega_z^2 \cdot C_1 \cdot C_2}$$

$$H = (1 + C_4 / C_S) \cdot (\omega_p / \omega_z)_2 - 1$$

$$\text{si } H = 0 \text{ alors } R_8 = \infty$$

$$\text{si } H > 0 \text{ alors } R_8 = (R_5 + R_6) / H$$

- affecter à R_9 la valeur nominale de résistance et calculer :

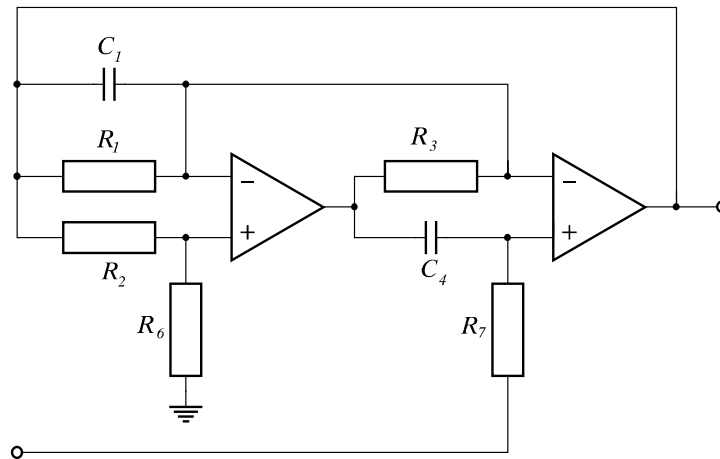
$$R_{10} = R_9 \cdot Q' \left[\frac{1}{R_8 \cdot C_S \cdot \omega_z} + R_S \cdot C_4 \cdot \omega_z - \frac{(1 + C_4 / C_S) \cdot \omega_p / \omega_z}{Q_p} \right]$$

$$\Gamma_A^{Q_p} = Q_p \cdot (1 + R_{10} / R_9)^2 \cdot \frac{\sqrt{R_5 \cdot C_3 / (R_6 \cdot C_S)} + \sqrt{(R_S \cdot C_2 / (R_7 / C_1))}}{(1 + C_4 / C_S) \cdot \omega_p / \omega_z}$$

$$K = \frac{1 + R_{10} / R_9}{1 + C_4 / C_S}$$

ANNEXE III
CELLULES DU SECOND DEGRE A
FACTEUR DE QUALITE
SUPERIEUR A 20

III.1 Passe-bas à facteur de qualité élevé



$$H(p) = K \cdot \frac{\omega_p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$K = 1 + R_2 / R_6 \quad \omega_p^2 = \frac{R_6}{R_2 \cdot R_3 \cdot R_7 \cdot C_1 \cdot C_4} \quad Q_p = \omega_p \cdot R_1 \cdot C_1$$

Réglage : f_p par R_7 , Q_p par R_1 .

Calcul des composants :

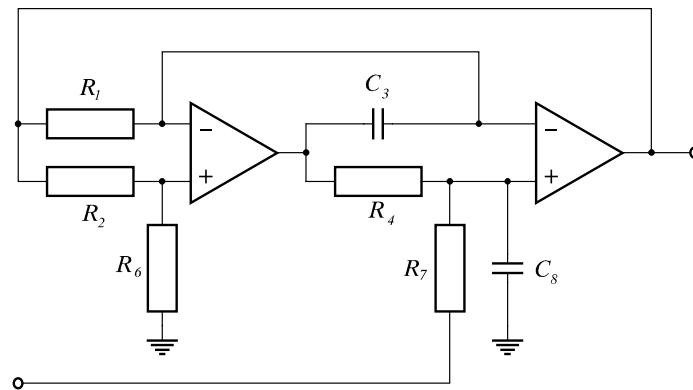
- fournir en données: f_p , Q_p , C
- calculer :

$$R_0 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot C}$$

- entrer en donnée : R_d la valeur discrète proche de R_0
- calculer :

$$\begin{aligned} C_1 = C_4 = C & & R_2 = R_3 = R_6 = R_d & & K = 2 \\ R_1 = Q_p \cdot R_0 & & R_7 = R_0^2 / R_d & & \end{aligned}$$

III.2 Passe-bande à facteur de qualité élevé



$$H(p) = K \cdot \frac{(\omega_p / Q_p) \cdot p}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$K = 1 + R_2 / R_6 \quad \omega_p^2 = \frac{R_2}{R_1 \cdot R_4 \cdot R_6 \cdot C_3 \cdot C_8} \quad Q_p = \omega_p \cdot R_7 \cdot C_8$$

Réglage : f_p par R_4 , Q_p par R_7 .

Calcul des composants :

- fournir en données: f_p , Q_p , C
- calculer :

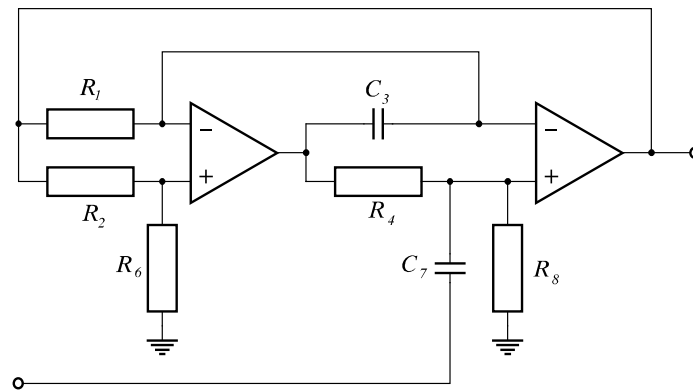
$$R_0 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot C}$$

- entrer en donnée : R_d la valeur discrète proche de R_0
- calculer :

$$C_3 = C_8 = C \quad R_1 = R_2 = R_6 = R_d \quad K = 2$$

$$R_7 = Q_p \cdot R_0 \quad R_4 = R_0^2 / R_d$$

III.3 Passe-haut à facteur de qualité élevé



$$H(p) = K \cdot \frac{p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$K = 1 + R_2 / R_6 \quad \omega_p^2 = \frac{R_2}{R_1 \cdot R_4 \cdot R_6 \cdot C_3 \cdot C_7} \quad Q_p = \omega_p \cdot R_8 \cdot C_7$$

Réglage : f_p par R_4 , Q_p par R_8 .

Calcul des composants :

fournir en données: f_p , Q_p , C

calculer :

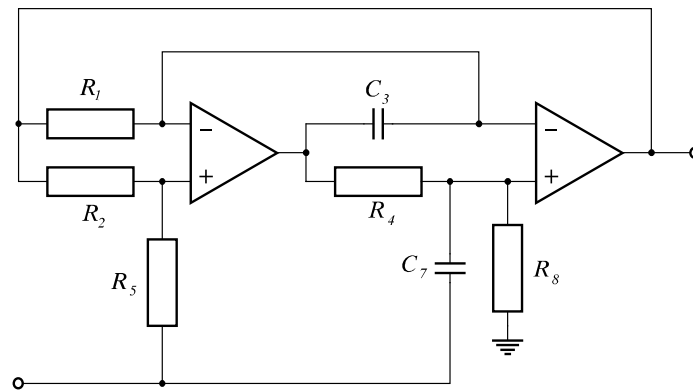
$$R_0 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot C}$$

entrer en donnée : R_d la valeur discrète proche de R_0

calculer :

$$\begin{aligned} C_3 = C_7 = C & & R_1 = R_2 = R_6 = R_d & & K = 2 \\ R_8 = Q_p \cdot R_0 & & R_4 = R_0^2 / R_d & & \end{aligned}$$

III.4 Passe-tout à facteur de qualité élevé



$$H(p) = \frac{p^2 - (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$\omega_p^2 = \frac{R_2}{R_1 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot C_3 \cdot C_7} \quad Q_p = \omega_p \cdot R_8 \cdot C_7$$

Réglage : f_p par R_4 , Q_p par R_8 .

Calcul des composants :

- fournir en données: f_p , Q_p , C
- calculer :

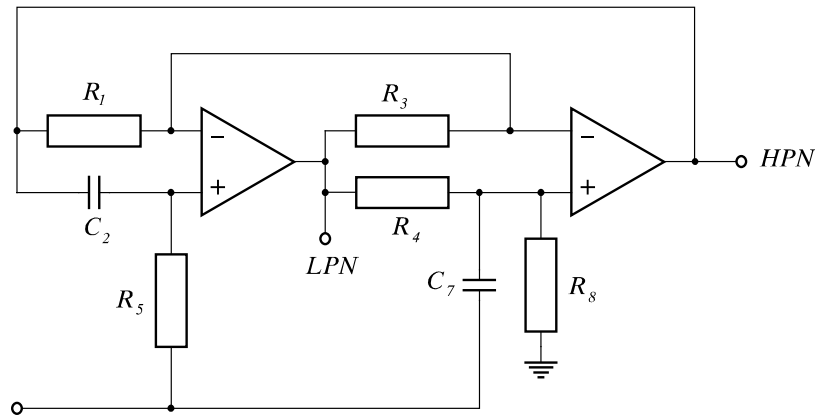
$$R_0 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot C}$$

- entrer en donnée : R_d la valeur discrète proche de R_0
- calculer :

$$C_3 = C_7 = C \quad R_1 = R_2 = R_5 = R_d$$

$$R_8 = Q_p \cdot R_0 \quad R_4 = R_0^2 / R_d$$

III.5 Réjecteur de fréquence à facteur de qualité élevé



$$H(p) = \frac{p^2 + \omega_z^2}{p^2 + (\omega_p / Q_p) \cdot p + \omega_p^2}$$

avec :

$$\omega_p^2 = \frac{R_3}{R_1 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot C_2 \cdot C_7} \quad Q_p = \omega_p \cdot C_7 \cdot R_8$$

$$\omega_{zlpn} = \omega_p \cdot \sqrt{1 + R_4 / R_8} \quad \omega_{zhpn} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - R_1 \cdot R_4 / (R_3 \cdot R_8)}$$

Réglage : f_p par R_4 , f_p par R_5 , Q_p par R_8 .

Calcul des composants :

- fournir en données: f_z , f_p , Q_p , C
- calculer :

$$R_0 = \frac{1}{2\pi f_p \cdot C}$$

- entrer en donnée : R_d la valeur discrète proche de R_0
- calculer :

$$C_2 = C_7 = C \quad R_1 = R_3 = R_d$$

$$R_8 = Q_p \cdot R_0$$

- cas LPN (type passe-bas : $\omega_z > \omega_p$) : $R_4 = R_8 \cdot (1 - (\omega_z / \omega_p)^2)$
- cas HPN (type passe-haut : $\omega_z < \omega_p$) : $R_4 = R_8 \cdot ((\omega_z / \omega_p)^2 - 1)$
- et finalement :

$$R_5 = R_0^2 / R_4$$

BIBLIOGRAPHIE

Les présentes notes de cours ont bénéficié d'apports provenant de l'ensemble des ouvrages mentionnés ci-dessous, et plus particulièrement de [5], [8] et [9].

- [1] R.W.DANIELS, "Approximation methods for the design of passive, active and digital filters", McGRAW HILL BOOK Company, 1974.
- [2] A.J.GROSSMAN, "Synthesis of TCHEBYCHEFF parameters symmetrical filters", Proc. IRE, V.45, pp.454-473, april 1975.
- [3] A.ANTONIOU, "Digital filters: analysis and design", McGRAW HILL, New York, 1979.
- [4] G.C.TEMES and S.K.MITRA(Eds), "Modern Filter Theory and Design", John Wiley and Sons, New York, 1973.
- [5] G.S.MOSCYTZ, "Linear Integrated Networks: Design", Van Nostrand Reinhold Co, New York, 1975.
- [6] A.S.SEDRA and P.O.BRACKETT, "Filter Theory and Design: Active and Passive", Matrix Publishers, Inc., Illinois 1978.
- [7] S.K.MITRA, "Analysis and Synthesis of Linear Active Networks", John Wiley and Sons, New York, 1969.
- [8] R. SCHAUMANN, M. S. GHAI, K. R. LAKER, "Design of Analog Filters", Prentice Hall Series in Electrical and Computer Engineering, 1990.
- [9] H. LEICH, "Théorie des Circuits", notes de cours, éditions des étudiants de la Faculté Polytechnique de Mons, chap. 15, 1997.
- [10] P. DENBIGH, "System Analysis & Signal Processing", Addison-Wesley, 1998.