O Brilho de Vênus - MAP2110

Professor: Nelson Mugayar Kuhl
Grupo: Enzo Valentim Cappelozza Nº USP 12556736
Henrique Fujikawa Tokunaga NºUSP 12675207
Lucas Panfilo Donaire Nº USP 12556552
Marcos Martins Marchetti Nº USP 11910868
Ygor Peniche Maldonado Nº USP 10271558

September 9, 2022

O presente trabalho tem por finalidade analisar o brilho do planeta Vênus, relativo a um observador estacionado na terra, durante o período de órbita do planeta Vênus. Para tal modelo, é adotado um regime de órbita estacionária do planeta Terra, ou seja, durante todo o período rotação de Vênus ao redor do Sol, o observador encontra-se, para o referencial do Sol, em um mesmo ponto no espaço.

O projeto fora feito com base em [1], no entanto, por caso do excesso de notação, resolvemos adotar uma linguagem menos baseada em letras gregas, e mais baseadas em conceitos de geometria plana. É importante notar que o ângulo SVT, que futuramente denotaremos por ψ, em [1] é denotado pelo ângulo ϕ previamente conhecido. Portanto, necessitaremos calcular um ângulo que nos possibilite expressar o ângulo Sol-Terra-Vênus. Para tal estudo consideramos Terra e o Sol como sendo puntiformes, sendo assim, a influência da latitude do observador que está na Terra não influencia na visibilidade da área iluminada de Vênus, e a visibilidade do planeta dependerá somente da luminosidade emitida pelo Sol.

Usaremos também, como hipótese simplificadora, que, devido às grandes dimensões entre as distâncias entre a Terra, Sol e o planeta Vênus, a reta VO tende ao plano perpendicular ao observador na terra, tal como a reta que determina a iluminação de Vênus provida pelo Sol, que também tende a uma perpendicular à reta ligando o centro de Vênus ao centro do Sol.

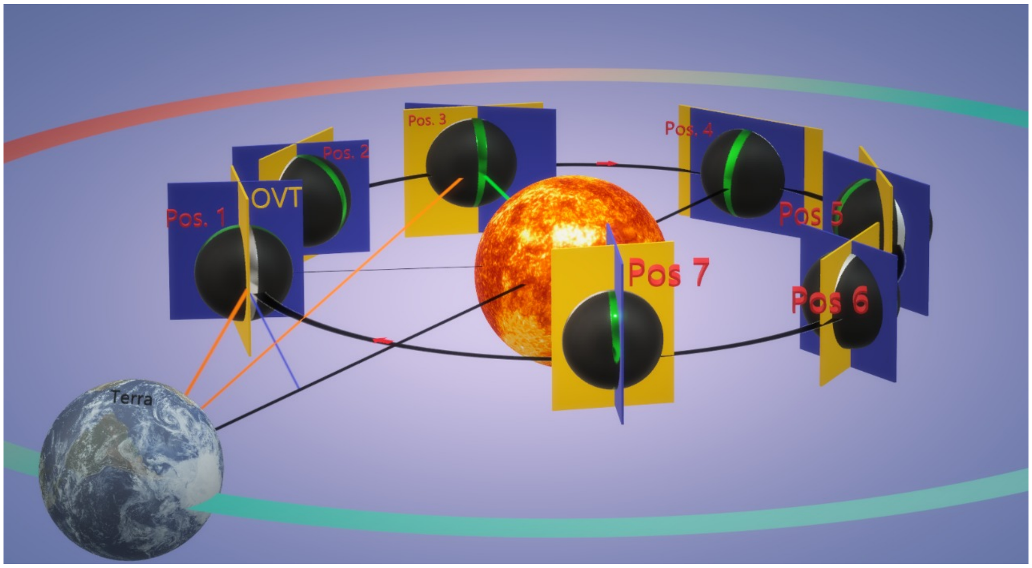


Figure 1: Diagrama em três dimensões

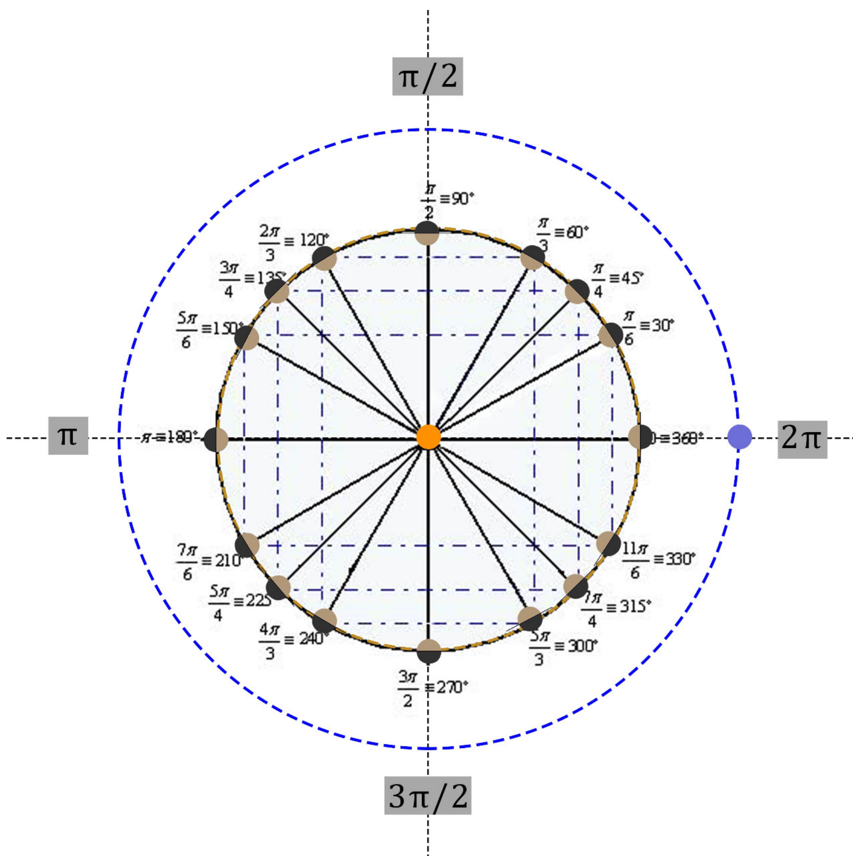
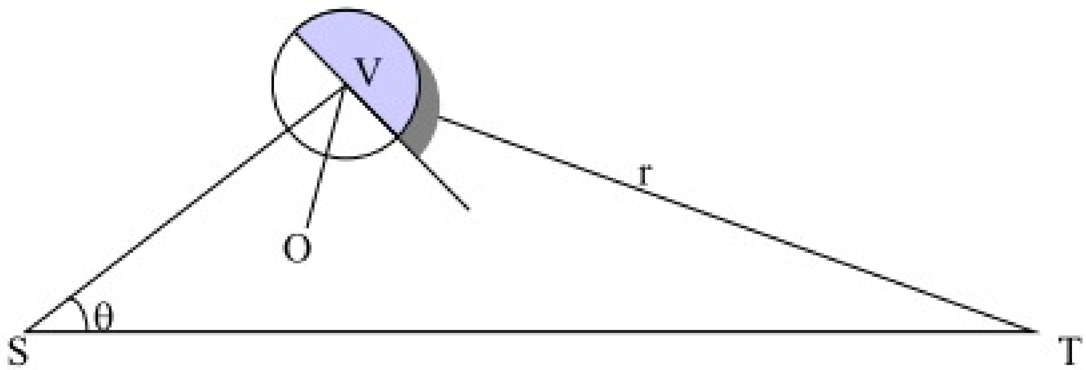


Figure 2: Posições de Vênus em torno do Sol



O ângulo ψ.

Nota-se que em [1] os cálculos são imediatos devido ao fato de que o ângulo $\angle SVT = \psi$. No entanto, no problema que nos foi proposto, o único ângulo do qual somos dotados é o ângulo $\angle VST = \theta$. Havemos de fazer, portanto, as devidas modificações às equações para que possamos utilizar o valor de θ.

Iniciemos com a imagem do triângulo VST, que é responsável pelo argumento geométrico do problema. Temos que o ponto V denota o planeta Vênus, S denota o sol e T denota a Terra. podemos também dizer que as distâncias $d_{V,S} = R$ e $d_{V,T} = r$.

Denotemos o plano $\boldsymbol{VO}$, perpendicular ao plano da folha, contido na reta que delimita os hemisférios de Vênus e paralelo à reta que liga Vênus à Terra. Note que tal plano é responsável por delimitar os pontos cuja visão do observador na Terra é capaz de ver, ou seja, duas retas que tangenciam pontos diametralmente opostos do planeta Vênus. Há de se notar também o plano contido na reta que é paralela à $\boldsymbol{SV}$, que delimita os pontos diametralmente opostos de Vênus que recebem a luminosidade do Sol. A visibilidade de Vênus, pelo observador na terra, se dá pelo setor circular voltado para o observador, resultado da intersecção de ambos planos, quando distintos.

1 O Brilho em função de ψ

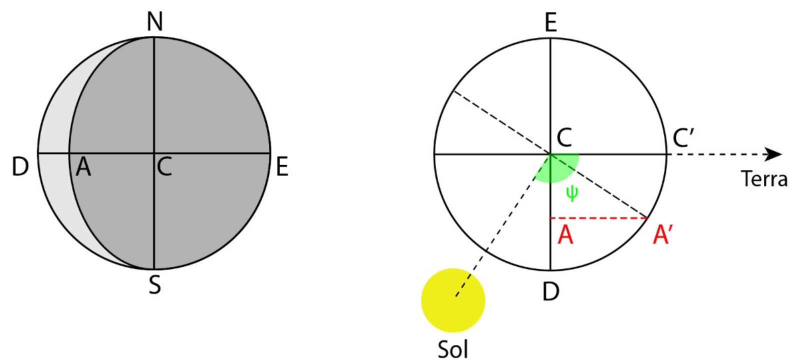
O brilho é proporcional à projeção da região de Vênus iluminada pelo Sol sobre o plano perpendicular a reta que une a Terra a Vênus. Se analisar a área de uma elipse, você determinará que o brilho é proporcional a $1 + \cos\psi$ onde ψ é o ângulo SVT.

Tendo em vista os diagramas abaixo, os quais o primeiro representa a vista de Vênus da terra, e o outro a vista de Vênus de cima, sabemos que a área iluminada que vemos é limitada pela metade da elipse NCSAN, e achamos A na projeção de A' no plano ED, como mostra o segundo diagrama.

A área de uma elipse de semi-eixo menor B e semi-eixo maior A tem valor de $AB\pi$

Logo, seja o raio de Vênus = ρ, a área da metade da elipse NCSAN é de AC $\rho \cdot \dfrac{\pi}{2}$

Para achar AC, analisamos o triângulo A'CA



Analisando a geometria do segundo diagrama, vemos que o ângulo A'CA tem valor de $\pi - \psi$. Logo, AC $= \rho \cdot \cos(\pi - \psi)$

Visto isso, a área iluminada NASDN tem valor de $\dfrac{\pi\rho^2}{2} - \dfrac{\pi\rho^2}{2}\cos(\pi - \psi)$

$\cos(\pi - \psi) = \cos\pi\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\pi\,\mathrm{sen}\,\psi$

$\cos(\pi - \psi) = (-1)\cos\psi + 0\,\mathrm{sen}\,\psi$

$\cos(\pi - \psi) = -1\cos\psi$

NASDN $= \dfrac{\pi\rho^2}{2}(1 + \cos\psi)$

Definamos agora a *Luminosidade* como sendo:

$$L = k\frac{f}{r^2}$$

Onde f é a fase e é dado por:

$$f = \frac{NASDN}{NDSCN} = \frac{\frac{\pi\rho^2}{2}(1 + cos\psi)}{\pi\rho^2} = \frac{(1 + cos\psi)}{2}$$

Quando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $f = \dfrac{1}{2}(1 + 0) = 0,5$ ou seja, a resposta pro exemplo pedido no enunciado é de f $= 50\%$

E pela equação obtida anteriormente temos que

$$L = k\frac{(1 + cos\psi)}{2 \cdot r^2}$$

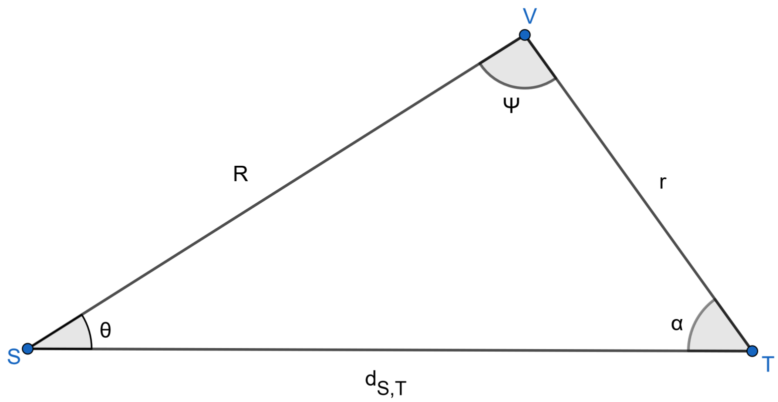
Ou seja, o brilho é de fato proporcional à $(1 + cos\psi)$

2 A função $L(r)$

Visto da terra, a fase de Vênus é proporcional a f
(I)

$$f = \frac{1}{2}(1 + \cos\psi)$$

Pela aplicação da Lei dos Cossenos no Triângulo SVT a partir do Ângulo ψ, obtemos a equação (II):
(II)



$$\cos\psi = \frac{(R)^2 + (r)^2 - (d_{S,T})^2}{2(R)(r)}$$

Substituindo os valores em (II) por

$R = 10,81 \times 10^7$
$d_{S,T} = 14,95 \times 10^7$

Obtemos:
(III)

$$\cos\psi = \frac{(10,81 \times 10^7)^2 + (r)^2 - (14,95 \times 10^7)^2}{2(10,81 \times 10^7)(r)}$$

A partir daqui, podemos reescrever a fase (I) em função da distância Vênus-Terra (r) substituindo $\cos\psi$ por (II), tal que a fase f, de acordo com a equação (I) é :

(IV)

$$f(r) = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{(10,81 \times 10^7)^2 + (r)^2 - (14,95 \times 10^7)^2}{2 \times (10,81 \times 10^7) \times (r)}\right),$$

onde

$$f(r) = \frac{(21,62 \times 10^7 \times r) + (r)^2 - (1066464 \times 10^{10})}{(43,24 \times 10^7) \times r}$$

Dessa forma, a Luminosidade (L) é dada por:
(V)

$$L = k \cdot \frac{1 + cos\psi}{2 \cdot r^2} = \frac{k}{2 \cdot r^2}\left(1 + \frac{R^2 + r^2 - (d_{S,T})^2}{2R \cdot r}\right) = k \cdot \left(\frac{2 \cdot R \cdot r + R^2 + r^2 - (d_{ST})^2}{4 \cdot R \cdot r^3}\right)$$

De maneira que substituímos os valores dados e fazemos $z = \frac{k}{4.R}$

$$L(r) = z \times \frac{(21,62 \times 10^7 \times r) + (r)^2 - (1066464 \times 10^{10})}{r^3}$$

3 Valor de r para brilho máximo

A fim de obtermos o brilho máximo, devemos maximizar a equação V. Para tal, usemos uma derivada:

$$\frac{dL}{dr} = -\frac{z}{r^4}(4R \cdot r + r^2 + 3(R^2 - (d_{S,T})^2))$$

E igualemos a zero para obter o máximo da função, para tal:

$$r^2 + 4R \cdot r + 3(R^2 - (d_{S,T})^2) = 0$$

Portanto:

$$r = -2R + \sqrt{R^2 + 3(d_{S,T})^2}$$

Visto que a outra solução da equação não é coerente com a representação física do problema, ela não será usada.

Substituindo os valores, temos que, na situação de brilho máximo:

$$r = 6,44 \cdot 10^7 km$$

4 A função $r(\theta)$

Temos pela *Lei dos Cossenos* no triângulo SVT, tomando por base o ângulo θ, que resulta em: (VI)

$$r(\theta) = \sqrt{R^2 + (d_{S,T})^2 - 2(d_{S,T}) \cdot R \cdot Cos(\theta)}$$

Podemos obter o valor da Luminosidade através de V, onde o valor de r será obtido através da Equação VI

E cujo gráfico é dotado de eixos $L \times \theta$

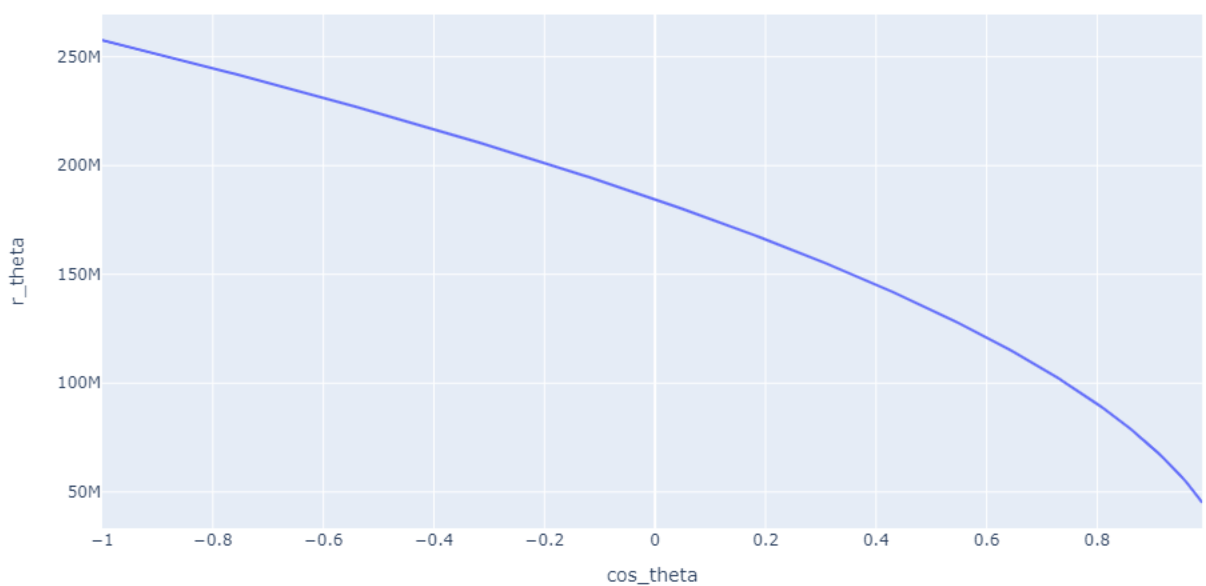


Figure 3: Representação gráfica da variação da distância Vênus - Terra em função de Cos(θ). Temos no eixo x os valores de cos(θ), e no eixo y as respectivas distâncias. É bom enfatizar que como o cosseno é igual quando Vênus está de um ou de outro lado do sol, esses valores de distância se repetiriam em uma volta completa.

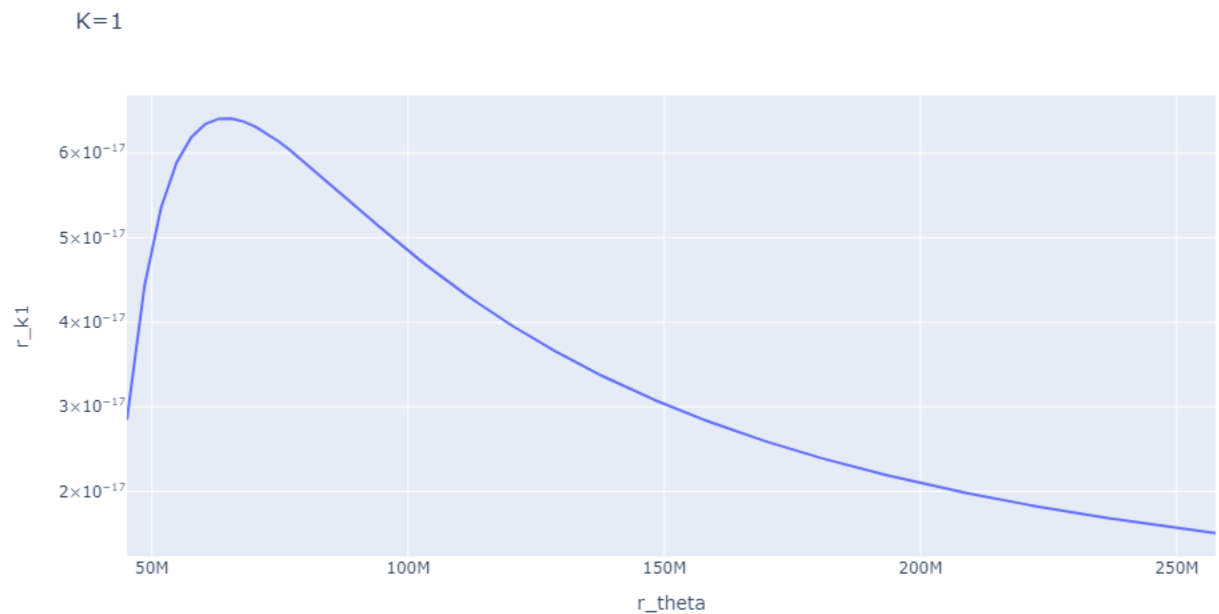


Figure 4: Brilho em função da distância Terra-Vênus. No eixo X temos os valores de r, ensino no eixo y a respectiva luminosidade. Adotamos $k = 1$ para a representação gráfica, visto que os valores continuariam proporcionais. É nítido que o valor máximo se aproxima muito de $r = 6,44 \cdot 10^7$, como deduzido anteriormente.

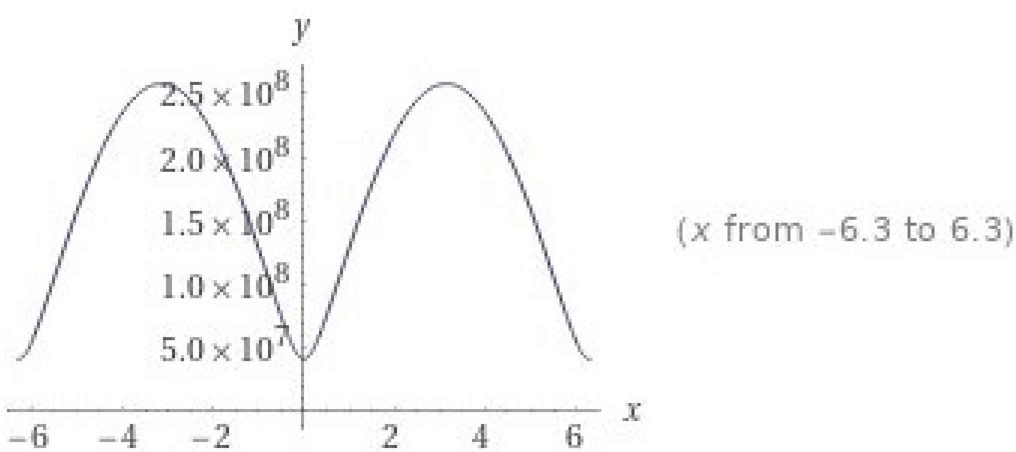


Figure 5: Distância (eixo y) em função de θ (eixo x)

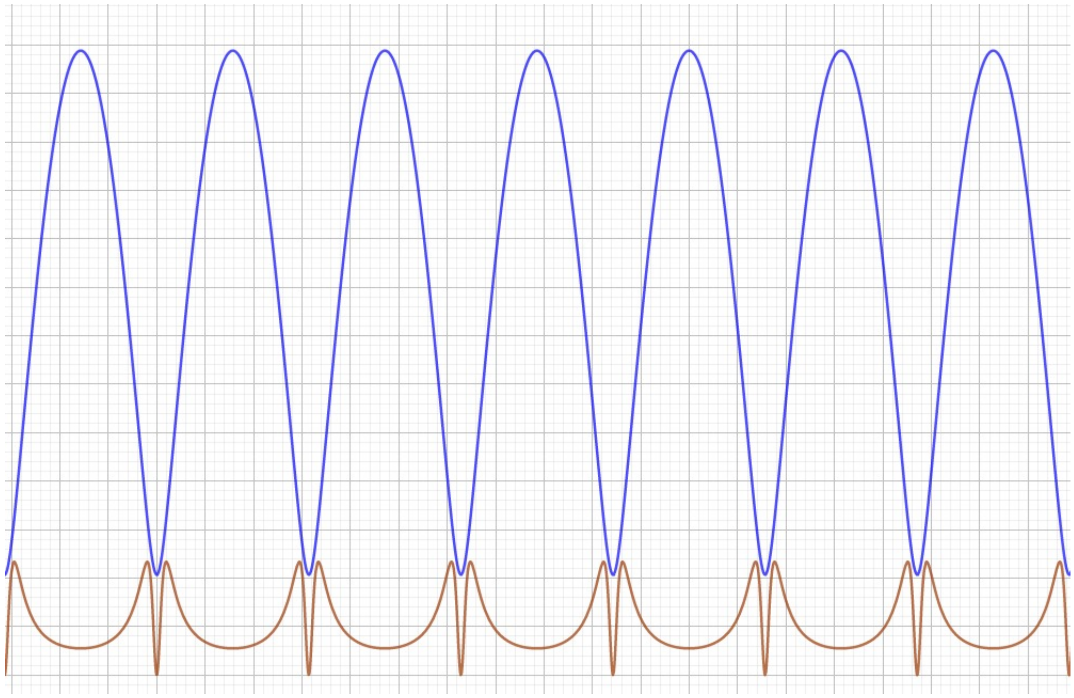


Figure 6: Em azul a função $r(\theta)$ e em amarelo a função $L(\theta)$, ambas fora de escala para melhor visualização da variação.

5 Período entre brilhos máximos

Se o período da órbita de vênus é de 584 dias, podemos concluir que, a cada dia, Vênus se move aproximadamente $2\pi/584$ radianos, ou 360/584 graus em sua órbita. Com o valor de r que achamos no exercício 3 (quando $r = 6,44 \cdot 10^7$ km, o brilho é máximo), na lei dos cossenos, temos:

$$r^2 = R^2 + (d_{S,T})^2 – 2(d_{S,T}) \cdot R \cdot Cos(\theta)$$

$$Cos(\theta) = -\frac{(r^2 - R^2 - (d_{S,T})^2)}{2 \cdot d_{S,T} \cdot R}$$

com

$$r = 6,44 \cdot 10^7 km$$
$$R = 10,81 \cdot 10^7 km$$
$$ST = 14,95 \cdot 10^7 km$$

Temos:

$$cos(\theta) = 0.9247135842880524$$

$$arccos(0.9247135842880524) = 0.39051383 rad = 22.37479449 \text{ graus.}$$

por uma regra de 3 simples, temos que

$$\frac{22,37479449}{d} = \frac{360}{584} \implies d = 36.296888839333334$$

Logo, como a função é periódica e par, o brilho máximo de Vênus vai ocorrer aproximadamente 36 dias antes e 37 dias após a conjunção inferior.

Devido à ordem de grandeza dos números utilizados, é inevitável fazer certas aproximações. Porém é justamente nessa ordem que as aproximações se tornam mais perigosas, pois um 0,1% pode se tornar 10.000 km. Assim, é nítido que esse modelo, devido às diversas aproximações, por mais básico que seja e estime bem, não se consegue obter um alto grau de precisão. Para exemplificar, só nesse pequeno exercício de previsão de dia, consideramos a órbita circular, o movimento de Vênus e da terra como uniforme, aproximamos as distâncias das órbitas ao Sol – por isso não seria inesperado um erro de alguns dias. O modelo como um todo considerou o Sol e a Terra como estacionárias, e Vênus, planeta perfeitamente esférico, com órbita circular e se movendo uniformemente. A aproximação de que vemos toda a área de Vênus na frente de um plano perpendicular a VT também foi utilizada.

6 Próximo brilho máximo de Vênus

Para encontrar o próximo brilho máximo de Vênus é necessário localizar as posições relativas entre os astros. Para encontrar a posição de Vênus em relação à Terra, partimos da referência ”The Sky Live” , no qual é possível monitorar características do sistema solar em tempo real.

Dessa forma, temos que, exatamente em 20 de maio de 2021, $r = 24,78 \times 10^7$:

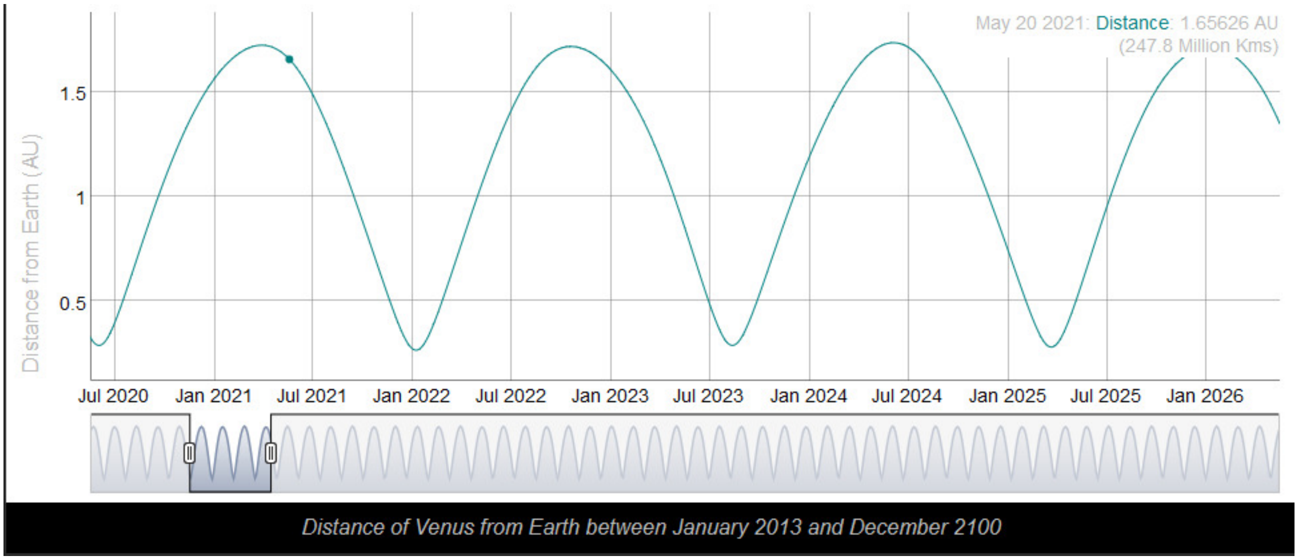
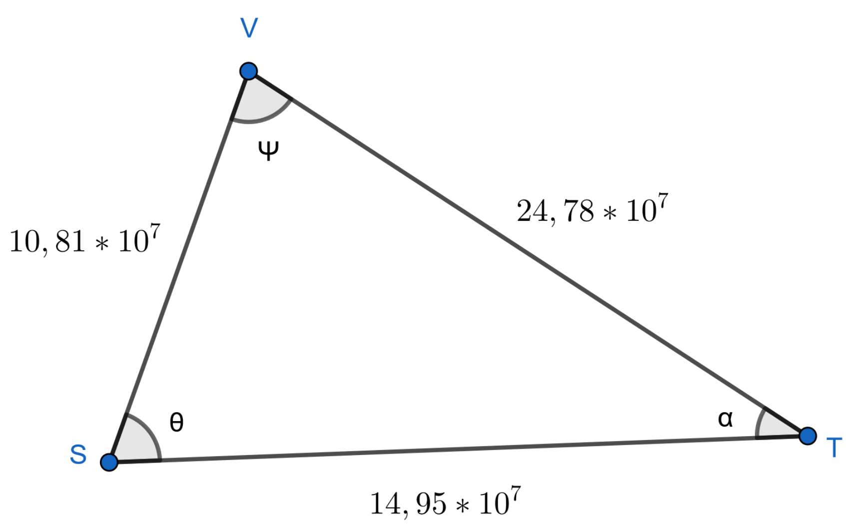


Figure 7: Distância de Vênus à Terra disponível em: https://theskylive.com/venus-infodistance



Aplicando $r = 24,78 \times 10^7$ em $\cos\theta$ temos,

$$Cos(\theta) = -\frac{(r^2 - R^2 - (d_{S,T})^2)}{2 \cdot d_{S,T} \cdot R}$$

com

$$r = 24,78 \cdot 10^7 km$$
$$R = 10,81 \cdot 10^7 km$$
$$ST = 14,95 \cdot 10^7 km$$

Temos:

$$cos(\theta) = -0,846762721250916561217007663534 63$$

$$arccos(-0,8467627212509165612170076635346 3) = 2,58066638rad = 147,86129162 \text{ graus.}$$

A partir da mecânica celeste no movimento circular, sabemos que, se a função da posição de Vênus em relação ao Sol é decrescente dado que 147º é próximo de 180º e o movimento é anti-horário dizemos que a distância r está diminuindo, então adotamos

$$\cos 147,86129162 = \cos 212,13880834$$

Vênus precisa percorrer 125,48639721 graus para alcançar a posição $\theta = 337.62520551$ graus, onde temos o brilho máximo em função de θ.

Fazendo uma regra de 3 semelhante ao exercício 5 temos que faltam 203.5888888888889 dias, aproximadamente 204 dias, o que equivale ao dia 10 de dezembro.

7 Anexos

Anexo I - Jupyter-Notebook contendo as funções utilizadas para a criação do gráfico das questões.

In [58]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
from matplotlib import pyplot as plt
import plotly.express as px
```

4) Funcão r(θ)

Criar um pandas DataFrame para ser preenchido com os valores para resolução das equações.

In [108…
```
luminosidade = pd.DataFrame({'cos_theta': [], 'r_theta': []})
```

In [ ]:
```
```

A função abaixo está demonstrada no exercício 4 do trabalho.

In [109…
```
def get_r_theta(cos_theta):
    # Os valores de R (distância de Sol a Vênus) e dST (distância de Sol a Terra)
    R = 10.81 * 10**7
    dST = 14.95 * 10**7

    resultado = np.sqrt(R**2 + dST**2 - 2 * dST * R * cos_theta)

    return resultado
```

Preenchendo os valores de Cos(θ), que irá variar de -1 a 1.

In [110…
```
luminosidade['cos_theta'] = np.arange(-1, 1, 0.01)
```

In [111…
```
luminosidade.head()
```

Out[111…

	cos_theta	r_theta
0	-1.00	NaN
1	-0.99	NaN
2	-0.98	NaN
3	-0.97	NaN
4	-0.96	NaN

Aplicando a função a cada valor de Cos(θ) e salvando o resultado em r_theta.

In [112…
```
luminosidade['r_theta'] = luminosidade['cos_theta'].apply(get_r_theta)
```

In [121…
```
luminosidade.head()
```

Out[121…

	cos_theta	r_theta	r_k1
0	-1.00	2.576000e+08	1.506983e-17
1	-0.99	2.569719e+08	1.511805e-17
2	-0.98	2.563422e+08	1.516666e-17
3	-0.97	2.557110e+08	1.521567e-17
4	-0.96	2.550782e+08	1.526509e-17

Exibindo o gráfico da função:

In [122...
```
# fig = px.line(luminosidade, x="cos_theta", y="r_theta")
# fig.show()
```

Função para cálculo de r:

In [115...
```
def get_r(r):
    K = 1
    # Os valores de R (distância de Sol a Vênus) e dST (distância de Sol a Terra)
    R = 10.81 * 10**7
    dST = 14.95 * 10**7

    resultado = (K/(4 * R)) * (1/r**3) * (R**2 - dST**2 + r**2 + 2 * R * r)

    return resultado
```

O resultado é salvo na coluna 'r_k1'

In [116...
```
luminosidade['r_k1'] = luminosidade['r_theta'].apply(get_r)
```

In [117...
```
luminosidade.head()
```

Out[117...

	cos_theta	r_theta	r_k1
0	-1.00	2.576000e+08	1.506983e-17
1	-0.99	2.569719e+08	1.511805e-17
2	-0.98	2.563422e+08	1.516666e-17
3	-0.97	2.557110e+08	1.521567e-17
4	-0.96	2.550782e+08	1.526509e-17

In [123...
```
# fig = px.line(luminosidade, x="r_theta", y="r_k1", title='K=1')
# fig.show()
```

O brilho máximo da função se dará quando r_theta for igual a 6.4077.

In [120...
```
luminosidade['r_k1'].max()
```

Out[120... 6.407745139522710-17

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

Referências.

1 - The Maximum Brightness of Venus - Wildfogel, Dennis, Mathematics Magazine, Vol. 57, No. 3. (May, 1984), pp. 158-165.
2 - https://theskylive.com/venus-info
3 - Material do Professor Nelson.