segunda lista da primeira avaliação de Processos Estocasticos turma 2021.4

Questão 1
[0.04pts] Questao_01 Uma variável aleatória discreta X tem função densidade de probabilidade dada por:

x1	0	1	2	3
P(X = x1)	1/10	1/5	m	1/10

a) Determine o valor de m.
b) Construa a função distribuição de probabilidade da variável aleatória X.

Solução:
a)
$\sum_{-\infty}^{\infty} p(x_i) = 1$
$\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + m + \frac{1}{10} = 1$
$m = \frac{3}{5}$

---

b)
$F_x(x) = \sum_k p_x(x_k)u(x - x_k)$
$u(x) = 0$ quando $x < 0$
$u(x) = 1$ quando $x \geq 0$

Questão 2
[0.04pts] Questao_2 Seja X a variável aleatória que representa o número de computadores vendidos, por dia, numa loja de um Centro Comercial. A função densiadde de probabilidade da v.a. X dada por

x	0	1	2	3
P (X = x)	1/6	p	1/30	3/10

a) Determine a probabilidade de vender um computador por dia.
b) Calcule P (1 X ¡ 4); P (X ¿ 2); P (X 1); P (X ¿ 1/ X ¡ 3).

Solução:
$X->$ número de computadores vendidos por dia
a)
$\sum_0^3 p(x_i) = 1$
$\frac{1}{6} + p + \frac{1}{30} + \frac{3}{10} = 1$
$p = \frac{15}{30}$ OU $p = \frac{1}{2}$

---

b) P (1 X ¡ 4) $= P(1) + P(2) + P(3)$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{30} + \frac{3}{10} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$
$P(X > 2) = P(3) = \frac{3}{10}$
$P(X \leq 1) = P(0) + P(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6}$
$P(X > 1/X < 3) = \frac{P(1<X<3)}{P(X<3)} = \frac{P(2)}{P(0)+P(1)+P(2)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{30}} = \frac{1}{21}$

Questão 3
[0.04pts] Questao_3 Seja X um v.a. que nos indica o número de automoveis procurados por um dia num certo stand de vendas. A função de probabilidade da v.a. X dada por:

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	1/20	p	q	1/3	1/4

a) Sabendo que, em 75% dos dias são procurados pelo menos dois automóveis, calcule p e q.
b) Calcule a probabilidade de virem a ser procurados 3 automóveis, num dia em que as procuras

foram em número de pelo menos dois.

Solução:
$P(X \geq 2) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$
$P(X \geq 2) = q + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$q = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
$q = \frac{1}{6}$
$\sum_0^4 P(x_i) = 1$
$\frac{1}{20} + p + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1$
$p = 1 - \frac{1}{20} - \frac{9}{12}$
$p = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

---

b) $P(\frac{x=3}{x \geq 2}) = \frac{P(x=3)}{P(x \geq 2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{9}{12}} = \frac{4}{9}$

Questão 4
[0.04pts] Questao_4 Seja X uma variável aleatória discreta com a seguinte função densidade de probabilidade:

x	2	1	0	1	2
P (X = x)	0,1	0,3	0,1	0,2	0, 3

a)Calcule E[X] e Var[X]
b)Desenhe a função de distribuição de probabilidade de X.
c)Desenhe a distribuição de probabilidade da variável aleatória Y = X^2.

Solução:
a) E(x) e Var(x)
$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_x(x_i)$
$E(x) = u_x = -20.1 - 10.3 + 10.2 + 20.3\ u_x = 0.3$
$Var(x) = \sigma_x^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (x_i u_x)^2 p(x_i)$

$Var(x) = (-2 - 0.3)^2 0.1 + (-1 - 0.3)^2 0.3 + (0 - 0.3)^2 0.1 + (1 - 0.3)^2 0.2 + (2 - 0.3)^2 0.3$

$Var(x) = 0.529 + 0.507 + 0.098 + 0.009 + 0.867$
$Var(x) = 2.01$

Questão 5
[0.04pts] Questao_5 A variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x	2	3	5	8
Probabilidade	0,2	0,4	0,3	0,1

Determine o seguinte:
a) $P(X \leq 3)$
b) $P(X > 2,5)$
c) $P(2,7 < X < 5,1)$
d) $E(X)$
e) $V(X)$ (variância)

Solução:
a) $P(X \leq 3) = P(2) + P(3) = 0.2 + 0.4 = 0.6$
b) $P(x > 2.5) = P(3) + P(5) + P(8) = 0.4 + 0.3 + 0.1 = 0.8$
c) $P(2.7 < X < 5.1) = P(3) + P(5) = 0.4 + 0.3 = 0.7$
d) $E(x) = u_x = 20.2 + 30.4 + 50.3 + 80.1$

$u_x = 3.9$
e)
$Var(x) = (2-3.9)^2 0.2 + (3-3.9)^2 0.4 + (5-3.9)^2 0.3 + (8-3.9)^2 0.1$
$Var(x) = 0.722 + 0,324 + 0,363 + 1,681$
$Var(x) = 3.09$

Questão 6
[0.04pts] Questao_6 O número de esquentadores vendidos diariamente num estabelecimento é bem descrito por uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade:

x	0	1	2	3	4
f(x)	a	b	c	b	a

Se em vinte por cento dos dias as vendas são inferiores a uma unidade e, em trinta por cento dos dias as vendas são superiores a duas unidades.

a) Determine as constantes a, b, e c, bem como a função distribuição da variável aleatória X.

b) Determine a probabilidade de, quando considerado dois dias, as vendas sejam superiores em cada um deles, a uma unidade.

c) Se cada esquentador é vendido a 75 euros, determine a função probabilidade da receita bruta obtida com a venda de esquentadores num dia.

d) Se num dia a receita bruta for inferior a 200 euros, determine a probabilidade de ser superior a 100 euros.

Solução:
a)
20% dias vendas $< 1 P(X < 1) = P(0) = 0.2$
30% dias vendas $> 2 P(x > 2) = P(3) + P(4) = 0.3$
P(0) = a = 0.2
P(3) = b = 0.1
P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4) = 1

O que implica: 2a+2b+c = 1
c = 0.4
F(X=x) = 0 quando, $x < 0$
F(X=x) = 0,2 quando, $0 \leq x < 1$
F(X=x) = 0,3 quando, $1 \leq x < 2$
F(X=x) = 0,7 quando, $2 \leq x < 3$
F(X=x) = 0.8 quando, $3 \leq x < 4$
F(X=x) = 1 quando, $x > 4$
b)
$P(X = 1 \cap X = 1) = P(X = 1) \times P(X = 1) = 0.7 \times 0.7 = 0.49$
c)

x	0	1	2	3	4
r	0,75	1,75	2,75	3,75	4,75
r	0	75	150	225	300
P(r)	20%	10%	40%	10%	20%

d) $P(\frac{R>100}{R<200}) = \frac{P(100<R<200)}{R<200} = \frac{0.4}{0.7} = 0.5714$

Questão 7
[0.04pts] Questao_7 A percentagem de álcool em certo composto pode ser considerada uma v.a. X, onde $0 < x < 1$, com a f.d.p, $f(x) = x^3(1x), 0 < x < 1$.

Solução:
$f(x) = cx^3(1-x)$ quando, 0¡x¡1 f.d.p
a) Determine o valor de c
$\int_0 1 f(x)\, dx = 1$ $\int_0 1 cx^3(1-x)\, dx = 1$ $(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5})|_0^1 = 1/c$
$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{c}$
$c = 20$
b) Calcule $P(\frac{1}{2} < x < 1)$
$P(\frac{1}{2} < x < 1) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\, dx$ $P(\frac{1}{2} < x < 1) = 20(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5})$
$P(\frac{1}{2} < x < 1) = 0.8125$

Questão 8
[0.04pts] Questao_8 O diâmetro X de um cabo elétrico supõe-se ser uma v.a. com f.d.p, assim definida:
$f(x) = 6x(1-x)$, QUANDO, $0 \leq x < 1$ $f(x) = 0$, QUANDO, caso contrário
a) Verifique tratar-se de um f.d.p.
b) Calcule $P(X \leq \frac{1}{2} | \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})$

Solução:
$f(x) = 6x(1-x)$ quando, $0 \leq x < 1$ $f(x) = 0$ caso contrário
a) Sim
b) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(1/3 < x \leq 1/2}{P(1/3 < x < 2/3}$
$\int_a^b f(x)\, dx = 6(\frac{x^2}{x^3/3}$
$P(1/3 < X \geq 1/2) = 6((\frac{1}{8} - \frac{1}{24}) - (\frac{1}{18} - \frac{1}{81})) = 0.2407$
$P(1/3 < X \geq 1/2) = 6((\frac{4}{18} - \frac{8}{81}) - (\frac{1}{18} - \frac{1}{81})) = 0.4814$
$P(x \geq 1/2/1/3 < X \geq 2/3) = 0.2407/0.4814 = \frac{1}{2}$

Questão 9
[0.04pts] Questao_9 Suponha que uma pequena estação de serviço é abastecida com gasolina todos os sábados à tarde. O seu volume de vendas, em milhares de litros, é uma variável aleatória. Considerando que a função densidade de X é:
$f(x) = 6x(1-x)$, QUANDO, $0 \leq x < 1$
$f(x) = 0$, QUANDO, caso contrário
a) Determine $P(0 < X < 0.75$
b) Determine o volume médio de vendas e sua variância.

Solução:
a)
$\int_a^b f(x)\, dx = 6(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}) = 0.84375$
b)
$u_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$ $u_x = \int_0^1 6(x^2 - x^3)\, dx$
$u_x = 6(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 6\frac{1}{12} = \frac{1}{2}$
$u_x = 0.5$
$\sigma_x^2 = \int_0^1 (x - u_x)^2 f(x)\, dx$ $\sigma_x^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 f(x)\, dx$
$\sigma_x^2 = \int_0^1 6(x^2 - x + \frac{1}{4})(x - x^2)\, dx$
$\sigma_x^2 = 6(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{12}$
$\sigma_x^2 = 0.05$

Questão 10
[0.04pts] Questao_10 A Procura mensal de um certo artigo é uma variável aleatória X com a seguinte função densidade:
$f(x) = \frac{x}{4}$, QUANDO, $0 \leq x \leq 2$
$f(x) = 1 - \frac{x}{4}$, QUANDO, $2 \leq x \leq 4$
$f(x) = 0$, QUANDO, caso contrário

a) Calcule a funçao de distribuicao de x

Solução:
a) Calcule a funçao de distribuicao de x
$F(X) = \int_0^x \frac{x}{4}\, dx$
$F(x) = \frac{x^2}{8} 0 \geq x < 2$
$F(x) = \int_2^x 1 - \frac{x}{4}\, dx + \int_0^2 \frac{x}{4}\, dx = (x - \frac{x^2}{8}) + \frac{x^2}{8}$
$F(x) = x - \frac{x^2}{8} - 2 + \frac{4}{8} + \frac{4}{8}$
$F(x) = x - \frac{x^2}{8} - 1$ quando $2 \leq x < 4$
$F(x) = 0$ quando, $x < 0$ $F(x) = \frac{x^2}{8}$ quando, $0 \leq x < 2$ $F(x) = x - \frac{x^2}{8} - 1$ quando, $2 \leq x < 4$ $F(x) = 1$ quando, $x > 4$

Questão 11
[**0.04pts**] Questao_11 O tempo de permanência dos alunos numa aula de 2 horas é uma variável aleatória X com densidade de probabilidade:
$f(x) = 1 - \frac{x}{2}$, QUANDO, $0 \leq x \leq 2$
$f(x) = 0$, caso contrário
a) Qual a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, assistir a mais de 75% da aula ?
b) De 10 alunos, escolhidos ao acaso no conjunto dos alunos que estão presentes no início da aula, qual a probabilidade de apenas 1 permanecer na sala quando faltam 15 minutos para a aula terminar.

Solução:
a) $P[x > 75\%]$
Aula$_Total = 2horasoquequerdizerque75\%2hrs = 1.5$
$P(X > 1.5) = \int_{1.5}^2 (1 - \frac{x}{2}\, dx = (x - \frac{x^2}{4})$
$P(X > 1.5) = 0.0625$
b)

Questão 12
[**0.04pts**] Questao_12 Considere a tabela que representa a função massa de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y):

$X \mid Y$	0	1	2	3
1	0,1	0.15	0.2	p
2	P	0.15	0.15	0.05
3	0.05	0	P	0

a) Determine o valor de p e obtenha as funções massa de probabilidade marginal X e Y.
b) Defina a função distribuição da variável aleatória X.
c) Verifique se X e Y são variáveis aleatórias independentes. Calcule a covariância das variáveis X e Y.
d) Considere a variável aleatória W=X+2Y. Calcule o seu valor médio e sua variância.
e) Calcule $P(X + Y \leq 3 | Y_{impar}$

Solução:
Função massa de probabilidade = função de densidade de probabilidade (v.a. continuas)
a) Determine o valor de p e fmp de x y
$0.15 + 0.30 + 0.35 + 0.05 + 3p = 1$ $0.85 + 3p = 1$
$3p = 0.15$ $p = 0.05$

X	1	2	3
P(x)	0.5	0.4	0.1

Y	0	1	2	3
P(y)	0.2	0.3	0.4	0.1

b) Defina a função distribuicao da v.a. X
$F(x) = 0$ quando, $x < 1$ $F(x) = 0.5$ quando, $x < 1$ $F(x) = 0.9$ quando, $x < 1$ $F(x) = 1$ quando, $x \geq 3$
c) Não são independentes porque P(x) depende da variável de Y
Calculo da variância:
$\sigma_{xy} = E(xy) - u_x u_y$
$u_x = 10.5 + 20.4 + 30.1$ $u_x = 0.5 + 0.8 + 0.3 = 1.6$
$u_y = 0 + 0.3 + 0.8 + 0.3$ $u_y = 1.4$
$E[xy] = \sum_0^3 \sum_1^3 x_i y_i P(x_i y_i)$
$E[xy] = 0 + 0.15 + 0.30 + 2(0.2 + 0.3 + 0.12) + 3(0.05 + 0.1)$ $E[xy] = 0.45 + 1.30 + 0.45$ $E[xy] = 2.24$
$\sigma_{xy} = 2.20 - (1.6 \times 1.4)$ $\sigma_{xy} = -0.04$
$w = x + 2Y$

w	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(w)	0.1	0.05	0.20	0.15	0.20	0.15	0.1	0.05	0

$E[W] = u_w = 0.1 + 0.1 + 0.6 + 0.6 + 1 + 0.9 + 0.7 + 0.4$ $u_w = 4.4$
$Var[w] = \sigma_w^2 = E((x - u_x)^2) = \sum_1^9 (w_i - u_w)^2 p(w_i)$
$\sigma_w^2 = (1-4,4)^2 0.1 + (2-4.4)^2 0.05 + (3-4.4)^2 0.2 + (4-4.4)^2 0.15 + (5-4.4)^2 0.2 + (6-4.4)^2 0.15 + (7-4.4)^2 0.1 + (8-4.4)^2 0.05$
$\sigma_w^2 = Var(w) = 3.64$
d) Calcule $P(x + y \leq 3|$ y é impar
$P(Y_{impar}) = P(1,1) + P(1,3) + P(2,1) + P(2,3) + P(3,1) + P(3,3)$
$P(Y_{impar}) = 0.15 + 0.05 + 0.15 + 0.05 + 0 + 0 = 0.4$
$P(x + y \leq 3|Y_{impar}) = 0.15 + 0.15 = 0.30$
$P(x + y \leq 3|Y_{impar}) = 0.3/0.4 = 0.75$

Questão 13
[0.04pts] Questao_13 Numa loja de eletrodomésticos as vendas mensais de frigoríficos das marcas A e B são variáveis aleatórias X e Y com distribuição conjunta dada por:

$X\|Y$	1	2	3
1	0.25	0.25	0
2	0	0.25	0.25

a) Calcule a probabilidade de em um dado mês se vender um número idêntico de frigoríficos das marcas A e B.
b) Determine as probabilidades marginais de X e Y.
c) Determine a covariância das variáveis X e Y. Que conclusão pode retirar acerca da independência entre as vendas da marca A e B?
d) Seja Z o total das vendas mensais das marcas A e B. Calcule a variância Z.
e) Sabe-se que foi vendido um frigorífico da marca A. Qual a distribuição da variável aleatória $Y|X = 1$?

Solução:
a) $P[A = B] = P(1,1) + P(2,2) = 0,25 + 0,25 = 0,5$
b) Probabilidade marginal:
$P(X = x)$ $P(1,1) + P(1,2) + P(1,3) = 0.5$ $P(2,1) + P(2,2) + P(2,3) = 0.5$
$P(Y = y)$ $P(1,1) + P(1,2) = 0.25$ $P(2,1) + P(2,2) = 0.50$ $P(3,1) + P(3,2) = 0.25$
c) Determine a covariância das v.a. X e Y
$E[xy] = 10.25 + 20.25 + 40.25 + 0 + 60.25 = 3.25$
$u_x = 10.5 + 20.5 = 1.5$ $u_y = 10.25 + 20.5 + 30.25 = 2$
$\sigma_{xy} = 3.25 - 1.52 = 0.25$
não são indepemdentes
d) $Z = A + B$
$Var(z) = \sigma_z^2 = (2 - 3.5)^2 0.25 + (3 - 3.5)^2 0.25 + (4 - 3.5)^2 0.25 + (5 - 3.5)^2 0.25$
$\sigma_z^2 = 0.5625 + 0.0625 + 0.0625 + 0.5625$ $\sigma_z^2 = 1.25$

e) A=X=1
$P(x = 1) = 0.5$
$P(1, 1) = 0.25$ $P(1, 2) = 0.25$ $P(1, 3) = 0$
Assim,
$P(1, 1)/P_x(1) = 0.5$ $P(1, 2)/P_x(1) = 0.5$ $P(1, 3)/P_x(1) = 0$
$P(Y = y/x = 1) = 0.5$ QUANDO, y=1 $P(Y = y/x = 1) = 0.5$ QUANDO, y=2 $P(Y = y/x = 1) = 0$ QUANDO, y=3

Questão 14
[0.04pts] Questao_14 Uma agência de um banco estudou as duas variáveis seguintes com o objetivo de conhecer o comportamento dos titulares de conta corrente:
X -"Número de produtos do banco utilizados além da conta corrente"
Y -"Número de meses com a conta corrente a descoberto no ano anterior"
A distribuição conjunta destas variáveis é indicada na tabela seguinte:

$X\|Y$	0	1	2
0	0.3	0.1	0.05
1	0.2	0.1	0.05
2	0.05	0.05	0
3	0.1	0	0

a) Determine as probabilidades marginais de X e Y.
b) Qual a probabilidade de um cliente titular de conta corrente possuir produtos do banco além da conta corrente.
c) Sabendo que um dado cliente apresentou a conta a descoberto em mais do que um mês do ano passado, qual a probabilidade desse cliente utilizar produtos do banco além da conta corrente?
d) Qual o número médio de meses que um cliente da agência apresentou a conta a descoberto no ano anterior? Com que desvio padrão?

Solução:
a) Probabilidades marginais
$P(X = x) = 0.45$ quando, x=0 $P(X = x) = 0.35$ quando, x=1 $P(X = x) = 0.1$ quando, x=2 $P(X = x) = 0.1$ quando, x=3
P(Y=y) = 0.65 quando y=0 P(Y=y) = 0.25 quando y=1 P(Y=y) = 0.1 quando y=2
b) $P(x > 0) = P_x(1) + P_x(2) + P_x(3) = 0.35 + 0.10 + 0.10$
$P(x > 0) = 0.55$
c) P(x $\geq 1/y > 1) = \frac{P(1,1)+P(1,2)+P(1,3)}{P_y(2)} = \frac{0.05}{0.1} = 0.5$
d) $u_y = 00.65 + 10.25 + 20.1 = 0.25 + 0.2 = 0.45$
$\sigma_y^2 = (0 - 0.45)0.65 + (1 - 0.45)0.25 + (2 - 0.45)0.1$
$\sigma_y^2 = 0.4475$
Assim, $\sqrt{\sigma_y^2 =} = 0.669$

Questão 15
[0.04pts] Questao_15 Um comerciante vende, entre outros artigos, máquinas de calcular de certo tipo. Seja X a variável aleatória que representa o número de máquinas de calcular disponíveis para venda no início de cada semana. O comerciante possui uma dessas máquinas para seu próprio uso, que poderá eventualmente vender, mas que não conta como disponível. O número de máquinas vendidas semanalmente é uma variável aleatória Y. O par aleatório (X,Y) apresenta a seguinte distribuição de probabilidades:

Solução:
$P(X = i, Y = i) = \frac{1}{12} i = 1, 2, 30 \leq j \leq i + 1$
a) Vende mais máquinas do que a média disponível

$X\|Y$	0	1	2	3	4	soma
1	1/12	1/12	1/12	0	4	3/12
2	1/12	1/12	1/12	1/12	4	4/12
3	1/12	1/12	1/12	1/12	4	5/12
soma	3/12	3/12	3/12	2/12	1/12	1

a) $u_x = 13/12 + 24/12 + 35/12 = 26/12 = 2.17$
$P_y(y > 2.17) = P_y(3) + P_y(4) = 2/12 + 1/12 = 3/12 = 0.25$
b) $P(x > y) = P(1,0) + P(2,1) + P(3,2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$
c) $P(X = Y - 1) = P(1,2) + P(2,3) + P(3,4) = \frac{3}{12}$

Questão 16
[0.04pts] Questao_16 Determine a função de probabilidade para a variável aleatória com a seguinte função de distribuição cumulativa:
F(x) = 0, QUANDO, x ¡2 F(x) = 0.2, QUANDO, 2 x ¡5.7 F(x) = 0.5, QUANDO, 5.7 x ¡6.5 F(x) = 0.8, QUANDO, 6.5 x ¡8.5 F(x) = 1, QUANDO, 8.5 x

Solução:
f(0) = 0 f(2) = 0.2 - f(0) = 0.2 f(5.7) = 0.5 - f(2) = 0.5 - 0.2 = 0.3 f(6.5) = 0.8 - f(5.7) - f(2) = 0.8 - 0.3 - 0.2 = 0.3 f(8.5) = 1 - f(6.5) - f(5.7) - f(2) = 1-0.3-0.3-0.2 = 0.2
Assim,
f(X) = 0, QUANDO, x=0 f(x) = 0.2, QUANDO, x=2 f(x) = 0.3, QUANDO, x=5.7 f(x) = 0.3, QUANDO, x=6.5 f(x) = 0.2, QUANDO, x=8.5

Questão 17
[0.04pts] Questao_17 Uma variável aleatória X é normalmente distribuída com média igual 1200 e desvio padrão igual a 200. Qual a probabilidade P[800 x 1000]

Solução:
$X = [1200, 200] = [0, 1]$ $P[800 \leq x \leq 1000] = P(\frac{800-1200}{200} < z < \frac{1000-1200}{200}$
$P(-2 \leq z \leq -1)$
Assim,
$P[-2 \leq x \leq -1] = Z(-1) - Z(-2) = Z(2) - Z(1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$

Questão 18
[0.04pts] Questao_18 Uma variável aleatória X associada a função densidade de probabilidade
$f(x) = \frac{1}{20}e^{-\frac{x}{20}}$ quando, $x \geq 0$
$f(x) = 0$ caso contrário
Determine a probabilidade de X assumir valores entre 10 e 20.

Solução:
$P(10 \leq X \leq 20) = \int_{10}^{20} f(x)\,dx$
$\int_{10}^{20} \frac{1}{20}e^{-\frac{x}{20}}\,dx$
$P(10 \leq X \leq 20) = (-e^{-\frac{x}{20}})_{10}^{20}$
$P(10 \leq X \leq 20) = (-e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}})$

Questão 19
[0.04pts] Questao_19 Considere o lançamento de dois dados e a experiência cujo resultado consiste na soma do número de pontos das faces que resultam do lançamento. Defina esta soma como sendo uma variável aleatória X. Esboce a função distribuição de probabilidade da v.a. X.

Solução:

$\frac{d1}{d2}$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$X = d1 + d2$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

F(X) = 0,x ¡2
F(X) = 1/36, QUANDO, $x = 2$
F(X) = 3/36, QUANDO, $x \leq 3$
F(X) = 6/36, QUANDO, $x \leq 4$
F(X) = 10/36, QUANDO, $x \leq 5$
F(X) = 15/36, QUANDO, $x \leq 6$
F(X) = 21/36, QUANDO, $x \leq 7$
F(X) = 26/36, QUANDO, $x \leq 8$
F(X) = 30/36, QUANDO, $x \leq 9$
F(X) = 33/36, QUANDO, $x \leq 10$
F(X) = 35/36, QUANDO, $x \leq 11$
F(X) = 1, QUANDO, $x \leq 12$

Questão 20
[0.04pts] Questao_20 A função distribuição de probabilidade de uma variável aleatória, X tem a forma apresentada na figura a seguir:
a) Determine o valor Fx(0), a probabilidade de uma v.a.
b) $P(X \geq 0)$

Solução:
$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{10}$
$b = y - \frac{1}{10}x$
$b = 1 - \frac{1}{10} \times 5 = \frac{1}{2}$
$F_x(0) = \frac{1}{2}$
b) $P(X \geq 0)$
$F(X) = \frac{1}{10}x + \frac{1}{2}$ quando, $-5 \leq x < 5$
$F(X) = 1$ quando $x \geq 5$
$F(5) - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Questão 21
[0.04pts] Questao_21 Determine o valor de a para que a função dada abaixo possa representar uma função densidade de probabilidade contínua.
$f(x, y) = a(x^2 + \frac{xy}{3})$ quando, $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 2$
$f(x, y) = 0$ caso contrário

Solução:
$\int_0^1 \int_0^2 a(x^2 + \frac{xy}{3})\, dy\, dx = 1$
$a \int_0^1 (x^2 y + \frac{xy^2}{6})_0^2\, dx = 1$
$a(\frac{2x^3}{3} + \frac{1x^2}{3})_0^1 = 1$
$a = 1$

Questão 22
[0.04pts] Questao_22 Considerando o exemplo anterior e o valor de a obtido determine:
$P(x \leq \frac{1}{2} \leq 1)$

Solução:
$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^1 x^2 + \frac{xy}{3} \, dy \, dx$
$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 + \frac{x}{6} \, dx = \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$
Resposta: $\frac{1}{16}$

Questão 23
[0.04pts] Questao_23 Sabendo-se que a função densidade de probabilidade conjunta é dada por:
$f(x, y) = a(x^2 + \frac{xy}{3})$ quando, $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 2$
Determine a função densidade de probabilidade marginal e a função distribuição de probabilidade marginal para a variável aleatória X:

Solução:
$f_x(x) = \int_0^2 x^2 y + \frac{xy}{6} \, dx$
Assim,
$f_x(x) = 2x^2 + \frac{2x}{3}$ QUANDO, $0 \leq x \leq 1$
$f_x(x) = 0$ caso contrário
Calcularemos os intervalos:
x ¡ 0
$F(x) = \int_{-\infty}^0 2x^2 + \frac{2x}{3} \, dx = 0$
$F(x) = 0$
$0 \leq x \leq 1$
$F(x) = \int_0^x 2x^2 + \frac{2x}{3} \, dx = 0$
$F(x) = (\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{6})_0^x$
$F(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^3}{3}$
x ¿ 1
$F(x) = \int_{-\infty}^0 2x^2 + \frac{2x}{3} \, dx = 1$

Questão 24
[0.04pts] Questao_24 Considerando que a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias é dada por:
Determine: a) Função densidade de probabilidade condicional $f_{x|y}(X|Y)$
b) $f_{X|y}(x|y) = P(X \leq x, Y = y)$

Solução:
a) $f_{x|y}(X|Y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$
$f_{x|y}(X|Y) = \frac{\frac{x+y}{3}}{\int_0^1 \frac{x+y}{3} \, dx}$
$f_{x|y}(X|Y) = \frac{x+y}{3} \frac{6}{2y+1} = \frac{x+y}{y+0.5}$ QUANDO, $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2$
b) $F_{x|y}(x|y) = \frac{\int_{-\infty}^x f(x,y) \, dx}{\int_0^1 f(x,y) \, dx}$
$F_{x|y}(x|y) = \frac{(\frac{x+y}{y+0.5})_0^x}{(\frac{x+y}{y+0.5})_0^1}$
$F_{x|y}(x|y) = \frac{\frac{x+y}{y+0.5}}{\frac{1}{2}+y}$
$f(x, y) = 0$, QUANDO $x < 0; y < 0$
$f(x, y) = \frac{\frac{x^2}{2}+xy}{\frac{1}{2}+y}$, QUANDO $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2$
$f(x, y) = 1$, caso contrário

Questão 25
[0.04pts] Questao_25 Verifique se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, sabendo-se que a função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

Solução:
$f(x,y) = \frac{1}{2}e^{-y}$ quando, $0 \leq x \leq 2, y > 0$
$f_x(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}e^{-y}\,dy$
$f_x(x) = -\frac{1}{2}e^{-y}|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$f_y(y) = \int_0^{2} \frac{1}{2}e^{-y}\,dy$
$f_y(y) = \frac{1}{2}e^{-y}x|_0^2 = (\frac{e^{-y}}{2} \times 2) - (\frac{e^{-y}}{2} \times 0) = e^{-y}$
$f(x,y) = f_x(x) \times f_y(y) = \frac{e^{-y}}{2}$

Assim, é observado que os eventos são independentes