

Otimização II

Prof. Dr. Paulo Roberto Maia

Paulo.maia@inatel.br

P108 – Otimização II



Inatel

Agenda

- ❑ Problema do fluxo máximo;
- ❑ Problema do caminho mínimo
- ❑ Problema da árvore geradora mínima
- ❑ Problema de fluxo de custo mínimo



Problema do fluxo de custo mínimo

Redes

- ❑ O problema do fluxo de custo mínimo ocupa uma posição fundamental entre os modelos de otimização de redes;
- ❑ Pode considerar múltiplas fontes e centros consumidores;
- ❑ Assim como o problema do fluxo máximo, ele considera o fluxo através de uma rede com capacidades de arcos limitadas. Da mesma forma como o problema do caminho mínimo, ele considera um custo (ou distância) para o fluxo através de um arco.

Problema do fluxo de custo mínimo

Redes

- ❑ A rede é uma rede direcionada e conectada;
- ❑ Pelo menos um dos nós é um nó de suprimento;
- ❑ Pelo menos um dos demais nós é um nó de demanda;
- ❑ Todos os nós remanescentes são nós de transbordo;
- ❑ O fluxo através de um arco direcionado;

Problema do fluxo de custo mínimo

Redes

- ❑ A rede tem arcos suficientes com capacidade suficiente para permitir que todo o fluxo gerado nos nós de suprimento atinjam todos os nós de demanda;
- ❑ O custo do fluxo através de cada arco é proporcional à quantidade desse fluxo, no qual o custo por fluxo unitário é conhecido.
- ❑ O objetivo é minimizar o custo total de enviar a provisão disponível através da rede a fim de satisfazer a demanda dada.

Problema do fluxo de custo mínimo

Aplicações

Tipo de aplicação	Nós de suprimento	Nós de transbordos	Nós de demanda
Operação de uma rede de distribuição	Origens das mercadorias	Instalações intermediárias para armazenamento	Clientes
Controle de resíduos sólidos	Origens de resíduos sólidos	Instalações de processamento	Localizações de aterros
Operação de uma rede de suprimento	Fornecedores	Depósitos intermediários	Instalações para processamento
Coordenação de <i>mix</i> de Fábricas produtos nas fábricas	Fábricas	Fabricação de um produto específico	Mercado para um produto específico
Gerenciamento de fluxo de caixa	Fontes de caixa em um determinado momento	Opções de investimento de curto prazo	Necessidades de caixa em um determinado momento

Problema do fluxo de custo mínimo

Formulação Matemática do Problema do fluxo de custo mínimo

O objetivo é minimizar o custo total de remessa da oferta disponível através da rede para satisfazer a demanda dada. Usando-se a convenção de que os somatórios são considerados apenas sobre arcos existentes, a formulação de programação linear desse problema fica:

Parâmetros do modelo

x_{ij} = fluxo através do arco $i \rightarrow j$

c_{ij} = custo por fluxo através do arco $i \rightarrow j$

u_{ij} = capacidade do arco para o arco $i \rightarrow j$

b_i = fluxo líquido gerado no nó i

Função objetivo

$$\text{Min } z = \sum_i^n \sum_j^n c_{ij} x_{ij}$$

Restrições

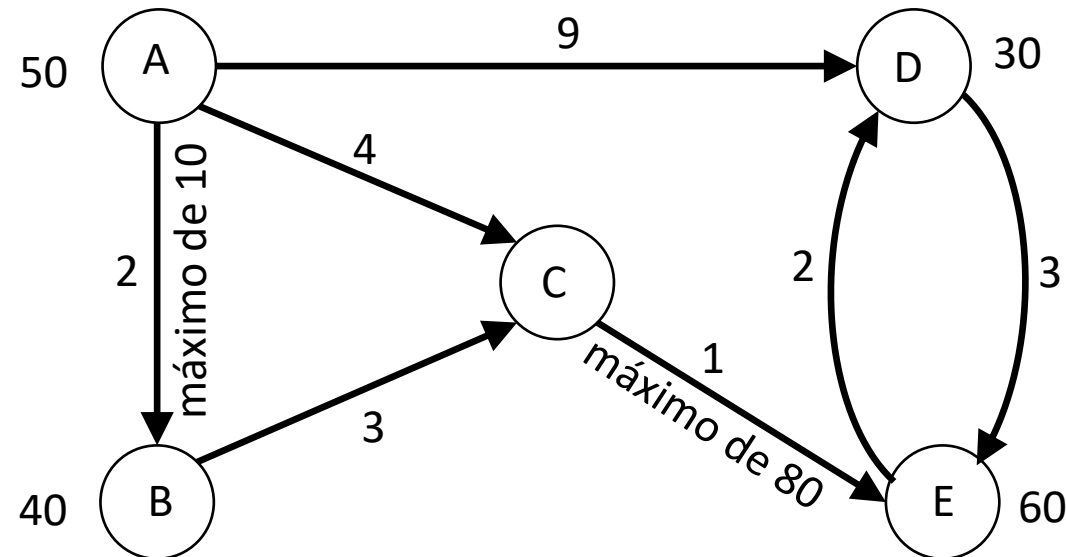
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = b_i, \quad \text{para cada nó } i$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{para cada nó } i \rightarrow j$$

Problema do fluxo de custo mínimo

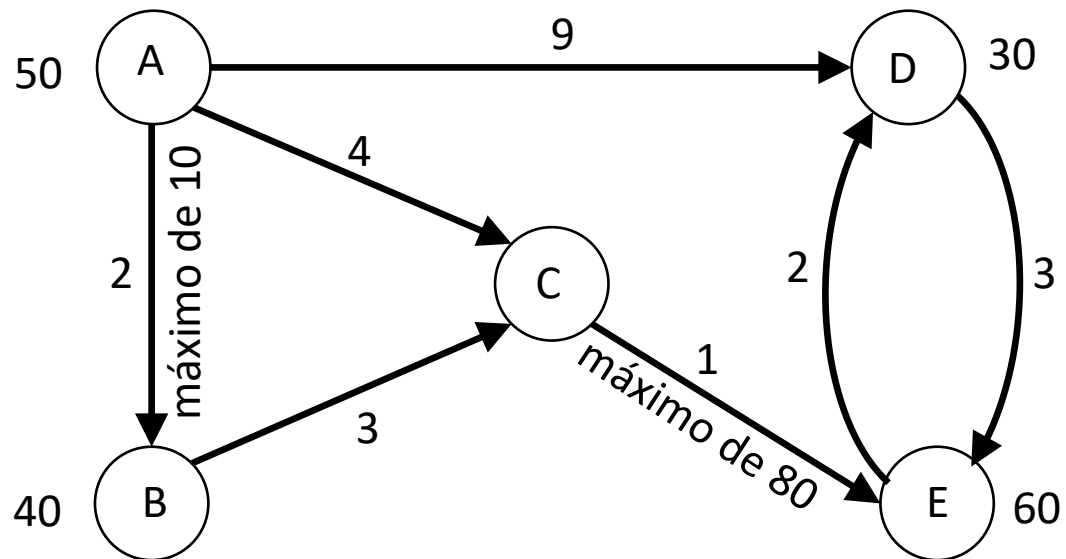
Exemplo 1

A CIA. DISTRIBUIDORA ILIMITADA fabricará o mesmo produto em duas fábricas diferentes e depois o produto terá de ser despachado para dois depósitos onde qualquer uma das fábricas poderá suprir ambos os depósitos. A rede de distribuição disponível para despachar este produto é mostrada abaixo, em que F1 e F2 são as duas fábricas, W1 e W2 os dois depósitos e DC o centro de distribuição. As quantidades a ser enviadas de F1 e F2 estão indicadas à esquerda delas e as quantidades a ser recebidas em W1 e W2 se encontram à direita destes. O objetivo é o de minimizar o custo total de envio.



Problema do fluxo de custo mínimo

Exemplo 1



Variáveis de **Decisão**

X_{ij} = Quantidade do fluxo do arco $i \rightarrow j$

X_{AB}

X_{AC}

X_{BC}

X_{CE}

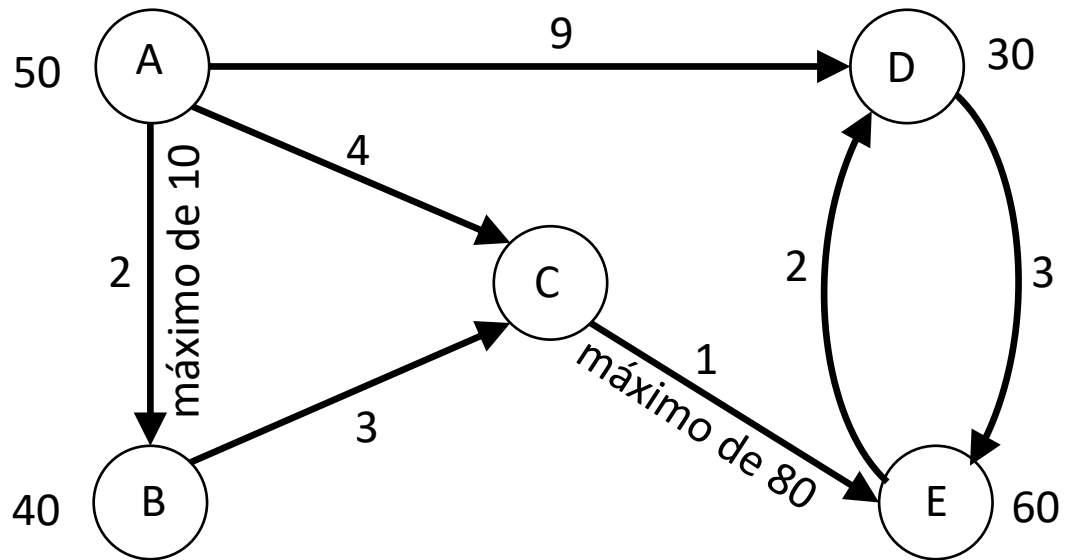
X_{AD}

X_{DE}

X_{ED}

Problema do fluxo de custo mínimo

Exemplo 1



Função Objetivo:

$$\text{Min } Z = 2X_{AB} + 4X_{AC} + 9X_{AD} + 3X_{BC} + X_{CE} + 3X_{DE} + 2X_{ED}$$

$$\text{Nó A } -X_{AB} - X_{AC} - X_{AD} = -50$$

$$\text{Nó B } X_{AB} - X_{BC} = -40$$

$$\text{Nó C } X_{AC} + X_{BC} - X_{CE} = 0$$

$$\text{Nó D } X_{AD} + X_{ED} - X_{DE} = 30$$

$$\text{Nó E } X_{CE} + X_{DE} - X_{ED} = 60$$

$$\text{Cap. } X_{AB} \leq 10 \quad X_{CE} \leq 80$$

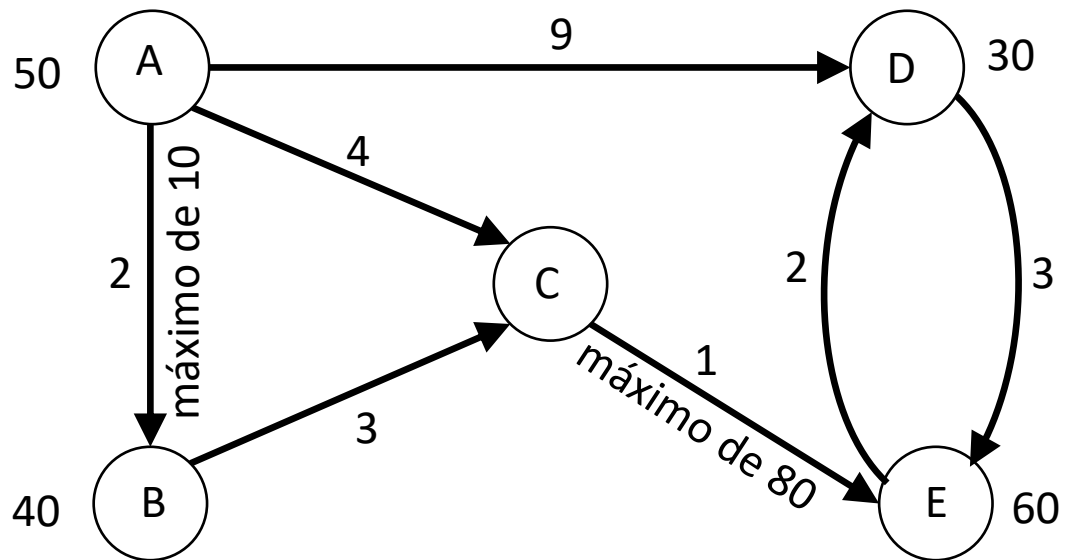
$$\text{Para todo } X_{ij} \geq 0$$

Problema do fluxo de custo mínimo

Exemplo 1

Função Objetivo:

$$\text{Min } Z = 490$$

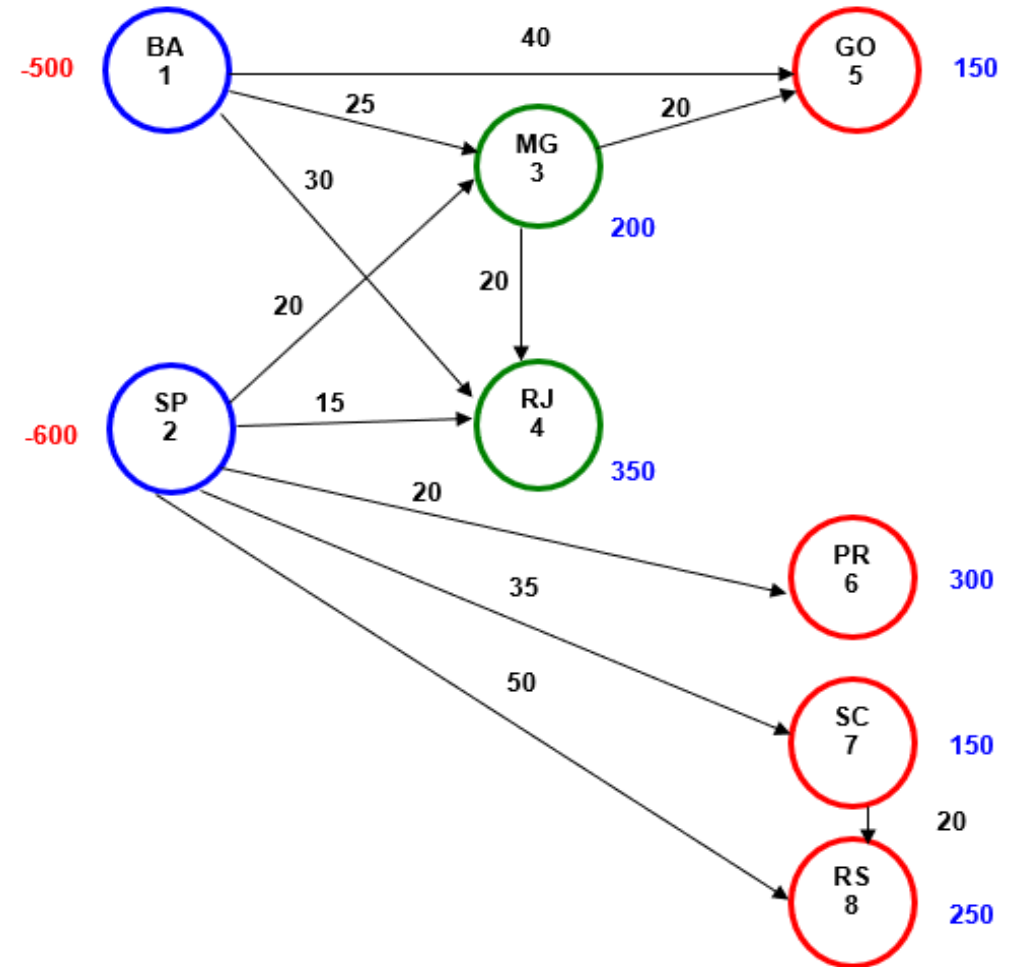


Variável decisão	Quantidade fluxo
x_{AB}	0
x_{AC}	40
x_{AD}	10
x_{BC}	40
x_{CE}	80
x_{DE}	0
x_{ED}	20

Problema do fluxo de custo mínimo

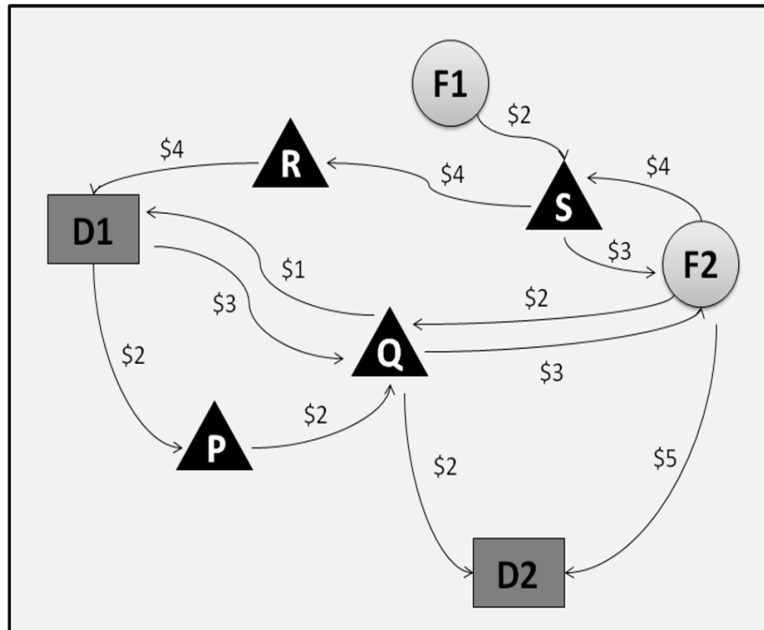
Exemplo 2

Uma montadora de carros está iniciando as suas operações no Brasil, construindo 2 fábricas: uma na Bahia e outra em Minas Gerais. A montadora está estudando a forma de distribuição de seus carros para diversas revendas, localizadas nos estados: São Paulo, Rio de Janeiro, Paraná, Goiás, Amazonas, Santa Catarina e Rio Grande do Sul. Formule o modelo e determine a quantidade de carros que deve ser produzida e entregue em cada revenda de forma que seu custo seja o menor possível. Formule o problema e resolva através do Excel



Problema do fluxo de custo mínimo

1) No modelo simplificado de transportes sempre temos que uma trajetória se inicia em uma “origem” e existe um único caminho para o “destino”. No problema avançado, podemos ter qualquer composição de trajetórias, ou melhor, podemos ter diversas opções de caminhos entre uma “origem” e um “destino”. Na figura abaixo, o objetivo é escoar a produção das fábricas F1 e F2 para os destinos D1 e D2. A capacidade das fábricas e o objetivo de recebimento dos depósitos estão mostrados abaixo: ($Z=270$)

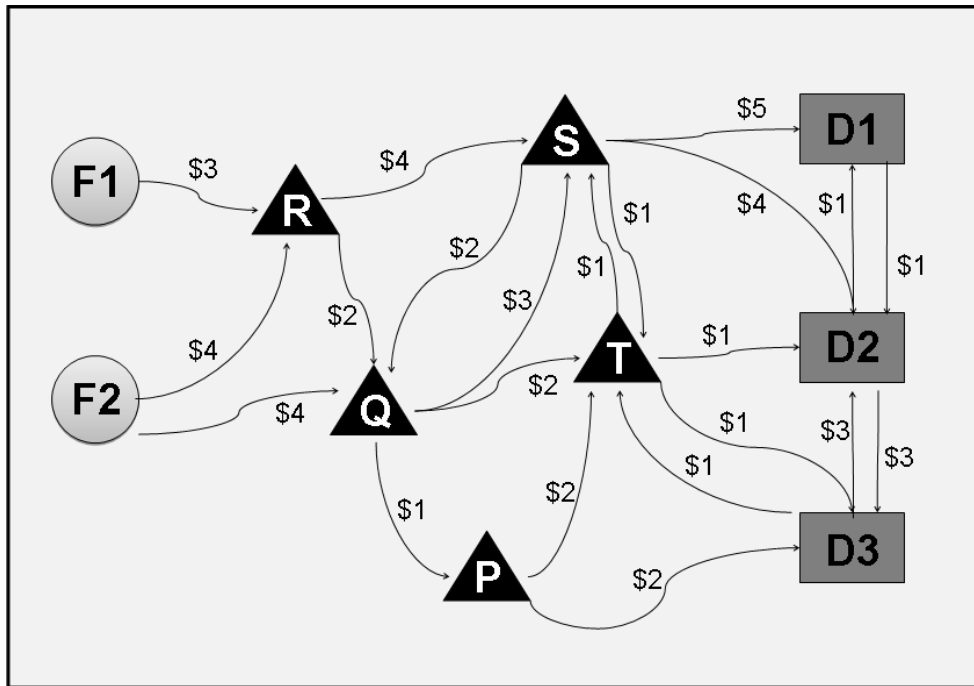


Transporte em rede

Fábrica		Depósito	
Nome	Cap. Máxima	Nome	Necessidade
F1	40	D1	15
F2	15	D2	25

Problema do fluxo de custo mínimo

2) Considere a figura seguinte, na qual os números representam o custo de transporte entre dois nós. A capacidade máxima das fábricas e a necessidade dos depósitos são dadas a seguir. Quais caminhos devem ser acionados e em que quantidade de modo que o custo total do transporte seja mínimo? ($Z=265$)



Fábrica		Depósito	
Nome	Cap. Máxima	Nome	Necessidade
F1	15	D1	15
F2	25	D2	12
		D3	8

Problema do fluxo de custo mínimo

3) A LCL Ltda. está considerando a implantação de uma nova fábrica em adição às três já existentes no Rio de Janeiro, São Paulo e Belo Horizonte. As duas localidades que estão sendo estudadas são Brasília e Salvador. O custo de transporte é fundamental para a empresa, e como qualquer uma das duas fábricas novas cobrirá a demanda extra, o critério adotado para a escolha do local será o de menor custo de transporte para os quatro centros distribuidores existentes em Curitiba, Recife, Cuiabá e Belém. Os dados relevantes para esta decisão são mostrados nas tabelas abaixo.

Distribuidores	Custos e capacidade das fábricas existentes			Demanda
	Rio de Janeiro	São Paulo	Belo Horizonte	
Curitiba	R\$20,00	R\$25,00	R\$30,00	550
Recife	R\$25,00	R\$30,00	R\$25,00	400
Cuiabá	R\$20,00	R\$25,00	R\$20,00	400
Belém	R\$55,00	R\$60,00	R\$50,00	250
Capacidade	500	300	400	

Distribuidores	Novas Fábricas	
	Brasília	Salvador
Curitiba	R\$35,00	R\$40,00
Recife	R\$40,00	R\$20,00
Cuiabá	R\$20,00	R\$35,00
Belém	R\$50,00	R\$40,00
Capacidade	400	500

LCL conseguiu um desconto junto à empresa transportadora. Para cada 200 unidades transportadas por trecho, haverá R\$5,00 de desconto unitário. Por exemplo: transportando até 199 unidades no trecho Rio de Janeiro, Curitiba não há desconto, mas transportando qualquer quantidade entre 200 e 399 neste trecho, o preço unitário passa para R\$15,00 (desconto de R\$5,00); transportando entre 400 e 599, o preço unitário passa para R.\$ 10,00, e assim por diante. É estabelecido que o preço mínimo para qualquer trecho depois de aplicados os descontos é de R\$5,00. O modelo usado para resolver o problema é Linear ou Não-linear? Você pode garantir que será encontrada uma solução ótima? (Z=33225)

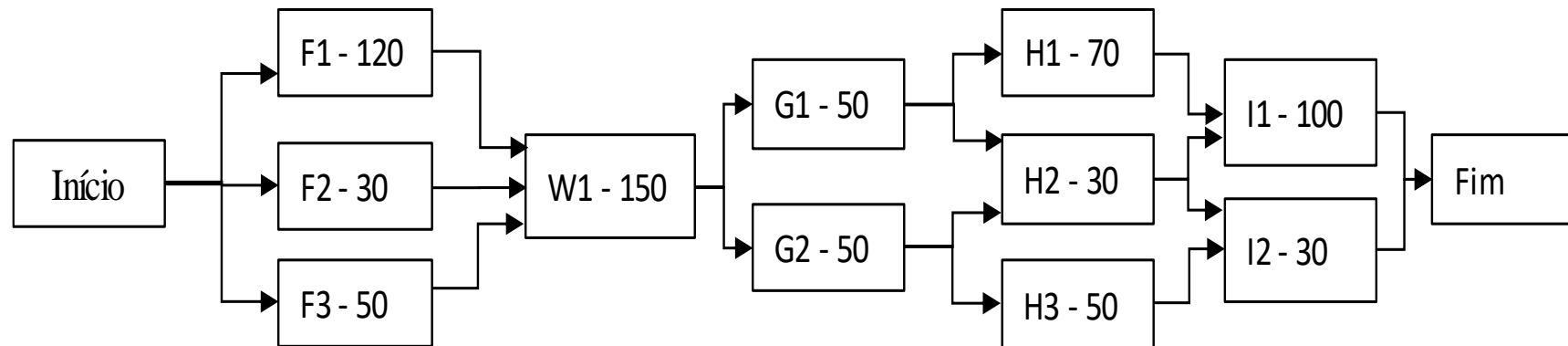
Problema do fluxo de custo mínimo

4) A Pitaf Motores, fornece motores para um grande número de equipes de Fórmula 1. A companhia detém uma serie de contratos de entregas futuras programadas para o próximo ano. As entregas deveram ocorrer trimestralmente de acordo com as necessidades das equipes. A tabela a seguir resume as entregas programadas, bem como a capacidade máxima de produção, o custo de produção por trimestre (variável durante o ano devido a férias, feriados etc.) e o custo de armazenamento que se fizer necessário (as equipes não possuem armazéns para receber os motores com antecedência). A empresa deseja ter ao final do ano um estoque mínimo de 5 unidades. Determine quantos motores devem ser fabricados por trimestre de forma a minimizar o custo total de produção (produção + armazenagem) (resolva através do Excel). (Z=95,5)

	Pedidos contratados	Capacidade de produção	Custo unitario de produção em milhões de reais	Custo unitário de armazenamento
1	10	30	1,20	-
2	30	15	1,15	0,030
3	20	40	1,05	0,020
4	20	10	1,10	0,015

Problema do fluxo de custo mínimo

5) Uma empresa tem instalada uma série de equipamentos e estações de trabalho que podem ser utilizadas na montagem de um novo produto. A figura a seguir esquematiza os caminhos possíveis para a montagem do produto na fábrica. No esquema tem-se a indicação do setor e a quantidade máxima correspondente de itens que podem ser manuseados (capacidade máxima por setor) por mês. Dadas as instalações existentes na empresa, qual é a produção máxima possível mensal do produto? Se a demanda do mercado for maior que a capacidade produtiva da fábrica, em que setor a empresa deve investir para aumentar sua capacidade?. ($Z=100$)



Problema do fluxo de custo mínimo

6) A empresa gama fabrica uma variedade de aparelhos domésticos em uma única fábrica. A demanda esperada para um desses aparelhos domésticos durante os próximos quatro meses são de 140.000, 180.000, 140.000 e 180.000, a fábrica pode produzir mensalmente, em jornada normal 130.000 unidades a um custo unitário de R\$ 15,00, R\$ 16,00 R\$ 20 e R\$ 22 respectivamente para o 1º, 2º 3º e 4º mês. Através do pagamento de horas extras, a capacidade mensal de produção pode ser aumentada em 60.000 unidades, a custo de produção unitário de R\$ 25,00 (somente os adicionais). Existe a possibilidade de armazenagem de até 20.000 unidades de um mês para o outro a um custo unitário de R\$ 5,00, sabe-se ainda que a empresa deve produzir pelo menos 120.000 unidades por mês. A empresa quer determinar quanto de cada aparelho deve fabricar durante cada um dos quatro meses em produção normal e em produção extra, para atender às demandas ao menor custo. Formule e resolva através do Excel). (**Z=12.490.000,00**)

Problema do fluxo de custo mínimo

7) A empresa Alfa fabrica uma variedade de aparelhos domésticos em uma única fábrica. A demanda esperada para um desses aparelhos domésticos durante os próximos quatro meses está representada na tabela abaixo, junto com os custos de produção esperados, além da capacidade de produção desses itens e da produção normal, é possível uma produção extra, a um custo maior em R\$ 5,00, ou seja, no primeiro mês a produção normal custa R\$25,00, e a produção extra custa R\$30,00 (custos unitários). A capacidade de produção extra também pode ser observada na tabela abaixo, assim como a quantidade mínima a ser produzida por mês.

A empresa Alfa estima que gastará \$2,50 por mês para cada unidade desses aparelhos guardados em estoque de um mês para o seguinte. A empresa quer determinar quanto de cada aparelho deve fabricar durante cada um dos quatro meses em produção normal e em produção extra, para atender às demandas ao menor custo. A empresa Alfa deseja ter ao final do período de quatro meses um estoque de 50 aparelhos. Formule e resolva através do Excel). (Z=57.040,00)

	Mês			
	1	2	3	4
Demanda	420	580	450	540
Custo de Produção	25,00	27,00	29,00	28,00
Capacidade de Produção	550	600	300	450
Capacidade Extra	50	60	50	20
Produção Mínima	580	450	350	400

Problema do fluxo de custo mínimo

7) Durante os próximos seis meses, a empresa Alfa. Deve atender os seguintes compromissos de sua seção de malharia:

Jan. 6.000 peças	Abr. 7.000 peças
Fev. 5.000 peças	Mai. 5.000 peças
Mar. 4.000 peças	Jun. 6.000 peças

Ao final de dezembro, há 1500 peças em estoque e a empresa só tem capacidade para produzir 5.000 peças mensais. Entretanto, usando horas-extras, a empresa pode produzir até 800 peças a mais que sua capacidade nominal. O custo variável de produzir uma peça em janeiro é de R\$ 5,0 por peça e o custo de produzir em horas extras é de R\$ 5,50 por peça, um reajuste de 6% no custo variável de produção acontece de um mês para o outro. Além disso, peças que ficam em estoque de um mês para outro provocam um custo adicional de R\$ 0,50 por peça. Formule e resolva através do solver do Excel para atender a demanda, mas minimizando os custos de produção. (**Z=186.285,17**)

Problema da árvore geradora mínima

- Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman; Introdução à Pesquisa Operacional; 9ª Edição, Editora Mc Graw Hill; 2013.
- Marcos Arenales, Vinícius Armentano, Reinaldo Morabito, Horacio Yanasse; Pesquisa Operacional; 6ª Edição, Editora Campus, 2007.
- Eduardo L. de Andrade, Introdução a Pesquisa Operacional; 4ª Edição; Editora LTC; 2009.
- Gerson Lachtermacher, Pesquisa Operacional, 4ª Edição, Editora Pearson, 2009.
- Wagner, H.M., Pesquisa Operacional, 2a edição. Prentice-Hall do Brasil, 1986.
- Taha, H. A., Pesquisa Operacional, 8a edição. Pearson (Prentice-Hall), 2008

Sobre a disciplina

Dúvidas?



Obrigado!