# Otimização II

**Prof. Dr. Paulo Roberto Maia**
Paulo.maia@inatel.br

P108 – Otimização II

# Sobre a disciplina (conteúdo)

## Tópicos

- Otimização de Redes;
- Introdução a teoria das filas;
- Introdução à análise de decisão.

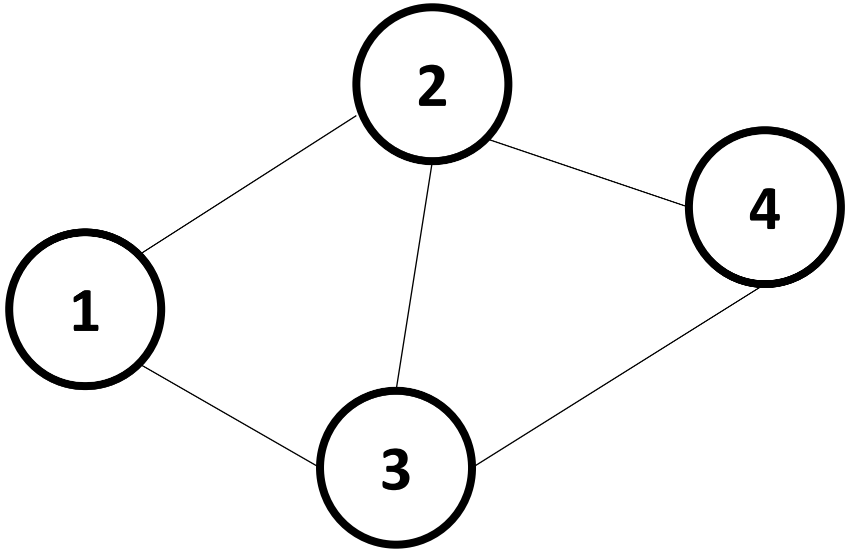
# Aula 01
# Otimização em Redes

# Agenda

- ❑ Problema do fluxo máximo;
- ❑ Problema do caminho mínimo
- ❑ Problema custo mínimo

## Redes

- Problemas de otimização em rede são problemas matemáticos que envolvem a alocação eficiente de recursos em sistemas de rede.



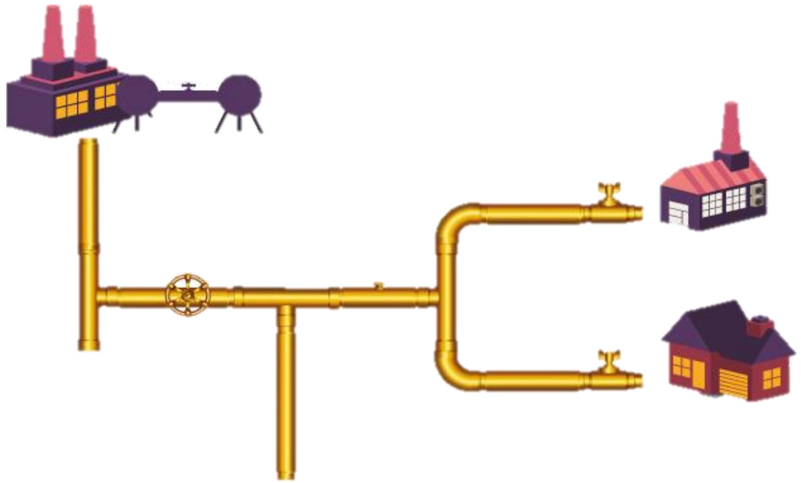

**N:** É o conjunto de **nós** (**vértices**) no grafo. No nosso caso, N = {1, 2, 3, 4}.

**A:** É o conjunto de **arestas** (**links**) no grafo. No nosso caso, A = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

# Problema do fluxo máximo

## Redes

- Problema do fluxo máximo: O objetivo é obter o fluxo máximo de uma origem para um destino.



# Problema do fluxo máximo

## Exemplos

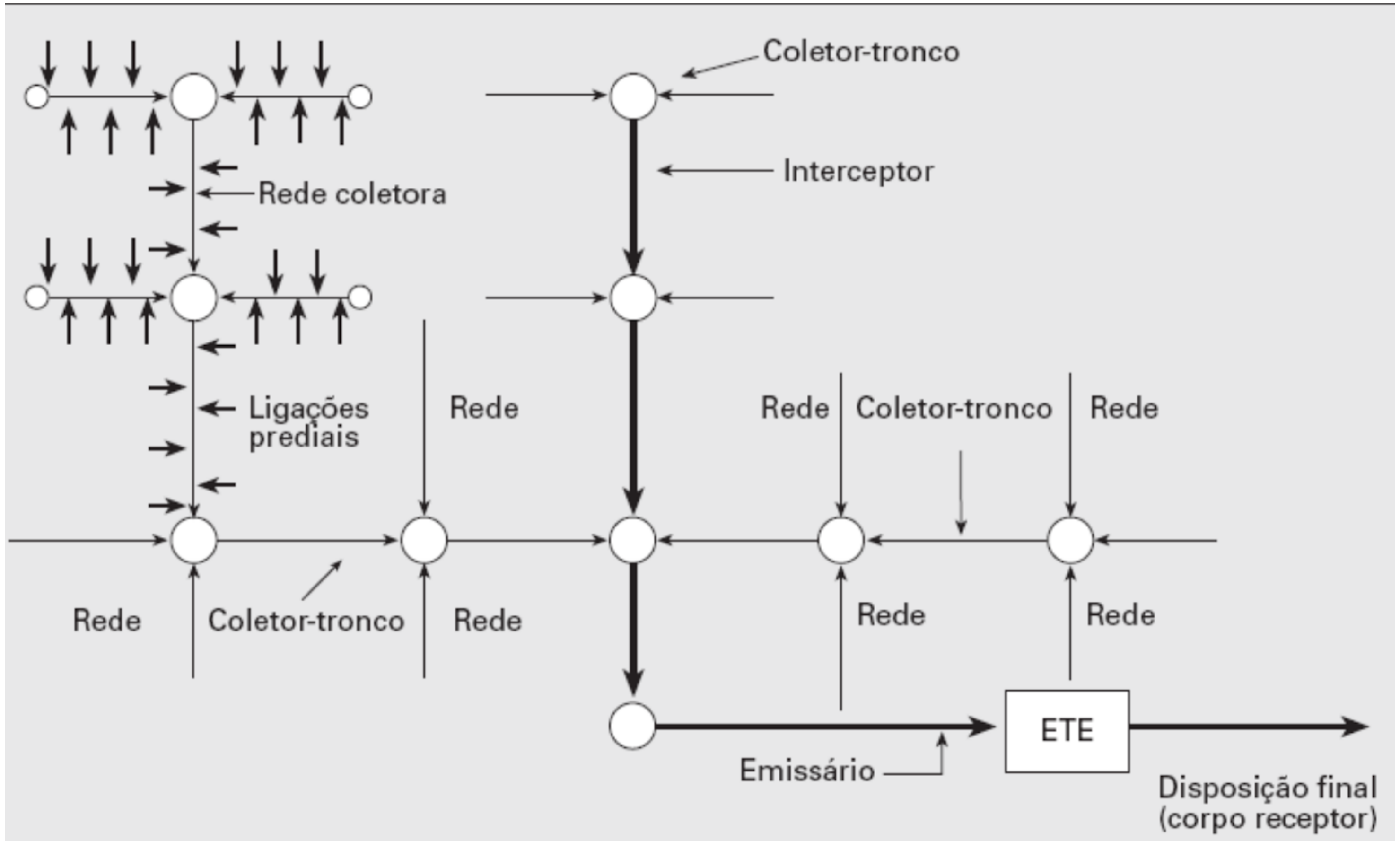
### Rede de Distribuição de Gás

- **Interrupções no Fornecimento:** A rede de distribuição de gás pode não ser capaz de lidar com a **demanda máxima** de gás dos usuários;

- **Má Alocação de Recursos:** Alocações inadequadas de recursos, como dimensionamento insuficiente das tubulações ou válvulas de controle.

# Problema do fluxo máximo

## Exemplos




### Rede de tratamento de esgoto

**Entupimentos e Vazamentos:** Quando a demanda **excede** a capacidade das tubulações, pode ocorrer o **acúmulo de resíduos não tratados** ou o **vazamento de esgoto**;

**Tratamento Inadequado:** Pode haver a **liberação** de **efluentes** não tratados ou parcialmente tratados no meio ambiente.

# Problema do fluxo máximo

## Exemplos

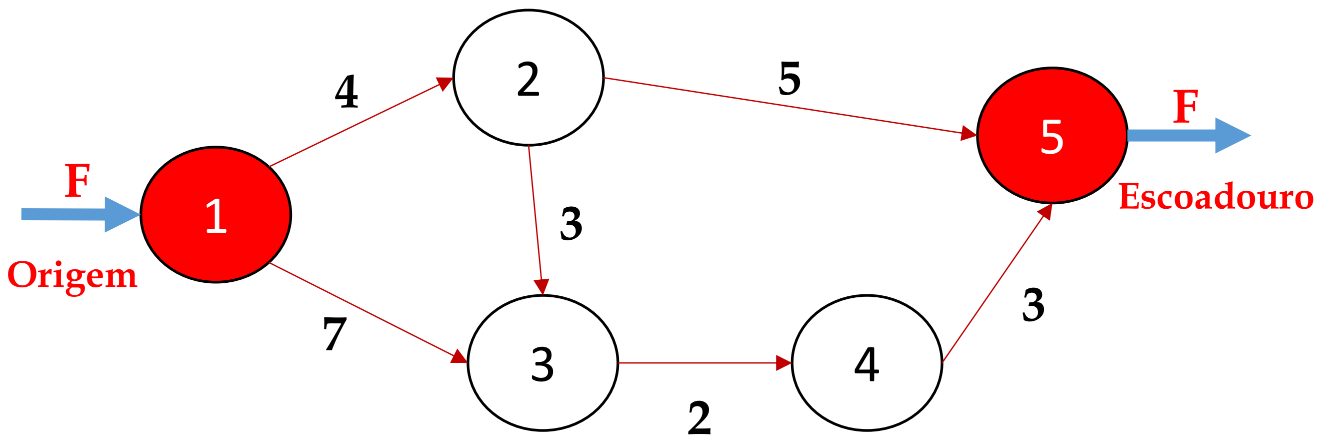
### Pedágio

1. **Filas e Atrasos:** Filas e atrasos significativos nas praças de pedágio;

2. **Ineficiência Operacional:** Dificulta a gestão do tráfego e a coleta eficaz de pedágios.

# Problema do fluxo máximo

## Exemplo 1



# Problema do fluxo máximo

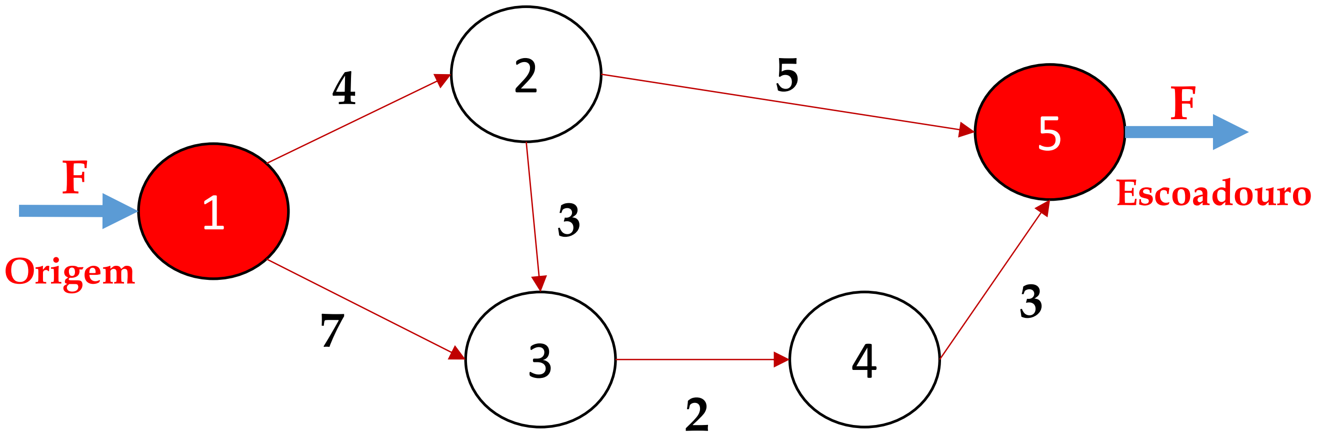
## Exemplo 1

Passos para resolução do problema:

1. Definição das variáveis de decisão;
2. Definição da função objetivo;
3. Definição das restrições;
4. Resolução do problema.

# Problema do fluxo máximo

## Exemplo 1




Variáveis de **Decisão**

**$X_{ij}$ = Quantidade do fluxo existente entre os nós i e j**

| | |
|---|---|
| $X_{12}$ | $X_{23}$ |
| $X_{13}$ | $X_{34}$ |
| $X_{25}$ | $X_{45}$ |

# Problema do fluxo máximo

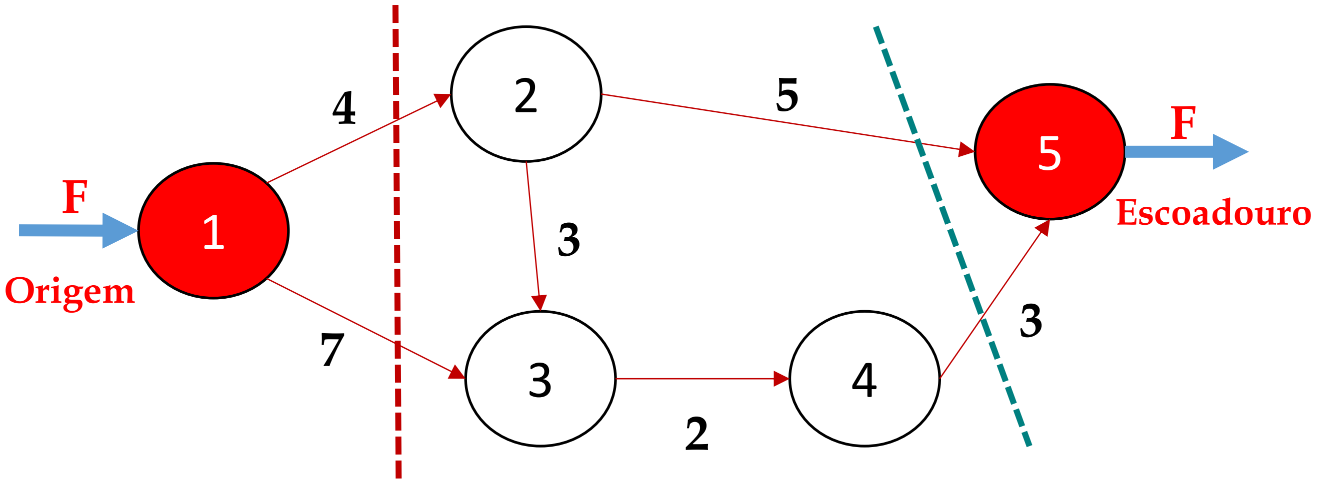
## Exemplo 1

Passos para resolução do problema:

1. Definição das variáveis de decisão;
2. Definição da função objetivo;
3. Definição das restrições;
4. Resolução do problema.

# Problema do fluxo máximo

## Exemplo 1




Função **objetivo**

Max Z = $\mathbf{X_{25}} + \mathbf{X_{45}}$

# Problema do fluxo máximo

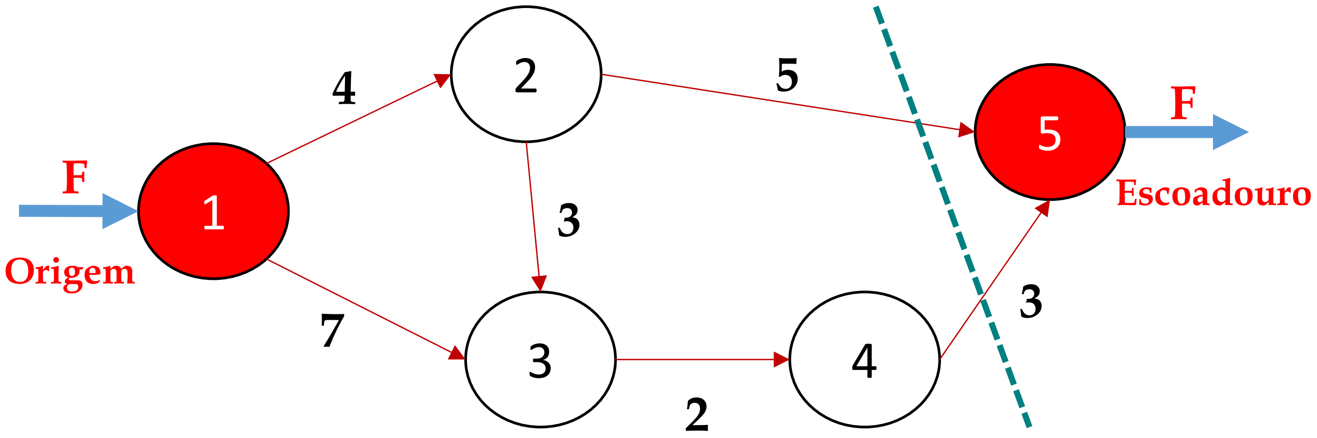
## Exemplo 1

Passos para resolução do problema:

1. Definição das variáveis de decisão;
2. Definição da função objetivo;
3. Definição das restrições;
4. Resolução do problema.

# Problema do fluxo máximo

## Exemplo 1




Restrições de fluxo

Nó **2** $\quad \mathbf{X_{12} = X_{23} + X_{25}}$

Nó **3** $\quad \mathbf{X_{13} + X_{23} = X_{34}}$

Nó **4** $\quad \mathbf{X_{34} = X_{45}}$

Restrições de capacidade

$\mathbf{X_{12} \leq 4} \qquad \mathbf{X_{23} \leq 3}$

$\mathbf{X_{13} \leq 7} \qquad \mathbf{X_{34} \leq 2}$

$\mathbf{X_{25} \leq 5} \qquad \mathbf{X_{45} \leq 3}$

# Problema do fluxo máximo

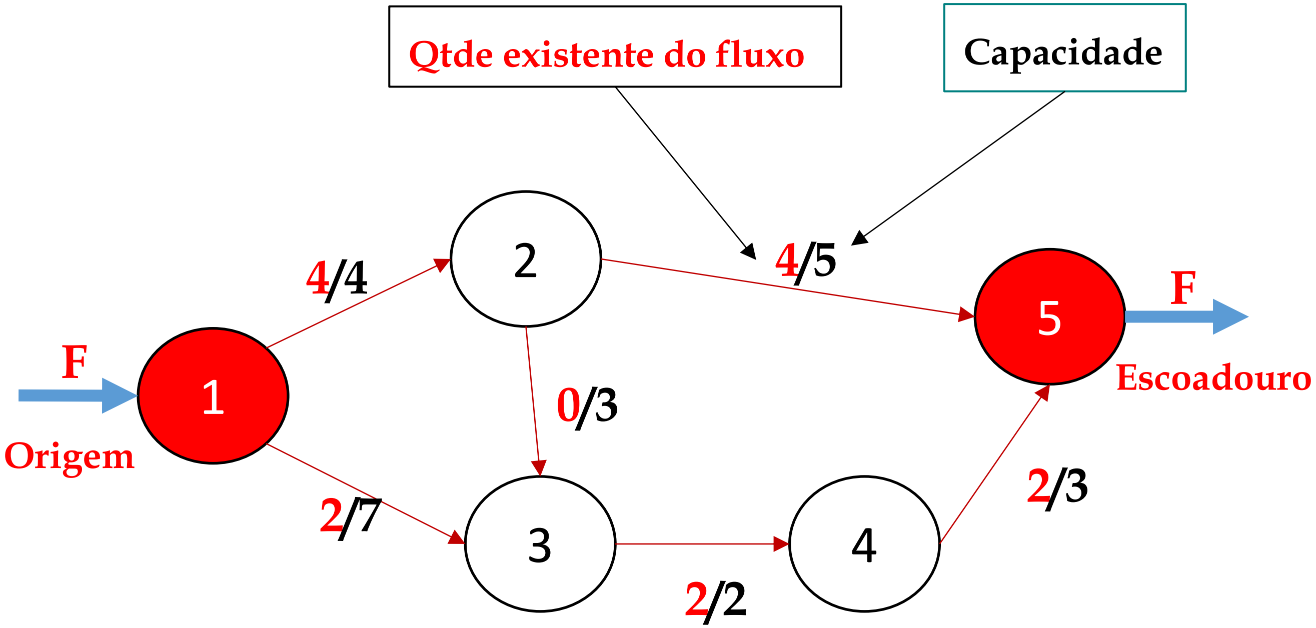
## Exemplo 1

Passos para resolução do problema:

1. Definição das variáveis de decisão;
2. Definição da função objetivo;
3. Definição das restrições;
4. Resolução do problema.

# Problema do fluxo máximo

## Exemplo 1



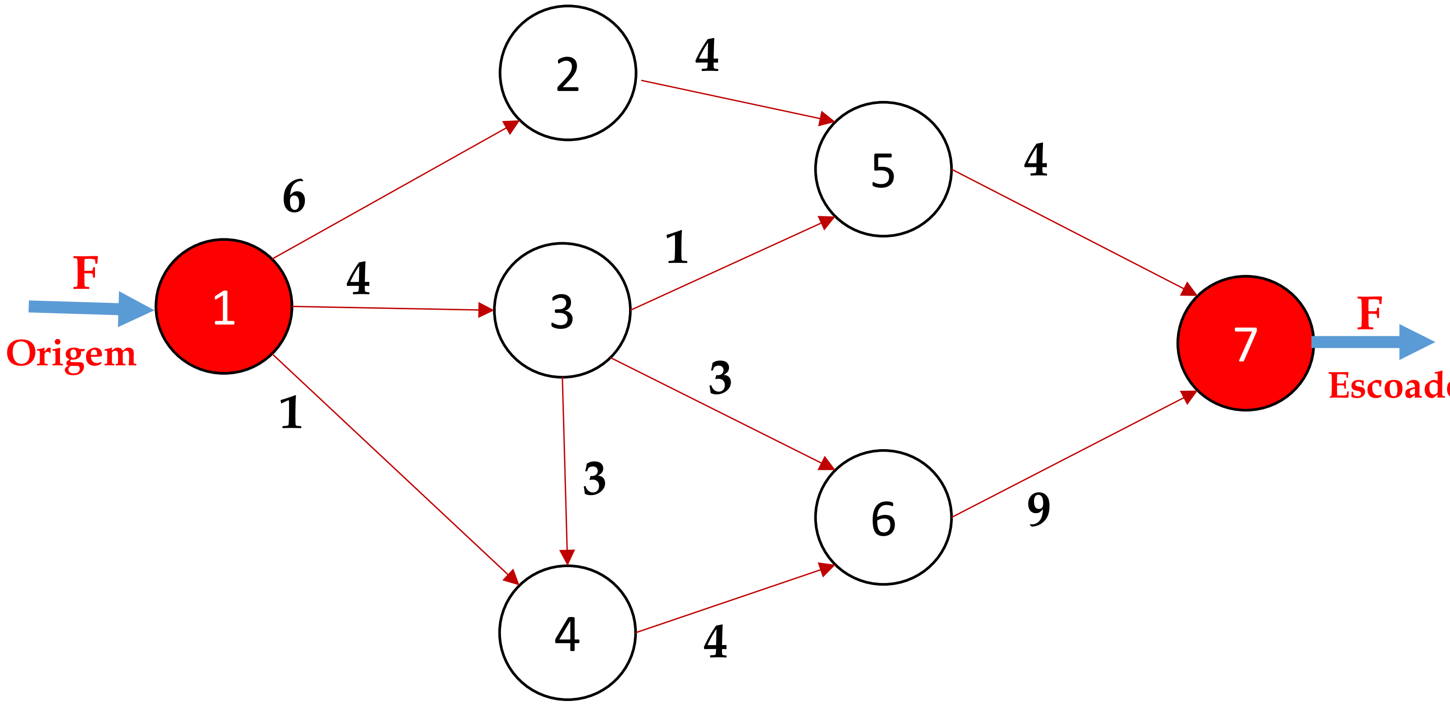

| Variável de Decisão | Qtde de fluxo entre nós i e j |
|---|---|
| x12 | 4 |
| x13 | 2 |
| x23 | 0 |
| x25 | 4 |
| x34 | 2 |
| x45 | 2 |

Função **objetivo**

Max Z = $\mathbf{X_{25}}$ + $\mathbf{X_{45}}$ = 4 + 2 = **6**

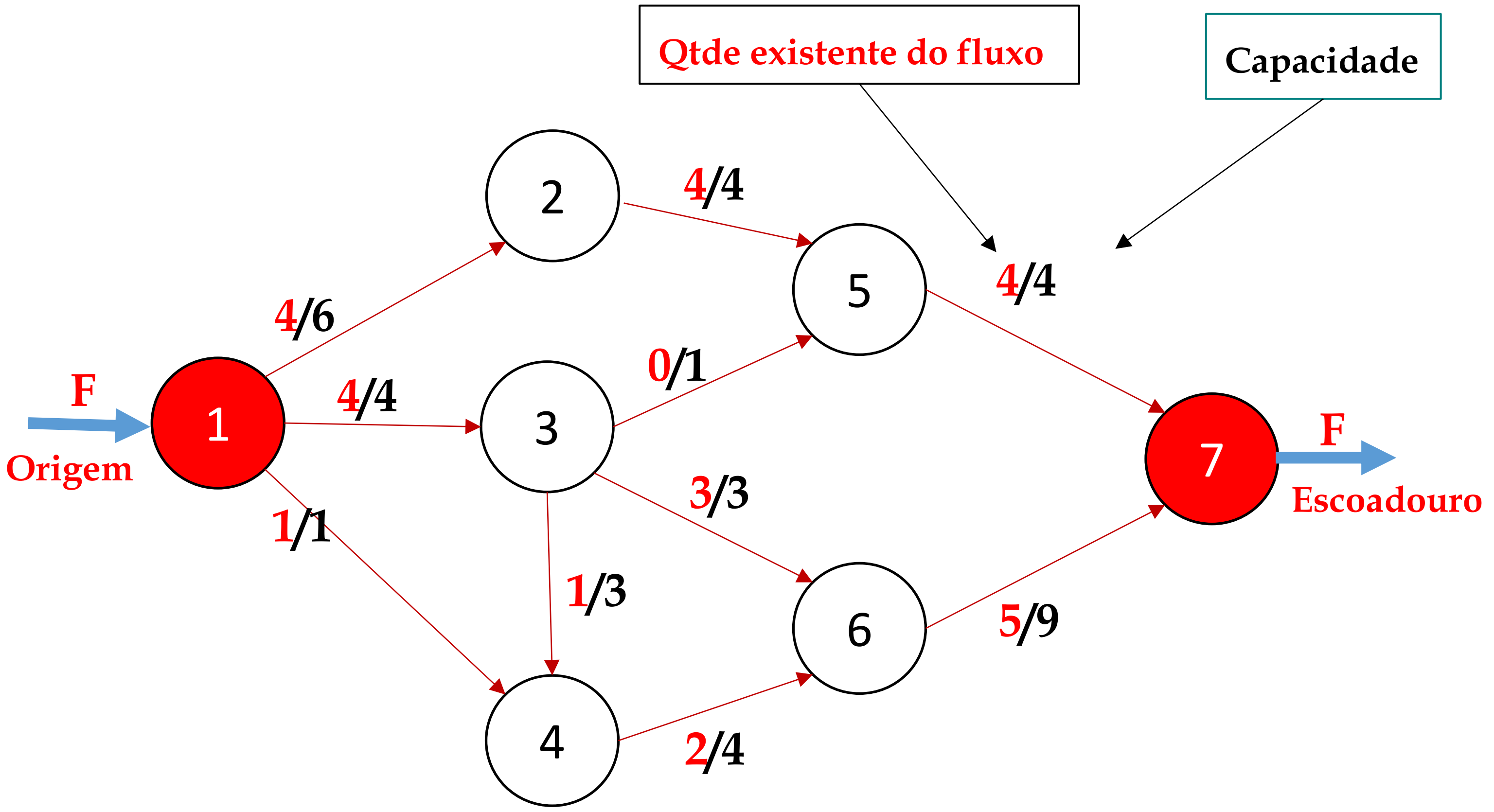
# Problema do fluxo máximo

## Exemplo 2



# Problema do fluxo máximo

## Exemplo 2




| Variável de Decisão | Qtde de fluxo entre nós i e j |
|---|---|
| x12 | 4 |
| x13 | 4 |
| x14 | 1 |
| x25 | 4 |
| x35 | 0 |
| x36 | 3 |
| x34 | 1 |
| x46 | 2 |
| x57 | 4 |
| x67 | 5 |

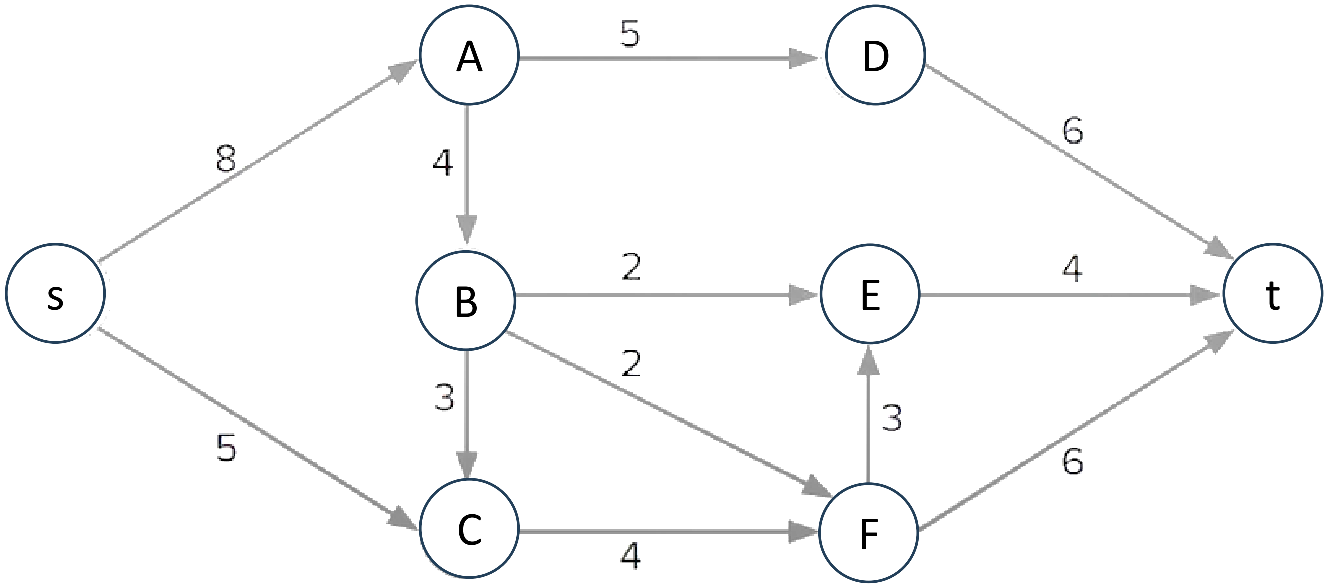
Função **objetivo**

Max $Z = X_{57} + X_{67} = 4 + 5 = \mathbf{9}$

# Problema do fluxo máximo

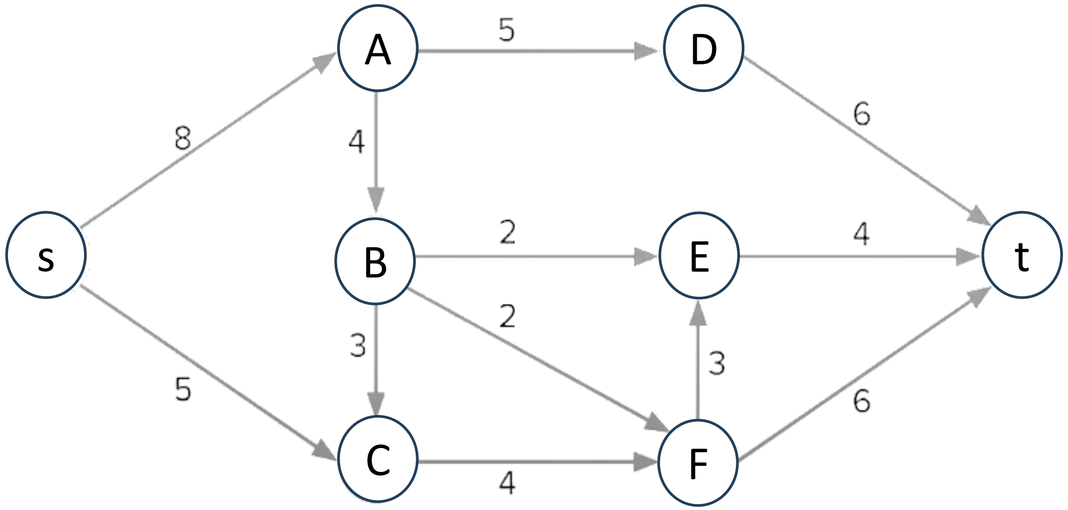
## Exemplo 3

A Oleobrás dispõe de uma série de oleodutos que servem para transportar óleo do campo produtor para as refinarias. Considere o esquema abaixo onde são mostradas as possíveis ligações entre o campo s e a refinaria t, onde os círculos numerados são estações de bombeamento e as arestas numerados indicam o fluxo máximo de óleo que pode ser bombeado entre as duas estações. Qual o fluxo máximo de óleo que pode chegar à refinaria?



# Problema do fluxo máximo

## Exemplo 3



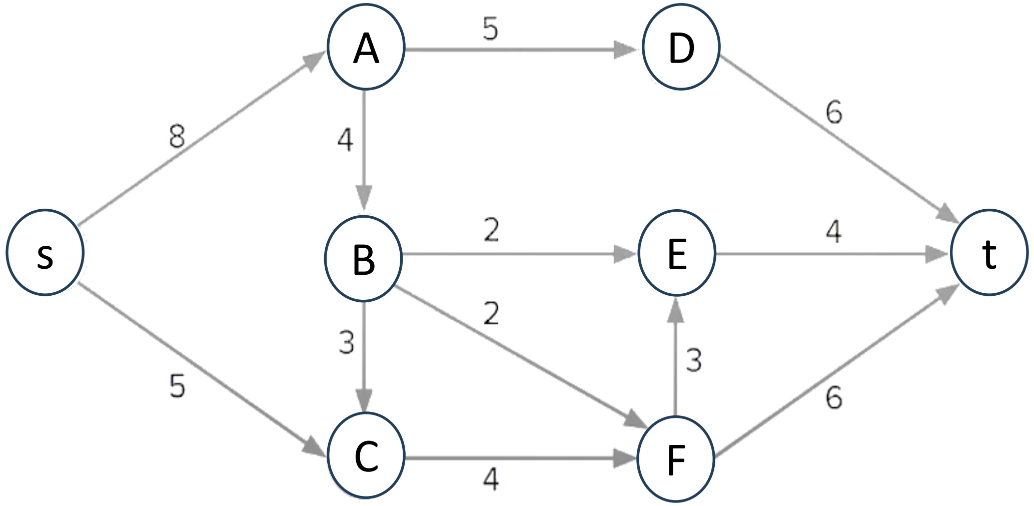

Variáveis de decisão:

**$X_{ij}$ = Quantidade do fluxo existente entre os nós i e j**

| | | |
|---|---|---|
| $X_{sA}$ | $X_{BC}$ | $X_{Dt}$ |
| $X_{sC}$ | $X_{BE}$ | $X_{Et}$ |
| $X_{AB}$ | $X_{BF}$ | $X_{FE}$ |
| $X_{AD}$ | $X_{CF}$ | $X_{Ft}$ |

# Problema do fluxo máximo

## Exemplo 3




Função Objetivo:

$$\mathbf{Max\ Z} = X_{Dt} + X_{Et} + X_{Ft}$$

Definição das restrições:

Nó A $X_{sA} = X_{AB} + X_{AD}$

Nó B $X_{AB} = X_{BC} + X_{BE} + X_{BF}$

Nó C $X_{sC} + X_{BC} = X_{CF}$

Nó D $X_{AD} = X_{Dt}$

Nó E $X_{BE} + X_{FB} = X_{Et}$

Nó F $X_{BF} + X_{CF} = X_{FE} + X_{Et}$

$X_{sA} \leq 8$ $X_{BF} \leq 2$

$X_{sC} \leq 5$ $X_{CF} \leq 4$

$X_{AB} \leq 4$ $X_{Dt} \leq 6$

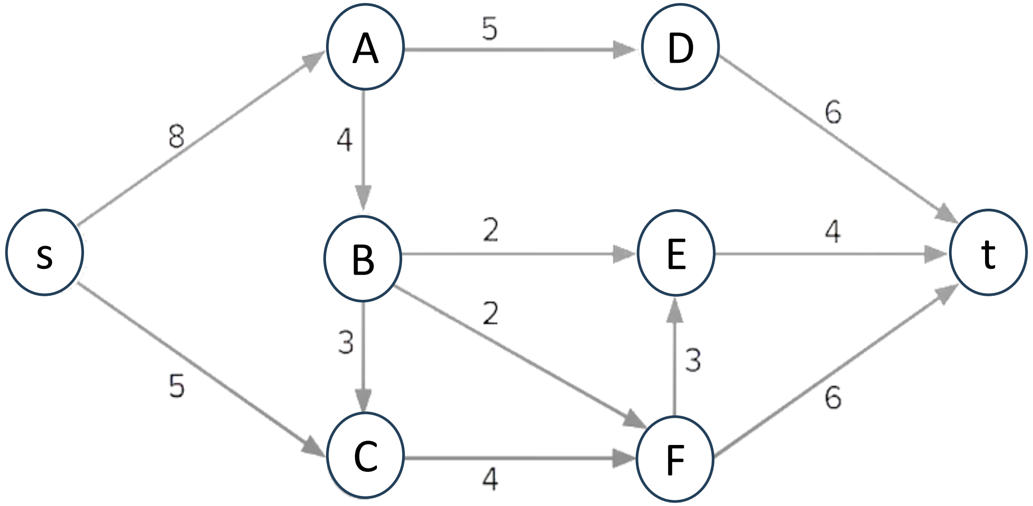
$X_{AD} \leq 5$ $X_{Et} \leq 4$

$X_{BC} \leq 3$ $X_{FE} \leq 3$

$X_{BE} \leq 2$ $X_{Ft} \leq 6$

# Problema do fluxo máximo

## Exemplo 3




Função Objetivo:

$$\mathbf{Max\ Z = X_{Dt} + X_{Et} + X_{Ft} = 5 + 2 + 5 = 12}$$

| Variável de decisão | Quant. de fluxo entre os nós i e j |
|---|---|
| XsA | 8 |
| XsC | 4 |
| XAB | 3 |
| XAD | 5 |
| XBC | 0 |
| XBE | 2 |
| XBF | 1 |
| XCF | 4 |
| XDt | 5 |
| XEt | 2 |
| XFE | 0 |
| XFt | 5 |

# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

Considere um grafo (G) direcionado ponderado com os “pesos” das arestas representam as capacidades de fluxos.

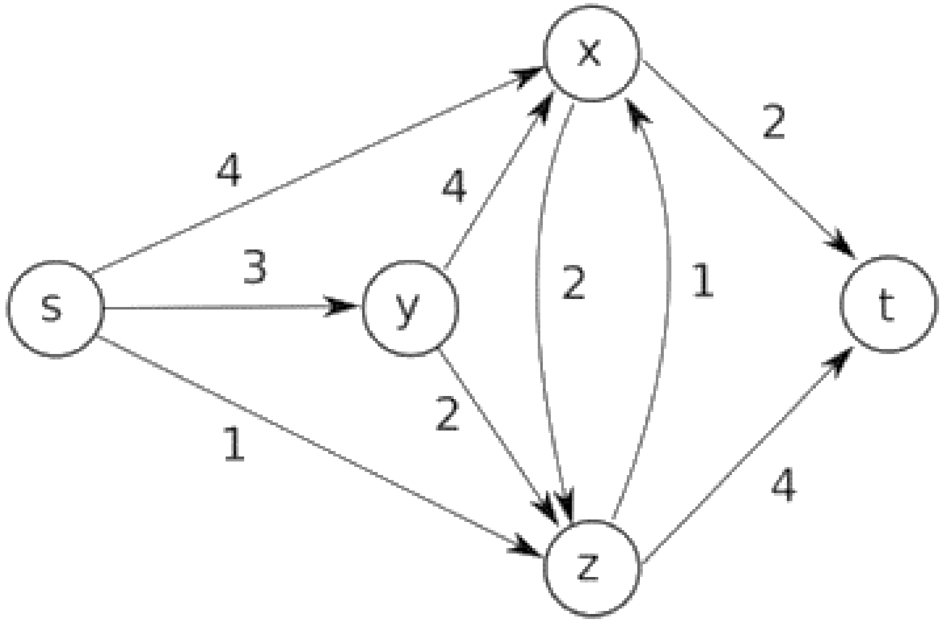
O peso de cada aresta deve ser positivo, e representa a capacidade máxima que pode ser transmitida por uma aresta;

Os vértices  da rede são classificados como:

$s \in V$: Source (gerador de fluxo: não entra nada, apenas sai)

$t \in V$: Terminal ou sink (absorve fluxo: não sai nada, apenas entra)

$\forall\, v \in V - \{s, t\}$: Nós internos (intermediários)



# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

Definição: Um fluxo s-t é uma função $f: A \rightarrow N^{+}$ (associa um inteiro a cada aresta) que satisfaz:

i) $\forall\ a \in A, f(a) \leq c(a)$ (restrição de capacidade)

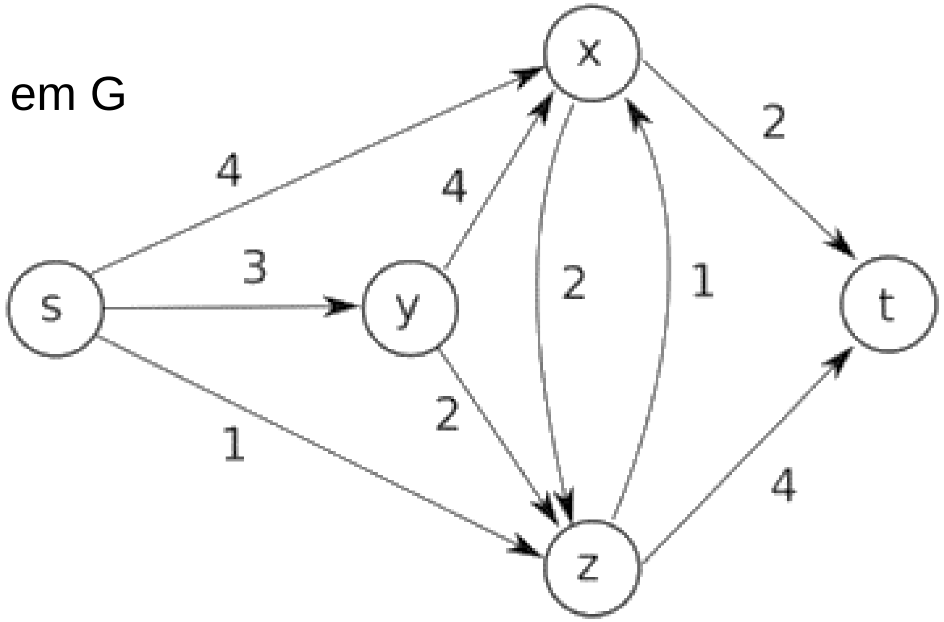
ii) $v(f) = \sum_{a \in O(s)} f(a) = \sum_{a \in I(t)} f(a)$ (fluxo gerado na fonte é igual ao fluxo consumido no terminal)

iii) $\forall\ v \in V - \{s, t\}$ (nó interno)

$$\sum_{a \in I(v)} f(a) = \sum_{a \in O(v)} f(a)$$ (conservação do fluxo)

iv) Limite superior: para o valor de fluxo máximo que pode circular em G

$v(f) \leq \sum_{a \in O(s)} c(a)$



# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

Como exemplo, verifique que um fluxo válido para o grafo anterior é representado a seguir

i) $\forall\ a \in A, f(a) \leq c(a)$

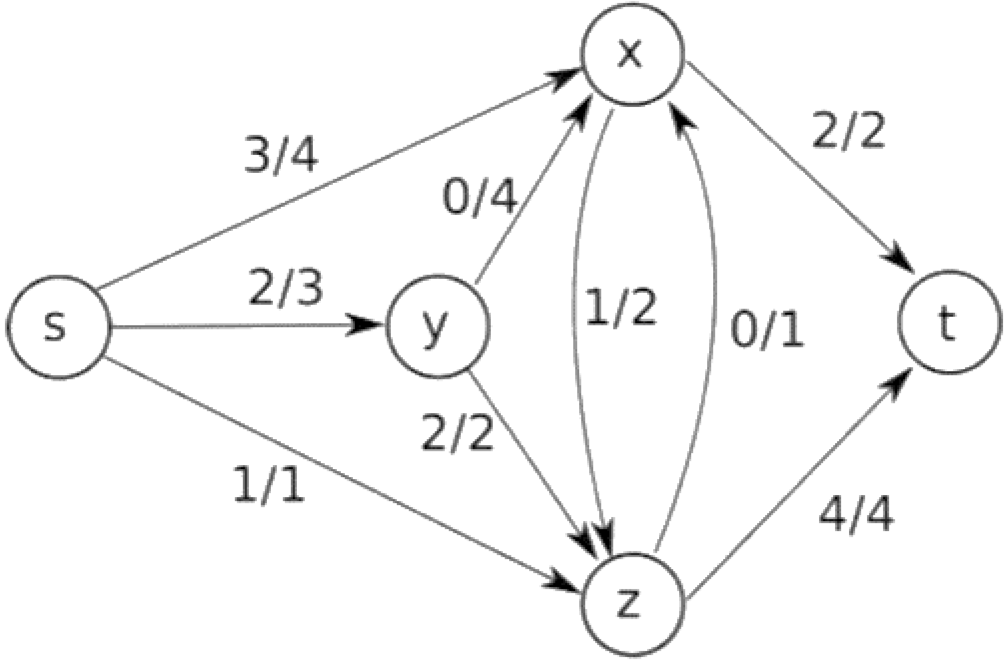
ii) $v(f) = \sum_{a \in O(s)} f(a) = 1 + 2 + 3 = 6 = 2 + 4 = \sum_{a \in I(t)} f(a)$

iii) $\sum_{a \in I(v)} f(a) = \sum_{a \in O(v)} f(a)$ , para {x, y, z} temos

$$\sum_{a \in I(\mathrm{x})} f(a) = 3 + 0 + 0 = 1 + 2 = \sum_{a \in O(\mathrm{x})} f(a)$$

$$\sum_{a \in I(\mathrm{y})} f(a) = 2 = 2 + 0 \sum_{a \in O(\mathrm{y})} f(a)$$

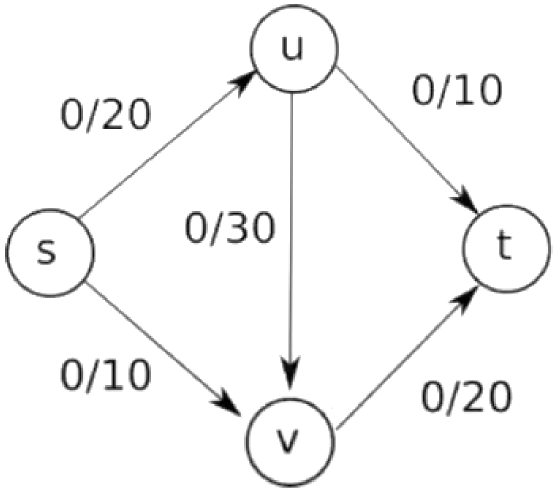
$$\sum_{a \in I(\mathrm{z})} f(a) = 1 + 2 + 1 = 0 + 4 = \sum_{a \in O(\mathrm{z})} f(a)$$



# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

Dado G=(V, A, c) qual o máximo valor de v(f) que pode chegar em t ?

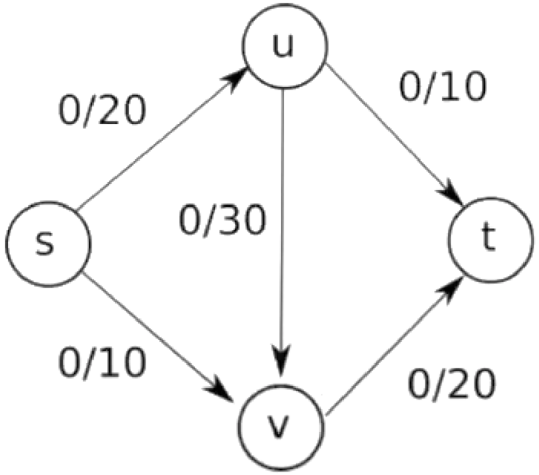
1. Condição inicial: $f(a) = 0, \ \forall\ a \in A$
2. Iteração: encontrar um caminho s-t e transmitir fluxo
3. Condição de parada: Todo caminho s-t encontra-se saturado




Caso 1. P = suvt, v(f) = 20

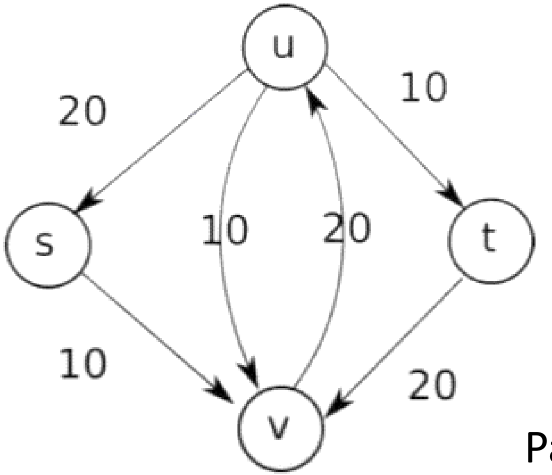
Caso 2. P1 = sut, v(f) = 10
P2 = svt, v(f) = 10 + 10 = 20
P3 = suvt, v(f) = 20 + 10 = 30

# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson



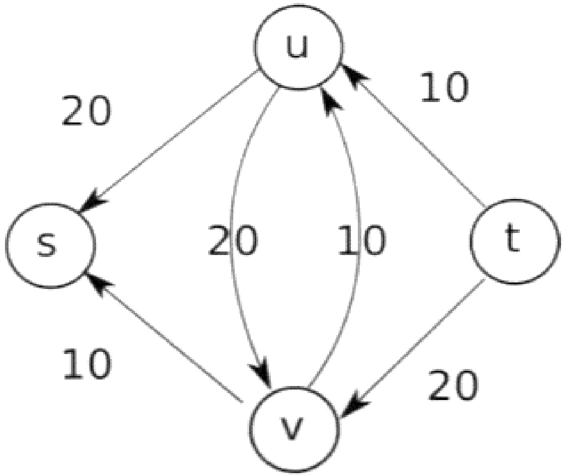

→

Passo 1
20 unidades
P=suvt
f=20



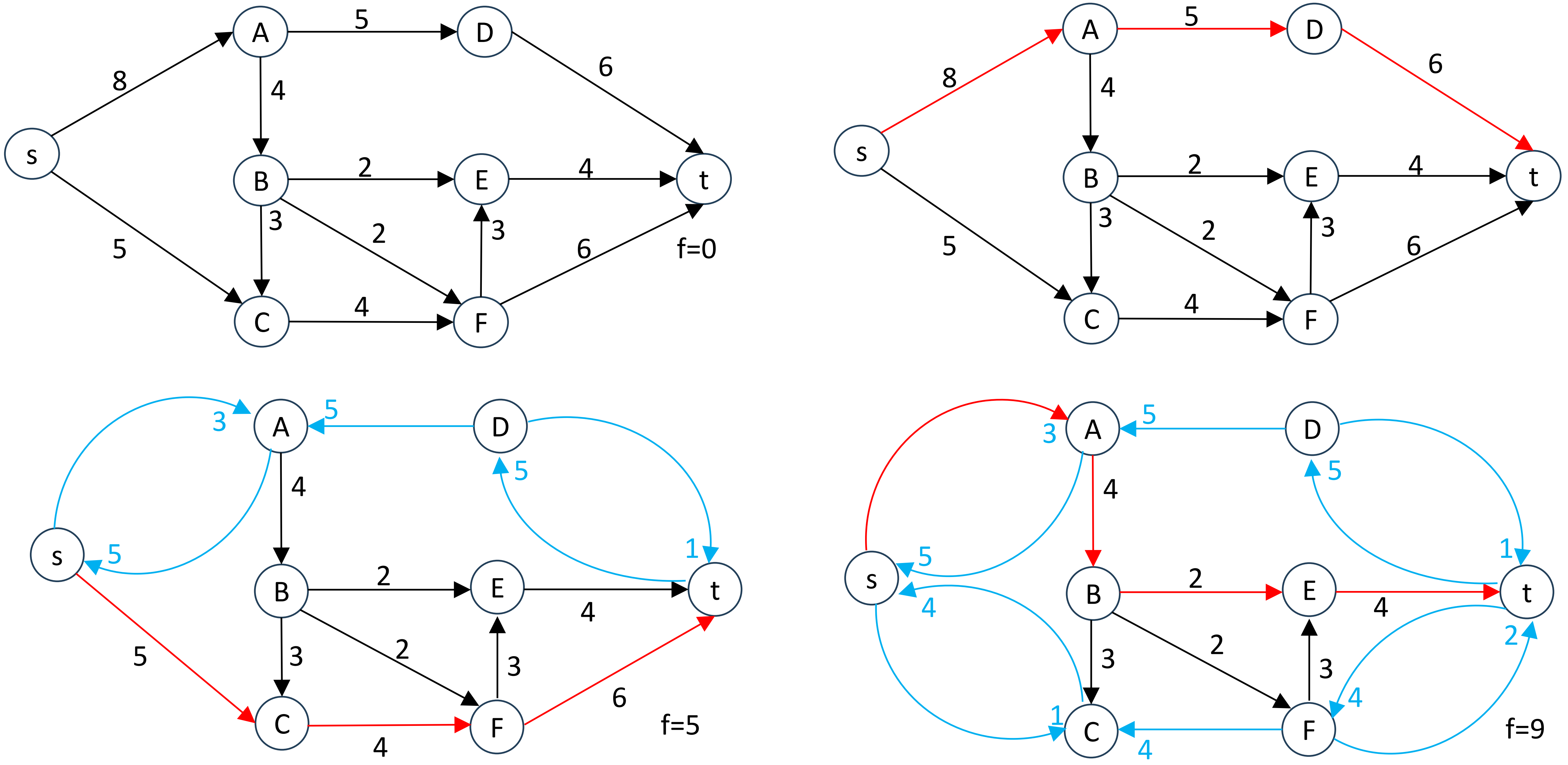

→

Passo 2
10 unidades
P=svut
f=30

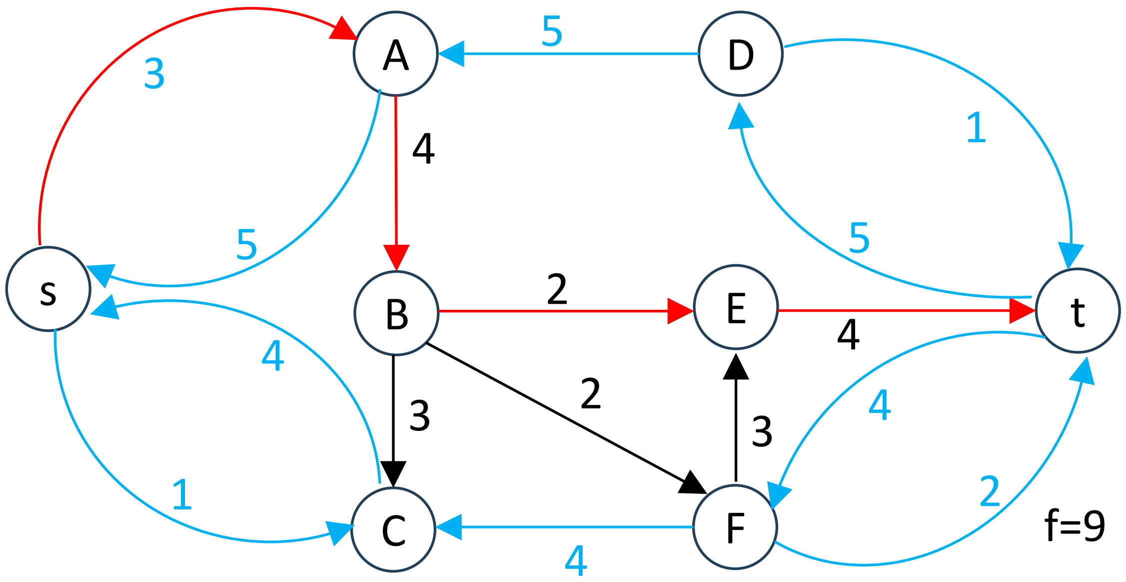


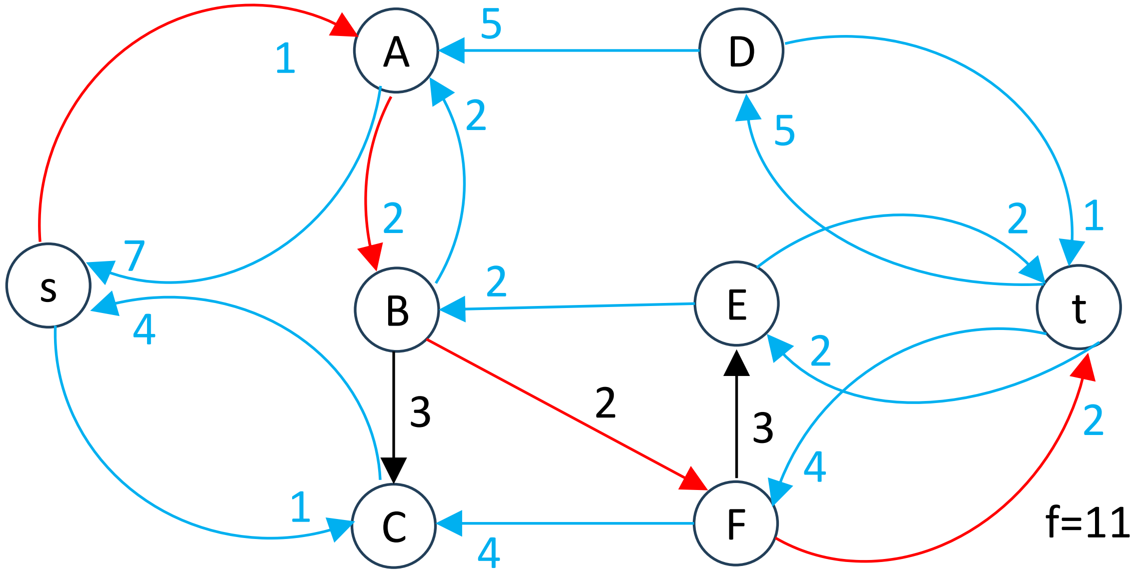

Passo 3
f=30
$\nexists P_{st}$ em $G_f \rightarrow PARE$

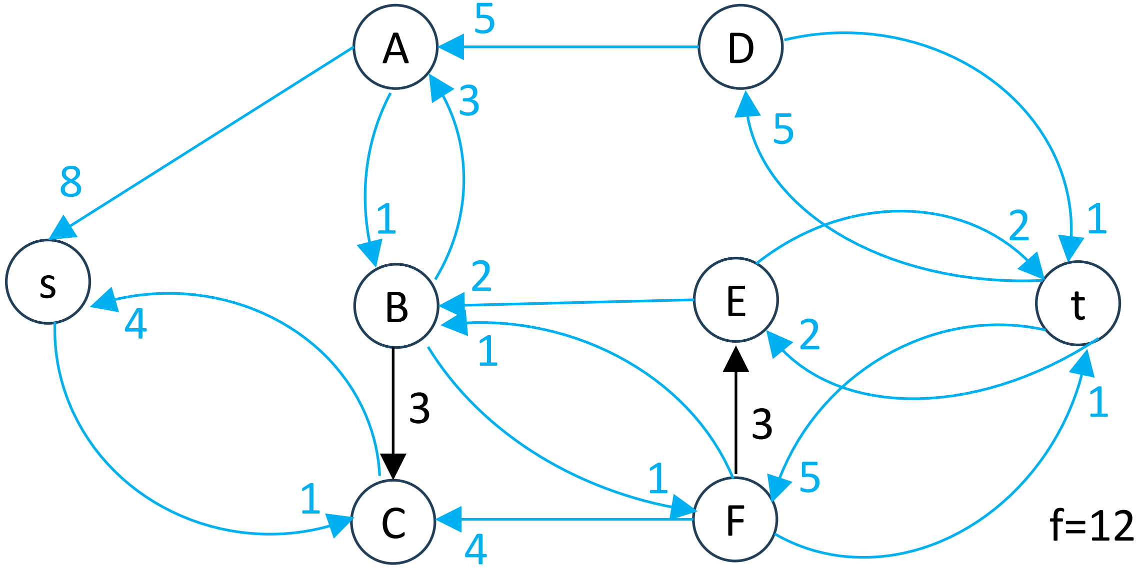
# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson



# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson



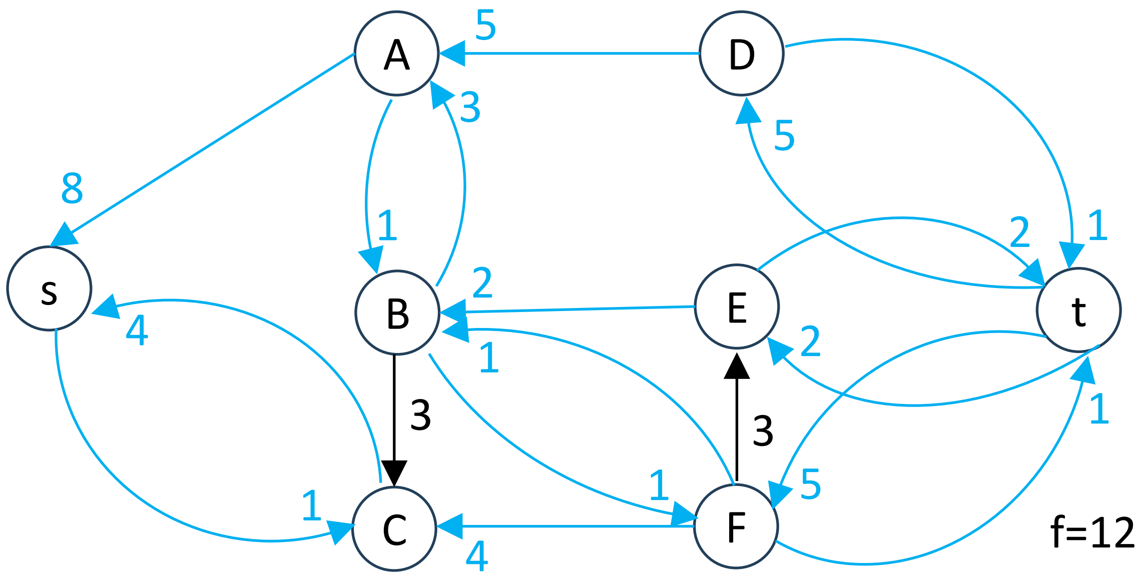

$$f = 9.: \quad 2 \rightarrow s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow t$$
$$1 \rightarrow s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow t$$

$$f = 9.: \quad 2 \rightarrow s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow t$$
$$1 \rightarrow s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow t$$

$$f = 9.: \quad 1 \rightarrow s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow t$$
$$2 \rightarrow s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow t$$

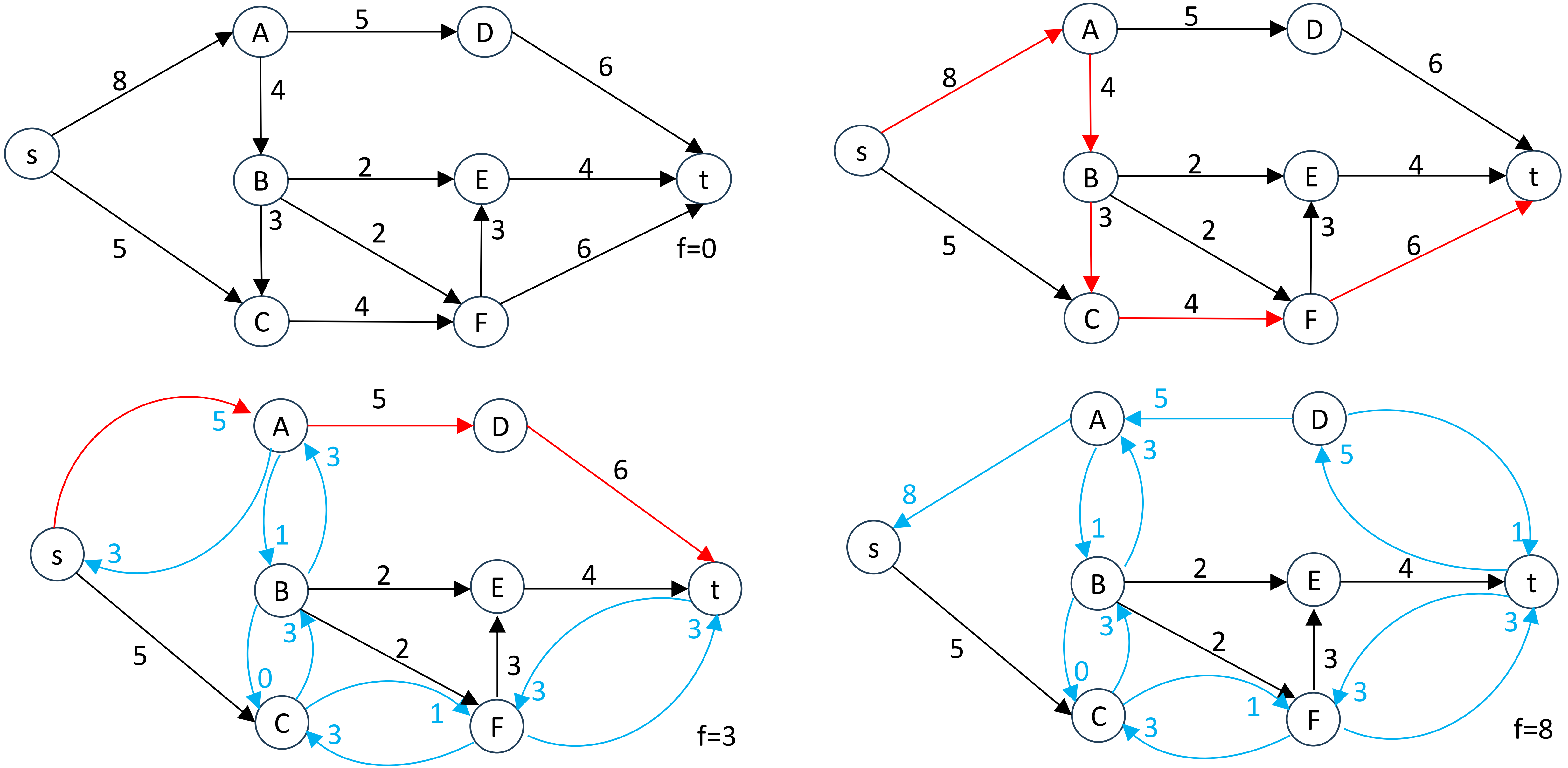
$$f = 9.: \quad 1 \rightarrow s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow t$$
$$2 \rightarrow s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow t$$

# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

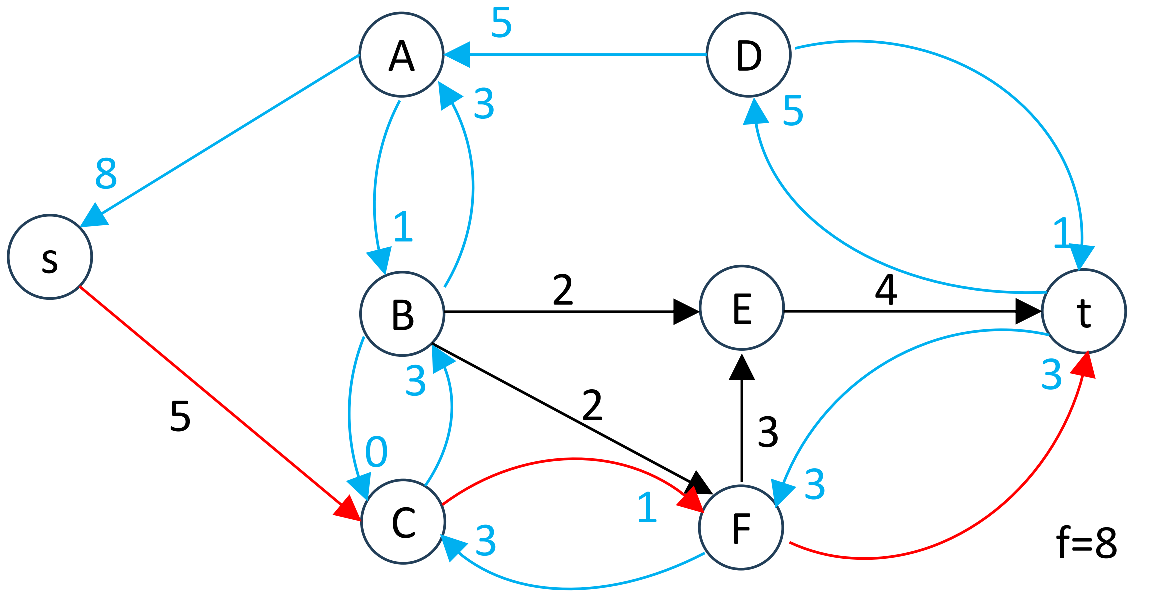


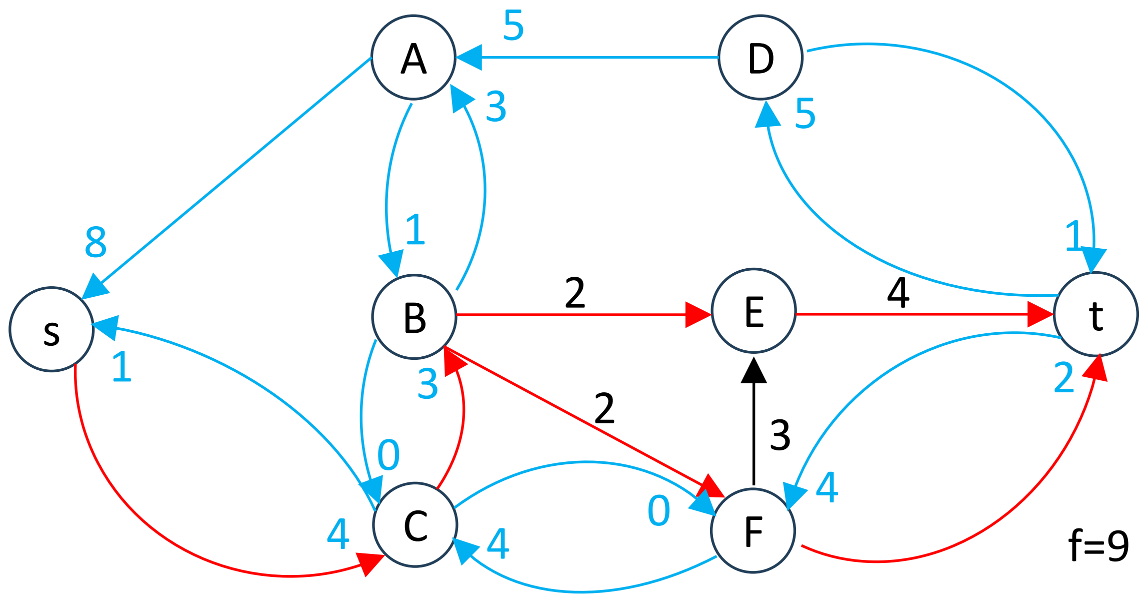

| Variável de decisão | Quant. de fluxo entre os nós i e j |
|---|---|
| XsA | 8 |
| XsC | 4 |
| XAB | 3 |
| XAD | 5 |
| XBC | 0 |
| XBE | 2 |
| XBF | 1 |
| XCF | 4 |
| XDt | 5 |
| XEt | 2 |
| XFE | 0 |
| XFt | 5 |

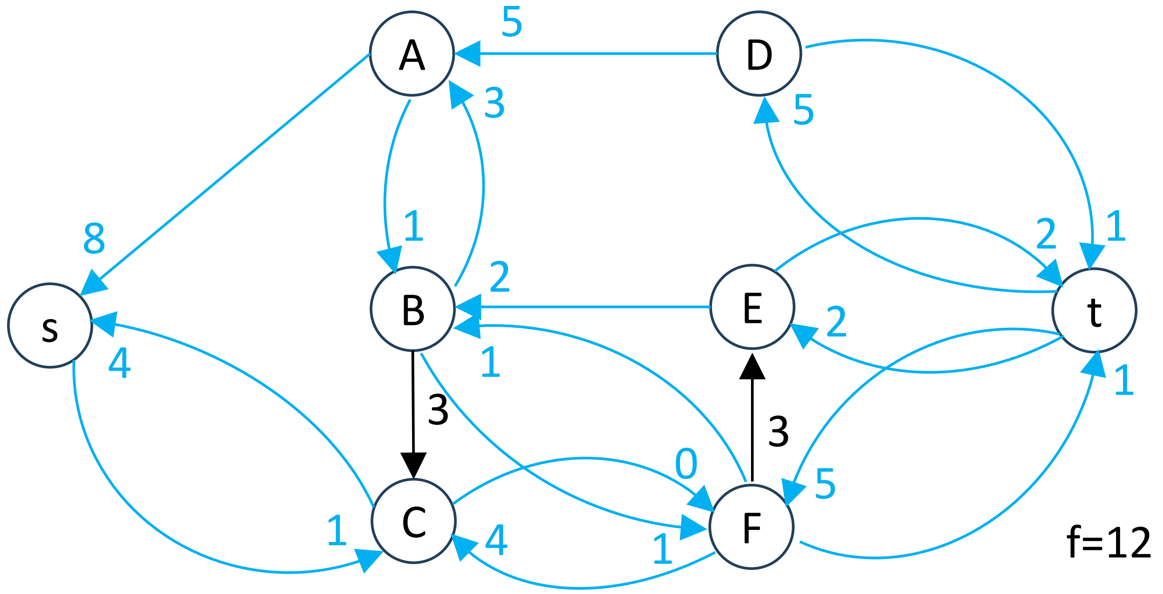
# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson



# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

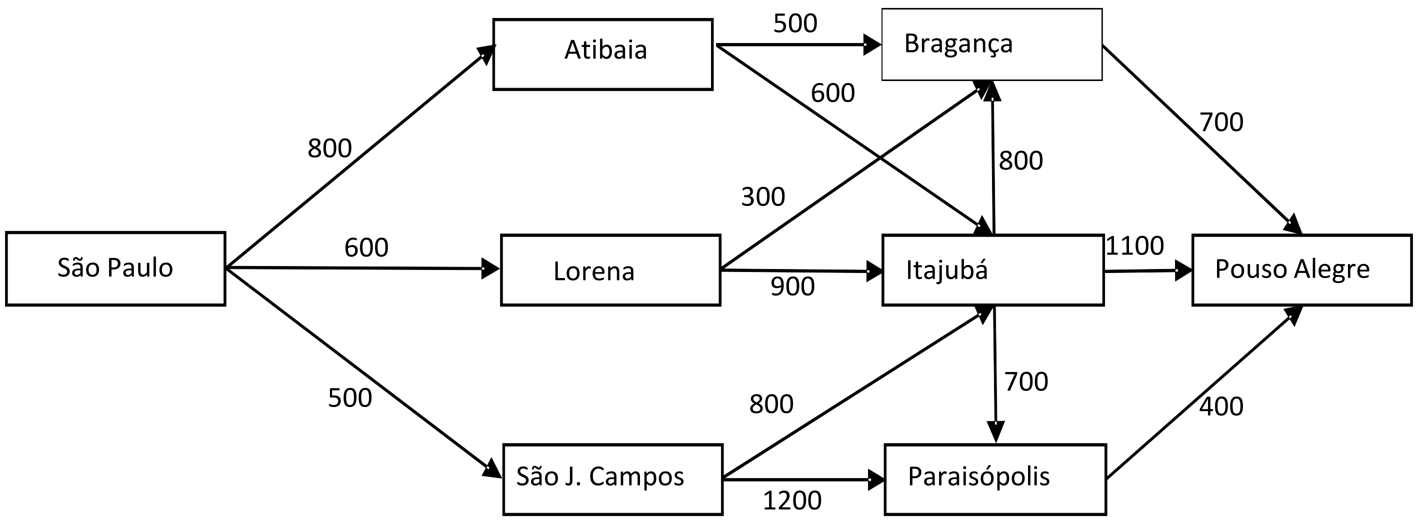


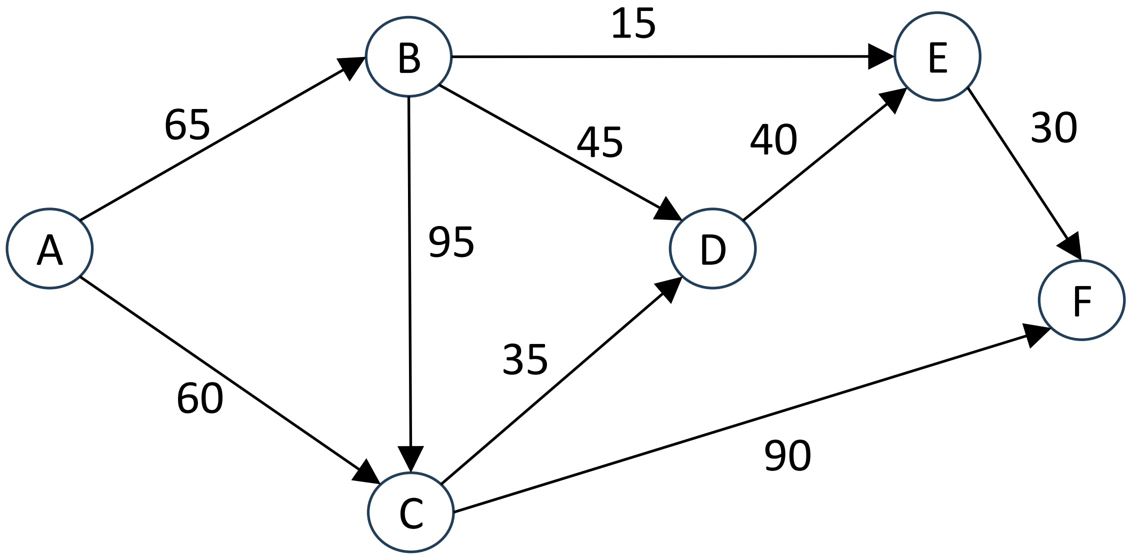
# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

1) Considere o modelo de rede a seguir, números indicados em cada aresta significam a quantidade máxima em milhões de kW/hora possível de ser enviada de uma cidade para outra (indicadas pelos nós extremos das arestas), e que a cidade de Pouso Alegre precisa de toda a energia possível que possa ser enviada de São Paulo para suprir uma deficiência temporária de seu sistema de abastecimento. Formule e determine pelo algoritmo Ford-Fulkerson a quantidade máxima de energia que pode sair de São Paulo e chegar a Pouso Alegre, respeitando os limites de transmissão de cada eletrovia. **(Z= 1.900)**



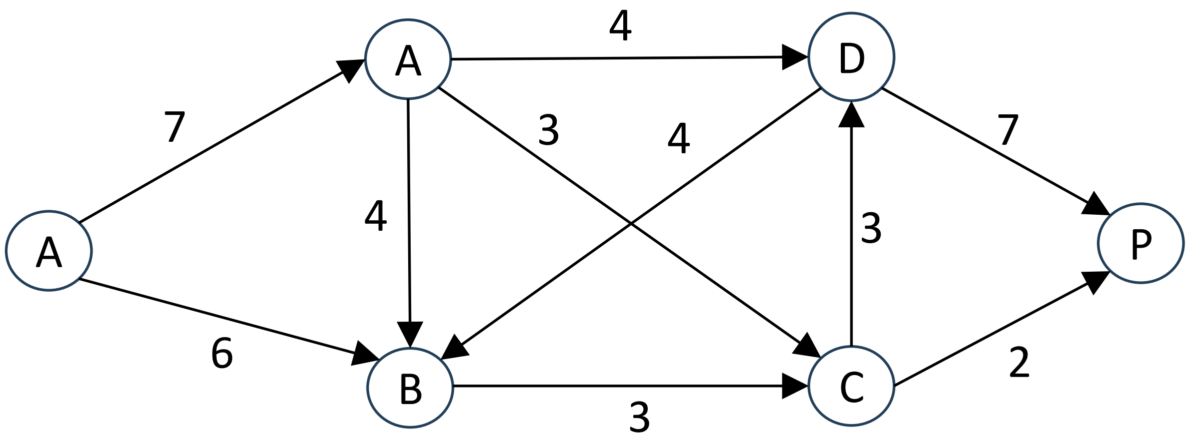
# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

2) A empresa de logística Best Way S/A deseja saber a tonelada máxima de material que ela pode transportar do Porto A para o Porto F através de vias fluviais. O diagrama abaixo apresenta os portos intermediários e a tonelagem máxima que pode sair de um porto para outro. Modele o problema e resolva-o com auxílio do solver e pelo algoritmo Ford-Fulkerson. **(Z= 120)**



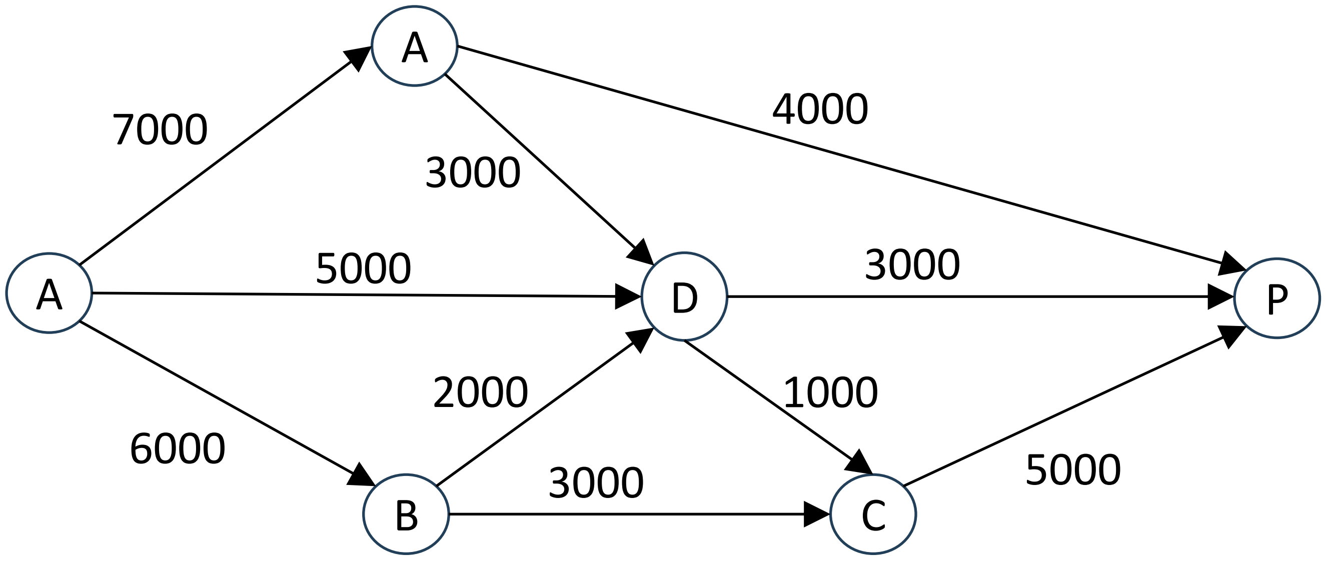
# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

3) A rede abaixo representa uma rede de transmissão de músicas em formato MP3 entre duas estações de rádio (nós A e P) pertencentes a uma mesma empresa. O envio das músicas da estação A para estação B pode se dar através de diversos pontos de transmissão, os quais estão representados pelos nós 1, 2, 3 e 4. Os valores sobre os arcos representam a taxa máxima de transmissão (em megabytes) de uma música de um nó para outro. Pede-se: descubra qual é o caminho de maior fluxo de transmissão que a empresa deve escolher para enviar uma música da estação A para estação P. Resolva através do Solver e pelo algoritmo Ford-Fulkerson. **(Z= 9)**



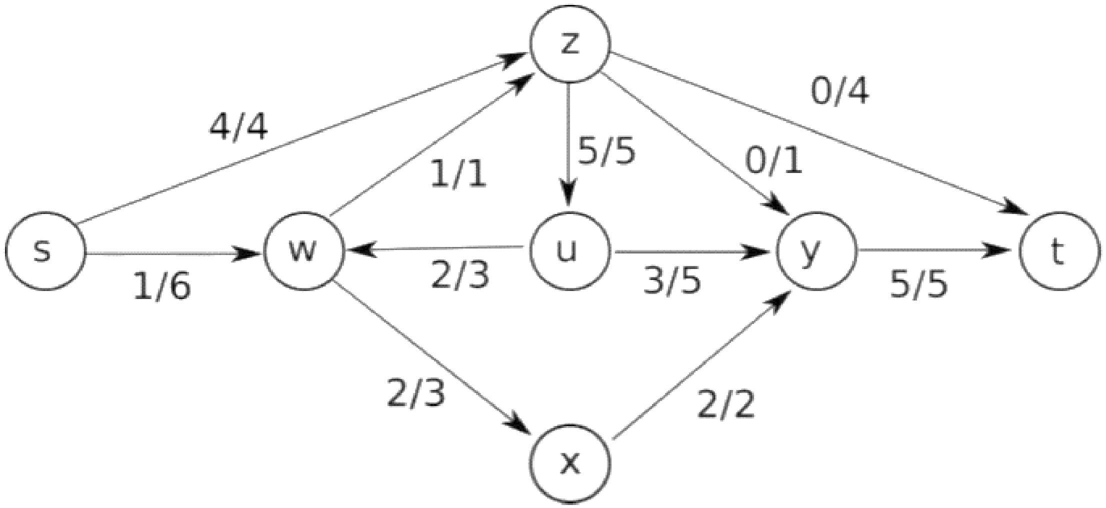
# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

4) Uma firma industrial localizada na cidade 1 embarca seu produto através de via férrea para a cidade 5. Várias rotas diferentes estão disponíveis, como mostrado no diagrama de rede a seguir. Cada círculo na cadeia representa uma cidade com junção de via férrea. Cada seta é uma filial de via férrea entre duas cidades. O número sobre cada aresta é a capacidade da via férrea. A empresa quer transportar o máximo de toneladas de seu produto da cidade A para cidade P. Resolva através do solver e pelo algoritmo Ford-Fulkerson. **(Z= 11.000)**



# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson

5) Dado o grafo G a seguir, responda: Essa rotulação é válida? O fluxo é máximo? Justifique sua resposta.



# Problema do fluxo máximo Algoritmo Ford-Fulkerson


- Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman; Introdução à Pesquisa Operacional; 9ª Edição, Editora Mc Graw Hill; 2013.

- Marcos Arenales, Vinícius Armentano, Reinaldo Morabito, HoracioYanasse; Pesquisa Operacional; 6ª Edição, Editora Campus, 2007.

- Eduardo L. de Andrade, Introdução a Pesquisa Operacional; 4ª Edição; Editora LTC; 2009.

- Gerson Lachtermacher, Pesquisa Operacional, 4ª Edição, Editora Pearson, 2009.

- Wagner, H.M., Pesquisa Operacional, 2a edição. Prentice-Hall do Brasil, 1986.

- Taha, H. A., Pesquisa Operacional, 8a edição. Pearson (Prentice-Hall), 2008

# Sobre a disciplina

**Dúvidas?**

Obrigado!