Computabilidad y Complejidad

Práctica 1

1) Probar la siguiente ley distributiva A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

2) Probar la siguiente ley de De Morgan: El Complemento de A unión B es igual al complemento de A intersección el complemento de B, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3) Probar que el doble complemento de A es igual a A, $\overline{\overline{A}} = A$

4) Sea A el conjunto de los números naturales tales que si son mayores que 5 o bien terminan en 5, entonces contienen algún dígito 1 ó 2

a) Cuáles de los siguientes números pertenecen a A:

3, 5, 10, 15, 30, -10

b) Expresar el enunciado como una fórmula proposicional donde **m** significa “mayores que 5”, **t** es “terminan en 5”, **u** es “contiene algún dígito 1” y **d** es “contiene algún dígito 2”.

c) Transformar la fórmula del inciso anterior de manera que no tenga una implicación y aplicar una ley de De Morgan al resultado. Expresarlo en una frase.

5) Sean:

X = {x / x N , x es impar}
Y = {y / y N , y es primo}
Z = {z / z N , z es múltiplo de 3}

Describir cada uno de los siguientes conjuntos:

a) X ∩ Y
b) X ∩ Z
c) Y ∩ Z
d) Z - Y
e) X - (Y ∩ Z)
f) (Y ∩ Z) - X
g) X ∪ Y

6) Calcular los conjuntos de partes en los siguientes casos: a) ∅

b) {a, b, c}
c) {∅}
d) {∅ , {∅}}
e) {a, {b, c}}

7) Presentar una lista con todos los elementos en cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\{x, y\}$ x $\{a, b, c\}$
b) $\{a, b, c\}$ x $\{x, y\}$
c) $\{x, y\}$ x $\{y, x\}$
d) $\{x, y\}^2$ x $\{\ \}$
e) $\{\ \}^{10}$ x $\{2, 3, 4\}^{20}$
f) 1^5
g) $\{1, 2\}$ x $\{a\}$ x $\{a, b\}$
h) ¿Cuál es el cardinal de A x B si $|A| = n$ y $|B| = m$?

8) Demostrar por inducción que si A es un conjunto finito
$|A| = n \Rightarrow |\rho(A)| = 2^n$

9) Mostrar que $|N \times N| = |N^+|$

10) Mostrar que $|Q^+| \leq |N|$, siendo Q^+ el conjunto de los números racionales positivos

11) Mostrar que la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de R a $\{0, 1\}$ es menor o igual a la del conjunto de todas las funciones que van:

a) de R a N
b) de R a $\{a, b, c\}$

12) Dar un ejemplo de 2 conjuntos disjuntos no vacíos, A y B tales que:

a) $|A| < |B| < |A \cup B|$
b) $|A| < |B| = |A \cup B|$
c) $|A| = |B| = |A \cup B|$

13) Mostrar que $|N - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}| = |N|$

14) ¿El conjunto de todas las frases en el idioma español es contable o incontable? Justificar.

15) Dar ejemplos para mostrar que la intersección de 2 conjuntos incontables puede ser

a) finita
b) infinita contable
c) incontable

16) Muestre que si X es un conjunto incontable e Y es un conjunto contable, entonces X-Y debe ser incontable.

17) Mostrar que la unión de 2 conjuntos contables es contable.

18) Mostrar que un conjunto puede tener la misma cardinalidad que un subconjunto de sí mismo.