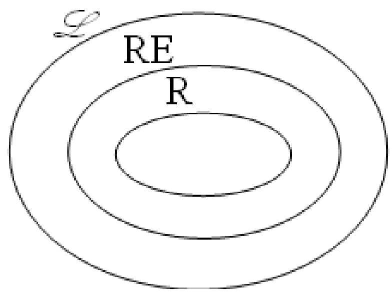
Retomando la clase anterior

Def.: un lenguaje L es recursivamente enumerable (RE) sii existe una MT M que lo acepte, es decir L = L(M).

Def.: un lenguaje L es recursivo o decidible (R) sii existe una MT M que lo acepta y siempre se detiene.

Nota: $\mathscr{L}$ es el conjunto de todos los lenguajes definidos sobre el alfabeto Σ, es decir $\mathscr{L} = \rho(\Sigma^*)$

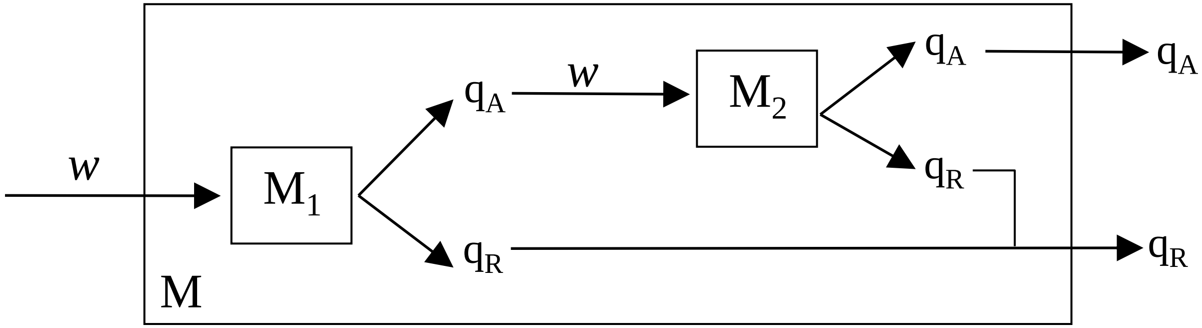


$$\underbrace{R \subseteq RE \subseteq \mathscr{L}}_{\text{por las definiciones}}$$

Interrogantes: ¿Las inclusiones son propias?

Es decir
$$\begin{cases} ¿\mathscr{L} - RE \neq \emptyset? \\ \\ ¿RE - R \neq \emptyset? \end{cases}$$

Ejercicio: Sean $L_1 \in R$ y $L_2 \in R$ ¿$L_1 \cap L_2 \in R$?



Rta.: sí $L_1 \cap L_2 \in R$

Dem.: Sean M_1 y M_2 MT de **una sola cinta** tq $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$

$$M_1 = \langle Q^1, \Sigma, \Gamma^1, \delta^1, q_0{}^1, q_A{}^1, q_R{}^1 \rangle$$

con $Q^1 \cap Q^2 = \varnothing$

$$M_2 = \langle Q^2, \Sigma, \Gamma^2, \delta^2, q_0{}^2, q_A{}^2, q_R{}^2 \rangle$$

Se construye una MT de **dos cintas** que funciona de la siguiente manera:

1) Copia el string de entrada en la segunda cinta y posiciona el cabezal en el principio de la entrada en la 2da. cinta.

2) Simula M_1 sobre la cinta 2. Si M_1 para en q_R^1, M para en q_R, si M_1 para en q_A^1 ir al punto 3)

Para cada $\delta^1(q_i^1, a_k) = (q_j^1, a_m, X)$ se define

$\delta\,(q_i^1, (B, a_k)) = (q_j^1, (B, S), (a_m, X))$

$\delta(q_R^1, (B, x)) = (q_R, (B, S), (x, S)) \quad \forall x \in \Gamma^1$ (M_1 Rechaza)

$\delta(q_A^1, (B, x)) = (q_3, (B, S), (x, S)) \quad \forall x \in \Gamma^1$ (M_1 Acepta)

q_3 es el estado en el que comienza la ejecución del punto 3)

3) Borra la cinta 2

Pregunta: ¿Cómo saber cuánto borrar de la cinta 2? Tenga en cuenta que luego de simular M_1 la cinta posee cualquier string de Γ^*

4) Copia w de la cinta 1 a la cinta 2.

5) Simula M_2 sobre w en la cinta 2.

Si M_2 para en q_R^2, M para en q_R

Si M_2 para en q_A^2, M para en q_A

Demostrar como ejercicio que $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$ y que M se detiene siempre.

Con eso quedaría demostrado que $L_1 \cap L_2 \in R$.

Más definiciones

Def.: un lenguaje $L \in$ Co-R sii $\overline{L} \in R$ ($\overline{L}$ es el complemento de L respecto de Σ^*, es decir $\overline{L} = \Sigma^* - L$)

Def.: un lenguaje $L \in$ Co-RE sii $\overline{L} \in RE$

Más interrogantes:

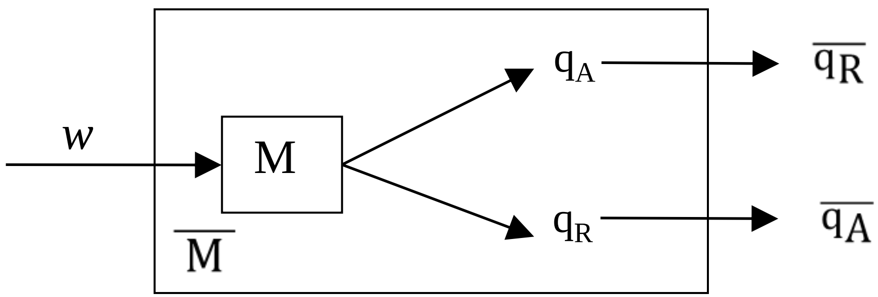
¿Qué relación habrá entre R, Co-R RE y Co-RE?

Teorema 1: $R \subseteq \text{Co-R}$

Demostración. Hay que demostrar que si $L \in R \Rightarrow L \in \text{Co-R}$, es decir que si $L \in R \Rightarrow \overline{L} \in R$.

Sea $L \in R \Rightarrow$ Existe una MT $M = <Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R>$ tq $L = L(M)$ y M se detiene en algún momento para toda entrada.

Se construye $\overline{M} = <Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \overline{q_A}, \overline{q_R}>$ con $\overline{q_A} = q_R$ y $\overline{q_R} = q_A$



Hay que probar que $L(\overline{M}) = \overline{L}$ y además que $\overline{M}$ se detiene en algún momento para toda entrada.

1) Sea $w \in L(\overline{M}) \Leftrightarrow q_0 w \vdash^{+}_{\bar{M}} \alpha_1 \overline{q_A} \alpha_2 \Leftrightarrow q_0 w \vdash^{+}_{M} \alpha_1 q_R \alpha_2 \Leftrightarrow w \notin L(M) \Leftrightarrow w \notin L \Leftrightarrow w \in \overline{L}$

def.L($\overline{M}$). Constr. def.L(M) Hip. def. $\overline{L}$

Por lo tanto, $L(\overline{M}) = \overline{L}$

2) ¿$\overline{M}$ se detiene para toda entrada?: Sí, por construcción $\overline{M}$ se detiene cuando M se detiene y por hipótesis M se detiene para toda entrada.

De 1) y 2) $L \in R \Rightarrow L \in$ Co-R

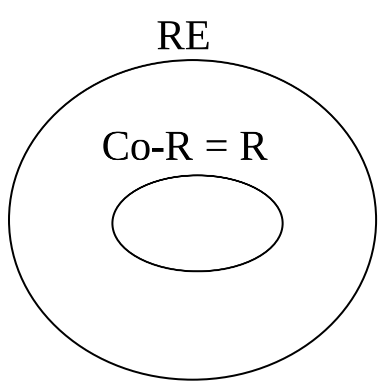
Por lo tanto, $R \subseteq$ Co-R

Teorema 2: $\text{Co-R} \subseteq \text{R}$

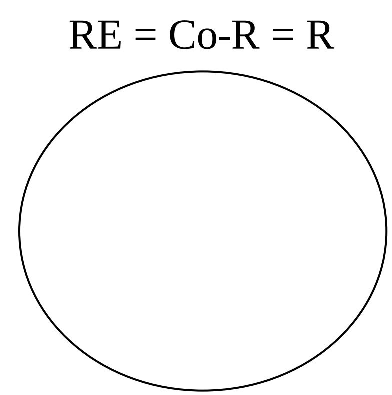
Sea $L \in \text{Co-R} \xRightarrow{\text{def.Co-R}} \overline{L} \in \text{R} \xRightarrow{\text{teor. ant.}} \overline{L} \in \text{Co-R} \xRightarrow{\text{def. Co-R}} \overline{\overline{L}} \in \text{R} \xRightarrow{\text{prop. de compl.}} L \in \text{R}$

Por lo tanto, $\text{Co-R} \subseteq \text{R}$

Corolario: de los dos teoremas anteriores surge que R = Co-R



O bien

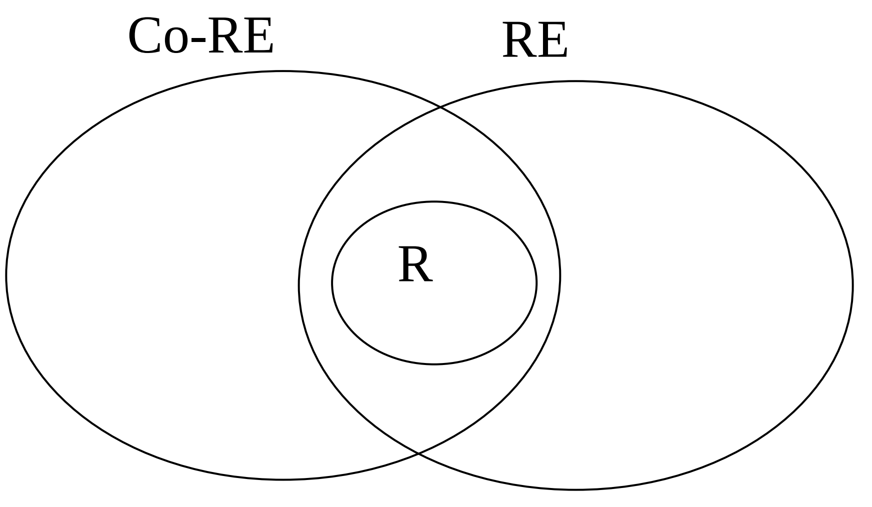


Teorema 3: $R \subseteq$ Co-RE

Dem.: Sea $L \in R \underset{\text{teor. 1}}{\Rightarrow} \overline{L} \in R \underset{\text{(def.R y RE)}}{\Rightarrow} \overline{L} \in RE \underset{\text{def. Co-RE}}{\Rightarrow} L \in$ Co-RE

Por lo tanto, $R \subseteq$ Co-RE.

Además, como por definición $R \subseteq RE$ se tiene que $R \subseteq (RE \cap \text{Co-RE})$



Teorema 4: $(RE \cap \text{Co-}RE) \subseteq R$

Sea $L \in (RE \cap \text{Co-}RE)$

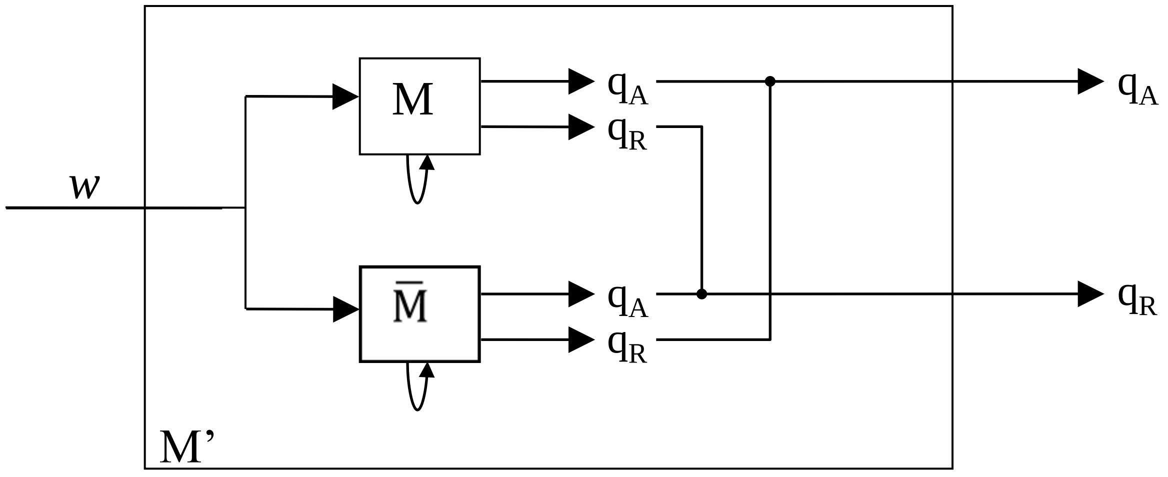
$\Rightarrow L \in RE \wedge \overline{L} \in RE$ (por def. de $\cap$ y de Co-RE)

$\Rightarrow$ existen M y $\overline{M}$, dos MT tq $L = L(M)$ y $\overline{L} = L(\overline{M})$

Hay que construir una MT M' que reconozca L y que se detenga siempre.

$\forall w \in \Sigma^*$ o bien $\overline{M}$ para en q_A o bien M para en q_A (no puede darse nunca el caso que ambas "loopeen").

Por lo tanto hay que construir M' simulando en paralelo M y $\overline{M}$, si M para en q_A o $\overline{M}$ para en $q_R \Rightarrow$ M' para en q_A y si M para en q_R o $\overline{M}$ en $q_A \Rightarrow$ M' para en q_R.



¿Cómo simular dos máquinas en paralelo? No importa la eficiencia, en una máquina de 4 cintas:

1) Escribir el número 1 en la cinta 4 (sea *i* ese valor).

2) Copiar w a las cintas 2 y 3.

3) Simular a lo sumo *i* pasos de M en la cinta 2 y a lo sumo *i* pasos de $\overline{M}$ en la cinta 3. si M para en q_A o $\overline{M}$ para en $q_R \Rightarrow$ M' para en q_A y si M para en q_R o $\overline{M}$ para en $q_A \Rightarrow$ M' para en q_R.

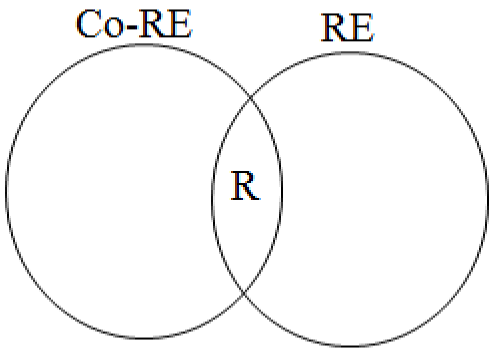
4) Borrar las cintas 2 y 3. Incrementar *i* en la cinta 4 y volver al punto 2.

Demostrar como ejercicio que L = L(M') y que M' se detiene siempre.

Pregunta: ¿Cómo se pueden simular *i* pasos?

Corolario: $(RE \cap Co\text{-}RE) = R$ (por los teoremas 3 y 4)

Por lo tanto hasta ahora nuestra situación es:



O bien