

Códigos perfeitos em Reticulados Ambientes

Lucas Eduardo Nogueira Gonçalves, lucasedng@gmail.com

São José dos Campos - SP, Brasil

1 Resultados

Teorema 1. *Seja $r > 0$ um número natural de modo que $r \equiv 0 \pmod{2}$. Temos que o reticulado Λ' , com base $\beta' = \{(0, 2(r+1)), (r+1, r+1)\}$ é um r -código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1 .*

Exemplo 1. Tomemos $r = 2$. Pelo Teorema 1, temos que o reticulado Λ_1 , com base $\beta_1 = \{(0, 6), (3, 3)\}$ é um 2-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1 .

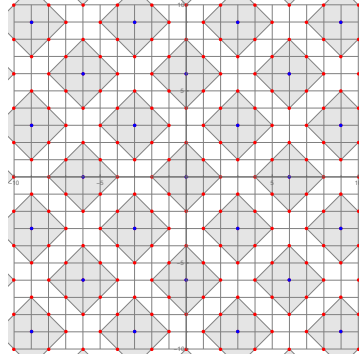


Figura 1: Reticulado Λ_1 em D_2 na métrica ℓ_1 .

Observação 1. *O reticulado Λ_1 também é um r -código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_2 .*

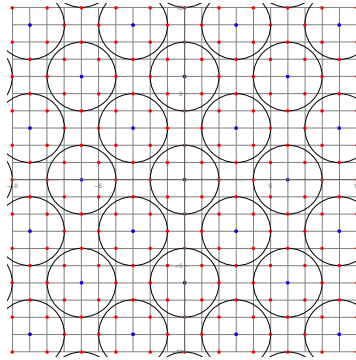


Figura 2: Reticulado Λ_1 em D_2 na métrica ℓ_2 .

Exemplo 2. Tomemos agora $r = 4$. Pelo Teorema , temos que o reticulado Λ_2 , com base $\beta_2 = \{(0, 10), (5, 5)\}$ é um 4-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1 , como pode ser visto na Figura. Além disso, temos que Λ_2 também é um 4-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_2 .

Notemos que, o reticulado simétrico de Λ' , obtido pela transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, x)$, é igual a Λ' . Isto é, $T(\Lambda') = \Lambda'$. Isso se da pelo fato de que $\beta'' = \{(2(r+1), 0), (r+1, r+1)\}$ é uma base para $T(\Lambda')$. Como $(2(r+1), 0) = 2(r+1, r+1) - (0, 2(r+1))$, isto é, pode ser escrito como combinação linear inteira dos elementos de β' , temos que os dois reticulados coincidem, já que $(r+1, r+1)$ pertence as duas bases.

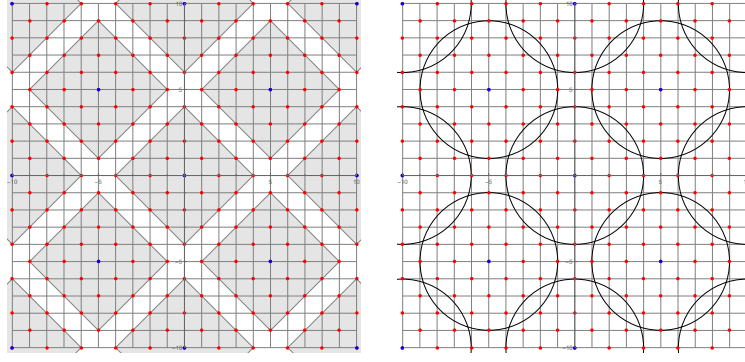


Figura 3: Reticulado Λ_1 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

Em D_2 , consideremos os reticulados Λ_3 e Λ_4 com bases $\beta_3 = \{(5, 1), (2, 4)\}$ e $\beta_4 = \{(9, 1), (4, 6)\}$. Note que as Figuras e nos mostram que Λ_3 e Λ_4 são um 2-código linear perfeito e um 4-código linear perfeito respectivamente em D_2 , tanto na métrica ℓ_1 , quanto na métrica ℓ_2 .

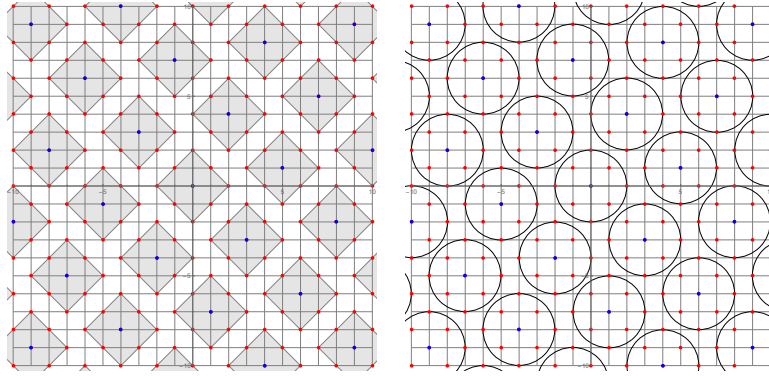


Figura 4: Reticulado Λ_3 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

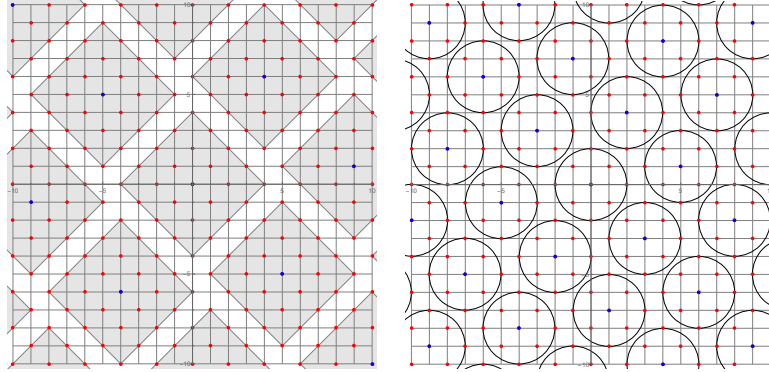


Figura 5: Reticulado Λ_4 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

Teorema 2. *Seja $r > 0$ um número natural de modo que $r \equiv 0 \pmod{2}$. Temos que o reticulado Λ'' , com base $\beta'' = \{(2r + 1, 1), (r, r + 2)\}$ é um r -código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1 .*

Exemplo 3. Tomemos $r = 6$. Pelo Teorema 2, temos que o reticulado Λ_5 , com base $\beta_1 = \{(13, 1), (6, 8)\}$ é um 6-código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1 .

Observação 2. *Ao contrário do que aconteceu com $r = 2$ e $r = 4$, temos que Λ_5 não é um 6-código linear perfeito em D_2 . Uma vez que ao centrarmos bolas nos pontos de Λ_2 , podemos ver que suas intersecções não são vazias em D_2 , como segue na Figura 6.*

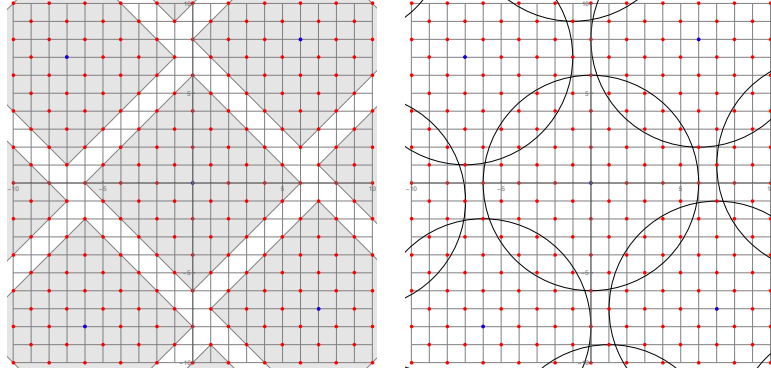


Figura 6: Reticulado Λ_5 em D_2 nas métricas ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

De modo análogo ao o que ocorreu com o reticulado Λ' , temos que o simétrico do reticulado Λ'' também é um r -código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1 . Isto é $T(\Lambda'')$ um r -código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1 , como segue na Figura 7, tendo como exemplo o reticulado simétrico de Λ_3 .

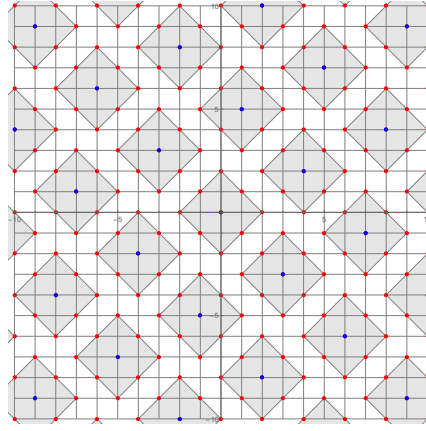


Figura 7: Reticulado $T(\Lambda_3)$ em D_2 na métrica ℓ_1 .

Note que tanto no Teorema 1, quanto no Teorema 2, temos que a distância entre os elementos da base de todos esses códigos são é dado por $2(r+1)$, mais ainda, a diferença entre cada coordenada é $r+1$. Mas isso não implica que todo reticulado que satisfaça essa propriedade é um r -código linear perfeito em D_2 na métrica ℓ_1 . Tomemos Λ_6 o reticulado que possui a base $\beta_6 = \{(6,4), (3,7)\}$. Note que a distância entre $(6,3)$ e $(3,7)$ é dada por $2(2+1)$ e cada coordenada difere $(2+1)$. Porém pela Figura 8 é fácil perceber que Λ_6 não é um r -código perfeito linear em D_2 na métrica ℓ_1 .

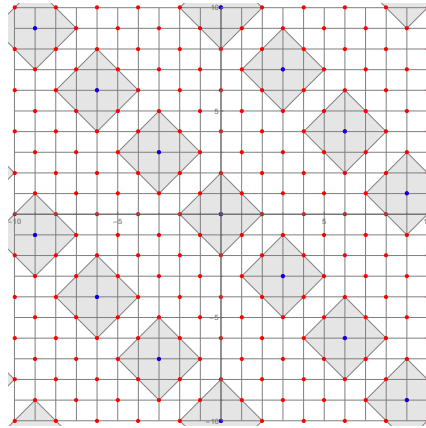


Figura 8: Reticulado Λ_6 em D_2 na métrica ℓ_1 .

Pergunta: Sabemos que isometrias em reticulados são dadas por composição de operadores ortogonais e

translações. Além disso, sabemos também que se dois reticulados Λ' e Λ'' são isométricos, então possuem a mesma densidade de empacotamento. Se Λ' e Λ'' são congruentes, isto é, equivalentes com fator de dilatação $\lambda = 1$, e Λ' é um r -código perfeito linear em um ambiente Λ_a , temos necessariamente que Λ'' é um r -código perfeito linear em Λ_a ?