Códigos perfeitos em Reticulados Ambientes

Lucas Eduardo Nogueira Gonçalves, lucasedng@gmail.com

São José dos Campos - SP, Brasil

1 Resultados

Teorema 1. *Seja* $r > 0$ *um número natural de modo que* $r \equiv 0 \pmod 2$*. Temos que o reticulado* Λ'*, com base* $\beta' = \{(0, 2(r+1)), (r+1, r+1)\}$ *é um* r*-código linear perfeito em* D_2 *na métrica* ℓ_1*.*

Exemplo 1. Tomemos $r = 2$. Pelo Teorema 1, temos que o reticulado Λ_1, com base $\beta_1 = \{(0, 6), (3, 3)\}$ é um 2-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1.

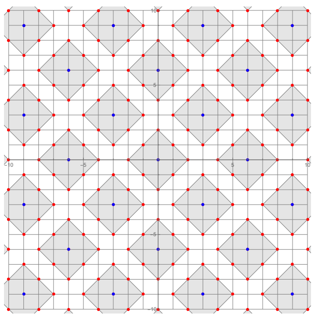

Figura 1: Reticulado Λ_1 em D_2 na métrica ℓ_1.

Observação 1. *O reticulado* Λ_1 *também é um* r*-código linear perfeito em* D_2 *na métrica* ℓ_2*.*

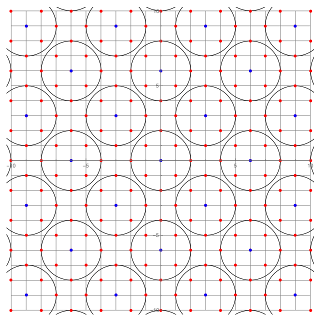

Figura 2: Reticulado Λ_1 em D_2 na métrica ℓ_2.

Exemplo 2. Tomemos agora $r = 4$. Pelo Teorema , temos que o reticulado Λ_2, com base $\beta_2 = \{(0, 10), (5, 5)\}$ é um 4-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1, como pode ser visto na Figura. Além disso, temos que Λ_2 também é um 4-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_2.

Observação 2. *Notemos que, o reticulado simétrico de* Λ'*, obtido pela transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y) = (y, x)$*, é igual a* Λ'*. Isto é,* $T(\Lambda') = \Lambda'$*. Isso se da pelo fato de que* $\beta'' = \{(2(r+1), 0), (r+1, r+1)\}$ *é uma base para* $T(\Lambda')$*. Como* $(2(r+1), 0) = 2(r+1, r+1) - (0, 2(r+1))$*, isto é, pode ser escrito como combinação linear inteira dos elementos de* β'*, temos que os dois reticulados coincidem, já que* $(r+1, r+1)$ *pertence as duas bases.*

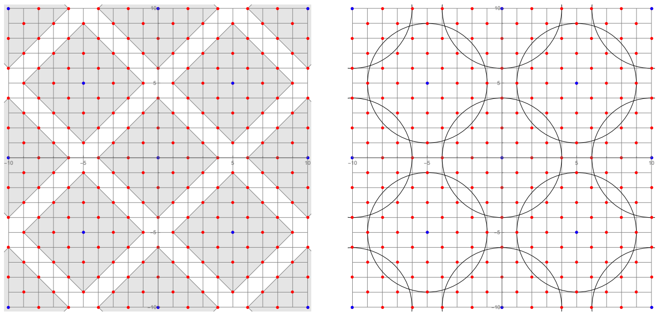

Figura 3: Reticulado Λ_1 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

Em D_2, consideremos os reticulados Λ_3 e Λ_4 com bases $\beta_3 = \{(5,1),(2,4)\}$ e $\beta_4 = \{(9,1),(4,6)\}$. Note que as Figuras e nos mostram que Λ_3 e Λ_4 são um 2-código linear perfeito e um 4-código linear perfeito respectivamente em D_2, tanto na métrica ℓ_1, quanto na métrica ℓ_2.

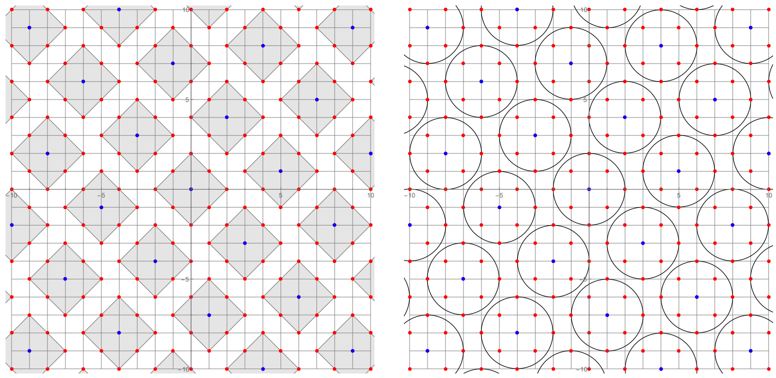

Figura 4: Reticulado Λ_3 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

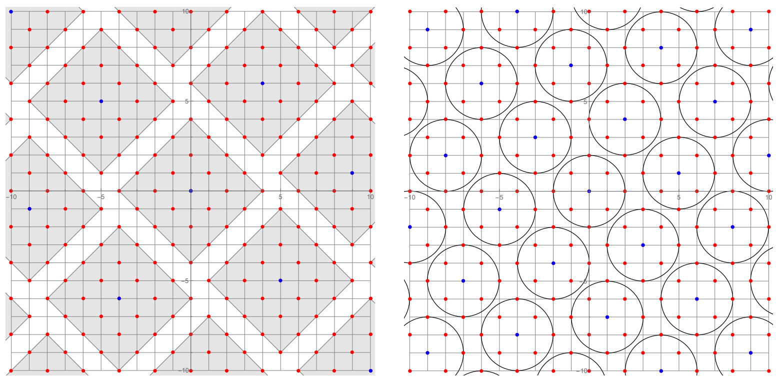

Figura 5: Reticulado Λ_4 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

Teorema 2. *Seja $r > 0$ um número natural de modo que $r \equiv 0 \pmod 2$. Temos que o reticulado Λ'', com base $\beta'' = \{(2r+1,1),(r,r+2)\}$ é um r-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1.*

Exemplo 3. Tomemos $r = 6$. Pelo Teorema 2, temos que o reticulado Λ_5, com base $\beta_1 = \{(13,1),(6,8)\}$ é um 6-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1.

Observação 3. *Ao contrário do que aconteceu com $r = 2$ e $r = 4$, temos que Λ_5 não é um 6-código linear perfeito em D_2. Uma vez que ao centrarmos bolas nos pontos de Λ_2, podemos ver que suas intersecções não são vazias em D_2, como segue na Figura 6.*

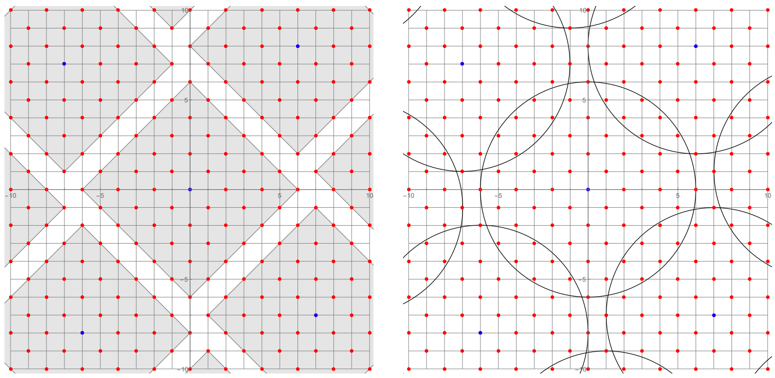

Figura 6: Reticulado Λ_5 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.