Modelo de Máquina de Turing q_A, q_R

El nuevo modelo se define como

$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R \rangle$ con $q_A, q_R \notin Q$

Donde:

Q, Σ, Γ y q_0 se definen como en el modelo original

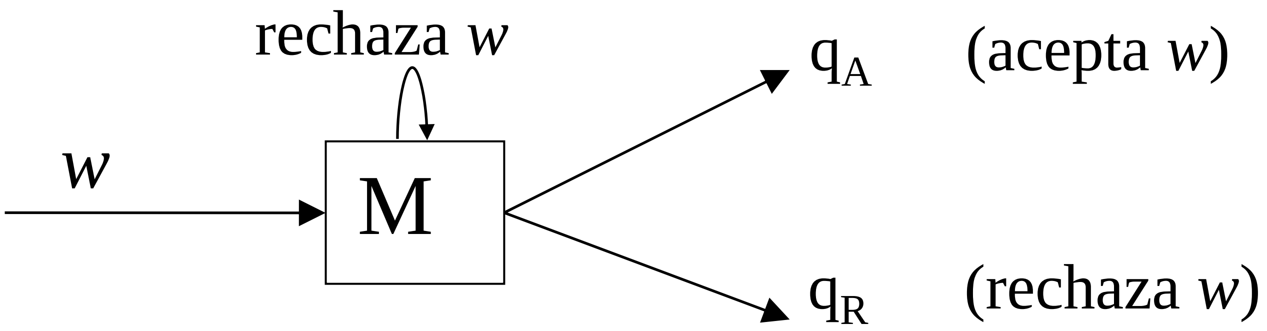
$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \cup \{q_A, q_R\} \times \Gamma \times \{D, I, S\}$

q_A es el estado de aceptación, q_R es el estado de rechazo

M se detiene $\Leftrightarrow$ M pasa al estado q_A o q_R

Modelo de Máquina de Turing q_A, q_R

Observación: a diferencia de del modelo original, la función δ debe estar completamente definida (la MT no se detiene en ningún estado que no sea q_A o q_R) Por lo tanto la máquina siempre realiza al menos un paso de computación.



$$\mathbf{L(M)=\{}w \in \Sigma^* / q_0 w \vdash^{+}_{M} \alpha_1 q_A \alpha_2, \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^* \mathbf{\}}$$

Uno o más pasos de computación de M

Modelo de Máquina de Turing q_A, q_R

Teorema: para toda MT M del modelo original existe una MT M' del modelo q_A q_R equivalente, es decir L(M) = L(M').

Demostración. Se construye una máquina M' a partir de la máquina M y se demuestra que son equivalentes.

Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$, se construye

$M' = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, q_A, q_R \rangle$ con δ' definida de la sgte. manera:

Modelo de Máquina de Turing q_A, q_R

a) Por cada $\delta(q_i, a_k) = (q_j, a_m, x)$ en M

se define $\delta'(q_i, a_k) = (q_j, a_m, x)$ en M'

b) Por cada $\delta(q_i, a_k)$ no definida en M

se define en M'

i) $\delta'(q_i, a_k) = (q_A, a_k, S)$ si $q_i \in F$

o

ii) $\delta'(q_i, a_k) = (q_R, a_k, S)$ si $q_i \notin F$

Modelo de Máquina de Turing q_A, q_R

Ahora hay que demostrar que L(M) = L(M')

Se usará en la demostración la notación $\alpha(i)$ para denotar al i-ésimo elemento del string α

I) $L(M) \subseteq L(M')$

Sea $w \in L(M) \Rightarrow$

$\Rightarrow q_0 w \vdash^*_M \alpha_1 q \alpha_2$, con $q \in F$ y M se detiene (por def. L(M))

$\Rightarrow q_0 w \vdash^*_M \alpha_1 q \alpha_2$, con $q \in F$ y $\delta(q, \alpha_2(1))$ no definido

$\Rightarrow q_0 w \vdash^*_{M'} \alpha_1 q \alpha_2 \qquad \vdash_{M'} \alpha_1 q_A \alpha_2$

(por def. de δ' *parte a*) (por def. de δ', *parte b-i*)

$\Rightarrow w \in L(M')$

Por lo tanto $L(M) \subseteq L(M')$

Modelo de Máquina de Turing q_A, q_R

II) L(M') $\subseteq$ L(M)? Vamos a probar por contrarecíproca

Por contrarecíproca si $w \notin L(M) \Rightarrow w \notin L(M')$ es equivalente a

si $w \in L(M') \Rightarrow w \in L(M)$

Sea w tal que $w \notin L(M) \Rightarrow$ pueden suceder dos cosas

i) M loopea con input $w \Rightarrow$ M' loopea con input w

(por def. de δ' parte a)

ii) M se detiene en un estado no final, es decir

$\Rightarrow q_0 w \vdash^*_M \alpha_1 q \alpha_2$, con $q \notin F$ y M se detiene (por def. L(M))

$\Rightarrow q_0 w \vdash^*_M \alpha_1 q \alpha_2$, con $q \notin F$ y $\delta(q, \alpha_2(1))$ no definido

$\Rightarrow q_0 w \vdash^*_{M'} \alpha_1 q \alpha_2 \qquad \vdash_{M'} \alpha_1 q_R \alpha_2$

(por def. de δ' *parte a*) (por def. de δ' *parte b-ii*)

$\Rightarrow w \notin L(M')$

De i) y ii) si $w \notin L(M) \Rightarrow w \notin L(M')$, por contrarrecíproca se tiene que

$w \in L(M') \Rightarrow w \in L(M)$.

Por lo tanto L(M') $\subseteq$ L(M)

Modelo de Máquina de Turing q_A, q_R

De I) y II) se tiene que:

$$L(M) = L(M'),$$

por lo tanto M y M' son equivalentes

Modelo de Máquina de Turing q_A, q_R

Teorema 2: sea M una MT del modelo q_A q_R $\Rightarrow$ existe una MT M' del modelo original tal que L(M) = L(M')

Demostración:

Sea $M = <Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R>$ se construye una máquina

$M' <Q \cup \{q_A, q_R\}, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, F>$, $F = \{q_A\}$ y $\delta' = \delta$

Se debe demostrar que M y M' son equivalentes, es decir que

L(M) = L(M')

Modelo de Máquina de Turing q_A, q_R

I) $L(M) \subseteq L(M')$?

Sea $w \in L(M) \Rightarrow$

$\Rightarrow q_0 w \vdash^+_M \alpha_1 q_A \alpha_2$ (por def. L(M))

$\Rightarrow q_0 w \vdash^+_{M'} \alpha_1 q_A \alpha_2$ (por def. de δ')

$\Rightarrow$ debido a que M' se detiene en q_A ya que $\delta'(q_A, x)$ no está definido para ningún x, y además $q_A \in F$, se tiene que $w \in L(M')$

$\Rightarrow L(M) \subseteq L(M')$

Modelo de Máquina de Turing q_A, q_R

II) $L(M') \subseteq L(M)$? Vamos a probar por contrarecíproca:

Sea w tal que $w \notin L(M) \Rightarrow$ pueden suceder dos cosas

i) M loopea con input $w \Rightarrow$ M' loopea con input w (por construcción de M')

ii) $q_0 w \vdash^{+}_{M} \alpha_1 q_R \alpha_2$

$\Rightarrow q_0 w \vdash^{+}_{M'} \alpha_1 q_R \alpha_2$ (por construcción de M')

$\Rightarrow$ Debido a que M' se detiene en q_R ya que $\delta'(q_R, x)$ no está definido para ningún x y además $q_R \notin F$ se tiene que $w \notin L(M')$

De i) y ii) si $w \notin L(M) \Rightarrow w \notin L(M')$, por contrarrecíproca si

$w \in L(M') \Rightarrow w \in L(M)$

Por lo tanto $L(M') \subseteq L(M)$

De I) y II) se tiene que L(M) = L(M'), por lo tanto M y M' son equivalentes

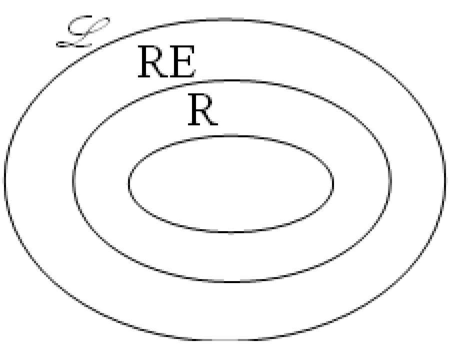
Caracterización de Lenguajes

Def.: un lenguaje L es recursivamente enumerable (RE) sii existe una MT M que lo acepte, es decir L = L(M).

Def.: un lenguaje L es recursivo o decidible (R) sii existe una MT M que lo acepta y siempre se detiene.

Nota: Llamaremos $\mathscr{L}$ al conjunto de todos los lenguajes definidos sobre el alfabeto Σ, es decir $\mathscr{L} = \rho(\Sigma^*)$

Se tiene la siguiente situación:



$$\underbrace{R \subseteq RE \subseteq \mathscr{L}}_{\text{por las definiciones}}$$

Caracterización de Lenguajes

Interrogantes: ¿Las inclusiones son propias?

$$\text{Es decir} \quad \begin{cases} ¿\mathscr{L} - \mathrm{RE} \neq \emptyset? \\ \\ ¿\mathrm{RE} - \mathrm{R} \neq \emptyset? \end{cases}$$