Códigos perfeitos em Reticulados Ambientes

Lucas Eduardo Nogueira Gonçalves, lucasedng@gmail.com

São José dos Campos - SP, Brasil

1 Resultados

Teorema 1. *Seja $r > 0$ um número natural de modo que $r \equiv 0 \pmod 2$. Temos que o reticulado Λ', com base $\beta' = \{(0, 2(r+1)), (r+1, r+1)\}$ é um r-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1.*

Exemplo 1. Tomemos $r = 2$. Pelo Teorema 1, temos que o reticulado Λ_1, com base $\beta_1 = \{(0, 6), (3, 3)\}$ é um 2-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1.

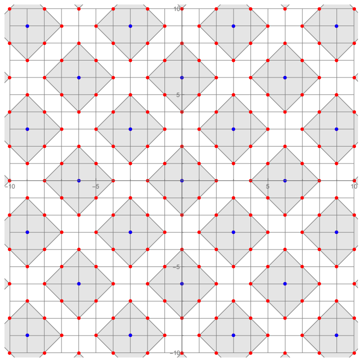

Figura 1: Reticulado Λ_1 em D_2 na métrica ℓ_1.

Observação 1. *O reticulado Λ_1 também é um r-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_2.*

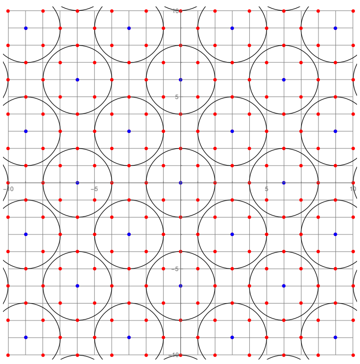

Figura 2: Reticulado Λ_1 em D_2 na métrica ℓ_2.

Exemplo 2. Tomemos agora $r = 4$. Pelo Teorema , temos que o reticulado Λ_2, com base $\beta_2 = \{(0, 10), (5, 5)\}$ é um 4-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1, como pode ser visto na Figura. Além disso, temos que Λ_2 também é um 4-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_2.

Notemos que, o reticulado simétrico de Λ', obtido pela transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, x)$, é igual a Λ'. Isto é, $T(\Lambda') = \Lambda'$. Isso se da pelo fato de que $\beta'' = \{(2(r+1), 0), (r+1, r+1)\}$ é uma base para $T(\Lambda')$. Como $(2(r+1), 0) = 2(r+1, r+1) - (0, 2(r+1))$, isto é, pode ser escrito como combinação linear inteira dos elementos de β', temos que os dois reticulados coincidem, já que $(r+1, r+1)$ pertence as duas bases.

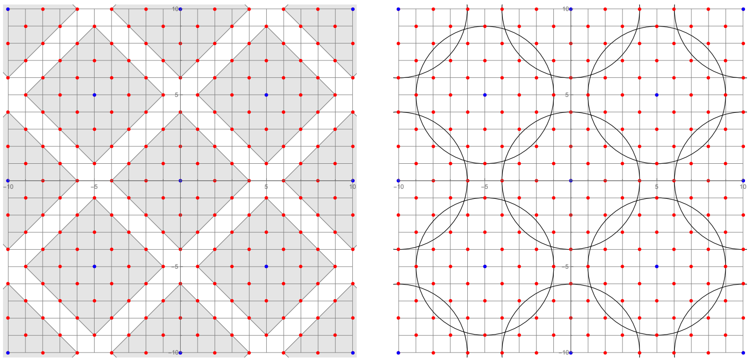

Figura 3: Reticulado Λ_1 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

Em D_2, consideremos os reticulados Λ_3 e Λ_4 com bases $\beta_3 = \{(5,1),(2,4)\}$ e $\beta_4 = \{(9,1),(4,6)\}$. Note que as Figuras e nos mostram que Λ_3 e Λ_4 são um 2-código linear perfeito e um 4-código linear perfeito respectivamente em D_2, tanto na métrica ℓ_1, quanto na métrica ℓ_2.

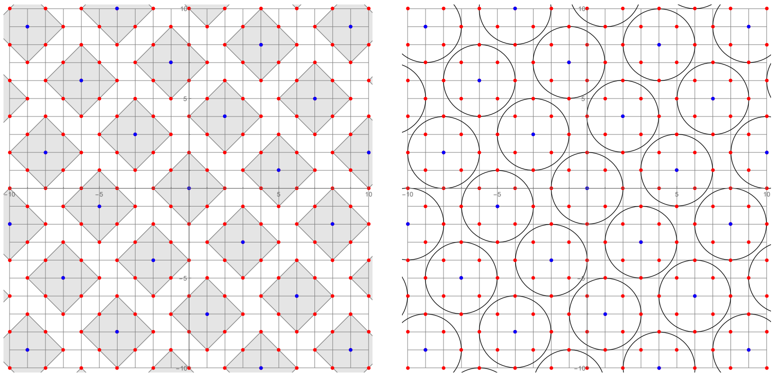

Figura 4: Reticulado Λ_3 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

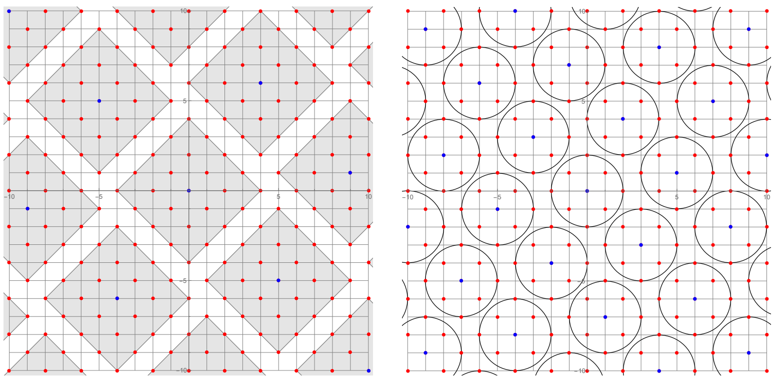

Figura 5: Reticulado Λ_4 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

Teorema 2. *Seja $r > 0$ um número natural de modo que $r \equiv 0 \pmod 2$. Temos que o reticulado Λ'', com base $\beta'' = \{(2r+1,1),(r,r+2)\}$ é um r-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1.*

Exemplo 3. Tomemos $r = 6$. Pelo Teorema 2, temos que o reticulado Λ_5, com base $\beta_1 = \{(13,1),(6,8)\}$ é um 6-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1.

Observação 2. *Ao contrário do que aconteceu com $r = 2$ e $r = 4$, temos que Λ_5 não é um 6-código linear perfeito em D_2. Uma vez que ao centrarmos bolas nos pontos de Λ_2, podemos ver que suas intersecções não são vazias em D_2, como segue na Figura 6.*

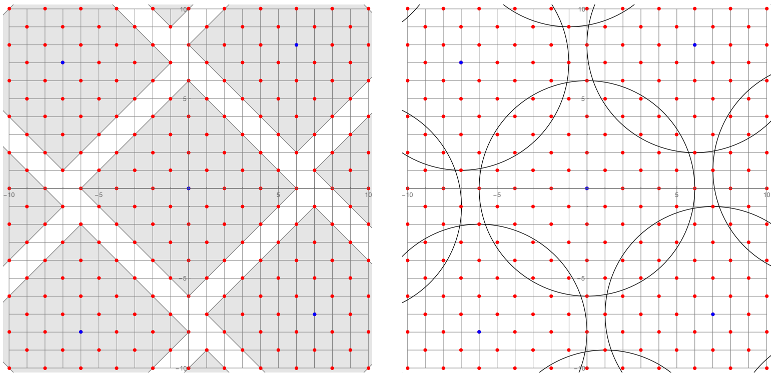

Figura 6: Reticulado Λ_5 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

De modo análogo ao o que ocorreu com o reticulado Λ', temos que o simétrico do reticulado Λ'' também é um r-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1. Isto é $T(\Lambda'')$ um r-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1, como segue na Figura 7, tendo como exemplo o reticulado simétrico de Λ_3.

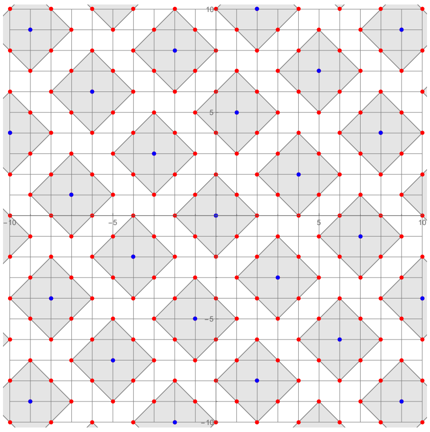

Figura 7: Reticulado $T(\Lambda_3)$ em D_2 na métrica ℓ_1.

Note que tanto no Teorema 1, quanto no Teorema 2, temos que a distância entre os elementos da base de todos esses códigos são é dado por $2(r+1)$, mais ainda, a diferença entre cada coordenada é $r+1$. Mas isso não implica que todo reticulado que satisfaça essa propriedade é um r-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1. Tomemos Λ_6 o reticulado que possui a base $\beta_6 = \{(6,4),(3,7)\}$. Note que a distância entre $(6,3)$ e $(3,7)$ é dada por $2(2+1)$ e cada coordenada difere $(2+1)$. Porém pela Figura 8 é fácil perceber que Λ_6 não é um $r-$código perfeito linear em D_2 na métrica ℓ_1.

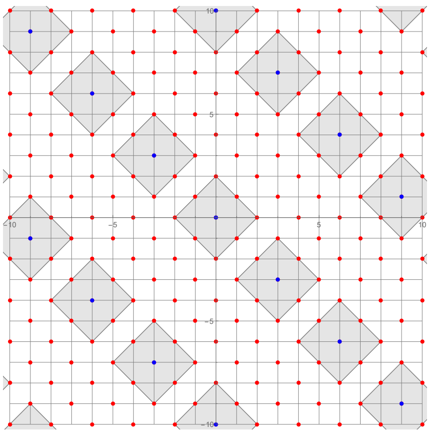

Figura 8: Reticulado Λ_6 em D_2 na métrica ℓ_1.

Pergunta: Sabemos que isometrias em reticulados são dadas por composição de operadores ortogonais e translações. Além disso, sabemos também que se dois reticulados Λ' e Λ'' são isométricos, então possuem a mesma densidade de empacotamento. Se Λ' e Λ'' são congruentes, isto é, equivalentes com fator de dilatação $\lambda = 1$, e Λ' é um r-código perfeito linear em um ambiente Λ_a, temos necessariamente que Λ'' é um r-código perfeito linear em Λ_a?

Teorema 3. ***grasi-tese:*** *As isometrias $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com a métrica da soma que fixam a origem são dadas por permutações de coordenadas compostas com trocas de sinais em algumas entradas e o grupo de isometrias é isomorfo a $\mathbb{Z}^n \rtimes S_n$, onde S_n é o grupo de permutações.*

Observação 3. *Com o resultado do Teorema anterior, podemos afirmar que em $\mathbb{R}^2$ as possíveis isometrias ϕ, que fixam a origem, são dadas por:*

$$\begin{array}{llll} \phi_1(x,y) = (x,y) & \phi_2(x,y) = (-x,-y) & \phi_3(x,y) = (-x,y) & \phi_4(x,y) = (x,-y) \\ \phi_5(x,y) = (y,x) & \phi_6(x,y) = (-y,x) & \phi_7(x,y) = (-y,x) & \phi_8(x,y) = (y,-x) \end{array}$$