ALUNO: **Lucas de Nóvoa Martins Pinto**
MATRICULA: **202100470044**

OBS-1: Entregar resolução com comando digitado ou digitalizado. As resoluções podem ser digitadas ou podem ser fotos (nítidas) das questões resolvidas. Entregar documento único em pdf.

OBS-2: Nesta prova somente serão consideradas respostas com resoluções detalhadas e com respostas finais corretas. Resoluções pela metade ou com respostas finais erradas serão desconsideradas. Desta forma, façam e refaçam a prova com **atenção!!!!!**

Questão 1
[1 pt] Questao_01 Uma caixa contém 2000 componentes dos quais 5% são defeituosos. Uma segunda caixa contém 500 componentes dos quais 40% são defeituosos. Duas outras caixas contém 1000 componentes cada, com 10% de componentes defeituosos em cada uma destas caixas. É selecionada aleatoriamente uma das caixas acima e removido dela um único componente. Considerando que o componente retirado é examinado e constata-se que ele é defeituoso. Qual a probabilidade que ele tenha sido retirado da segunda caixa.

Solução:
Usando o teorema de bayes:
A - Evento escolhe a Urna dois
B - Evento escolher uma peça defeituosa no meio das peças normais
$P(A|B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$
$P(A) = \frac{500}{4500} = \frac{1}{9}$
$P(B) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$
$P(B/A) = \frac{500}{4500} \times \frac{200}{500} = \frac{2}{45}$
Assim,
$P(A|B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{45} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{9}}$
$P(A|B) = \frac{2}{45} \times \frac{2}{5} \times 9 = \frac{2}{5}$
Resposta: $\frac{2}{5}$

Questão 2
[3 pts] Questao_2 Responda:

[1 pt] a) Uma pessoa lança dois dados, um atrás do outro. Determine a probabilidade da soma dos dados lançados ser 7, visto que o primeiro dado lançado possui um número maior que o segundo dado lançado.

[1 pt] b) Sabendo-se que uma variável aleatória X assume os valores -1, 0, 1 e se o valor médio E[X]= 0 e o segundo momento, E[X2]= 0,5. Determine a função densidade de probabilidade para a variável aleatória discreta X.

[1 pt] c) Seja R uma variável aleatória continua com função densidade de probabilidade
$f(R) = \frac{R}{16b^2} e^{-\frac{R^2}{32b^2}}$, QUANDO, $R \geq 0$
$f(R) = 0$, QUANDO, $R < 0$
Determine a função distribuição de probabilidade.
OBS para aluno: deixe a expressão da distribuição de probabilidade em função de R.

Solução:
Considerando um dado com 6 lados
Dado, um par ordenado como sendo (a, b)
Se é um dado atrás do outro então o espaço amostral TOTAL SERIA:

$$(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6) = 6$$

$$(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6) = 6$$

$$(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6) = 6$$

$$(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6) = 6$$
$$(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6) = 6$$
$$(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) = 6$$

porém, como temos uma condição que o primeiro dado tem que ser maior que o segundo ou seja $a > b$

$$(2,1) = 1$$
$$(3,1)(3,2) = 2$$
$$(4,1)(4,2)(4,3) = 3$$
$$(5,1)(5,2)(5,3)(5,4) = 4$$
$$(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5) = 5$$

entao, $1+2+3+4+5 =$ **15 Resultados possíveis**
Caso soma dá 7 acontece quando:
$S = (4,3)(5,2)(6,1)$

Assim,
P(W) $= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$
Resposta: $\frac{1}{5}$

---

b) Sabendo que E[X] = 0
Temos,
$\sum_{-1}^{1} p_i x_i = -1 \times pa + 0 \times pb + 1 \times pc$
$\sum_{-1}^{1} p_i x_i = -pa + pc = 0$
Para $E[x^2] = 0.5 = (-1)^2 \times pa + 0^2 \times pb + 1^2 \times pc$
$E[x^2] = pa + pc = 0.5$
Sabendo também que, $pa + pb + pc = 1$
Como o pc aparece em todas as equações e fazendo com a segundo equacao $pa = pc$
temos, $pc + pc = 0.5$
$pc = 0,25$
O que implica dizer que, $pb = 0,5$

Resposta:
$f(x) = 0,25$, QUANDO, $x = -1$
$f(x) = 0,5$, QUANDO, $x = 0$
$f(x) = 0,25$, QUANDO, $x = 1$

---

c) Toda função densidade de probabilidade tem que ser igual a 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
O que implica disser que: $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{R}{16b^2} e^{\frac{-R^2}{32a}})\, dx = 1$
$u = \frac{-R^2}{32a^2}$
Derivando temos:
$du = -\frac{R}{16a^2} dr$
que é igual a
$-du = \frac{R}{16a^2} dr$
$\int_0^{\infty} (\frac{R}{16b^2} e^{\frac{-R^2}{32a}})\, dx = -\int_0^{\infty} e^u\, du$
$-\int_0^{\infty} e^u\, du = -e^{\frac{-R^2}{32u^2}}$
$-e^{-8} - e^0 = 2$
A Função distribuição de probabilidade é dada como se segue:
$F(R) = \int f(R) dR = e^{-\frac{R^2}{32u^2}}$
Assim a distribuição é definida

$F(R) = 0$, QUANDO, $x < 0$
$F(R) = e^{-\frac{R^2}{32u^2}}$, QUANDO, $0 < x < \infty$
$F(R) = 1$, QUANDO, $x = \infty$

Questão 3
[3 pts] Questao_3 Uma caixa contém 5 bolas pretas(p), 3 azuis(a) e 7 vermelhas(v). A experiencia aleatória consiste na realização de duas extrações sucessivas de uma bola sem reposição. Suponha que foi atribuída a seguinte pontuação: bola preta-1ponto; bola azul-2 pontos, bola vermelha-3 pontos. Considere a variável aleatória X, "soma dos pontos obtidos". Determine:
[1 pt] a) $P(3 \leq x \leq 5)$
[1 pt] b) $P(X > 3/X < 6)$
[1 pt] c) a função distribuição de X

Solução:
X -¿ A v.a. que é a soma dos pontos obitidos
5 Pretas (P) - 1 ponto/bola
3 Azuis (A)- 2 pontos/bola
7 Vermelhas (V) - 3 pontos/bola
E dado que (a,b) é o par ordenado que representa a primeira puxado e depois a segunda SEM REPOSIÇÃO
a) $P(3 \leq x \leq 5) = P(3) + P(4) + P(5)$
$P(3) = (P, A), (A, P)$
A probabilidade de tirar preta depois azul é (P,A):
$\frac{5}{15} \times \frac{3}{14}$
A probabilidade de tirar azul depois preta é (A,P):
$\frac{3}{15} \times \frac{5}{14}$
$P(3) = \frac{5}{15} \times \frac{3}{14} + \frac{3}{15} \times \frac{5}{14}$
$P(3) = \frac{1}{7}$
Usando esse mesmo raciocinio vamos fazer para P(4) e P(5)
$P(4) = \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} + \frac{5}{15} \times \frac{7}{14} + \frac{7}{15} \times \frac{5}{14}$
$P(4) = \frac{38}{105}$
$P(5) = \frac{3}{15} \times \frac{7}{14} + \frac{7}{15} \times \frac{3}{14}$
$P(5) = \frac{1}{5}$
Assim,
$P(3 \leq x \leq 5) = \frac{1}{7} + \frac{38}{105} + \frac{1}{5}$
$P(3 \leq x \leq 5) = \frac{74}{105}$

---

b)
$P(X > 3/X < 6)$
$P(X > 3/X < 6) = \frac{P(x>3 \cap x<6)}{P(x<6)}$
$P(x > 3 \cap x < 6) = P(4) + P(5) = \frac{38}{105} + \frac{1}{5}$
$P(x > 3 \cap x < 6) = \frac{59}{105}$
$P(x < 6) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$
$P(2) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$
$P(x < 6) = \frac{2}{21} + \frac{1}{7} + \frac{38}{105} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
Assim,
$P(X > 3/X < 6) = \frac{\frac{59}{105}}{\frac{4}{5}} = \frac{59}{84}$

---

c)
A função de distribuição de X

f(x)	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{38}{105}$	$\frac{1}{5}$
X	2	3	4	5	6

A distribuição fica da seguinte forma:
$F(x) = 0$, QUANDO, $x < 2$
$F(x) = \frac{2}{21}$, QUANDO, $2 < x < 3$
$F(x) = \frac{2}{21} + \frac{1}{7} = \frac{5}{21}$, QUANDO, $3 < x < 4$
$F(x) = \frac{5}{21} + \frac{38}{105} = \frac{3}{5}$, QUANDO, $4 < x < 5$
$F(x) = \frac{3}{5} + \frac{2}{10} = \frac{4}{5}$, QUANDO, $5 < x < 6$
$F(x) = 1$, QUANDO, $x > 6$

Questão 4
[1 pt] Questao_4 Seja X uma variável aleatória com função distribuição de probabilidade dada por:
$F(x) = 0$, QUANDO, $x < 0$
$F(x) = 3x^2 - 2x^3$, QUANDO, $0 \leq x < 1$
$F(x) = 1$, QUANDO, $x \geq 0$
Determine $P(X \leq \frac{1}{2} | \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})$

Solução:
Observe que, $P(X \leq \frac{1}{2} | \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}) = \frac{P(X \leq \frac{1}{2} \cap \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})}{P(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})}$
COMO,
$\frac{1}{2} = 0.5$
$\frac{1}{3} = 0.333$
$\frac{2}{3} = 0.66$
Assim, se X é menor ou igual a meio já implica que ele seja maior que um terço e menos que dois terços: $X < \frac{1}{2} => \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}$
Com isso,
$P(X \leq \frac{1}{2} | \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}) = \frac{P(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})}{P(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})}$
Dessa forma, calculando a distribuição em $\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}$
$P(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}) = \int_{1/3}^{1/2} f(x)\, dx = 3x^2 - 2x^3|_{1/3}^{1/2}$
$P(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}) = (\frac{3}{4} - \frac{2}{8}) - (3 \times \frac{1}{9} - 2 \times \frac{1}{27} = \frac{13}{54}$
No intervalo: $\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}$
Temos:
$P(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{2}) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\, dx = 3x^2 - 2x^3|_{1/3}^{2/3}$
$P(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{2}) = (3 \times \frac{4}{9} - 2 \times \frac{8}{27}) - (3 \times \frac{1}{9} - 2 \times \frac{1}{27}) = \frac{26}{54}$
Agora podemos prosseguir:
$P(X \leq \frac{1}{2} | \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}) = \frac{\frac{13}{54}}{\frac{26}{54}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$
Respostas 50%