1ª lista -parte2

OBS 2: Entregar resolução com comando digitado ou digitalizado. As resoluções podem ser digitadas ou podem ser fotos (nítidas) das questões resolvidas. Entregar documento único em pdf. A Resolução correta de cada questão valerá (0,04 pontos)

OBS 3: Nesta avaliação somente serão consideradas respostas com resoluções e respostas finais corretas. Resoluções pela metade ou com respostas erradas serão desconsideradas.

OBS4: Releia a OBS 3

1.

Uma variável aleatória discreta X tem função densidade de probabilidade dada por:

x_1	0	1	2	3
$P\ (X = x_1)$	1/10	1/5	m	1/10

a. Determine o valor de m.
R=3/5

b. Construa a função distribuição de probabilidade da variável aleatória X.

2.

Seja X a variável aleatória que representa o número de computadores vendidos, por dia, numa loja de um Centro Comercial. A função densiadde de probabilidade da v.a. X dada por

x	0	1	2	3
$P\ (X = x)$	1/6	p	1/30	3/10

a. Determine a probabilidade de vender um computador por dia.

R=1/2

b. Calcule $P\ (1 \leq X < 4)$; $P\ (X > 2)$; $P\ (X \leq 1)$; $P\ (X > 1/\ X < 3)$.

R:5/6;31/30;4/6;1/30

3.

Seja X um v.a. que nos indica o número de automoveis procurados por um dia num certo stand de vendas. A função de probabilidade da v.a. X dada por:

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	1/20	p	q	1/3	1/4

a. Sabendo que, em 75% dos dias são procurados pelo menos dois automóveis, calcule p e q.

R=1/6;1/5

b. Calcule a probabilidade de virem a ser procurados 3 automóveis, num dia em que as procuras foram em número de pelo menos dois.]

R=P(X=3/X>=2)=0,444

4.

Seja X uma variável aleatória discreta com a seguinte função densidade de probabilidade:

x	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	0,1	0,3	0,1	0,2	0,3

a)Calcule $E[X]$ e $Var[X]$.

R=0,3;2,01

b)Desenhe a função de distribuição de probabilidade de X.

c)Desenhe a distribuição de probabilidade da variável aleatória $Y = X^2$.

OBS: P(Y=0)=P(X=0); P(Y=1)=P(X=-1)+P(x=1) e P(Y=4)=P(X=-2)+P(x=2)

5.

A variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x	2	3	5	8
Probabilidade	0,2	0,4	0,3	0,1

Determine o seguinte:

a) P(X ≤ 3)

R = 0,6

b) P(X > 2,5)

R= 0,8

c) P(2,7 < X < 5,1)

R = 0,7

d) E(X)

R = 3,9

e) V(X) (variância)

R= 3,09

6-

O número de esquentadores vendidos diariamente num estabelecimento é bem descrito por uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	a	b	c	b	a

Se em vinte porcento dos dias as vendas são inferiores a uma unidade e, em trinta porcento dos dias as vendas são superiores a duas unidades.

a. *Determine as constantes a, b, e c, bem como a função distribuição da variável aleatória X.*

R=

$$F(X=x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,2, & 0 \leq x < 1 \\ 0,3, & 1 \leq x < 2 \\ 0,7, & 2 \leq x < 3 \\ 0,8 & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

b. *Determine a probabilidade de, quando considerados dois dias, as vendas sejam consideradas superiores, em cada um deles, a uma unidade.*

R=0,49

c. *Se cada esquentador é vendido a 75 euros, determine a função probabilidade da receita bruta obtida com a venda de esquentadores num dia.*

R=

x	0	1	2	3	4
r	0	75	150	225	300
P(r)	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2

d. *Se num dia a receita bruta for inferior a 200 euros, determine a probabilidade de ser superior a 100 euros.*

R=

$$P(R>100/R<200)=\frac{P(100<R<200)}{P(R<200)} = 0,5714$$

7-

A percentagem de álcool em certo composto pode ser considerada uma v.a. X, *onde* $0 < x < 1$, *com a f.d.p.* $f(x) = cx^3(1-x),\ 0 < x < 1$.

a. *Determine o valor da constante c.*

R=20

b. *Calcule* $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$.

R=0,8125

8-

O diâmetro X *de um cabo elétrico supõe-se ser uma v.a. com f.d.p, assim definida:*

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 \leqslant x < 1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

a. *Verifique tratar-se de um f.d.p.*

R=sim

b. *Calcule* $P\left(X \leqslant \frac{1}{2} | \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)$

R=1/2

9-

Suponha que uma pequena estação de serviço é abastecida com gasolina todos os sábados à tarde. O seu volume de vendas, em milhares de litros, é uma variável aleatória. Considerando que a função densidade de X *é:*

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

a. *Determine* $P(0 < X < 0,75)$.

R=0,84375

b. *Determine o volume médio de vendas e sua variância.*

R=0,5;0,05

10-

A procura mensal de um certo artigo é uma variável aleatória X com a seguinte função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4}, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \dfrac{x}{4}, & 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0, & x \notin [0;4] \end{cases}$$

a. *Calcule a função de distribuição de X.*

R=

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{8}, & 0 \leqslant x < 2 \\ x - \dfrac{x^2}{8} - 1, & 2 \leqslant x < 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

11-

O tempo de permanência dos alunos numa aula de 2 horas é uma variável aleatória X com densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}$$

a. *Qual a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, assistir a mais de 75% da aula?*

R=

$$P(X > 1,5) = \quad 0,0625.$$

b. *De 10 alunos, escolhidos ao acaso no conjunto dos alunos que estão presentes no início da aula, qual a probabilidade de apenas 1 permanecer na sala quando faltam 15 minutos para a aula terminar.*

R=

$$P(Y) = P(X > 1,75)P(X < 1,75)^9 \cdot 10 \approx 0,1356,$$

12-

Considere a seguinte tabela que representa a função massa de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y):

$X \downarrow Y \rightarrow$	0	1	2	3
1	0,10	0,15	0,20	p
2	p	0,15	0,15	0,05
3	0,05	0	p	0

a. *Determine o valor de p e obtenha as funções massa de probabilidade marginal de X e Y.*

R=

$p = 0,05.$

X	1	2	3
P(X)	0.5	0.4	0.1

Y	0	1	2	3
P(Y)	0.2	0.3	0.4	01

b. *Defina a função distribuição da variável aleatória X.*

R=

$$F(x)= \begin{cases} 0, x < 1 \\ 0{,}5, 1 \leq x < 2 \\ 0{,}9, 2 \leq x < 3 \\ 1, x \geq 3 \end{cases}$$

c. *Verifique se X e Y são variáveis aleatórias independentes. Calcule a co-variância das variáveis X e Y.*

R=naõ so independentes;

$\sigma_{XY} = -0,04.$

d. *Considere a variável aleatória $W = X + 2Y$. Calcule o seu valor médio e sua variância.*

R=

$Var(W) = 3,64$

e. *Calcule $P(X + Y \leqslant 3 | Y$ é ímpar$)$.*

R=

$P(X + Y \leqslant 3 | Y \text{ é ímpar}) = 0,75.$

13-

Numa loja de eletrodomésticos as vendas mensais de frigoríficos das marcas A e B são variáveis aleatórias X e Y com distribuição conjunta dada por:

$X \downarrow Y \rightarrow$	1	2	3
1	0, 25	0, 25	0
2	0	0, 25	0, 25

a. *Calcule a probabilidade de num dado mês se vender um número idêntico de frigoríficos das marcas A e B.*

R=

$$P(W = 1) = P(X = Y = 1) + P(X = Y = 2) = 0,5.$$

b. *Determine as probabilidades marginais de X e Y.*

R=

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,50, & x = 1 \\ 0,50, & x = 2 \end{cases}, \qquad P(Y = y) = \begin{cases} 0,25, & y = 1 \\ 0,50, & y = 2 \\ 0,25, & y = 3 \end{cases}$$

c. *Determine a covariância das variáveis X e Y. Que conclusão pode retirar acerca da independência entre as vendas das marcas A e B?*

R=

Naõ so independentes

$\sigma_{XY} = 0,25.$

d. *Seja Z o total das vendas mensais das marcas A e B. Calcule a variância Z.*

R=1.25

e. *Sabe-se que foi vendido um frigorífico da marca A. Qual a distribuição da variável aleatória $Y|X = 1$?*

R=

$$P(Y = y|X = 1) = \frac{P(Y = y \cap X = 1)}{P(X = 1)} = \begin{cases} 0,50, & y = 1 \\ 0,50, & y = 2 \\ 0, & y = 3 \end{cases}$$

14-

Uma agência de um banco estudou as duas variáveis seguintes com o objetivo de conhecer o comportamento dos titulares de conta corrente:

X – "Número de produtos do banco utilizados além da conta corrente"

Y – "Número de meses com a conta corrente a descoberto no ano anterior".

A distribuição conjunta destas variáveis é indicada na tabela seguinte:

$X \downarrow Y \rightarrow$	0	1	2
0	0,3	0,1	0,05
1	0,2	0,1	0,05
2	0,05	0,05	0
3	0,1	0	0

a. *Determine as probabilidades marginais de X e Y.*

R=

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,45, & x = 0 \\ 0,35, & x = 1 \\ 0,1, & x = 2 \\ 0,1, & x = 3 \end{cases}, \qquad P(Y = y) = \begin{cases} 0,65, & y = 0 \\ 0,25, & y = 1 \\ 0,1, & y = 2 \end{cases}$$

b. *Qual a probabilidade de um cliente titular de conta corrente possuir produtos do banco além da conta corrente?*

R=

$P(X > 0) = 0,55.$

c. *Sabendo que um dado cliente apresentou a conta a descoberto em mais do que um mês do ano passado, qual a probabilidade desse cliente utilizar produtos do banco além da conta corrente?*

R=

$$P(X \geqslant 1|Y > 1) = \frac{P(X \geqslant 1 \cap Y > 1)}{P(Y > 1)} = 0,5.$$

d. *Qual o número médio de meses que um cliente da agência apresentou a conta a descoberto no ano anterior? Com que desvio padrão.*

R=

$\sigma_X \approx 0,669.$

15-

Um comerciante vende, entre outros artigos, máquinas de calcular de certo tipo. Seja X a variável aleatória que representa o número de máquinas de calcular disponíveis para venda no início de cada semana. O comerciante possui uma dessas máquinas para seu próprio uso, que poderá eventualmente vender, mas que não conta como disponível. O número de máquinas vendidas semanalmente é uma variável aleatória Y . O par aleatório (X,Y) apresenta a seguinte distribuição de probabilidades:

$$P(X = i, Y = i) = \frac{1}{12}, \quad i = 1,2,3, \quad 0 \leqslant j \leqslant i + 1, \quad j \text{ inteiro.}$$

a. *Determine a percentagem de semanas em que se vendem mais máquinas do que a média das máquinas disponíveis.*

R=

X=v.a numero de maquinas de calcular disponivel para venda

Y= v.a numero de maquinas de calcular vendidas.

X/Y	0	1	2	3	4	Soma
1	1/12	1/12	1/12	0	0	3/12
2	1/12	1/12	1/12	1/12	0	4/12
3	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	5/12
Soma	3/12	3/12	3/12	2/12	1/12	1

P(Y>2.17)=0,25

b. *Determine a porcentagem de semanas em que o comerciante tem que vender a sua própria máquina.*

R=

$$P(X < Y) = P(X = 1 \cap Y = 0) + P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 3 \cap Y = 2) = 3/12$$

c) Determine a percentagem de semanas em que uma das maquinas disponíveis fica por vender

R=

$$P(X = Y - 1) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 3) + P(X = 3 \cap Y = 4) = 3/12$$

Ou

$$P(Y > X) = 3 \times \frac{1}{12} = 25\%.$$

16.

Determine a função de probabilidade para a variável aleatória com a seguinte função de distribuição cumulativa:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0{,}2 & 2 \le x < 5{,}7 \\ 0{,}5 & 5{,}7 \le x < 6{,}5 \\ 0{,}8 & 6{,}5 \le x < 8{,}5 \\ 1 & 8{,}5 \le x \end{cases}$$

R=

$f_x(2) = 0.2$, $f_x(5.7) = 0.3$,
$f_x(6.5) = 0.3$, $f_x(8.5) = 0.2$

17-

Uma variável aleatória X é normalmente distribuída com média igual a 1200 e desvio padrão igual a 200. Qual é a probabilidade $P[800 \le x \le 1000]$.

R=0,8185

18-

Determine a probabilidade da variável aleatória X associada a função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} e^{-\frac{x}{20}} & , x \ge 0; \\ 0 & , \ para\, outro\ x \end{cases}$$

Determine a probabilidade de X assumir valores entre 10 e 20.

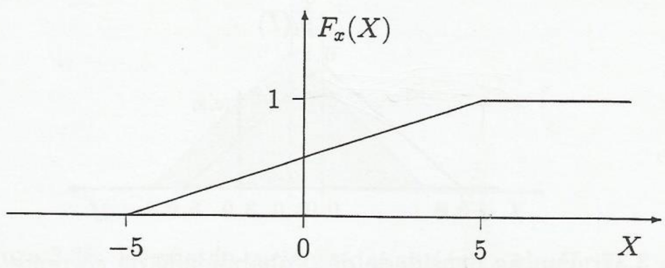
R=$e^{-1/2}$ -e^{-1}

19-

Considere o lançamento de dois dados e a experiência cujo resultado consiste na soma do número de pontos das faces que resultam do lançamento. Defina esta soma como sendo uma variável aleatória X. Esboce a função distribuição de probabilidade da v.a. X.

20-

A função distribuição de probabilidade de uma variável aleatória, X tem a forma apresentada na figura a seguir:



Função Distribuição de Probabilidade.

a)Determine o valor $F_x(0)$, a probabilidade de uma v.a.

b)X ser>0 positiva.

R=1/2;1/2

21- Determine o valor de *a* para que a função dada abaixo possa representar uma função densidade de probabilidade continua.

$$f(x,y) = \begin{cases} a\left[x^2 + (xy/3)\right], & 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2 \\ 0, & para todos\ x\ e\ y \end{cases}$$

R=1

22-

Considerando o exemplo anterior e o valor de a obtido determine:

$$P\left[X \le \frac{1}{2}, Y \le 1\right]$$

R=1/16

23-

Sabendo-se que a função densidade de probabilidade conjunta é dada por :

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + (xy/3)\right), & 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2 \\ 0, & para\,todos\ x\ e\ \ y \end{cases}$$

Determine a função densidade de probabilidade marginal e a função distribuição de probabilidade marginal para a variável aleatória X:

R=

$$\begin{cases} 0 \ , & x \le 0 \\ \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{3}, & 0 \le x \le 1 \\ 1 \ , & x > 1 \end{cases}$$

24-

Considerando que a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{3} & ,0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & ,\ para\,todos\ x\ e\ \ y \end{cases}$$

Determine :

a)Função densidade de probabilidade condicional $f_{X/Y}(x/y)$

R=

$$f_{x/y}(x/y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\frac{1}{2}+y} \ , & 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 2 \\ 0 \ , & \text{para outros } x,\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

b)

$$F_{X/Y}(x/y) = P\left[X \le x, Y = y\right]$$

R=

$\underline{x<0}$; $\underline{0 \le x \le 1}$; $x > 1$

$\boxed{0}$ $\qquad \frac{\frac{x^2}{2}+xy}{\frac{1}{2}+y}$ $\qquad \boxed{1}$

25-

Verifique se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, sabendo-se que a função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}(1/2)e^{-y} & ,0\le x\le 2;\ y\ge 0\\ 0 & ,\ para\,outros\ \text{int}\,ervalos\end{cases}$$

R: é independente