



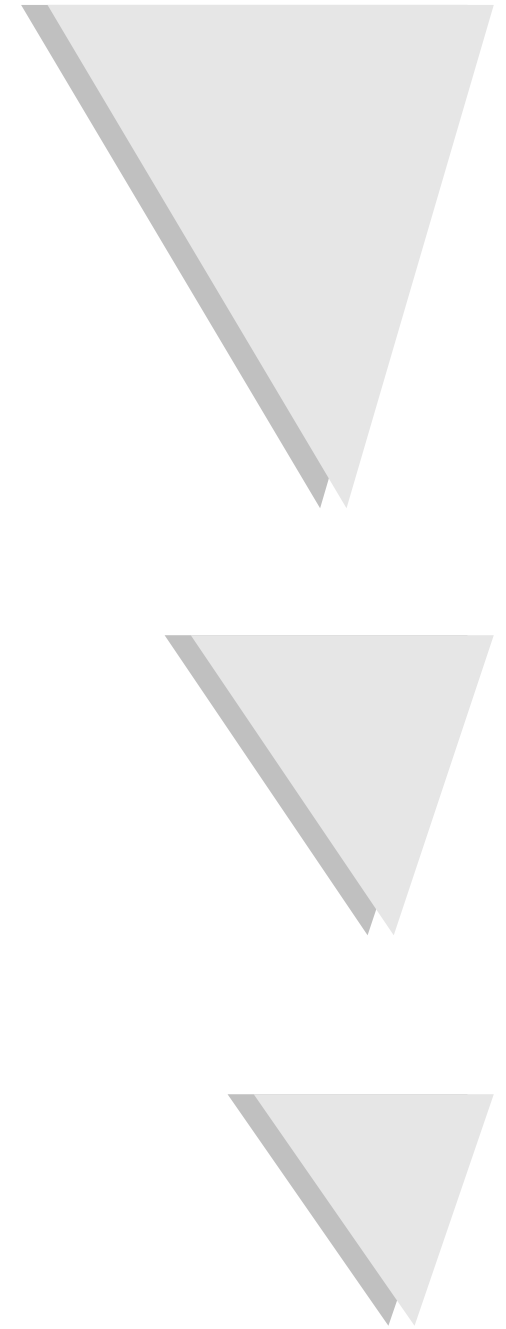
PROGRAMACIÓN FUNCIONAL

Recursión de Cola y Teoremas de Dualidad



Recursión de cola

- ◆ Recursión de cola: foldl
- ◆ Teoremas de dualidad
- ◆ Técnica de generalización



Recursión de Cola

- ◆ En la función foldr, el llamado recursivo es argumento de otras funciones.
- ◆ ¿Podrá cambiarse la definición para que el llamado recursivo sea la función principal?
- ◆ ¿Por qué sería interesante?
 - ◆ Con orden normal de evaluación, la recursión sería la que determina qué se computa
 - ◆ Puede mejorar la eficiencia del programa

Recursión de Cola

- ◆ ¿Cómo quedaría esta definición?

$\text{foldl} :: ??$

$\text{foldl } f \ a \ [] = a$

$\text{foldl } f \ a \ (x:xs) = \text{foldl } f \ (a \ `f` \ x) \ xs$

- ◆ Ejemplo:

$\text{foldl } (+) \ 0 \ [1, 2, 3]$

→

$\text{foldl } (+) \ (0+1) \ [2, 3]$

→

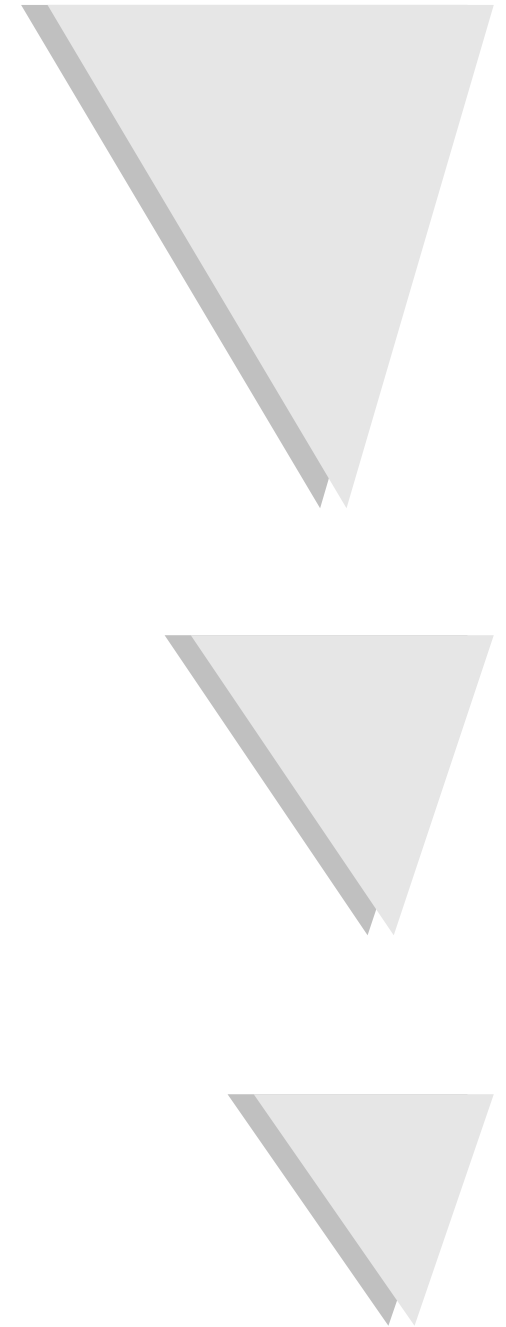
$\text{foldl } (+) \ ((0+1)+2) \ [3]$

→

$\text{foldl } (+) \ (((0+1)+2)+3) \ []$

→

$((0+1)+2)+3$



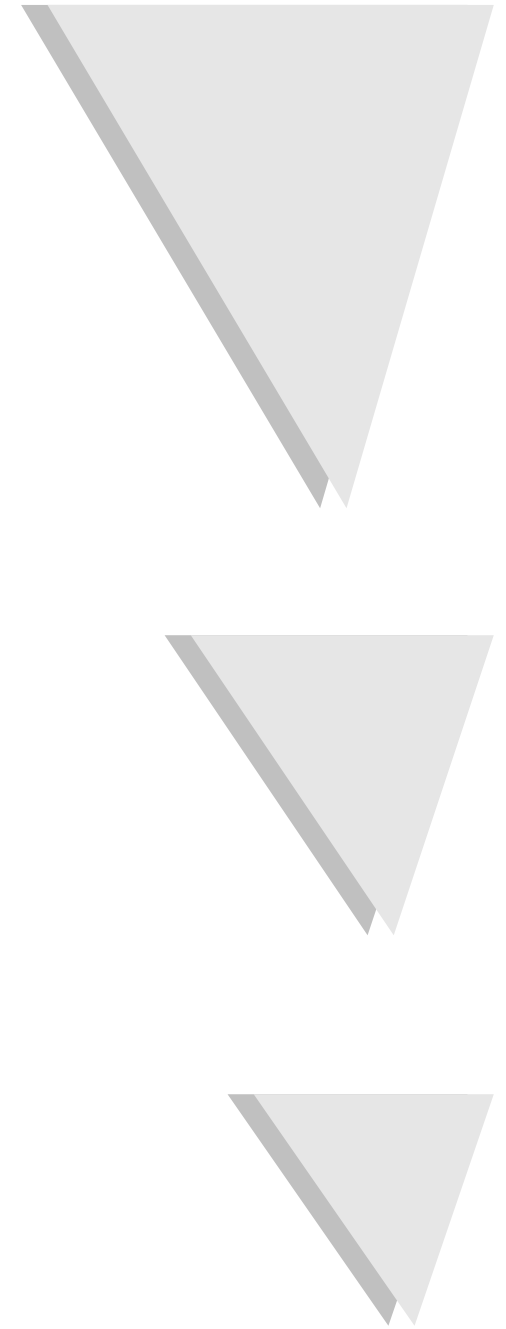
Recursión de Cola

- ◆ El esquema foldl
 - ◆ ¿es equivalente al de foldr?
 - ◆ ¿en qué casos?
- ◆ Veamos

$\text{foldl } f \ a \ [x_1, x_2, \dots, x_n] \longrightarrow$
 $(\dots((a \ `f` x_1) \ `f` x_2) \ `f` \dots \ `f` x_n)$

mientras que

$\text{foldr } f \ a \ [x_1, x_2, \dots, x_n] \longrightarrow$
 $(x_1 \ `f` (x_2 \ `f` \dots \ `f` (x_n \ `f` a) \dots))$



Teoremas de Dualidad

◆ Primer Teorema de Dualidad:

Cuando f es asociativa y a es su neutro, se cumple que, para toda lista finita xs ,

$$\text{foldr } f \ a \ xs = \text{foldl } f \ a \ xs$$

◆ ¿Cómo lo demostramos?

- ◆ Podríamos usar inducción sobre xs

o bien

- ◆ podríamos demostrar un teorema más general, y obtener éste como caso particular

Teoremas de Dualidad

- ◆ Consideremos las siguientes definiciones:

`reverse = foldr postfix []`

`postfix x xs = xs ++ [x]`

`rev = foldl prefix []`

`prefix xs x = [x] ++ xs`

- ◆ ¿Es cierto que `reverse = rev`?
- ◆ ¿Cómo lo demostramos? ¿Sirve el 1^{er} Teorema de Dualidad?

Teoremas de Dualidad

◆ Segundo Teorema de Dualidad:

Sean f , g y a cumpliendo que para todos x, y, z

$$x \text{ `f` } (y \text{ `g` } z) = (x \text{ `f` } y) \text{ `g` } z$$

$$x \text{ `f` } a = a \text{ `g` } x$$

entonces, para toda lista finita xs

$$\text{foldr } f \text{ } a \text{ } xs = \text{foldl } g \text{ } a \text{ } xs$$

◆ ¿Cómo lo demostramos?

- ◆ Por inducción en la estructura de xs
- ◆ Requiere un resultado auxiliar (lema)

Teoremas de Dualidad

- ◆ El 1^{er} Teorema de Dualidad es consecuencia del 2^{do}, tomando $f = g$
- ◆ La igualdad $\text{reverse} = \text{rev}$ también es consecuencia del 2^{do} Teorema de Dualidad, tomando $f = \text{postfix}$, $g = \text{prefix}$ y $a = []$
 - ◆ Verificar que
$$x \text{ `postfix` } (xs \text{ `prefix` } y) = (x \text{ `postfix` } xs) \text{ `prefix` } y$$
y que
$$\text{postfix } x [] = \text{prefix } [] x$$

Teoremas de Dualidad

◆ Tercer Teorema de Dualidad:

Para toda lista finita xs , vale que
 $\text{foldr } f \ a \ xs = \text{foldl } (\text{flip } f) \ a \ (\text{reverse } xs)$
siendo
 $\text{flip } f \ y \ x = f \ x \ y$

◆ ¿Cómo lo demostramos?

- ◆ Inducción en la estructura de xs
- ◆ Usar el siguiente lema: para toda lista finita xs y para todo x , se cumple que para todo a ,
 $\text{foldl } f \ a \ (xs++[x]) = f \ (\text{foldl } f \ a \ xs) \ x$

Generalización

◆ ¿Qué sucede si tratamos de mostrar lo siguiente?

Lema: para toda lista finita xs y para todo x , se cumple que
$$\text{foldl } f \ a \ (xs++[x]) = f \ (\text{foldl } f \ a \ xs) \ x$$

◆ **Demostración:** por inducción en la estructura de xs

◆ Caso base: $xs = []$

◆ $(++.1), (\text{foldl}.2), (\text{foldl}.1), (\text{foldl}.1)$

◆ Caso inductivo: $xs = (y:ys)$

HI: $\text{foldl } f \ a \ (ys++[x]) = f \ (\text{foldl } f \ a \ ys) \ x$

TI: $\text{foldl } f \ a \ ((y:ys)++[x]) = f \ (\text{foldl } f \ a \ (y:ys)) \ x$

◆ $(++.2), (\text{foldl}.2), \text{¿HI?...}$

Generalización

❖ ¿Qué falla? ¡La HI predica sobre un único a !

❖ Debemos generalizar y predicar sobre *cualquier* a

Lema: para toda lista finita xs y para todo x , se cumple que ,
cualquiera sea a , $\text{foldl } f \ a \ (xs++[x]) = f \ (\text{foldl } f \ a \ xs) \ x$

❖ **Demostración:** por inducción en la estructura de xs

❖ Caso base: ídem

❖ Caso inductivo: $xs = (y:ys)$

HI: $\forall a. \text{foldl } f \ a \ (ys++[x]) = f \ (\text{foldl } f \ a \ ys) \ x$

TI: $\forall a. \text{foldl } f \ a \ ((y:ys)++[x]) = f \ (\text{foldl } f \ a \ (y:ys)) \ x$

❖ $(++ . 2)$, $(\text{foldl} . 2)$, (HI, con $a' = f \ a \ y$), $(\text{foldl} . 2)$

Teoremas de Dualidad

- ◆ Demostración del 2^{do} Teorema de Dualidad
 - ◆ por inducción sobre la estructura de la lista, utilizando el lema que se enuncia a continuación
- ◆ **Lema:**

para todo x y toda lista finita xs , y siendo f y g como en el teorema, se cumple que para todo a ,

$$x \text{ `f` (foldl g a xs) = foldl g (x `f` a) xs}$$
- ◆ **Demostración:** por inducción sobre xs
- ◆ ¡Observar que el lema ya está generalizado!

Resumen

- ◆ Recursión de cola (foldl)
- ◆ Teoremas de dualidad
- ◆ Generalización

