Mecânica Quântica I – Quadrimestre 2021.1

Folha de Problemas 1

Tópicos de Mecânica Clássica

Convenção: Os exercícios são classificados de acordo com os seguintes símbolos: † indica que o exercício testa conceitos discutidos nas aulas; ‡ indica que o exercício complementa a matéria dada nas aulas teóricas. São exercícios relevantes para a vossa formação, mas que não tivemos tempo de abordar nas aulas; $^\square$ indica que o exercício é avançado. Note que um exercício pode ter mais do que um símbolo.

1 Problema de Larmor†‡

Considere uma partícula de massa m e carga eléctrica q na presença de um campo magnético constante $\vec{B} = B\vec{e}_z$ (sem campo eléctrico $\vec{E} = \vec{0}$). O movimento desta partícula é governado pela força de Lorentz

$$\vec{F} \quad = \quad q\big(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\big)\,. \tag{1}$$

1.1 Formalismo Newtoniano

(a) Para o sistema descrito em cima, aplique a segunda lei de Newton e obtenha as equações do movimento da partícula. Use a notação $\vec{r} = (x, y, z)$ e a definição de frequência ciclotrónica $w_c = \frac{qB}{m}$.

(b) Integre as equações de movimento para obter as soluções para $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.

(c) Interprete as trajectórias $\vec{x}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ obtidas na alínea anterior.

1.2 Formalismo Lagrangeano

Existem algumas forças, ditas conservativas, que podem ser derivadas de um potencial através de, $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$ onde $\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Uma forma de testar se uma força $\vec{F}$ é conservativa, isto é, se pode ser derivada de um potencial $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$, é verificar se ela obedece a $\nabla \times \vec{F} = 0$.[1]

(a) Calcule o rotacional da força de Lorentz como forma de verificar se esta é uma força conservativa. Use as equações de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad & \nabla \cdot \vec{E} = \tfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{B} = \qquad & \nabla \times \vec{E} = -\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \tag{2}$$

(b) Considere o Lagrangeano seguinte

$$\mathcal{L} \quad = \quad \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(t, \vec{r}) - q\phi(t, \vec{r})\,, \tag{3}$$

onde $\vec{A}$ é o potencial magnético definido através da equação $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, sendo ϕ

[1] A implicação $\nabla \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$ depende de considerações topológicas e por isso nem sempre é válida. No entanto, como na maioria das aplicações de Física elementar a topologia do espaço-tempo é trivial, podemos considerar que esta equivâlencia é em geral válida.

o potencial electrostático definido pela equação $\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.[2] Calcule as equações do movimento para este lagrangeano e conclua que estas correspondem às equações de movimento de uma partícula de massa m e carga q sob a acção da força de Lorentz na Eq. (1).

(c) Escolhendo os potenciais electromagnéticos $\phi = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$ e $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0) \Rightarrow \vec{B} = B\vec{e}_z$, mostre que as equações de Euler-Lagrange obtidas na alínea anterior são equivalentes às equações de movimento obtidas com o formalismo newtoniano.

(d) Note que como o lagrangeano obtido em (c) não depende da coordenada z, pelo teorema de Noether o seu momento canónico conjugado p_z é uma constante do movimento, i.e. $\frac{dp_z}{dt} = 0$.

1.3 Formalismo Hamiltoniano

(a) Para o lagrangeano da Eq. (3) comece por calcular o momento canónico conjugado a $\vec{r}$, dado por $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}$, constatando que este é diferente do momento dinâmico usual, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$.

(b) Escreva o Hamiltoniano e verifique que apesar de o momento canónico conjugado de $\vec{r}$ ser diferente do momento dinâmico, o Hamiltoniano continua a ser a soma da energia cinética e da energia potencial.

(c) Voltando a escolher os potenciais electromagnéticos $\phi = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$ e $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0) \Rightarrow \vec{B} = B\vec{e}_z$, encontre as equações de Hamilton verificando que estas são equivalentes às equações do movimento encontradas com o formalismo newtoniano e o formalismo lagrangeano.

(d) Use os parêntises de Poisson para mostrar que p_z é uma constante do movimento.

2 Campo de Forças Central$^{\ddagger\Box}$

Considere uma partícula de massa m actuada por um potencial central $V(r)$ em três dimensões.

2.1 Simetrias

(a) Mostre que o Lagrangeano em coordenadas esféricas é

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin\theta\dot{\phi}^2) - V(r)\,. \tag{4}$$

(b) Calcule o momento canónico conjugado de cada uma das três coordenadas p_r, p_θ e p_ϕ. Calculando as equações de Euler-Lagrange, mostre que

$$p_\phi \equiv ml\,, \tag{5}$$

é conservado no movimento. Seria isto óbvio olhando apenas para o Lagrangeano? Qual a interpretação física de l?

(c) Mostre que pode escolher $\theta = \pi/2$, o que equivale a dizer que o movimento é planar. Conclua que o problema se reduz a resolver a equação do movimento radial, que se pode escrever como

$$m\ddot{r} = -\frac{dV}{dr} + \frac{ml^2}{r^3}\,, \tag{6}$$

e como tal o problema é, efectivamente, em uma dimensão. Mostre que esta equação do movimento se pode obter do Lagrangeano efectivo

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \underbrace{\left(V(r) + \frac{ml^2}{2r^2}\right)}_{\equiv V_{ef}(r)}\,. \tag{7}$$

[2] Note que para um par de $\vec{E}(t,\vec{r})$ e $\vec{B}(t,\vec{r})$ os potenciais electromagnéticos $\phi(t,\vec{r})$ e $\vec{A}(t,\vec{r})$ não são únicos. Existe uma classe de escolhas para $\phi(t,\vec{r})$ e $\vec{A}(t,\vec{r})$ que resulta nos mesmos $\vec{E}(t,\vec{r})$ e $\vec{B}(t,\vec{r})$. A esta classe de escolhas equivalentes chamamos *equivalência de gauge*. Podemos mudar de uma *gauge* para outra aplicando as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} \phi(t,\vec{r}) &\longrightarrow \phi(t,\vec{r}) - \partial_t\chi(t,\vec{r})\,, \\ \vec{A}(t,\vec{r}) &\longrightarrow \vec{A}(t,\vec{r}) + \nabla\chi(t,\vec{r})\,, \end{aligned}$$

onde $\chi(t,\vec{r})$ é uma função escalar.

Compare $\mathcal{L}_{ef}$ com $\mathcal{L}$ da Eq. (4) especializado para o movimento planar. O que conclui?

2.2 Problema de Kepler/Coulomb

Assumamos que $V(r)$ é dado por

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}\,, \alpha > 0\,. \tag{8}$$

Se $\alpha = \frac{|qQ|}{4\pi\epsilon_0}$ este é o problema de Coulomb. Se $\alpha = GmM$ este é o problema de Kepler.

(a) Desenhe o gráfico de cada um dos termos do potencial efectivo, assim como o potencial efectivo total. Descreva as forças em acção e preveja como se dará o movimento.

(b) Mudando da variável $r(t)$ para a variável $u(\phi) = 1/r(t)$, mostre que a equação do movimento na Eq. (6) pode ser escrita como

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\alpha}{ml^2}\,. \tag{9}$$

(c) Deduza a solução e conclua que esta é da forma

$$r(\phi) = \frac{1}{A\cos(\phi - \phi_0) + \alpha/(ml^2)}\,. \tag{10}$$

Mostre que as órbitas possíveis são cónicas e calcule a sua excentricidade. Calcule o valor da energia total das órbitas em função da excentricidade.

(d) Discuta quantitativamente a estabilidade da órbita circular de raio r_0, relativamente a pequenas perturbações do tipo

$$r(t) = r_0 + \delta(t)\,, \quad \text{onde } \frac{\delta(t)}{r_0} \ll 1\,. \tag{11}$$

Calcule a frequência das pequenas de oscilações.

(e) Calcule o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ do Lagrangeano da Eq. (4) especializando para o $V(r)$ dado na Eq. (8). Considere o vector de Runge-Lenz

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \alpha m \frac{\vec{r}}{r}\,. \tag{12}$$

Dado que o momento angular $\vec{L}$ é uma quantidade conservada, mostre que

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0\,. \tag{13}$$

Conclua que $\vec{A}$ é uma constante do movimento. Mostre que cada componente comuta com o Hamiltoniano no sentido do parêntises de Poisson

$$\{\mathcal{H}, A_i\} = 0\,. \tag{14}$$

2.3 Problema de Kepler/Coulomb multi-dimensional

Consideremos o potencial central dado por

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^{d-2}}\,, \quad \alpha > 0\,, \tag{15}$$

onde d é um inteiro $d \geq 3$.

(a) Desenhe o gráfico de cada um dos termos do potencial efectivo, bem como o gráfico do potencial efectivo total. Descreva as forças em acção e preveja qual será o movimento da partícula.

(b) Para o caso de $d = 5$ estude a estabilidade da órbita circular.

(c) Se em vez de três dimensões espaciais, o nosso universo tivesse d dimensões espaciais, o potencial de Kepler/Coulomb seria (no modelo mais natural) dado pela expressão na Eq. (15). Poderíamos viver num universo assim?