4.-

$$2\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

para demostrar la IGUALDAD podemos UTILIZAR LA EXPRESIÓN DE EULER PARA EL SENO Y COSENO

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad y \quad \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

ENTONCES:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \left(\frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2i}\right)\cdot\left(\frac{e^{j\beta} + e^{-j\beta}}{2}\right)$$

MULTIPLICANDO

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{j(\alpha+\beta)} - e^{j(\alpha-\beta)} - e^{-j(\alpha-\beta)} + e^{-j(\alpha-\beta)}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\left(\underbrace{e^{j(\alpha+\beta)} + e^{-j(\alpha+\beta)}}_{2\cos(\alpha+\beta)}\right) - \left(\underbrace{e^{j(\alpha-\beta)} + e^{-j(\alpha-\beta)}}_{2\cos(\alpha-\beta)}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[2\cos(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha-\beta)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$$

multiplicamos ambos lados por 2:

$$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

para la segunda igualdad podemos usar la siguiente identidad trigonometrica: $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \dfrac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$

ENTONCES: $\alpha = \omega \cdot t \;\wedge\; \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{\omega \cdot t}{2}$

$$\sin(\omega t)\sin\left(\tfrac{1}{2}\omega t\right) = \cos\left(\omega t - \tfrac{1}{2}\omega t\right) - \cos\left(\omega t + \tfrac{1}{2}\omega t\right)$$

$$\sin(\omega t)\sin\left(\tfrac{1}{2}\omega t\right) = \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{3}{2}\omega t\right)$$

$$\sin(\theta) = e^{j\theta} - e^{-j\theta}$$

ENTONCES:

$$\boxed{2\sin(\omega t)\sin\left(\tfrac{1}{2}\omega t\right)} = \frac{1}{j^2}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\cdot\left(e^{j\frac{1}{2}\omega t} - e^{-j\frac{1}{2}\omega t}\right)$$

$j^2 \to (-1)$

si multiplicamos y agrupamos terminos

$$-\left(e^{j\frac{3}{2}\omega t} - e^{-j\frac{3}{2}\omega t}\right) + \left(-e^{-j\frac{\omega}{2}t} + e^{+j\frac{\omega}{2}t}\right)$$

$$= \boxed{\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{3}{2}\omega t\right)}$$