PROGRAMACIÓN FUNCIONAL

Técnicas Formales: Propiedades y Demostraciones

Técnicas Formales

- Propiedades y demostraciones
  - Definición de propiedad y demostración
  - Demostraciones formales
  - Formas de garantizar propiedades
    - demostración manual
    - demostración automática
    - por construcción
  - Ejemplos

Propiedad

- Sentencia sobre un elemento o conjunto, que puede ser verdadera o falsa.
- Ejemplos:

  2 es un número primo

  (4 = doble 2)

  ($\exists x \in \mathbb{N}$. x es par)

  ($\exists k \in \mathbb{N}$. $\sum_{i=0,..,k} (2\,i+1) \neq k^2$)

Propiedades

- ¿Cómo garantizar una propiedad?
  - Demostración manual
    - de manera informal (pej. argumento relatado)
    - de manera formal (pej. cadena de igualdades justificadas)
      - en papel o asistido por computadoras
  - Automáticamente
    - un programa verifica la propiedad (pej. inferencia de tipos)
  - Por construcción
    - los elementos se construyen de tal manera que se cumpla la propiedad (pej. derivación de programas)

Demostración

- Argumentación que hace evidente la verdad de una propiedad.
- Ejemplos:
  - $\text{doble } 2 \underset{\text{por def. de doble}}{=} 2+2 \underset{\text{arit.}}{=} 4$
  - Dado que 2 es un número natural, y es par, entonces es claro que es verdadera la propiedad ($\exists x \in \mathbb{N}$. x es par)

Demostraciones

- ¿Cómo escribir una demostración?
  - Informalmente
    - se argumenta describiendo los pasos a seguir para que la propiedad sea evidente.
  - Formalmente
    - se utiliza un lenguaje formal (por ejemplo, lógica) para construir una cadena de pasos evidentes
- Ejemplo: demostrar que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Informalmente

Primero mostramos que $A\cup(B\cap C) \subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$. Si $x\in A\cup(B\cap C)$, entonces, o bien $x\in A$, o bien $x\in B\cap C$. Si $x\in A$, es claro que $x\in A\cup B$ y que $x\in A\cup C$, por lo que $x\in (A\cup B)\cap(A\cup C)$. Por otro lado, si $x\in B\cap C$, entonces $x\in B$ y $x\in C$, por lo que $x\in A\cup B$ y que $x\in A\cup C$, y nuevamente $x\in (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Recíprocamente, si $y\in (A\cup B)\cap(A\cup C)$, entonces $y\in A\cup B$ y $y\in A\cup C$. Consideramos dos casos: $y\in A$ e $y\notin A$. Si $y\in A$ es claro que $y\in A\cup(B\cap C)$, y esta parte está lista. Si $y\notin A$, entonces, como $y\in A\cup B$, tenemos que $y\in B$, y de la misma manera, $y\in C$. Por lo tanto, $y\in B\cap C$, y eso implica $y\in A\cup(B\cap C)$. Ambas partes muestran que $A\cup(B\cap C)\supseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

La propiedad queda entonces demostrada.

Formalmente

$x \in A \cup (B \cap C)$

$\equiv$ ***(def. de unión)***

$x \in A \vee x \in (B \cap C)$

$\equiv$ ***(def. de intersección)***

$x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$\equiv$ ***(distributividad de conectivos lógicos)***

$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

$\equiv$ ***(def. de unión, dos veces)***

$(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$

$\equiv$ ***(def. de intersección)***

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demostraciones formales

- Se comienza con una expresión, y se la transforma paso a paso.
- Cada nueva versión de la expresión se escribe en una línea nueva.
- Entre dos líneas se coloca un símbolo que relaciona las expresiones, y una justificación de la validez del paso.
- El nivel de detalle puede variar.
  - En el ejemplo, la penúltima línea podría hacerse en dos pasos.

Ventajas

- Las pruebas formales fuerzan a que la estrategia de demostración sea explícita.
- La solución es fácil de leer y de verificar.
- Puede refinarse una demostración, agregando detalles.
- Pueden desarrollarse programas que ayuden a construir, chequear y revisar pruebas de este tipo.

Principio de Extensionalidad

- La extensionalidad nos permite demostrar que f = g demostrando simplemente que f x = g x para todo x.
- Dicho de otro modo,
  - f = g   sí y sólo sí   para todo x, f x = g x.
- Ej: ¿Se cumple doble = doble'?

```
doble, doble' :: Int -> Int

doble x = x + x
doble' x = 2 * x
```

Ejemplo (1 de 2)

- **Propiedad**: curry suma' = suma
- **Demostración**:
  - demostramos que para x e y cualesquiera
    curry suma' x y = suma x y

  Dado que dos funciones son iguales si aplicadas a los mismos argumentos dan los mismos resultados (principio de extensionalidad), entonces concluimos la demostración.

Ejemplo (2 de 2)

Sean x, y :: Int, enteros cualesquiera.

curry suma' x y

= ***(def. de*** curry***)***

suma' (x,y)

= ***(def. de*** suma'***)***

x+y

= ***(def. de*** suma***)***

suma x y

Como la igualdad vale, la propiedad se cumple.

Propiedades

- ¿Qué propiedades de los programas nos interesan en este curso?
  - Equivalencia
    - si f y g son dos programas, queremos saber si f = g
  - Corrección
    - el programa hace lo esperado (por ejemplo, no da error, o devuelve el resultado correcto)
  - Terminación
    - el programa no se queda realizando infinitas reducciones

Propiedades

- ¿Cómo probar equivalencia de programas?
  - Usando las ecuaciones del script
  - Usando propiedades ya probadas
- ¿Cómo garantizar corrección?
  - Usando el sistema de tipos
  - Usando técnicas de derivación de programas
  - Diseñando casos disjuntos y completos
- ¿Cómo garantizar terminación?
  - Evitando ciclos infinitos

Propiedades

- Diseñar casos disjuntos y completos
- Ejemplo:

```
par, impar :: Int -> Bool

par 0 = True
par n | n>0 = impar (n-1)
par n | n<0 = impar (n+1)

impar 0 = False
impar n | n>0 = par (n-1)
impar n | n<0 = par (n+1)
```

- Así definidas, son totales.

Terminación

- ¿Cuándo aparecen ciclos infinitos?
- Ej:

```
factorial :: Int -> Int

factorial 0 = 1
factorial n | n/=0 = n * factorial (n-1)
```

  - ¿Cuánto vale factorial (-1)?
  - ¿Son ecuaciones orientadas?
  - ¿Cómo saber si lo son o no?

Equivalencia

- Considere esta definición

```
fact :: Int -> Int

fact 0 = 1
fact n | n/=0 = fact (n-1) * n
```

- ¿Es equivalente a la definición previa?
  - O sea, ¿se cumple factorial = fact?
  - ¿Podría demostrarlo? ¿Cómo?

Conclusiones

- El tema cubre:
  - qué es una propiedad y qué significa demostrar propiedades
  - cuáles son las propiedades que nos interesan
  - cómo garantizar algunas propiedades por construcción