Otimização II

Prof. Dr. Paulo Roberto Maia
Paulo.maia@inatel.br

P108 – Otimização II

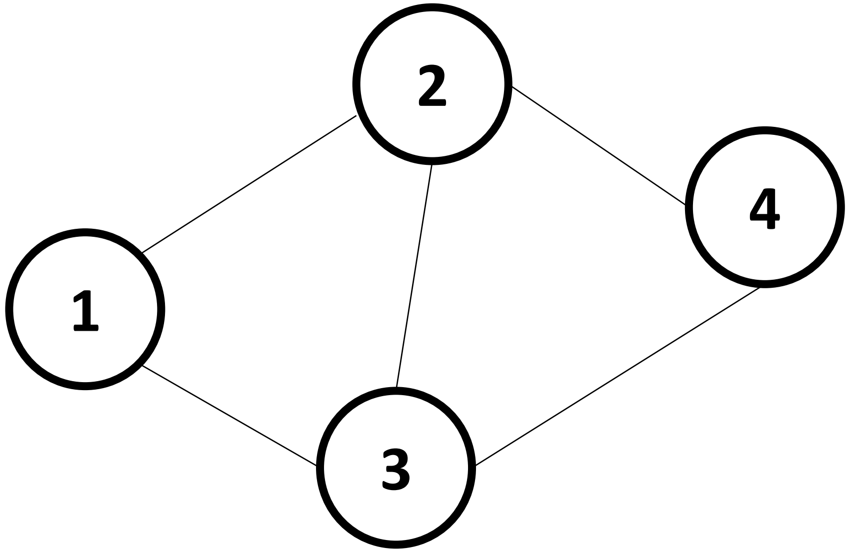
Agenda

- ❑ Problema do fluxo máximo;
- ❑ Problema do caminho mínimo
- ❑ Problema árvore geradora mínima
- ❑ Problema do fluxo de custo mínimo

Problema da árvore geradora mínima

Redes

- Problema que representa um outro caso especial de problemas de redes, em que as arestas significam a distância entre 2 pontos (nós).



- O objetivo e encontrar o caminho mínimo que une estes pontos. Os nós intermediários, podem representar cidades, subestações etc...

Problema da árvore geradora mínima

Redes

- Problema que representa um outro caso especial de problemas de redes, em que as arestas está associada a um fluxo (distância, custo, tempo etc.) entre 2 pontos (nós).
- Uma árvore é uma rede não direcionada, conexa (quando existe caminho entre qualquer par de nós), acíclica (sem ciclos) e com n – 1 arcos (dado n nós).

Problema da árvore geradora mínima

Redes

- Ainda dentro do conceito de árvore, afirma-se que:

  - Se um arco for adicionado à árvore, forma-se um ciclo.

  - Se um arco for eliminado da árvore, a rede deixa de ser conexa (em vez de uma única rede conexa, têm-se duas redes conexas);

  - Uma árvore geradora mínima (AGM) de uma rede é a árvore geradora cuja soma total dos fluxos nos arcos seja a menor possível.

Problema da árvore geradora mínima

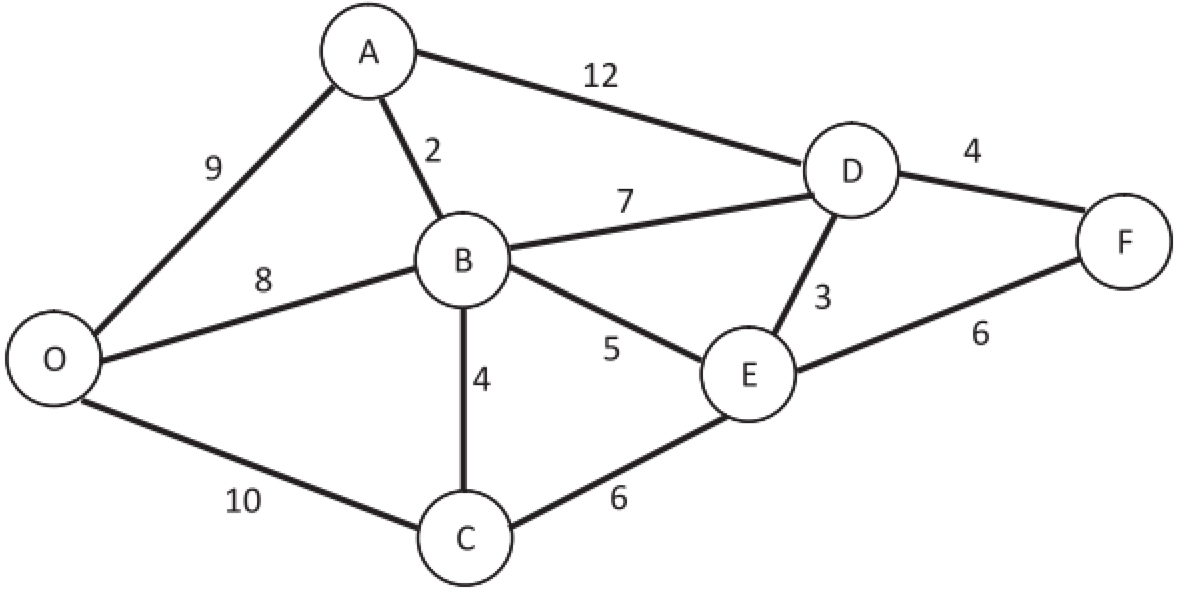
Redes

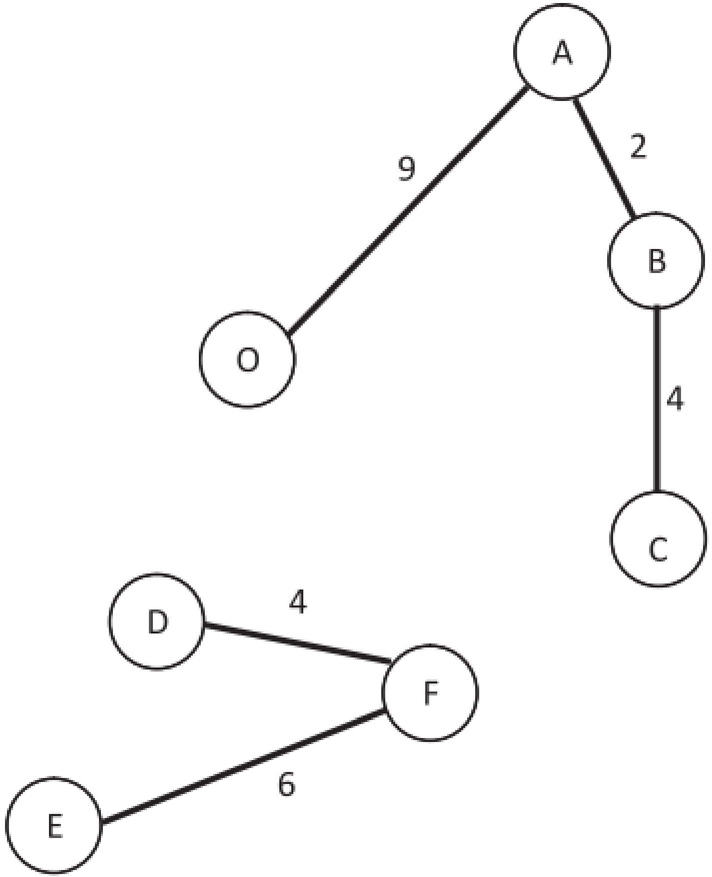
- Como exemplos de aplicações do problema da árvore geradora mínima, têm-se:

1. projeto de redes de telecomunicação (redes de computadores, redes de telefonia, redes de televisão a cabo, etc);
2. projeto de rodovias, ferrovias;
3. projeto de redes de distribuição de água e esgoto;
4. projeto de redes de transmissão de energia, etc

Problema da árvore geradora mínima

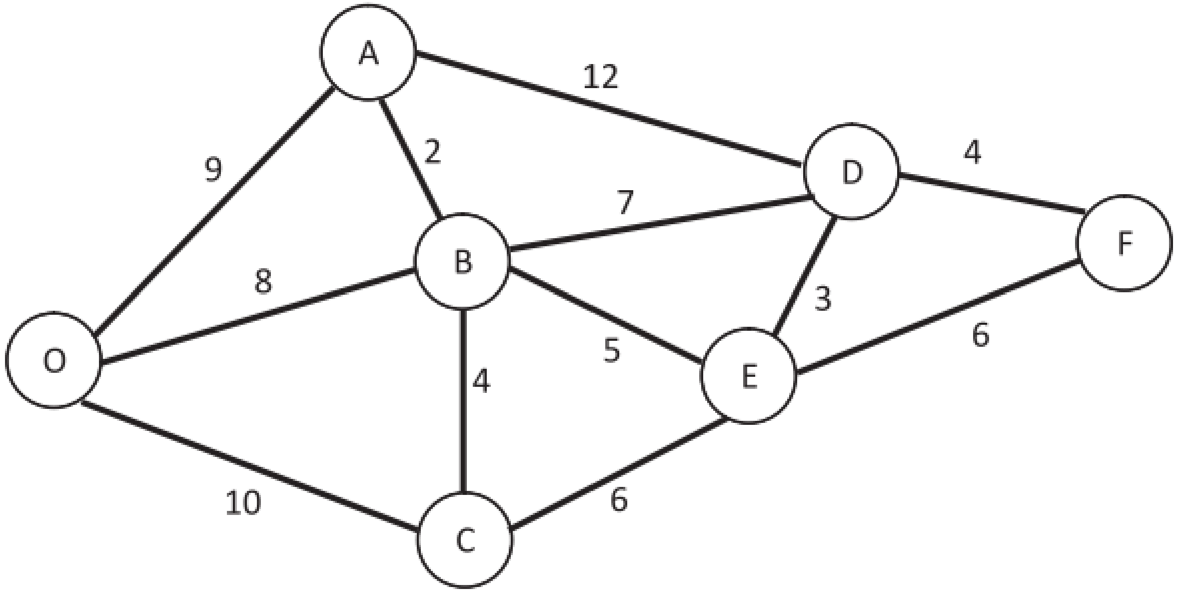
Exemplos de árvore geradora mínima

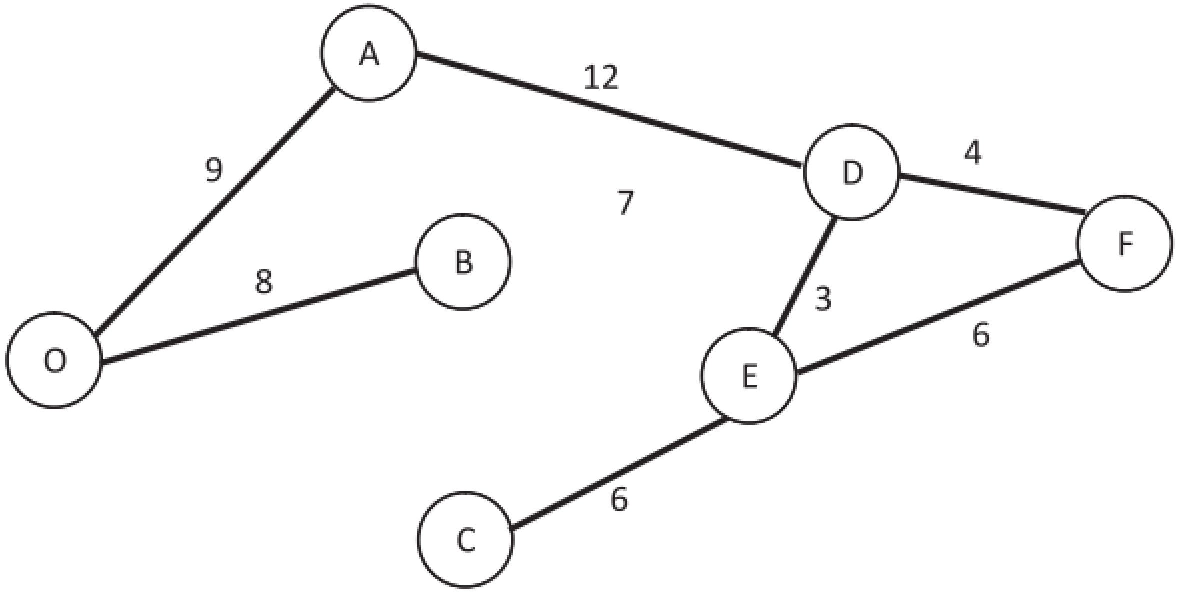




Problema da árvore geradora mínima

Exemplos de árvore geradora mínima





Formulação Matemática do Problema da Árvore Geradora Mínima

Para uma rede G (N, A) não direcionada com n nós e n – 1 arcos. Para o subgrafo S de G, o número de nós é representado por $|S|$

Parâmetros do modelo

$$c_{ij} = fluxo\ associado\ ao\ arco\ x_{ij}, \forall\ i, j \in A$$

Variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1\ se\ o\ arco\ (i, j) está\ contido\ na\ árvore\ geradora\ mínima \\ 0\ caso\ contrário \end{cases}$$

Formulação geral

Função objetivo

$$\text{Min}\ z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

Restrições

$$\sum_i \sum_j x_{ij} = n - 1, \qquad \forall\ i, j \in A$$

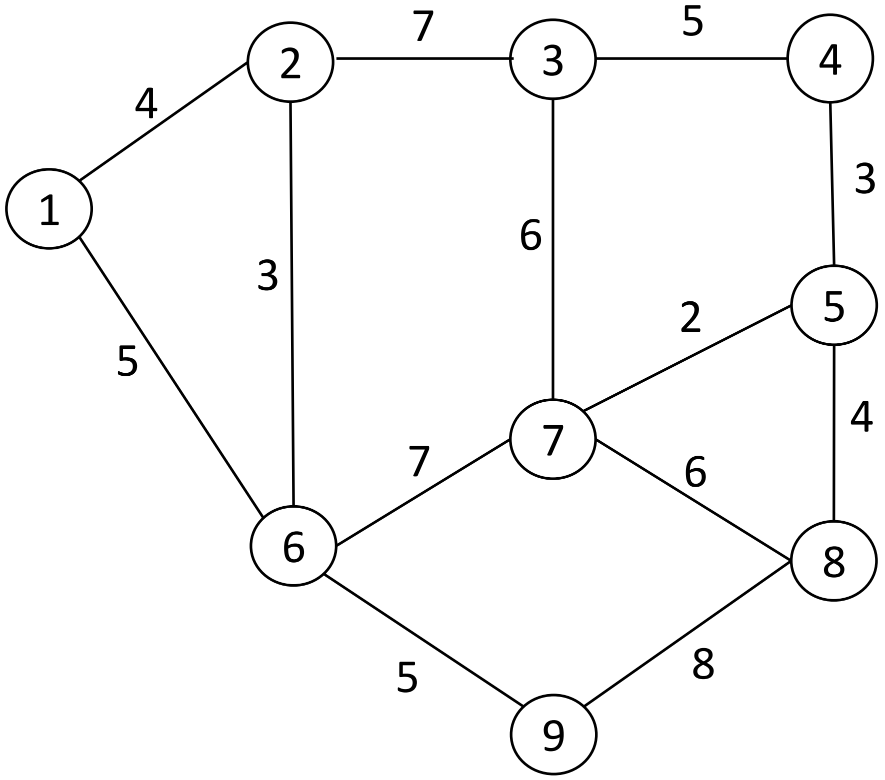
$$\sum_i \sum_j x_{ij} \leq |S| - 1, \qquad \forall\ i, j \in S, \qquad \forall S \subset G$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall\ i, j \in A$$

Problema da árvore geradora mínima

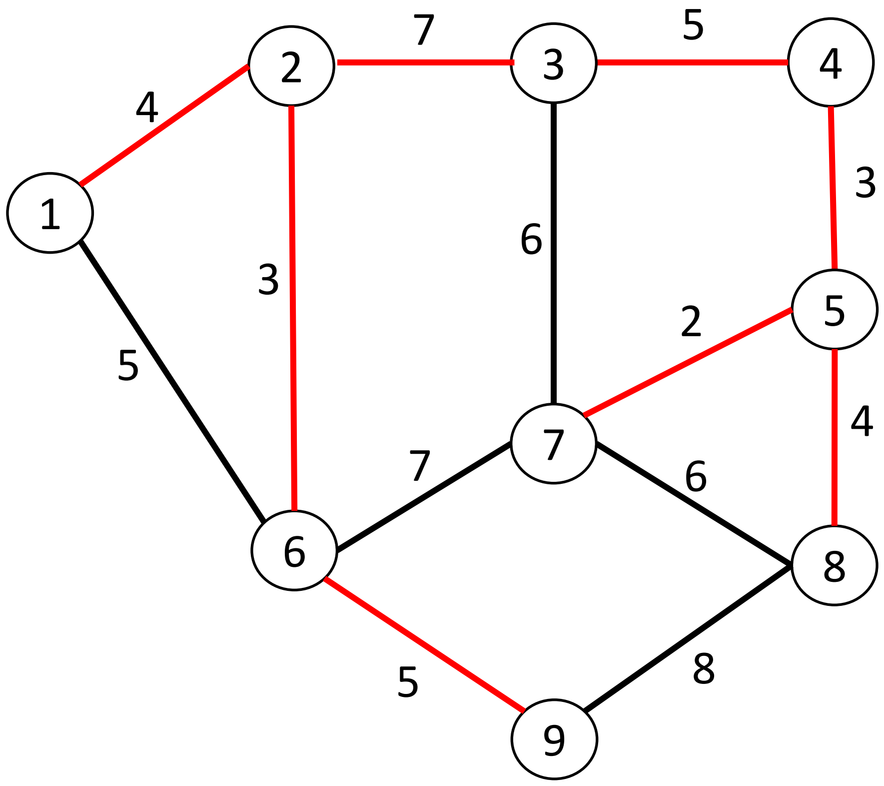
Exemplo 1

Considerando um problema de distribuição de energia elétrica em um loteamento com 9 casa. A figura ao lado pode ser associada a essa situação: nela, os vértices correspondem às casas, as arestas aos trechos de cabos elétricos e os números sobre as arestas são os seus comprimentos, em centenas de metros. A solução ótima será aquela que gastar menos metros de fio na interligação de todos os lotes.



Problema da árvore geradora mínima–Algoritmo Kruskal

Exemplo 1



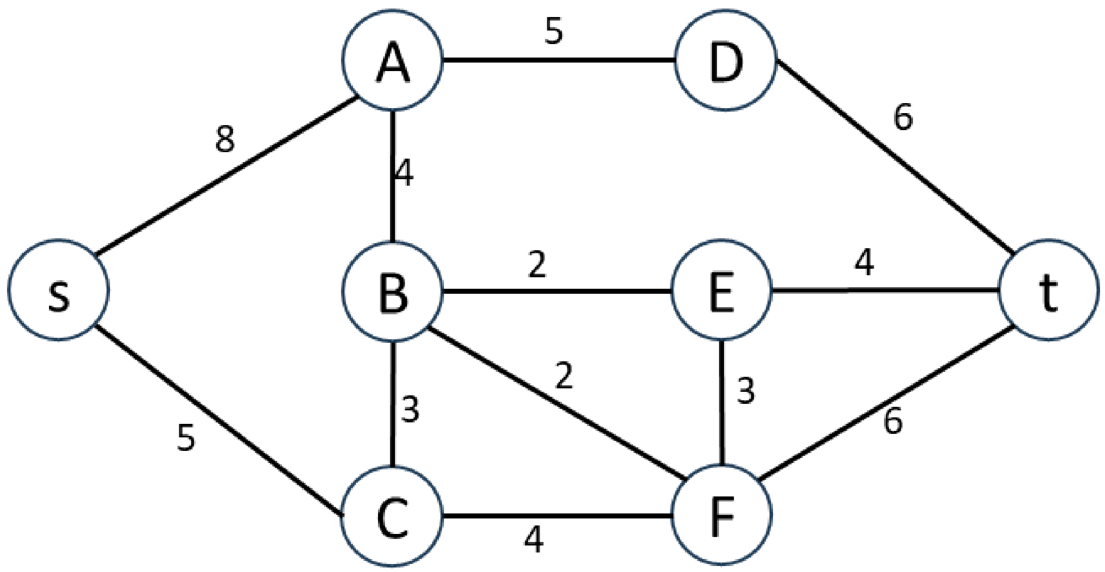
Arestas ordenadas

7-5 (2)
2-6 (3)
4-5 (3)
1-2 (4)
5-8 (4)
~~1-6 (5)~~
3-4 (5)
6-9 (5)
~~3-7 (6)~~
~~7-8 (6)~~
2-3 (7)
~~6-7 (7)~~
8-9 (8)

Min Z = 33

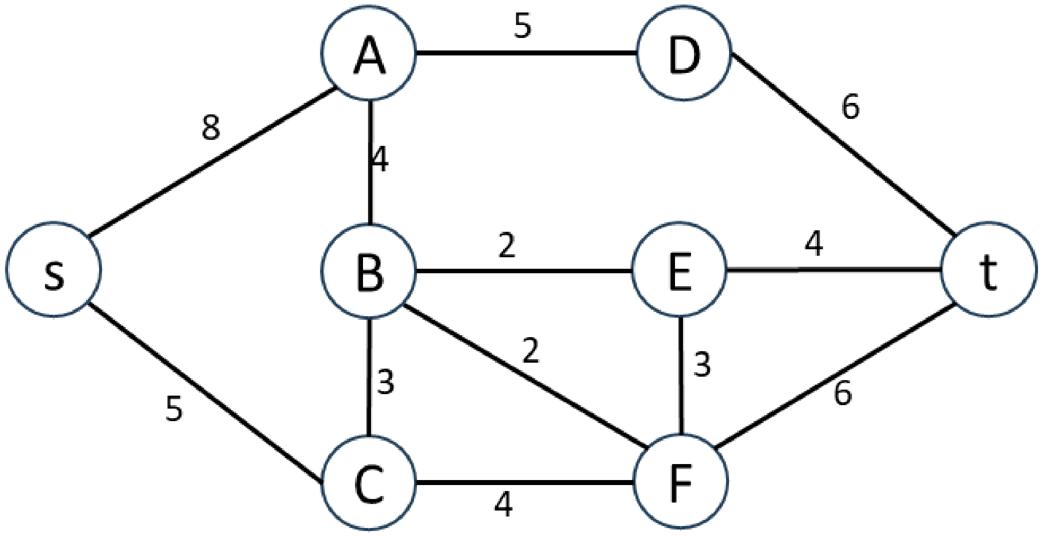
Problema da árvore geradora mínima–Algoritmo Kruskal

Exemplo 2



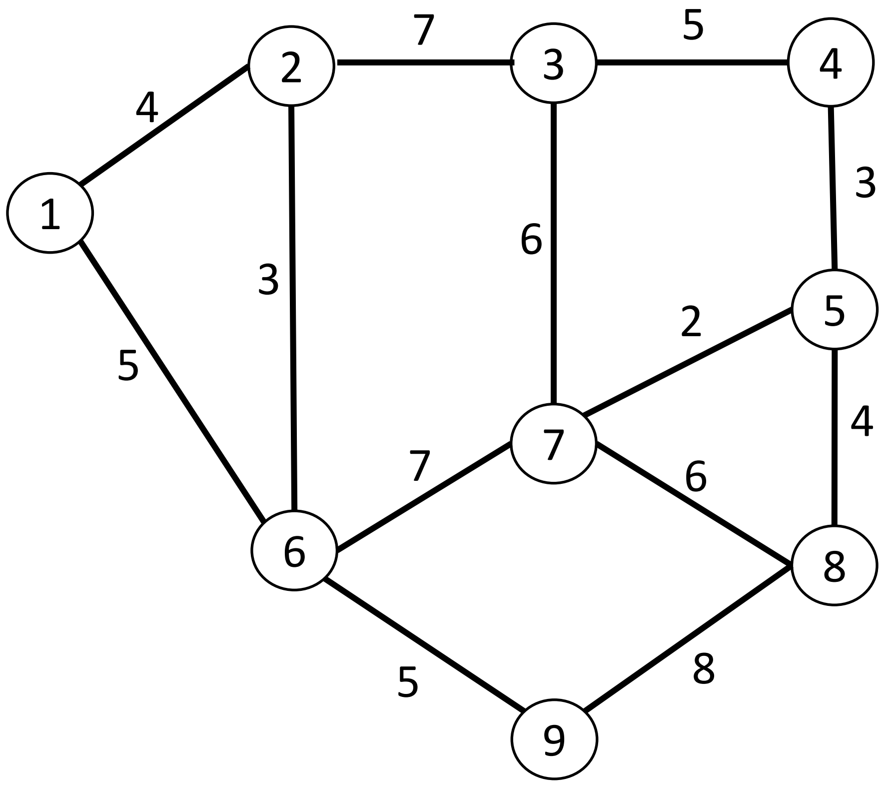
Problema da árvore geradora mínima–Algoritmo Prim

Exemplo 2



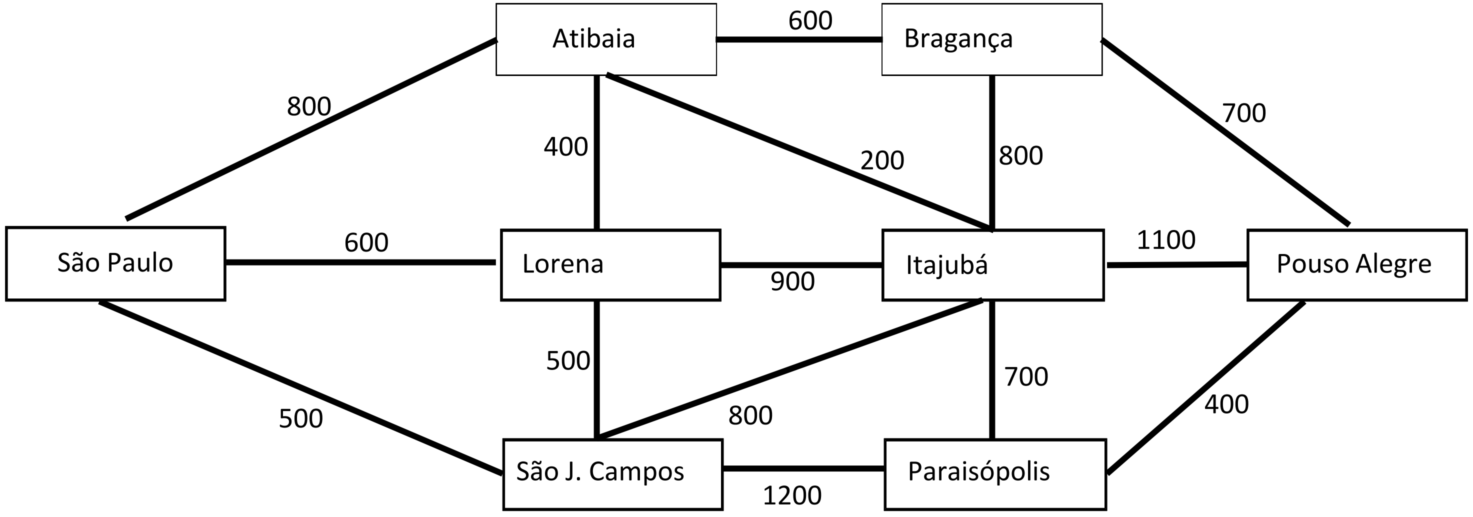
Problema da árvore geradora mínima–Algoritmo Prim

Exemplo 1



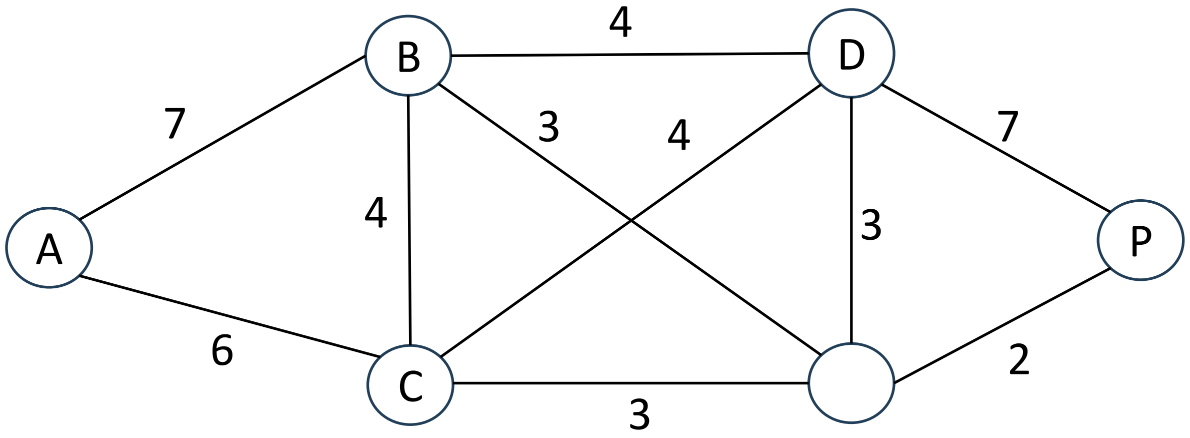
Problema da árvore geradora mínima

1) Considere o modelo de rede a seguir, números indicados em cada aresta significam o número de quilômetros de uma estrada entre duas cidades indicadas pelos nós extremos das arestas observadas. Construa a árvore geradora mínima utilizando o algoritmo Kruskal e Prim **(Z= 3.300)**



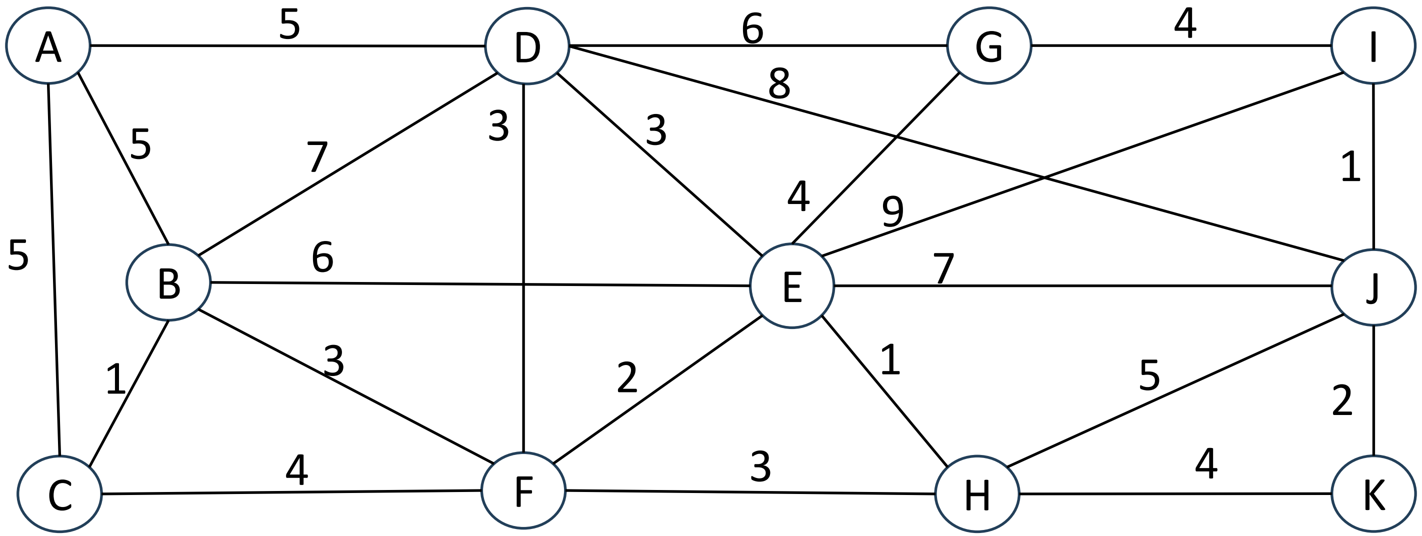
Problema da árvore geradora mínima

2) A administração do Seervada Park precisa determinar sob quais vias as linhas telefônicas devem ser instaladas para conectar todos os postos com um comprimento total mínimo de linha. Usando-se os dados fornecidos, construa a árvore geradora mínima utilizando o algoritmo Kruskal e Prim **(Z= 17)**



Problema da árvore geradora mínima

3) Em transporte intermodal, caminhões-reboque carregados são despachados entre os terminais ferroviários sobre vagões-plataformas especiais. O grafo abaixo mostra a localização dos principais terminais ferroviários nos Estados Unidos e as ferrovias existentes. O Objetivo é decidir quais ferrovias devem ser revitalizadas para enfrentar o tráfego intermodal. Em particular, o terminal de Los Angeles (Nó B) dever ser conectado diretamente ao de Chicago (Nó E) para dar conta do esperado tráfego pesado. Fora estes, todos os terminais restantes podem ser conectados direta ou indiretamente de modo que o comprimento total (em Km) das ferrovias selecionadas seja minimizado. Determine os trechos das ferrovias que devem ser incluídos no programa de revitalização. Construa a árvore geradora mínima utilizando o algoritmo Kruskal e Prim **(Z= 29)**



Problema da árvore geradora mínima

4) A Wirehouse Lumber Company em breve começará a cortar em troncos oito plantações de árvores na mesma área geral. Portanto, ela tem de desenvolver um sistema de estradinhas sem pavimentação que tome cada arvoredo acessível de cada um dos demais arvoredos. As distâncias (em milhas) entre cada par de arvoredos são conforme abaixo. A gerência agora quer determinar entre quais pares de arvoredos as estradas devem ser construídas para conectar todos os arvoredos com um comprimento total mínimo de estrada. Construa a árvore geradora mínima utilizando o algoritmo Kruskal e Prim **(Z=)**

		Distância entre Pares de Arvoredos							
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	1	—	1,3	2,1	0,9	0,7	1,8	2,0	1,5
	2	1,3	—	0,9	1,8	1,2	2,6	2,3	1,1
	3	2,1	0,9	—	2,6	1,7	2,5	1,9	1,0
Arvoredo	4	0,9	1,8	2,6	—	0,7	1,6	1,5	0,9
	5	0,7	1,2	1,7	0,7	—	0,9	1,1	0,8
	6	1,8	2,6	2,5	1,6	0,9	—	0,6	1,0
	7	2,0	2,3	1,9	1,5	1,1	0,6	—	0,5
	8	1,5	1,1	1,0	0,9	0,8	1,0	0,5	—

Problema da árvore geradora mínima

5) O Premiere Bank em breve estará conectando terminais de computador de cada uma de suas agências ao computador localizado em sua sede principal usando linhas telefônicas especiais com dispositivos de telecomunicações. A linha telefônica de uma filial não precisa estar conectada diretamente à matriz. Ela pode estar conectada indiretamente, sendo conectada a outra filial que, por sua vez, está conectada (direta ou indiretamente) à matriz. A única exigência é que cada filial esteja conectada através de alguma rota à matriz. A tarifa para as linhas telefônicas especiais é de US$ 100 vezes o número de milhas envolvidas, em que a distância (em milhas) entre cada par de agências é conforme a seguir. A gerência deseja determinar quais pares de agências devem estar conectados diretamente através de linhas telefônicas especiais de modo a conectar todas as filiais (direta ou indiretamente) à matriz a um custo total mínimo. Construa a árvore geradora mínima utilizando o algoritmo Kruskal e Prim **(Z=)**

	Distância entre Pares de Agências					
	Matriz	**B.1**	**B.2**	**B.3**	**B.4**	**B.5**
Matriz	—	190	70	115	270	160
Filial 1	190	—	100	110	215	50
Filial 2	70	100	—	140	120	220
Filial 3	115	110	140	—	175	80
Filial 4	270	215	120	175	—	310
Filial 5	160	50	220	80	310	—

Problema da árvore geradora mínima

- Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman; Introdução à Pesquisa Operacional; 9ª Edição, Editora Mc Graw Hill; 2013.

- Marcos Arenales, Vinícius Armentano, Reinaldo Morabito, HoracioYanasse; Pesquisa Operacional; 6ª Edição, Editora Campus, 2007.

- Eduardo L. de Andrade, Introdução a Pesquisa Operacional; 4ª Edição; Editora LTC; 2009.

- Gerson Lachtermacher, Pesquisa Operacional, 4ª Edição, Editora Pearson, 2009.

- Wagner, H.M., Pesquisa Operacional, 2a edição. Prentice-Hall do Brasil, 1986.

- Taha, H. A., Pesquisa Operacional, 8a edição. Pearson (Prentice-Hall), 2008

Sobre a disciplina

Dúvidas?

Obrigado!