

# Códigos perfeitos em Reticulados Ambientes

Lucas Eduardo Nogueira Gonçalves, lucasedng@gmail.com

São José dos Campos - SP, Brasil

## 1 Resultados

**Teorema 1.** *Seja  $r > 0$  um número natural de modo que  $r \equiv 0 \pmod{2}$ . Temos que o reticulado  $\Lambda'$ , com base  $\beta' = \{(0, 2(r+1)), (r+1, r+1)\}$  é um  $r$ -código linear perfeito em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ .*

**Exemplo 1.** Tomemos  $r = 2$ . Pelo Teorema 1, temos que o reticulado  $\Lambda_1$ , com base  $\beta_1 = \{(0, 6), (3, 3)\}$  é um 2-código linear perfeito em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ .

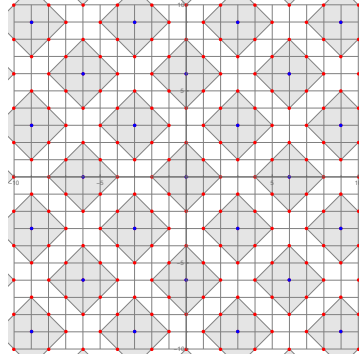


Figura 1: Reticulado  $\Lambda_1$  em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ .

**Observação 1.** *O reticulado  $\Lambda_1$  também é um  $r$ -código linear perfeito em  $D_2$  na métrica  $\ell_2$ .*

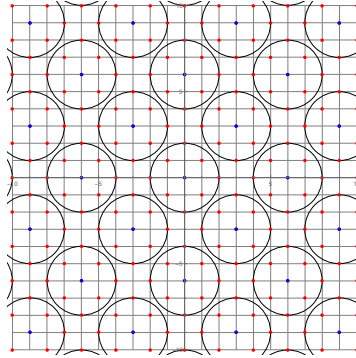


Figura 2: Reticulado  $\Lambda_1$  em  $D_2$  na métrica  $\ell_2$ .

**Exemplo 2.** Tomemos agora  $r = 4$ . Pelo Teorema , temos que o reticulado  $\Lambda_2$ , com base  $\beta_2 = \{(0, 10), (5, 5)\}$  é um 4-código linear perfeito em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ , como pode ser visto na Figura. Além disso, temos que  $\Lambda_2$  também é um 4-código linear perfeito em  $D_2$  na métrica  $\ell_2$ .

Notemos que, o reticulado simétrico de  $\Lambda'$ , obtido pela transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(x, y) = (y, x)$ , é igual a  $\Lambda'$ . Isto é,  $T(\Lambda') = \Lambda'$ . Isso se da pelo fato de que  $\beta'' = \{(2(r+1), 0), (r+1, r+1)\}$  é uma base para  $T(\Lambda')$ . Como  $(2(r+1), 0) = 2(r+1, r+1) - (0, 2(r+1))$ , isto é, pode ser escrito como combinação linear inteira dos elementos de  $\beta'$ , temos que os dois reticulados coincidem, já que  $(r+1, r+1)$  pertence as duas bases.

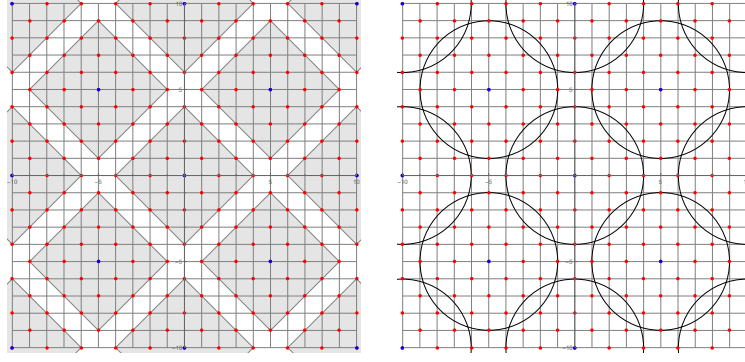


Figura 3: Reticulado  $\Lambda_1$  em  $D_2$  nas métricas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  respectivamente.

Em  $D_2$ , consideremos os reticulados  $\Lambda_3$  e  $\Lambda_4$  com bases  $\beta_3 = \{(5, 1), (2, 4)\}$  e  $\beta_4 = \{(9, 1), (4, 6)\}$ . Note que as Figuras e nos mostram que  $\Lambda_3$  e  $\Lambda_4$  são um 2-código linear perfeito e um 4-código linear perfeito respectivamente em  $D_2$ , tanto na métrica  $\ell_1$ , quanto na métrica  $\ell_2$ .

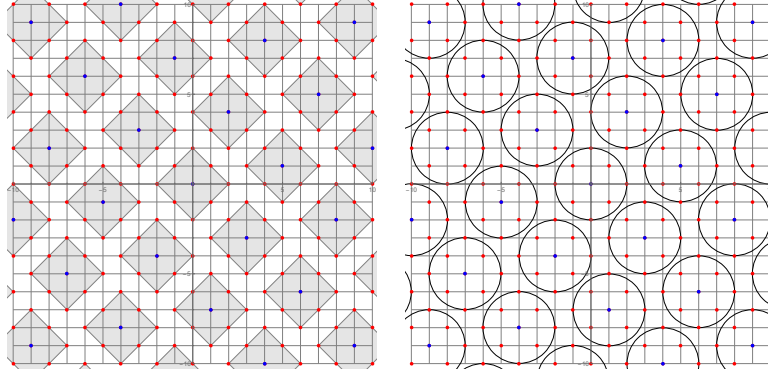


Figura 4: Reticulado  $\Lambda_3$  em  $D_2$  nas métricas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  respectivamente.

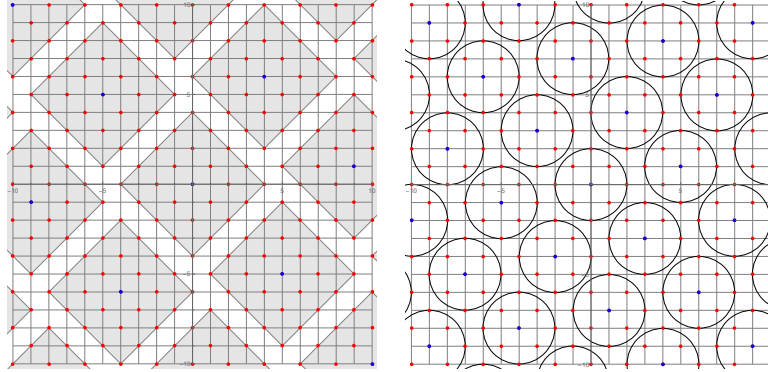


Figura 5: Reticulado  $\Lambda_4$  em  $D_2$  nas métricas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  respectivamente.

**Teorema 2.** *Seja  $r > 0$  um número natural de modo que  $r \equiv 0 \pmod{2}$ . Temos que o reticulado  $\Lambda''$ , com base  $\beta'' = \{(2r + 1, 1), (r, r + 2)\}$  é um  $r$ -código linear perfeito em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ .*

**Exemplo 3.** Tomemos  $r = 6$ . Pelo Teorema 2, temos que o reticulado  $\Lambda_5$ , com base  $\beta_1 = \{(13, 1), (6, 8)\}$  é um 6-código linear perfeito em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ .

**Observação 2.** *Ao contrário do que aconteceu com  $r = 2$  e  $r = 4$ , temos que  $\Lambda_5$  não é um 6-código linear perfeito em  $D_2$ . Uma vez que ao centrarmos bolas nos pontos de  $\Lambda_2$ , podemos ver que suas intersecções não são vazias em  $D_2$ , como segue na Figura 6.*

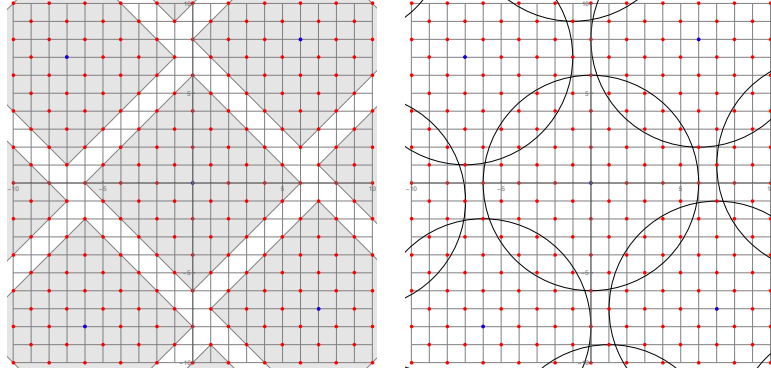


Figura 6: Reticulado  $\Lambda_5$  em  $D_2$  nas métricas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  respectivamente.

De modo análogo ao o que ocorreu com o reticulado  $\Lambda'$ , temos que o simétrico do reticulado  $\Lambda''$  também é um  $r$ -código linear perfeito em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ . Isto é  $T(\Lambda'')$  um  $r$ -código linear perfeito em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ , como segue na Figura 7, tendo como exemplo o reticulado simétrico de  $\Lambda_3$ .

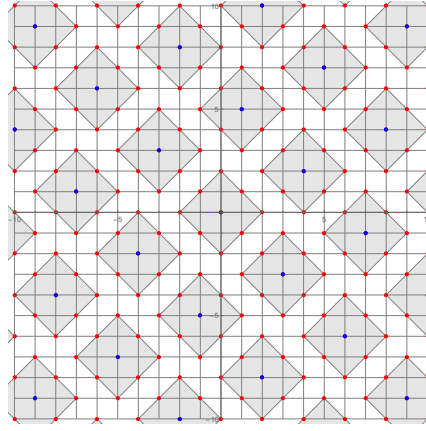


Figura 7: Reticulado  $T(\Lambda_3)$  em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ .

Note que tanto no Teorema 1, quanto no Teorema 2, temos que a distância entre os elementos da base de todos esses códigos são é dado por  $2(r+1)$ , mais ainda, a diferença entre cada coordenada é  $r+1$ . Mas isso não implica que todo reticulado que satisfaça essa propriedade é um  $r$ -código linear perfeito em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ . Tomemos  $\Lambda_6$  o reticulado que possui a base  $\beta_6 = \{(6,4), (3,7)\}$ . Note que a distância entre  $(6,3)$  e  $(3,7)$  é dada por  $2(2+1)$  e cada coordenada difere  $(2+1)$ . Porém pela Figura 8 é fácil perceber que  $\Lambda_6$  não é um  $r$ -código perfeito linear em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ .

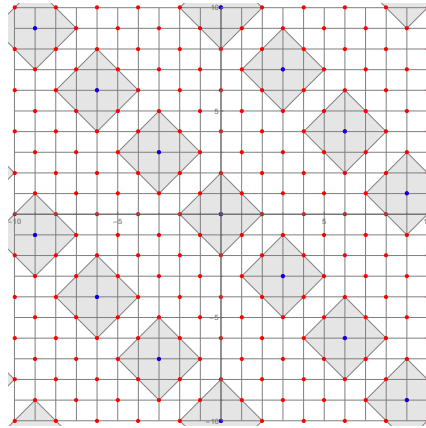


Figura 8: Reticulado  $\Lambda_6$  em  $D_2$  na métrica  $\ell_1$ .

**Pergunta:** Sabemos que isometrias em reticulados são dadas por composição de operadores ortogonais e

translações. Além disso, sabemos também que se dois reticulados  $\Lambda'$  e  $\Lambda''$  são isométricos, então possuem a mesma densidade de empacotamento. Se  $\Lambda'$  e  $\Lambda''$  são congruentes, isto é, equivalentes com fator de dilatação  $\lambda = 1$ , e  $\Lambda'$  é um  $r$ -código perfeito linear em um ambiente  $\Lambda_a$ , temos necessariamente que  $\Lambda''$  é um  $r$ -código perfeito linear em  $\Lambda_a$ ?