
Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia



Relatório de Modelagem Computacional
Projeto 03 - Redes de Neurônios Acoplados

Redes Neurais

**Celso Gabriel Vieira Robeiro Lopes (123119),
Felipe Hikari Kawahama (112197), Lucas Eduardo
Nogueira Gonçalves (122055).**

Prof. Dr. Marcos Gonçalves Quiles

São José dos Campos
Maio, 2018

MODELO, MATERIAIS E MÉTODOS

1.1 INTRODUÇÃO A MATEMÁTICA DOS NEURÔNIOS

Neurônios por definição são células nervosas que desempenham o papel de conduzir impulsos nervosos, ou seja são responsáveis pelo processamento dos estímulos no corpo humano.

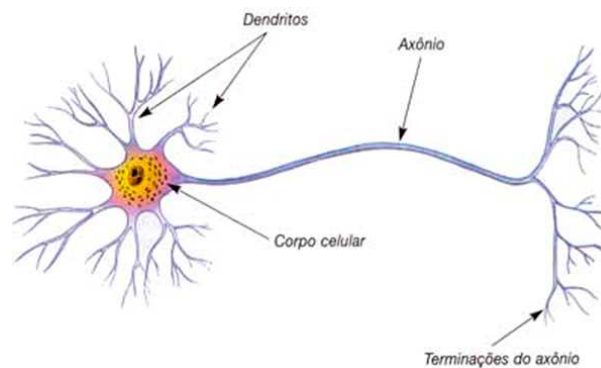


Figura 1: Representação esquemática da estrutura do neurônio.

A composição biológica de um neurônio é semelhante a qualquer outra célula nervosa do corpo, mas além das características em comum no caso da membrana, citoplasma e núcleo, apresenta algumas particularidades como por exemplo os Dendritos, Soma e Axônio responsáveis por receber, processar e conduzir a informação respectivamente.

As células neurais são células excitáveis, ou seja, respondem a estímulos elétricos, então seu potencial de repouso varia entre despolarizado (ocorreu excitação) e hiperpolarizado (onde não ocorreu excitação).

Com algumas informações básicas sobre as características e comportamento dos neurônios foi possível então criar alguns modelos matemáticos que tentam aproximar ao máximo a realidade. Existem diversos modelos, mas nenhum consegue ser preciso em relação a todas as variáveis existentes, então possuem modelos com complexidades diferentes. Nas próximas sessões iremos apresentar o modelo que será utilizado como base ao decorrer deste trabalho, o modelo de Van der Pol.

1.2 OBJETIVO

Temos como objetivo estudar e apresentar resultados referentes às redes neurais utilizando osciladores de relaxamento de Van der Pol, através de diferentes topologias de rede (grafos).

1.3 MODELO MATEMÁTICO - VAN DER POL

O modelo de Van der Pol consiste em um oscilador de relaxamento tratado, aplicado aos neurônios. Temos então dois estados: o de pulso e o de relaxamento, formalizando assim a ideia de laço de realimentação entre duas variáveis, uma excitatória (x) e uma variável inibitória (y), podemos então, a partir das equações diferenciais formalizar matematicamente os conceitos:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x - x^3 + 2 - y + I \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon \left(\alpha \left(1 + \tanh\left(\frac{x}{\beta}\right) - y_i \right) \right)\end{aligned}$$

Como já dito anteriormente, x e y representam variáveis excitatórias e inibitórias, enquanto que I a atividade do neurônio, ou seja, se ele está ativo ou inativo, enquanto que ε , α e β são parâmetros fixos para o nosso problema.

Podemos então generalizar as equações acima para uma rede de neurônios, onde cada neurônio tem influência direta sobre os neurônios que estão ligados a ele e indireta com os demais (já que é afetado pela influência da vizinhança), e representamos essa influência como sendo um fator de acoplamento:

$$S_i = \sum_{k \in N(i)} w_{ij} H(x_k - \theta)$$

Utilizamos então w_{ik} sendo a força do acoplamento, $N(i)$ como a vizinhança do neurônio i , H definida como $H(v) = 1$ ou $H(v) = 0$, e θ como limiar de corte.

Portanto, as equações que representam as variações de x e y do i -ésimo neurônio da rede são:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= 3x_i - x_i^3 + 2 - y_i + I + S_i \\ \frac{dy_i}{dt} &= \varepsilon \left(\alpha \left(1 + \tanh\left(\frac{x_i}{\beta}\right) - y_i \right) \right)\end{aligned}$$

1.4 MATERIAIS

O código para a simulação foi feito na linguagem C, no software Code::Blocks. Enquanto que para gerar os gráficos da próxima seção, foram utilizados os dados provenientes da simulação do código em C que foram impressos em um arquivo .txt para gerar os gráficos no software R.

SIMULAÇÕES EM DIFERENTES TOPOLOGIAS

Nas simulações, tomamos os parâmetros como sendo: $I = 0.2$ (ativo) ou -0.02 (inativo), $w_{ij} = 0.1 : 0.3$, $\theta = 0.5$, $\alpha = 6.0$, $\varepsilon = 0.02$, $\beta = 0.1$, a quantidade de neurônios da rede como sendo $N=500$. E o grau médio do grafo (utilizado para representar a rede) de cada tipo, como sendo 4, com exceção da Rede Livre de Escala, em que utilizamos o grau médio como sendo 2. Ou seja, cada neurônio se liga a, em média, 4 outros neurônios, por exemplo. Consideramos os seguintes modelos de redes complexas: Rede Regular, Aleatória, Livre de Escala. Na primeira simulação para cada rede, tomamos todos os neurônios do grafo como sendo ativos. Na segunda, selecionamos 67% dos neurônios como sendo ativos e o restante inativos (todos os neurônios com índices múltiplos de 3 ficaram inativos). Por fim, na terceira, selecionamos aleatoriamente 67% dos neurônios como sendo ativos e o restante inativos. Para gerarmos os gráficos a seguir, pegamos uma amostra de 15 neurônios da rede, selecionados aleatoriamente, para melhor visualizar o comportamento da rede.

2.1 REDE REGULAR

Nas redes regulares todos os nós apresentam o mesmo grau, ou seja cada neurônio se liga ao mesmo número de neurônios que os outros.

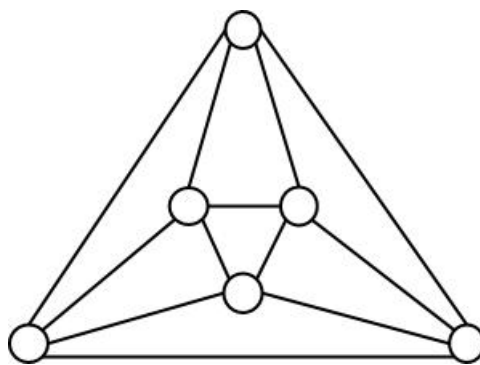


Figura 2: Exemplo de uma rede regular.

Fonte:

<http://www.ic.unicamp.br/~meidanis/courses/mo405/2002s2/atas/2002-11-06.html>

» SIMULAÇÃO 2.1.1

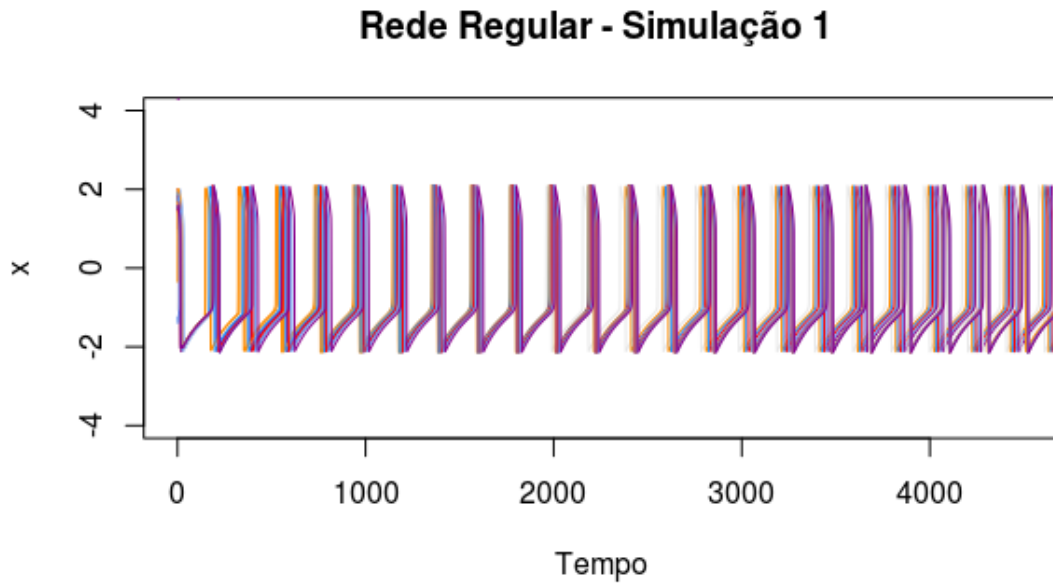


Figura 3.

Podemos notar que temos uma sincronização parcial no meio da simulação, mas ela não se mantém.

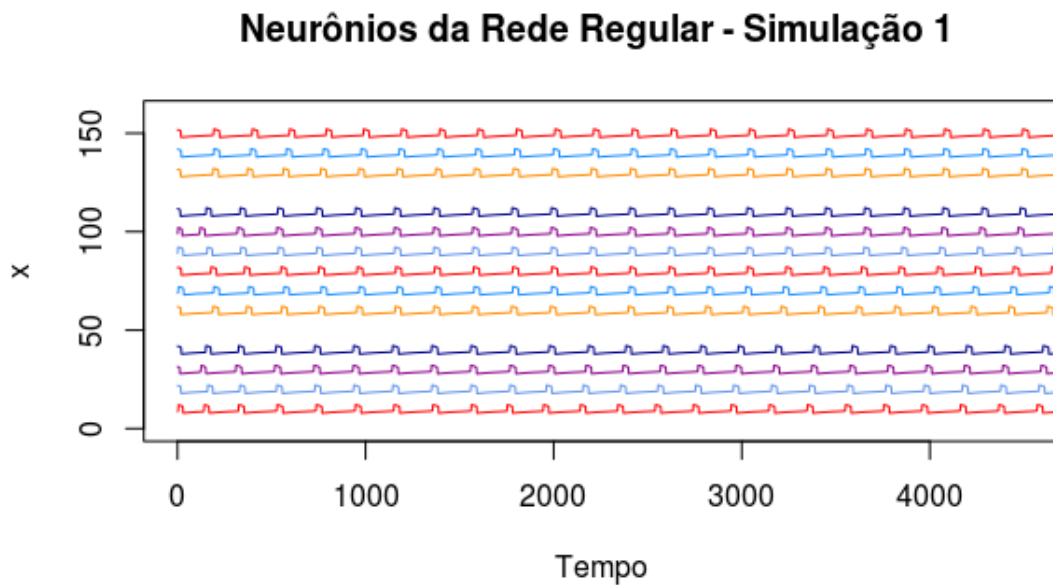


Figura 4.

Nesta figura, podemos notar bem isso, os períodos dos pulsos não são iguais para os neurônios distintos.

Assim, aumentamos o tempo de simulação e o parâmetro de acoplamento w_{ij} para 0.75 e os resultados obtidos na segunda versão dessa simulação foram os seguintes:

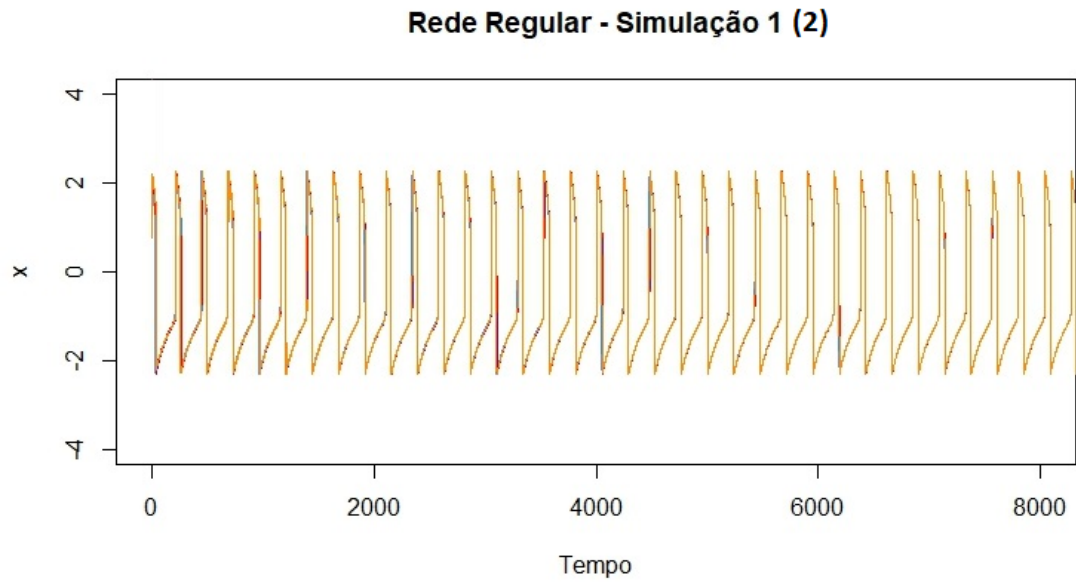


Figura 5.

Obtemos uma sincronização quase imediata e regular. Mal podemos notar curvas distintas no gráfico, o que caracteriza uma sincronia muito significativa dos neurônios.

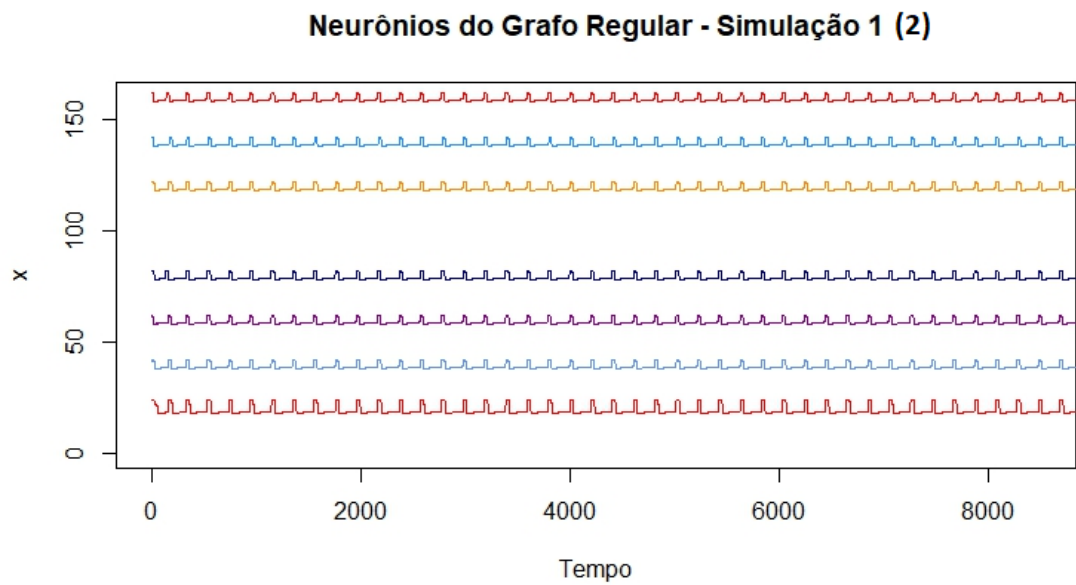


Figura 6.

» SIMULAÇÃO 2.1.2

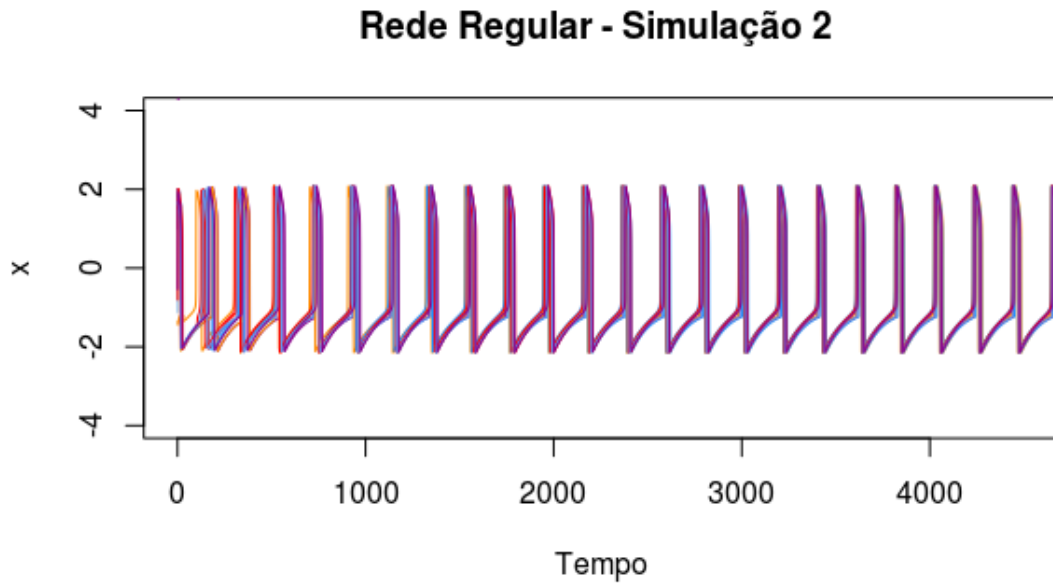


Figura 7.

Podemos notar que, embora os neurônios começando dessincronizados, a partir do instante de tempo $t=1000$, aproximadamente, temos uma maior sincronia, representada pelo "desaparecimento" de algumas cores (determinados neurônios), mas o que realmente ocorre é a sobreposição de cores no gráfico, ou seja, o comportamento dos neurônios estão bem semelhantes entre si, o que caracteriza a sincronização da rede. Contudo, ainda podemos ver uma distinção entre as curvas (azul, laranja) na parte inferior do gráfico, próximo ao fim da simulação.

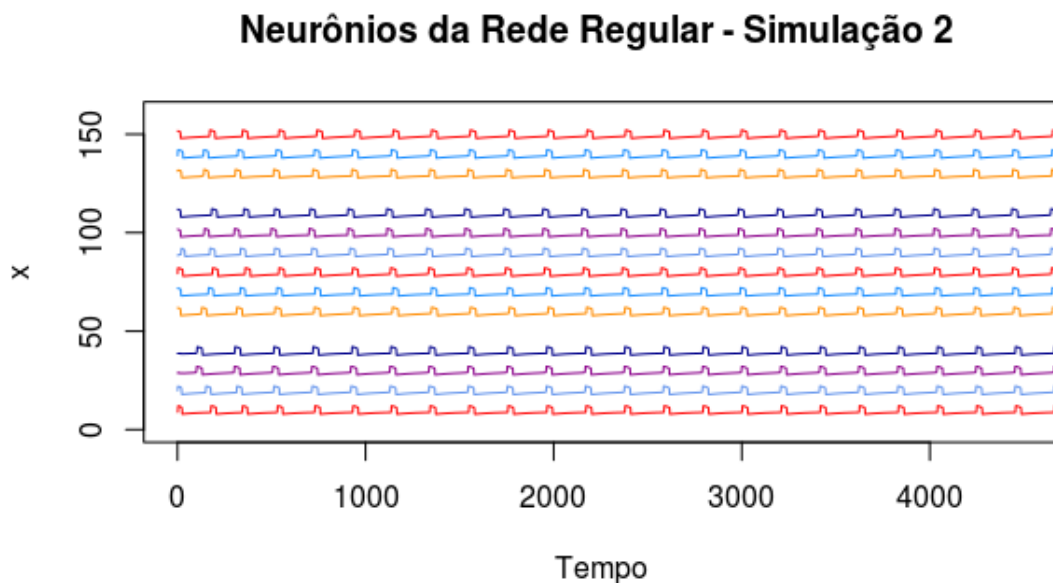


Figura 8.

O gráfico acima representa o comportamento de cada neurônio da amostra selecionada. Realizamos um deslocamento vertical de 10 unidades nos dados de cada um para não termos uma sobreposição e podermos visualizar melhor. O gráfico é coerente com o obtido na Figura 7, já que os pulsos, de fato, sincronizam após $t=1000$.

» SIMULAÇÃO 2.1.3

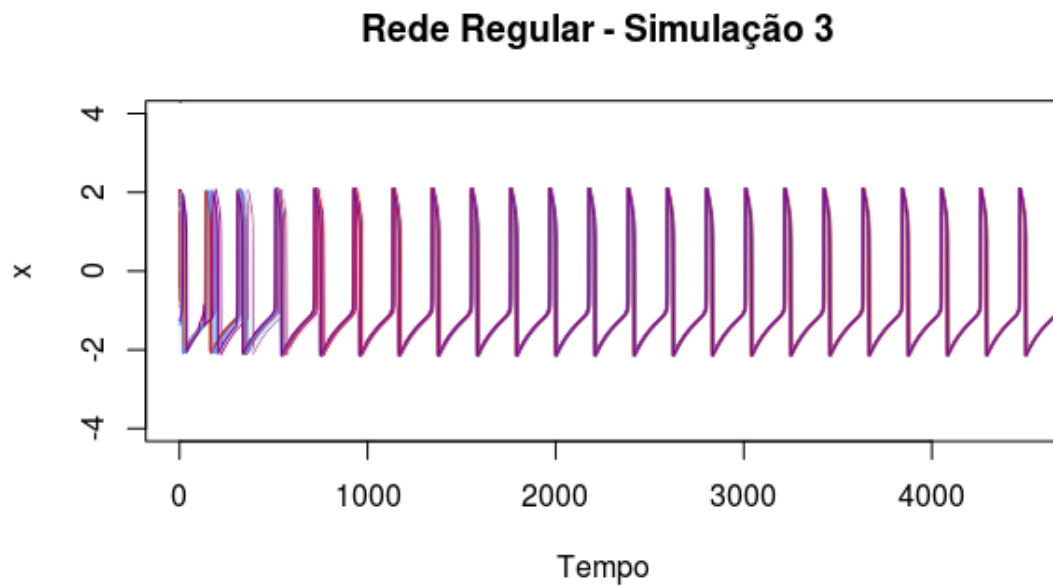


Figura 9.

Obtemos um resultado similar escolhendo aleatoriamente os 66% neurônios que vão ficar ativos. Assim, no final da simulação, mal vemos distinção entre as curvas. E o tempo de sincronização continua aproximadamente o mesmo. Podemos notar que a sincronização representada nesse gráfico foi mais notória que a da simulação anterior, mas não podemos concluir que a seleção aleatória dos neurônios ativos implica numa maior sincronização dos neurônios devido à margem de erro obtida nas inferências estatísticas ao analisarmos apenas uma amostra da população.

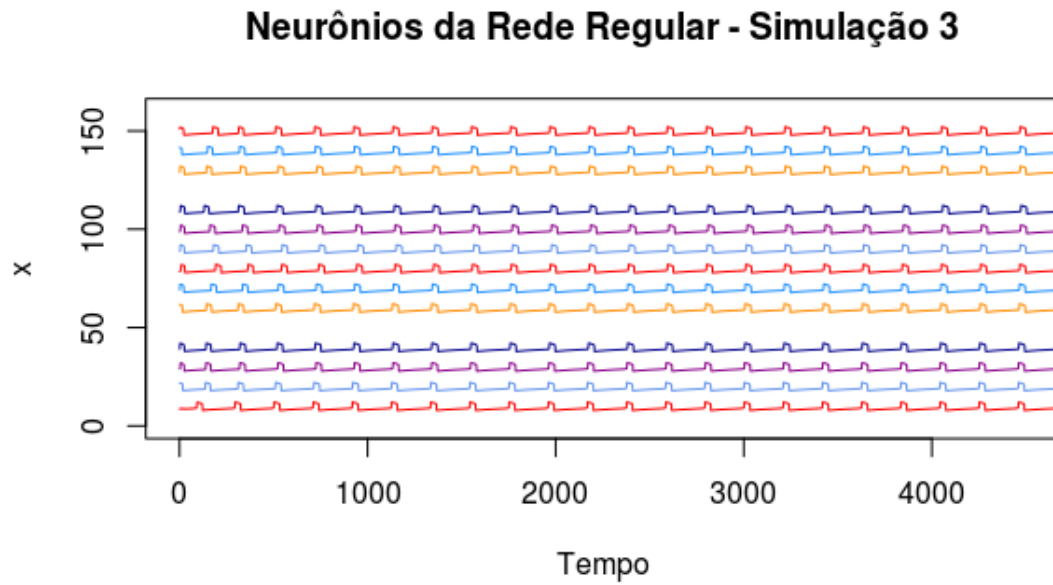


Figura 10.

2.2 REDE ALEATÓRIA

Nas redes aleatórias os nós são ligados aleatoriamente. Neste modelo, todos possuem a mesma probabilidade de receber novas ligações, ainda consideramos o grau médio do grafo como sendo 4.

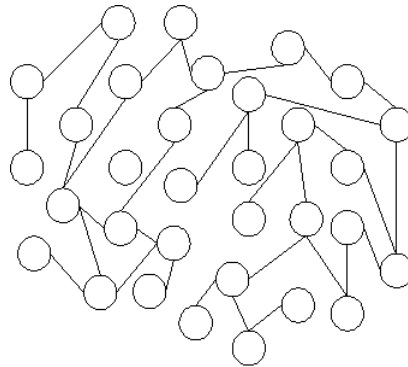


Figura 11: Exemplo de uma rede aleatória.

Fonte: http://chato.cl/papers/crawling_thesis/effective_web_crawling.pdf

» SIMULAÇÃO 2.2.1

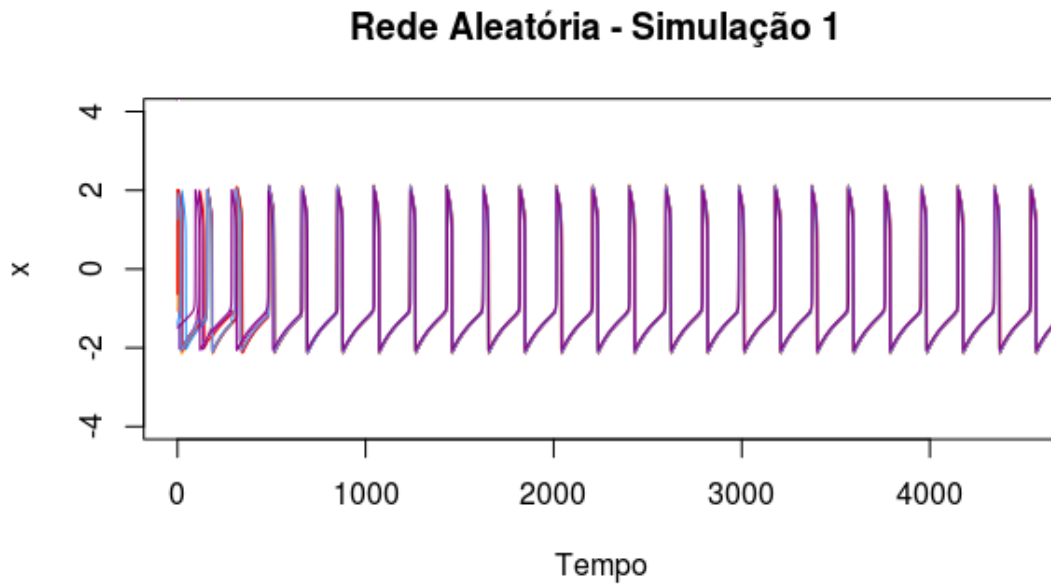


Figura 12.

Nesta simulação, com todos ativos, temos um comportamento de cada neurônio da amostra bem distinto no começo da simulação, mas rapidamente a rede entra em sincronia, até antes do $t=1000$ que observamos nas simulações anteriores utilizando redes regulares.

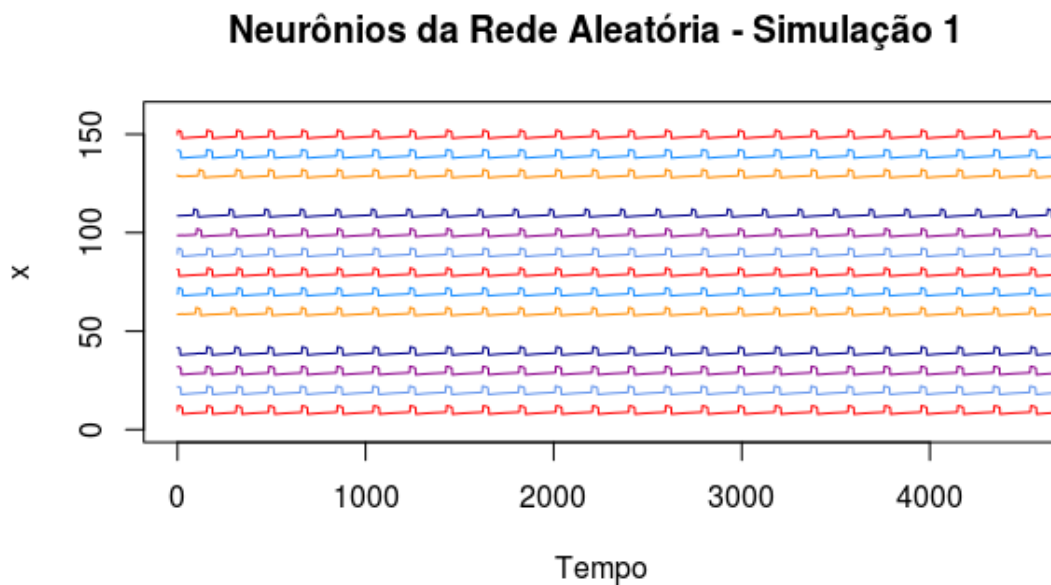


Figura 13.

Temos pulsos bem distribuídos e sincronizados em toda a rede, mas curiosamente no primeiro neurônio azul de cima para baixo representado, está dessincronizado do restante da rede. Aqui, escolhemos uma amostragem diferente da do gerado na Figura 11, então por isso que esse neurônio em específico não é visível na figura.

» SIMULAÇÃO 2.2.2

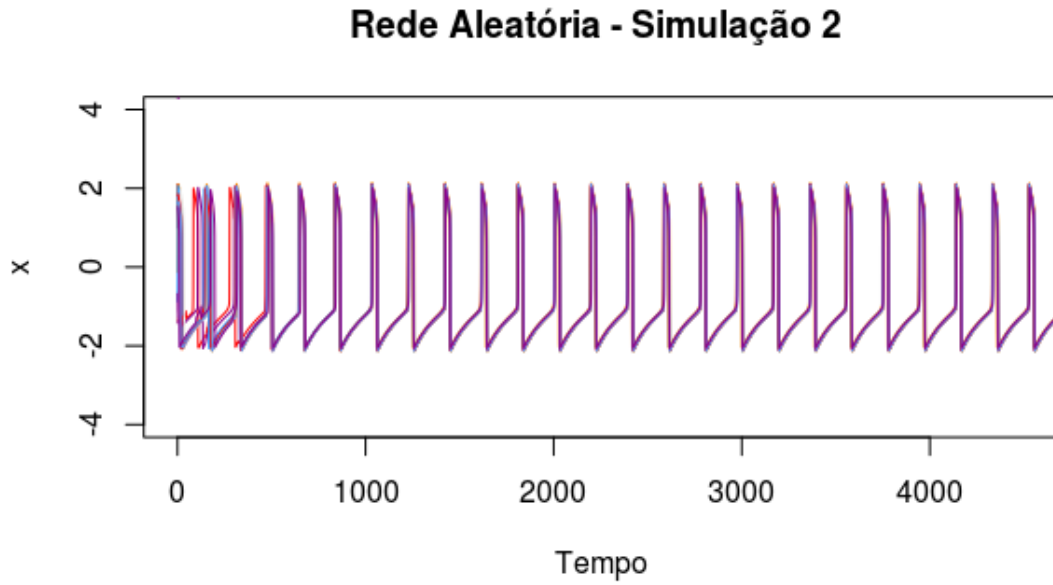


Figura 14.

Podemos notar uma sincronização na rede similar a da simulação anterior, com todos os neurônios ativos e o tempo para atingir esse estado também foi parecido.

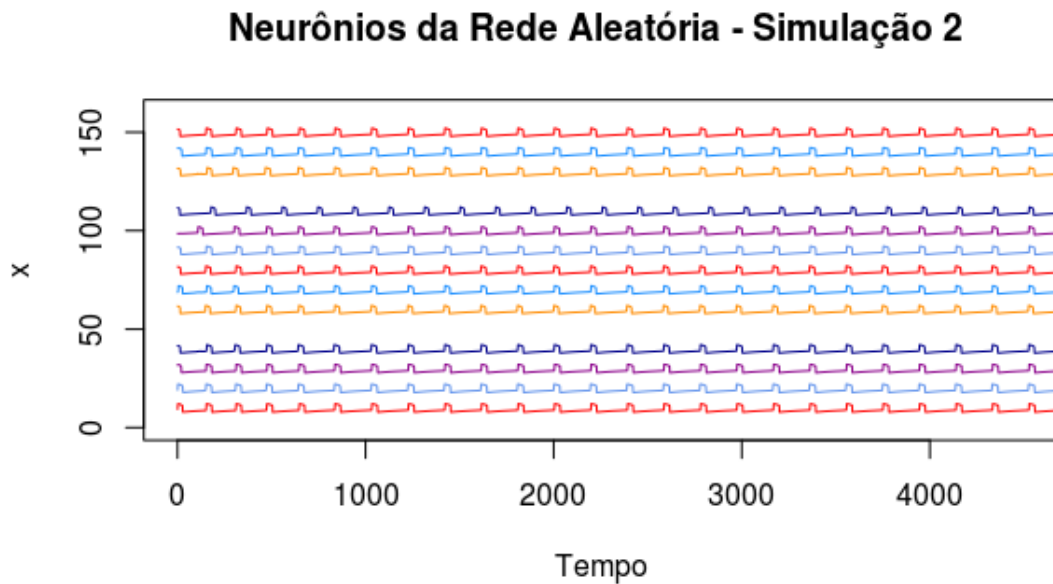


Figura 15.

Nessa imagem, podemos observar que o primeiro neurônio de cor azul, de cima para baixo, demora um pouco mais para sincronizar com os outros da rede, enquanto que a maioria entra em sincronia logo no início da simulação, este em específico de fato entra em sincronia apenas no instante $t=4000$, aproximadamente. A amostragem para essa figura, foi igual àquela que gerou o gráfico da Figura (13), por isso podemos notar uma

curva azul, que está muito pouco deslocada em relação a curva principal que representa os outros neurônios sincronizados.

» SIMULAÇÃO 2.2.3

Rede Aleatória - Simulação 3

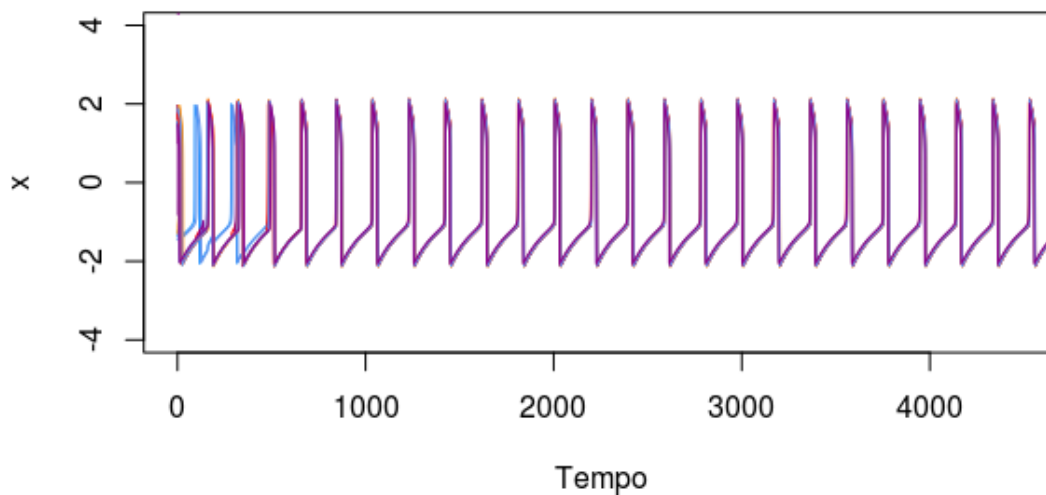


Figura 16.

Escolhendo aleatoriamente, obtemos resultados semelhantes aos obtidos nas simulações anteriores. O tempo para sincronização foi similar aos da simulação 1 e 2, contudo a amostra tomada para essa simulação, não difere tanto quanto aquela tomada na simulação 2, referente ao comportamento inicial da rede, aqui, mais neurônios começam sincronizados, onde apenas uma curva que está claramente dessincronizada da rede praticamente.

Neurônios da Rede Aleatória - Simulação 3

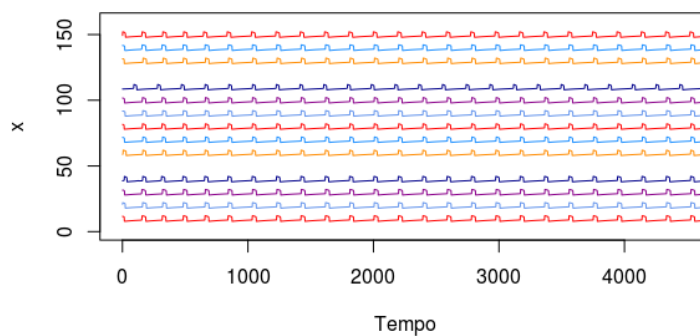


Figura 17.

Novamente, por mera coincidência, o primeiro neurônio azul, contando de cima para baixo, tem um comportamento diferente, não sincronizando com o restante da rede, mesmo nos últimos instantes da simulação.

2.3 REDE LIVRE DE ESCALA

Nas redes livres de escala, temos que em cada novo passo é criado um nó no qual têm origem em outras ligações, existindo como que uma dinâmica de imitação, como se alguns nós atraíssem outros. O modelo apresenta grau de conectividade muito baixo, porque apenas alguns nós se encontram com várias conexões, enquanto outros possuem poucas ligações. Aqui, consideramos que os novos vértices têm probabilidade maior de se ligarem aos vértices com maior número de arestas incidentes a ele.

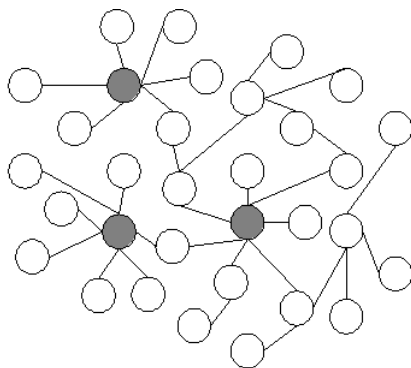


Figura 18: Exemplo de uma rede livre de escala.

Fonte: http://chato.cl/papers/crawling_thesis/effective_web_crawling.pdf

» SIMULAÇÃO 2.3.1

Rede Livre Escala - Simulação 1 (1)

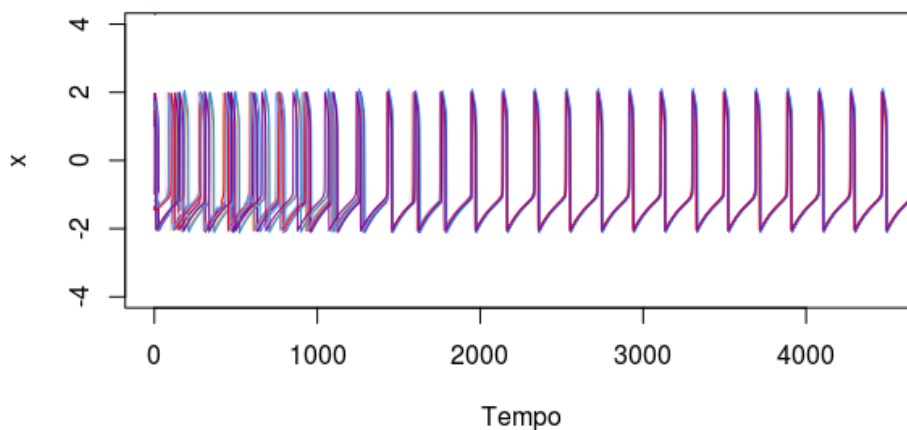


Figura 19.

Note que o tempo de sincronização nessa simulação, mesmo com todos ativos, foi maior do que nas redes geradas aleatórias e regulares. Isso se deve ao fato de que esse tipo de rede, possui um menor grau de conectividade (devido ao fato de que os novos vértices tem maior probabilidade de se ligarem àqueles que possuem maior número de arestas incidentes). Além disso, tomamos o grau médio do grafo, como sendo 2, o que nos dá um menor acoplamento e, portanto, um maior tempo para sincronização.

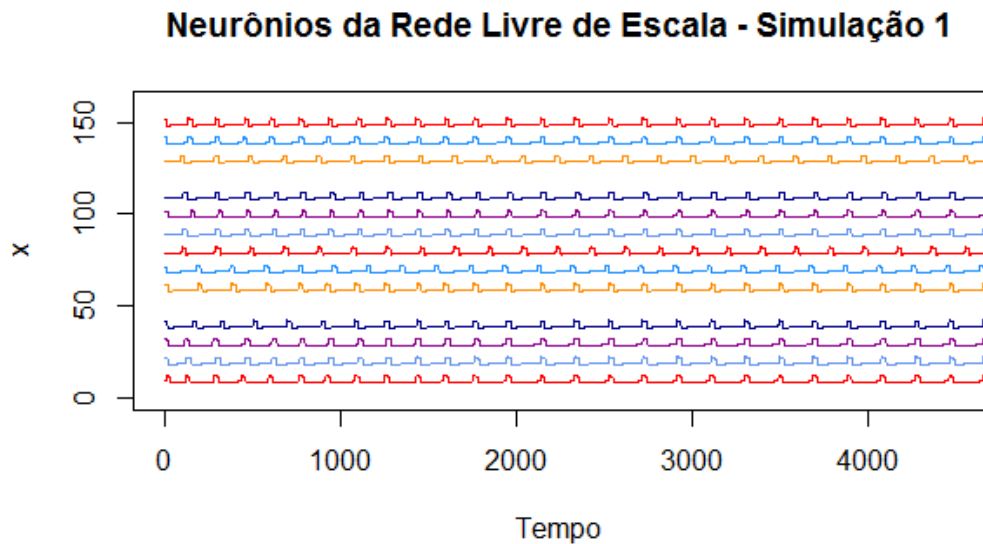


Figura 20.

Podemos notar que os pulsos não estão com o mesmo período, se comparado as simulações com os outros tipos de rede. O que é coerente com a explicação dada no parágrafo anterior.

» SIMULAÇÃO 2.3.2

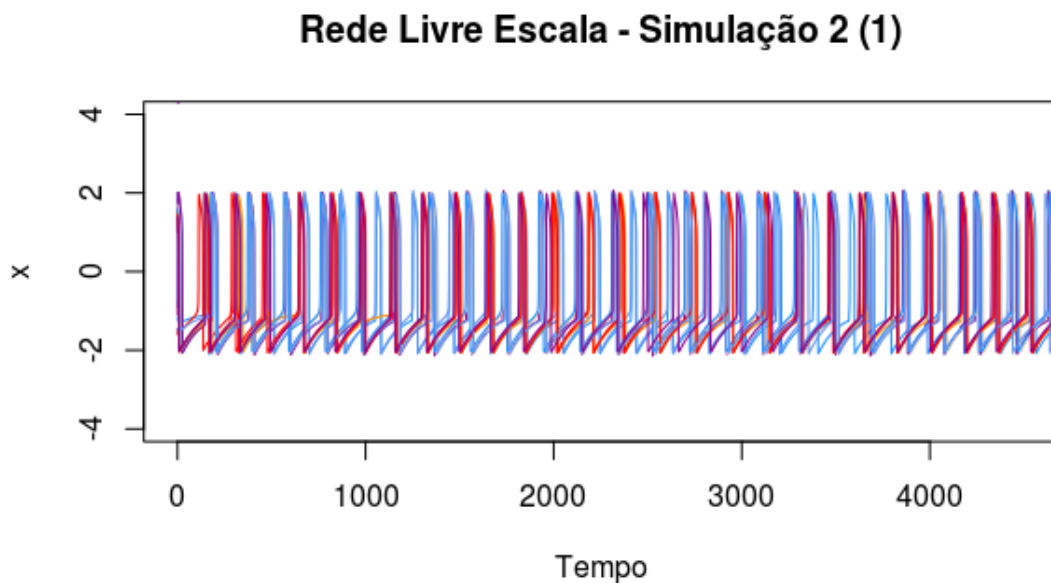


Figura 21.

Nesta simulação, o fato de que a rede tem grau menor que as outras somado à ativação parcial dos neurônios (ao invés de total, como na simulação 1) nos fornece como resultado, uma rede dessincronizada a princípio.

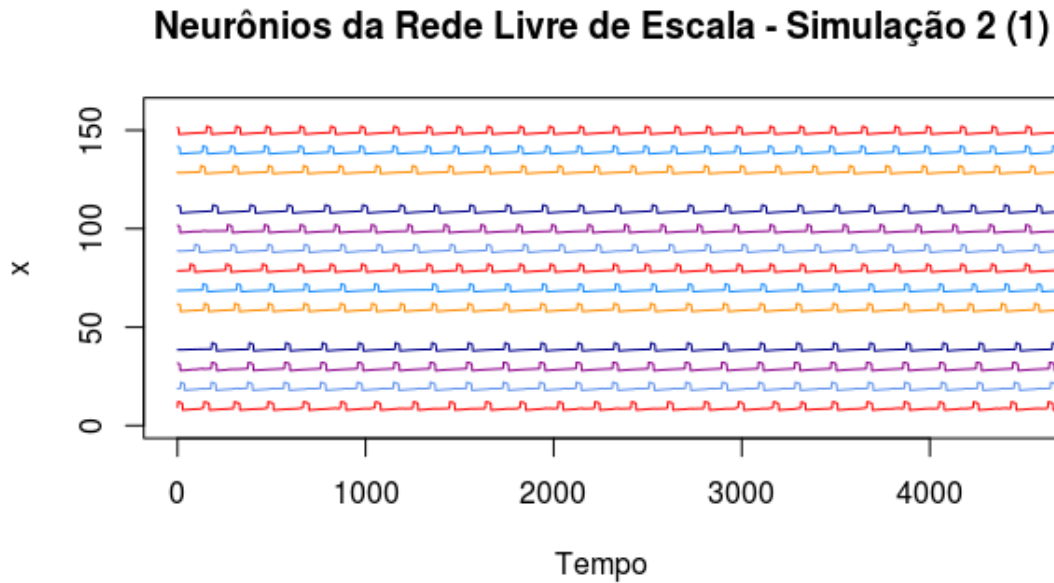


Figura 22.

Podemos observar a dessincronização dos neurônios com essa Figura também, principalmente dos neurônios na parte central do gráfico.

Aumentamos o parâmetro de acoplamento w_{ij} para 0.9 e aumentamos o tempo de simulação, e obtivemos os seguintes resultados:

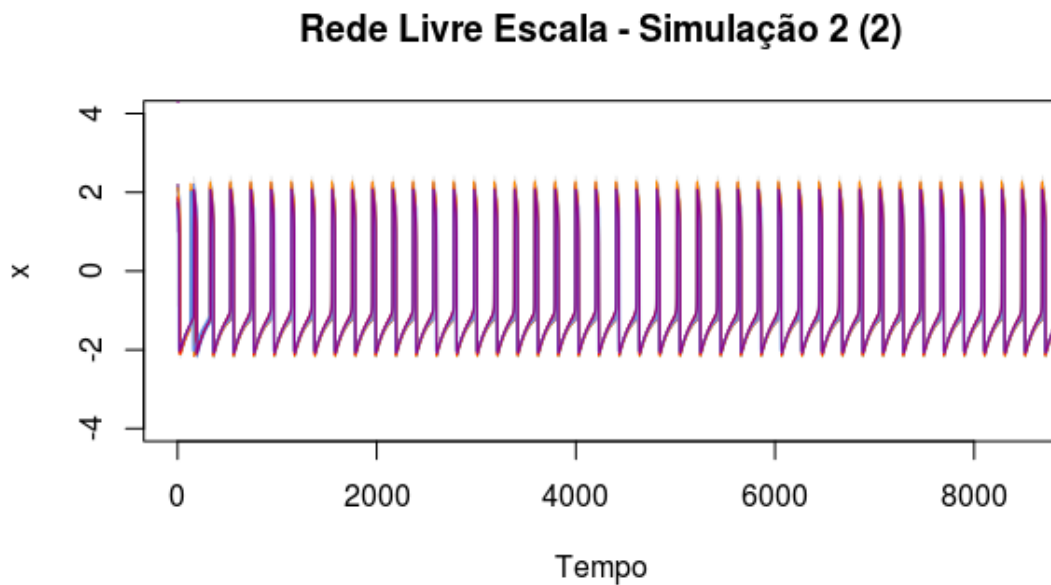


Figura 23.

Note que, com um fator de acoplamento significativamente maior, obtivemos uma sincronização relativamente fácil, apesar das deficiências desse tipo de rede.

Neurônios da Rede Livre de Escala - Simulação 2 (2)

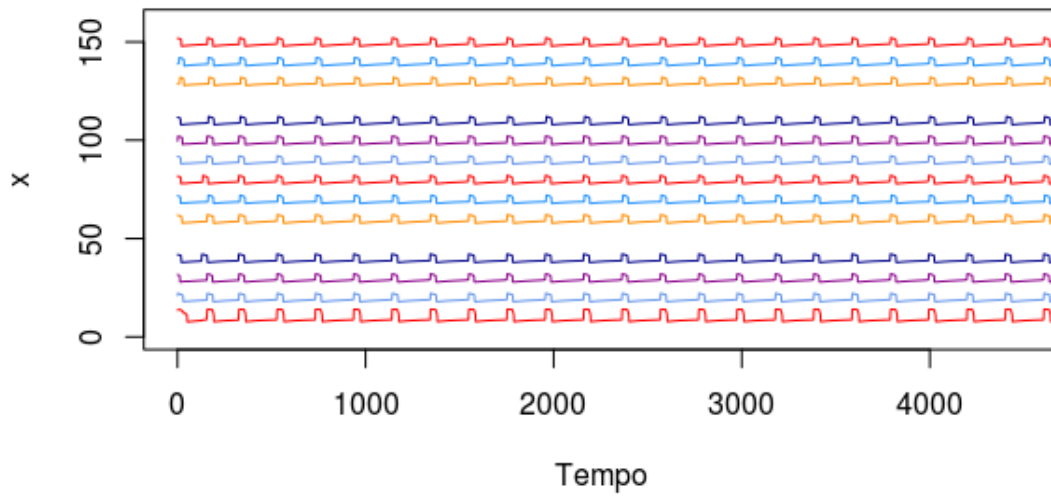


Figura 24.

Podemos observar na figura acima, a rápida sincronização da rede com o aumento do parâmetro de acoplamento. Apesar de simularmos até $t = 10000$, gerando o gráfico até $t = 4000$, já podemos ver bem o comportamento dos neurônios simulados, e sabemos, da Figura 22 que o gráfico acima se manterá mesmo com $t = 10000$, já que a rede estará em sincronia nesse intervalo de tempo também.

» SIMULAÇÃO 2.3.3

Rede Livre Escala - Simulação 2 (1)

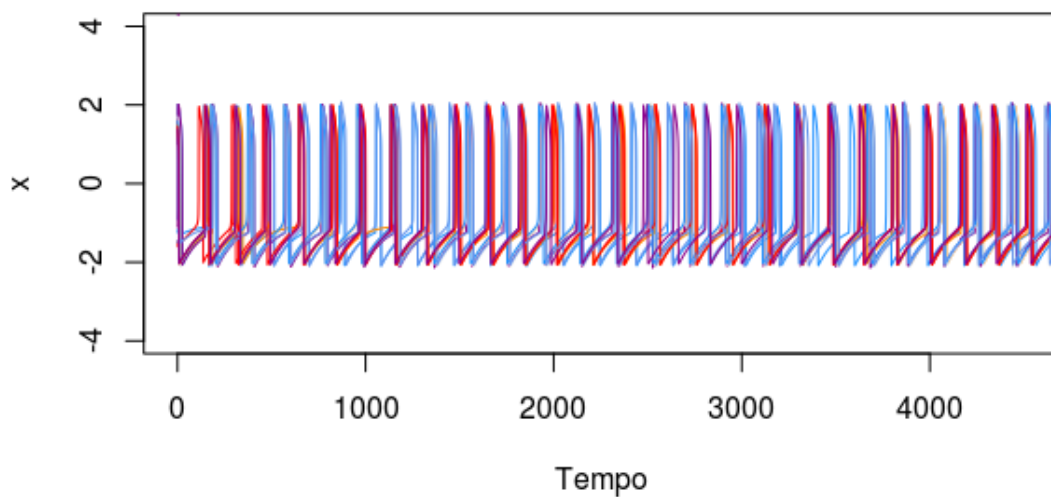


Figura 25.

Escolhendo os neurônios ativos e inativos aleatoriamente caímos no mesmo caso da simulação anterior, com os neurônios não entrando em sincronia no tempo de simulação

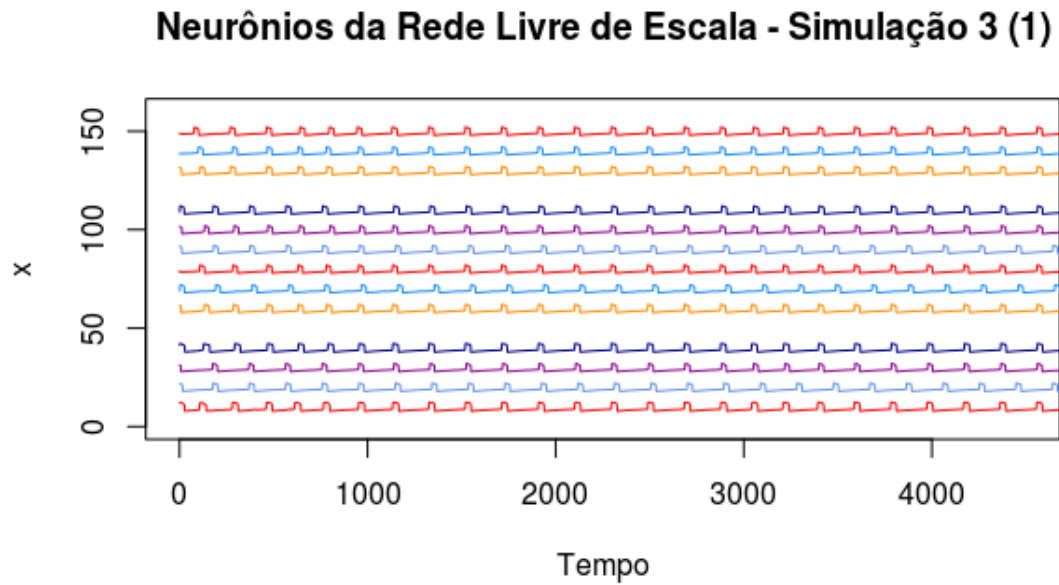


Figura 26.

Alterando novamente o parâmetro w_{ij} para 0.9 e aumentando o tempo de simulação, obtemos:

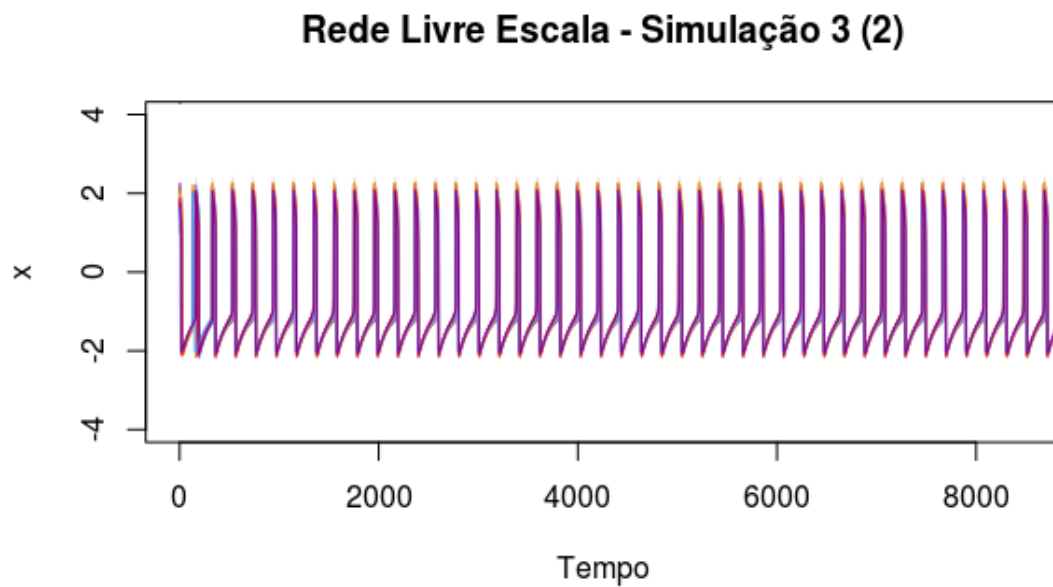


Figura 27.

Os resultados obtidos foram os mesmos da simulação 2.

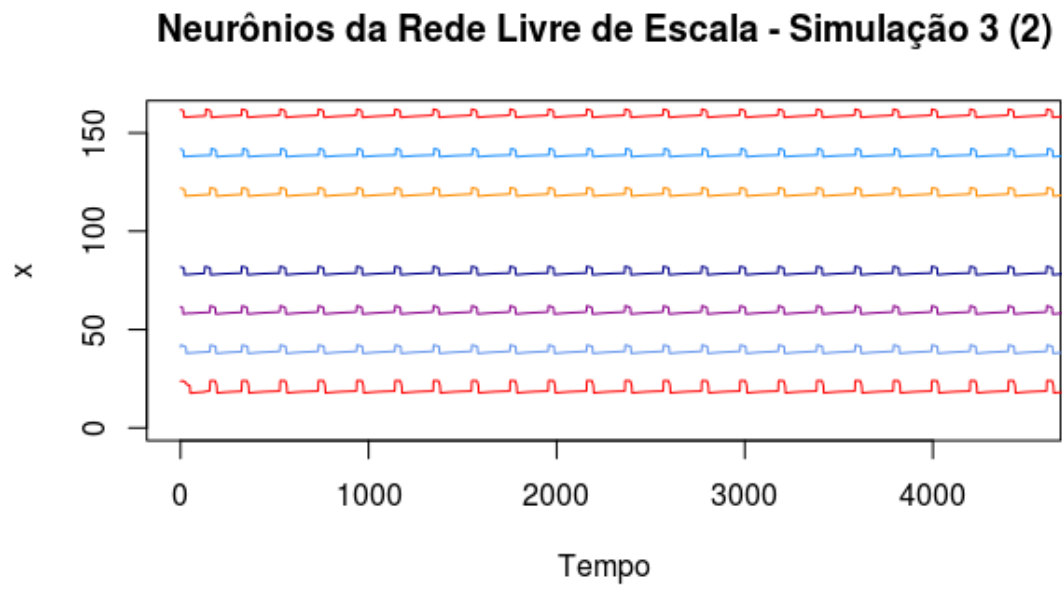


Figura 28.