Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Relatório de Modelagem Computacional
Projeto 02 - Redes Tróficas

Modelo Presa-Predador

Celso Gabriel Vieira Robeiro Lopes (123119), Felipe Hikari Kawahama (112197), Lucas Eduardo Nogueira Gonçalves (122055).

Prof. Dr. Marcos Gonçalves Quiles

São José dos Campos

Março, 2018

1

MODELO, MATERIAIS E MÉTODO

1.1 INTRODUÇÃO A REDES TRÓFICAS - EQUAÇÃO LOGÍSTICA

A teia alimentar, também conhecido como rede trófica, é uma coleção de relações que ligam os diferentes seres vivos. Uma rede trófica é formada por várias cadeias alimentares. Uma determinada população pode servir como alimento para diferentes espécies enquanto outra pode alimentar-se de diferentes população. Numa rede trófica encontram-se três grupos de seres vivos: os produtores (Grama por exemplo); os consumidores, organismos heterotróficos (ex.: Rato, Vaca, Leão e Águia); e os decompositores.

"Uma população, se não contida, cresce de forma exponencial."

Note que a afirmação anterior se refere a parte numérica da situação, onde de fato, quanto maior a população, mais ela cresce.

Com isso é necessário desenvolver modelos que consideram a limitações que uma certa população enfrenta. Ao decorrer deste trabalho, será utilizado o Modelo da Equação logística aplicada ao o Modelo de Malthus, para simular uma rede trófica envolvendo um organismo produtor, dois animais herbívoros e dois carnívoros.

O Modelo de Malthus diz que podemos representar a variação instantânea, como uma constante multiplicando o valor da população, ou seja:

Sendo N uma população genérica, representamos então a variação de N sendo:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t)$$

A Equação Logistica foi proposta por Pierre François Verhulst, matemático e doutor na teoria dos números da Universidade de Gante, e ela diz que devemos incluir uma saturação no modelo de Malthus logo, podemos representá-la da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t)^2 = \alpha N(t)(1 - \frac{N(t)}{k})$$

Onde k é consequência da divisão de β por α, e α representa a taxa de crescimento da população, enquanto k representa a capacidade de suporte do ambiente (saturação).

Note que equação logistica possui pontos de equilibrios, ou seja é possível fazer com que ela se mantenha constante, isso acontece quando $N(t) = 0$ e o segundo quando $k = N(t)$, no primeiro caso dizemos que ele é um ponto instável, pois no momento que isso ocorre uma mudança brusca no sistema, e quando $k = N(t)$, ou se aproximando, todo o sistema vai se modelando em volta daquele valor.

1.2 MODELO LOTKA-VOLTERRA

Note que seção anterior se refere ao modelo que considera uma única espécie, mas existe a possibilidade de mais uma éspecie conviver no mesmo sistema, seja competinto, ajudando ou sendo prejudicada graças a presenta da outra.

Desse modo podemos introduzir o modelo de Lotka-Volterra, ou seja as equações diferenciais, não lineares e de primeira ordem, utilizadas para descrever sistemas biológicos, especialmente quando várias espécies interagem entre si.

O modelo de Lotka-Volterra pode ser descrito como:

$$\frac{dP}{dt} = P(\alpha V - \beta)$$

$$\frac{dV}{dt} = V(\lambda - \phi P)$$

Sendo que P representa um predador, V uma presa, e as constantes $\alpha, \beta, \lambda, \phi$ são consequências da aplicação da equação logística no sistema.

Onde α é a taxa em que o predador se beneficia da presa, e o β uma morte natural. Enquanto λ representa o aumento da presa e ϕ o quanto a vitima é prejudicada pelo predador.

Note que esse tipo de modelo representa uma situação com duas espécies, em nosso projeto, vamos tratar de uma situação com cinco espécies, sendo elas: Grama, Rato, Vaca, Águia e Leão.

1.3 MODELO BIOLÓGICO IDEALIZADO

O modelo criado leva em conta as seguintes populações no ecossitema:

- G(t): a "população"de grama no tempo t. Representa a parte mais baixa da cadeia alimentar.
- R(t): a população de ratos no tempo t. Consideramos aqui, que os ratos se alimentam apenas da grama.
- V(t): a população das vacas no tempo t. Consideramos, novamente, que as vacas de alimentam apenas da grama.
- A(t): a população das águias no tempo t. Consideramos que as águias se alimentam somente da população dos ratos.
- L(t): a população dos leões no tempo t. Consideramos que os leões se alimentam tanto da população dos ratos quanto das vacas.

Portanto, a representação na forma de grafo da dinâmica do sistema é a seguinte:

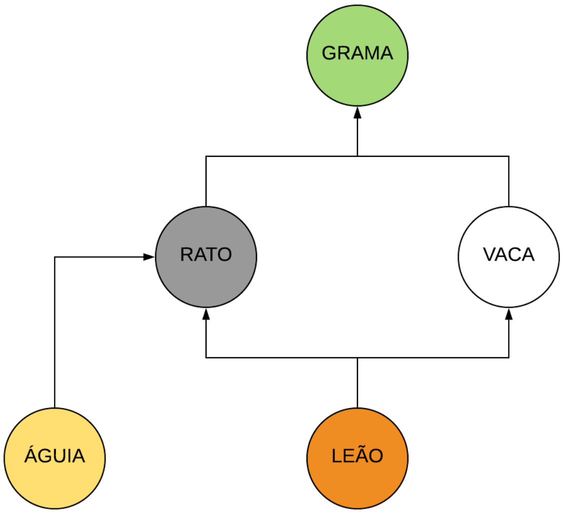

Figura 1: Grafo representando as interações entre as populações do sistema.

Agora, partindo pro modelo matemático elaborado, temos que o sistema de equações usado para modelar a rede trófica é o que segue:

$$\begin{cases} \dfrac{dG}{dt} &= G(t)((\kappa 1 - \dfrac{G(t)}{k}) - \gamma_{G_1} V(t) - \gamma_{G_2} R(t)) \\ \\ \dfrac{dR}{dt} &= R(t)(\theta_R G(t) - \gamma_{R_1} A(t) - \gamma_{R_2} L(t) - \mu_R) \\ \\ \dfrac{dV}{dt} &= V(t)(\theta_V G(t) - \gamma_V L(t) - \mu_V) \\ \\ \dfrac{dA}{dt} &= A(t)(\theta_A R(t) - \mu_A) \\ \\ \dfrac{dL}{dt} &= L(t)(\theta_{L1} R(t) + \theta_{L_2} V(t) - \mu_L) \end{cases} \tag{1}$$

Em que os parâmetros utilizados são descritos em detalhe na tabela a seguir:

Tabela 1: Resumo dos parâmetros utilizados no sistema.

Símbolo	Significado
κ	Taxa de crescimento da grama
k	Capacidade de suporte do ambiente
γ_{G_1}	Taxa em que a grama é prejudicada em proporção a população de vacas
γ_{G_2}	Taxa em que a grama é prejudicada em proporção a populaçõa de ratos
γ_{R_1}	Taxa em que o rato é prejudicado, em proporção a população de águias
γ_{R_2}	Taxa em que o rato é prejudicado, proporção a população de leões
γ_V	Taxa em que a vaca é prejudicada,em proporção a população de leões
μ_R	Taxa de mortalidade do rato
μ_V	Taxa de mortalidade da vaca
μ_A	Taxa de mortalidade da águia
μ_L	Taxa de mortalidade do leão
θ_R	Taxa em que o rato se beneficia da grama
θ_V	Taxa em que a vaca se beneficia da grama
θ_A	Taxa em que a águia se beneficia do rato
θ_{L_1}	Taxa em que o leão se beneficia do rato
θ_{L_2}	Taxa em que o leão se beneficia da vaca

Tabela 2: Matriz relacionando os parâmetros com as populações

	G	R	V	A	L
G	k	$-\gamma_{G_2}$	$-\gamma_{G_2}$	-	-
R	θ_R	$-\mu_R$	$-\gamma_{R_1}$	$-\gamma_{R_2}$	
V	θ_V	-	$-\mu_V$	-	γ_V
A	-	θ_A	-	$-\mu_A$	-
L	-	θ_{L_1}	θ_{L_2}	-	$-\mu_L$

1.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DO EULER

Similar ao projeto anterior, vamos utilizar o método de Euler para obtermos aproximadamente o comportamento de cada população no ecossistema, com passo de integração $\Delta t = 0.001$, em que consideramos, este como sendo o passar de uma semana na simulação.

Assim, assumindo que $\frac{dP_i}{dt}$, ou seja a taxa de variação de uma determinada população P_i para valores infinitesimais de tempo pode ser aproximada para $\frac{\Delta P_i}{\Delta t}$. As equações do sistema ficam da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\Delta G}{\Delta t} &= G(t)(\kappa(1 - \frac{G(t)}{k}) - \gamma_{G_1}V(t) - \gamma_{G_2}R(t)) \\ \frac{\Delta R}{\Delta t} &= R(t)(\theta_R G(t) - \gamma_{R_1}A(t) - \gamma_{R_2}L(t) - \mu_R) \\ \frac{\Delta V}{\Delta t} &= V(t)(\theta_V G(t) - \gamma_V L(t) - \mu_V) \\ \frac{\Delta A}{\Delta t} &= A(t)(\theta_A R(t) - \mu_A) \\ \frac{\Delta L}{\Delta t} &= L(t)(\theta_{L1}R(t) + \theta_{L_2}V(t) - \mu_L) \end{cases} \tag{2}$$

Lembrando que ΔG é a variação da grama, podemos escrever: $G(t + \Delta t) = G(t) + \Delta G$. Aplicando isso nas outras populações, chegamos na versão do sistema que foi implementada numericamente em C:

$$\begin{cases} G(t+\Delta t) &= G(t) + G(t)\Delta t(\kappa(1 - \frac{G(t)}{k}) - \gamma_{G_1}V(t) - \gamma_{G_2}R(t)) \\ R(t+\Delta t) &= R(t) + R(t)\Delta t(\theta_R G(t) - \gamma_{R_1}A(t) - \gamma_{R_2}L(t) - \mu_R) \\ V(t+\Delta t) &= V(t) + V(t)\Delta t(\theta_V G(t) - \gamma_V L(t) - \mu_V) \\ A(t+\Delta t) &= A(t) + A(t)\Delta t(\theta_A R(t) - \mu_A) \\ L(t+\Delta t) &= L(t) + L(t)\Delta t(\theta_{L1}R(t) + \theta_{L_2}V(t) - \mu_L) \end{cases} \tag{3}$$

1.5 MATERIAIS

A implementação do Método de Euler para a resolução numérica do sistema de equações foi feita na linguagem C. Para gerar os gráficos de estabilidade, sem as perturbações/variações externas como veremos a seguir, foi utilizado o software Berkeley Madonna. Enquanto que os gráficos com as perturbações/variações foram feitos utilizando Microsoft Excel.

2

SIMULAÇÕES E RESULTADOS

2.1 SIMULAÇÃO 1

Na primeira simulação, consideramos as seguintes populações iniciais:

- $G(0) = 130$
- $R(0) = 30$
- $V(0) = 5$
- $A(0) = 10$
- $L(0) = 4$

E utilizamos os seguintes valores para os parâmetros:

Tabela 3: Valor dos parâmetros utilizados na Simulação 1.

Símbolo	Valor
κ	8
k	1000
γ_{G_1}	0.1
γ_{G_2}	0.2
θ_R	0.6
γ_{R_1}	0.8
γ_{R_2}	0.002
μ_R	0.1
θ_V	0.06
γ_V	0.87
μ_V	0.03
θ_A	0.029999
μ_A	0.8
θ_{L_1}	0.001
θ_{L_2}	0.03
μ_L	0.99

Utilizando o programa Berkley Madonna, foi possível plotar os gráficos representando as populações em diferentes instantes, como vemos na imagem a seguir:

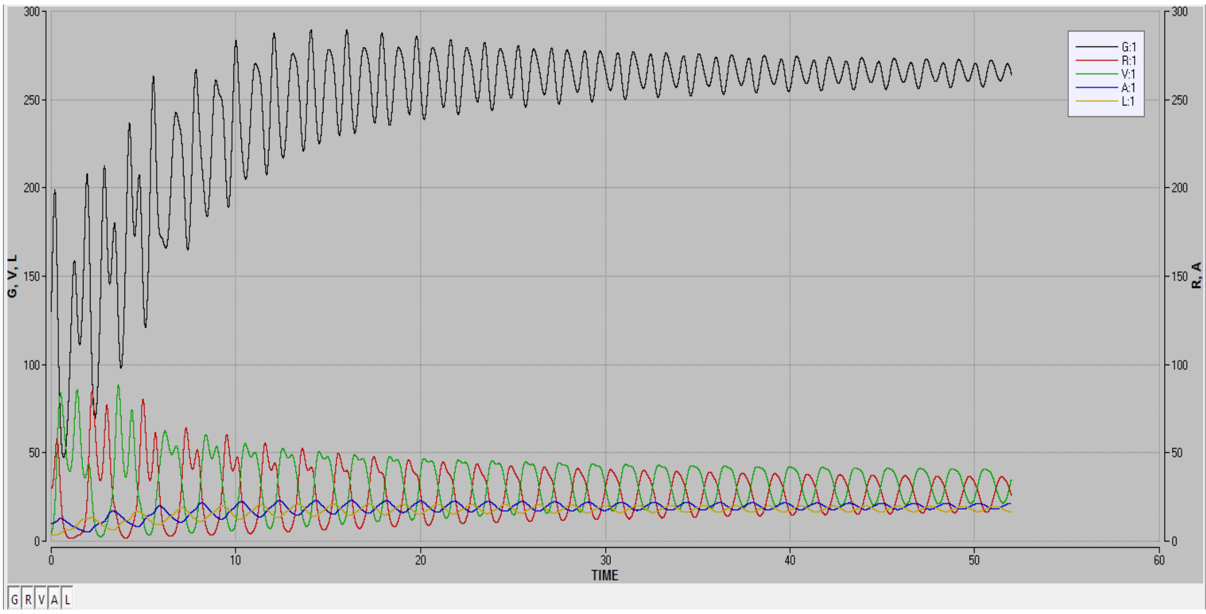

Figura 2: Gráfico das populações, por tempo, da Simulação 1.

Onde o gráfico preto representa a população de grama, o vermelho, a população de rato; o verde, a população de vaca; o azul, a população de águias e o amarelo, a população de leões.

Após variações significativas das populações nos primeiros instantes da simulação, podemos observar que após o instante t=20, aproximadamente, todas as populações começam a convergir, oscilando entre diferentes valores:

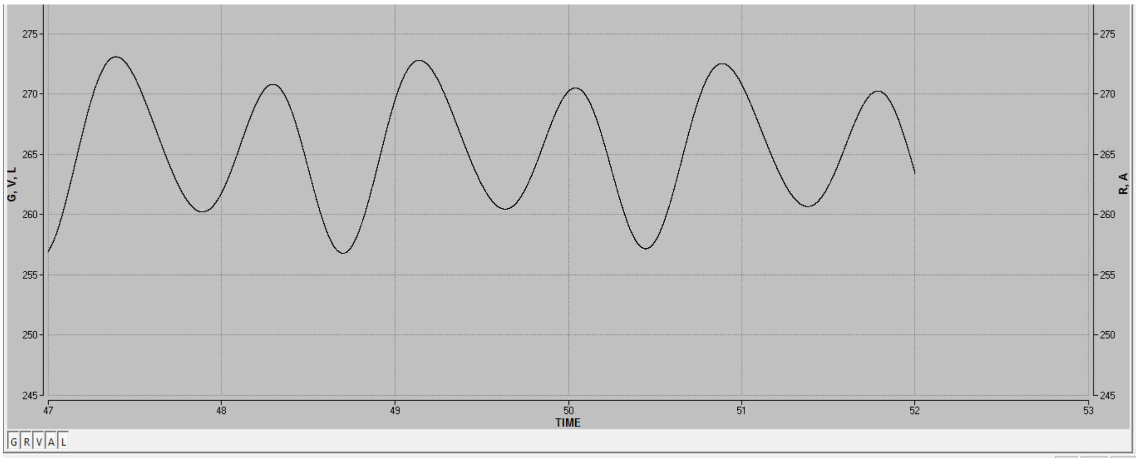

Figura 3: Zoom na figura acima, focando na população G

Da figura[3], podemos notar que a população de grama varia entre aproximadamente 256 e 273.

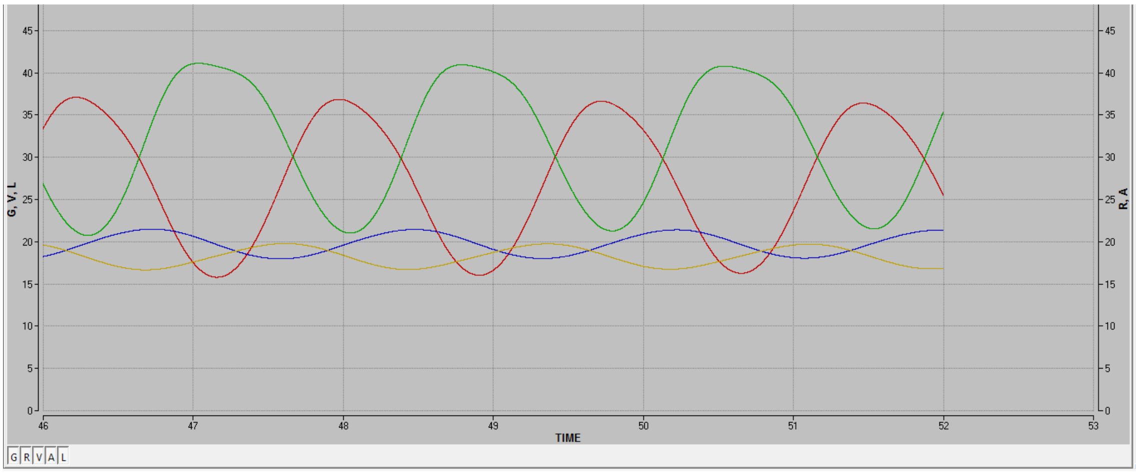

Figura 4: Zoom na figura [2], focando nas populações de ratos, vacas, águias e leões.

Da figura [4], podemos obsevar que a população de ratos (vermelho) varia entre aproximadamente 16 e 36. A população de vacas (verde) varia entre aproximadamente 22 e 41. A população de águia (azul) varia entre aproximadamente 17 e 22. E a população de leões (amarelo) varia entre aproximadamente 16 e 20.

Afim de estudar o ponto de equilíbrio do sistema modelado, fizemos as seguintes pertubações durante a execução da Simulação 1:

2.1.1 *Perturbação 1: Gripe Bovina*

No tempo t=35, aumentamos a taxa de mortalidade de V (μ_v) de 0,03 para 4. para simular uma doença que atingiu essa população. No tempo t=60, a população adquire imunidade da doença e μ_v volta ao valor original. O comportamento das populações está representado na figura a seguir:

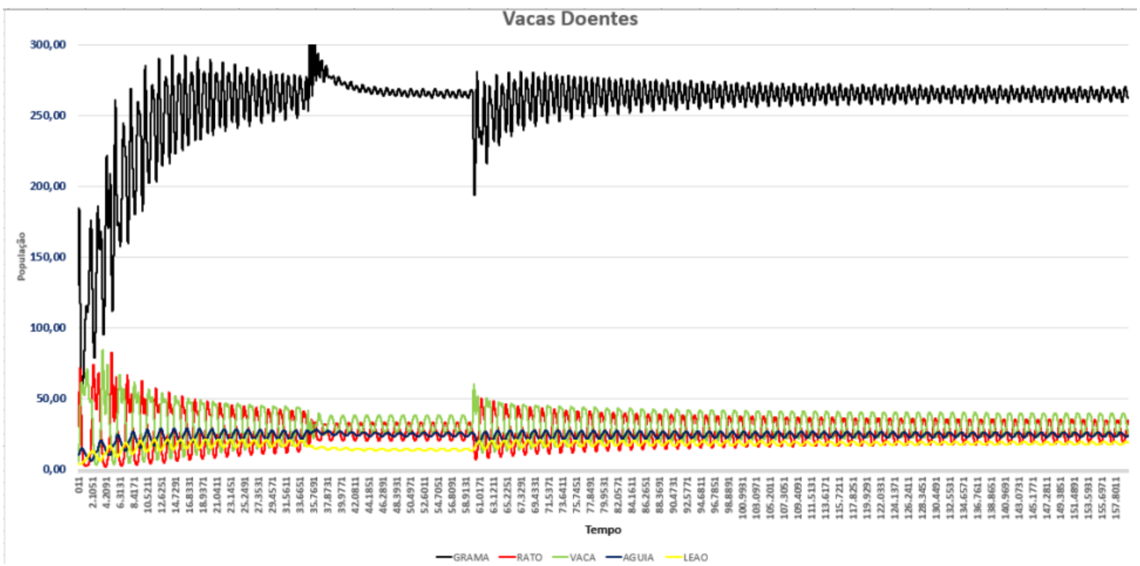

Figura 5: Gráfico das populações, por tempo, sob a Perturbação 1.

Note que em t=35, que é quando aumentamos a taxa de mortalidade de V, L começa a morrer mais (por falta de alimento) e G começa a crescer (por ausência de predador). Mas o sistema rapidamente volta a estabilizar. Em t=60, que é quando V adquire imunidade à doença, temos um pequeno aumento na população de V, devido a sua reduzida taxa de mortalizade, fazendo com que L aumente novamente, e R se reduza levemente (devido a competição por G). O sistema entra novamente em equilíbrio, após um breve período de tempo.

2.1.2 *Perturbação 2: Fenômeno Natural Recorrente*

No tempo t=25, diminuímos a população de G em 50%, e a cada intervalo de tempo 25, diminuímos novamente. Simulando assim, um fenômeno natural periódico que varre a vegetação do local. O comportamento das populações em relação a essa perturbação segue no gráfico a seguir:

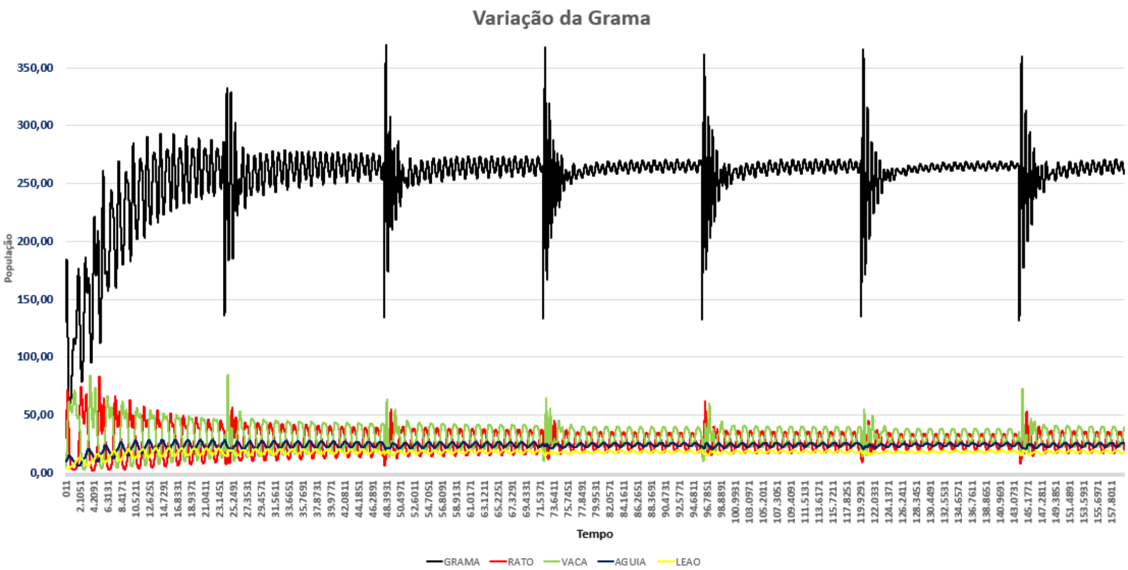

Figura 6: Gráfico das populações por tempo, sob a Perturbação 2.

Note que, por termos essa variação periódica, temos um comportamento bem definido em intervalos de tempo a cada t=25, a grama diminui, e como R depende mais de G, do que V, V acaba crescendo com o decaimento de R e subsequente aumento de G, e isso se repete até as populações se estabilizarem novamente. Note que as populações dos predadores não se alteram muito. Mas o importante a se ressaltar, é que mesmo com essa variação externa de G, o sistema ainda tende a um equilíbrio bem definido.

2.1.3 *Perturbação 3: Surto Populacional de Ratos*

No tempo t=35, aumentamos a taxa de crescimento de R (θ_R) de 0.6 para 0.999, simulando um processo de surto de crescimento de R. Em t=45, (θ_R) volta ao seu valor original. Os resultados obtidos podem ser vistos no gráfico a seguir:

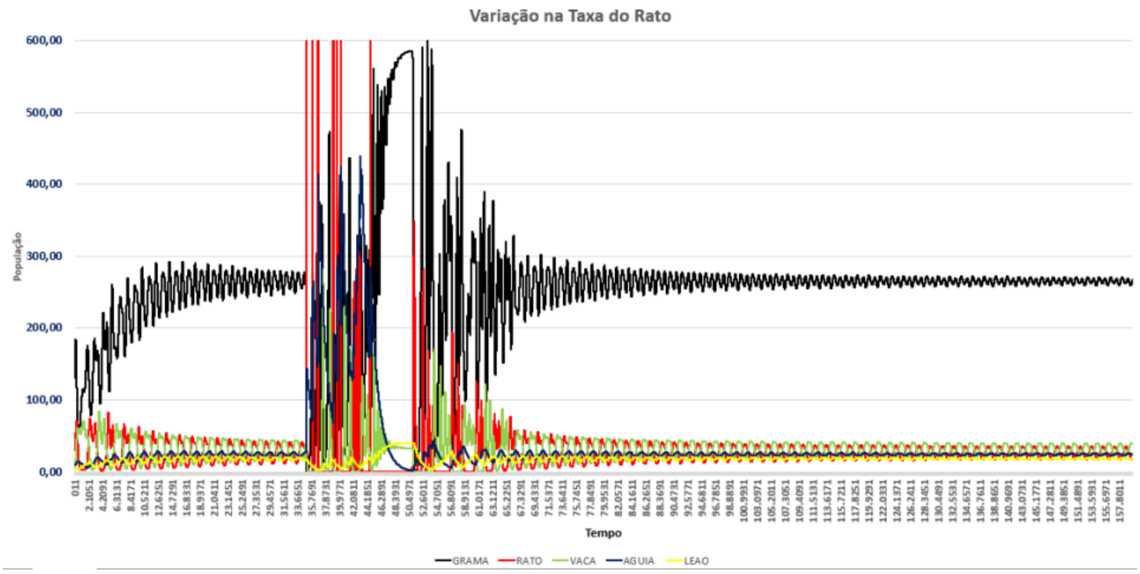

Figura 7: Gráfico das populações por tempo, sob a Perturbação 3.

Temos nessa situação, um comportamento bem instável do sistema, R cresce muito rápido, causando um aumento em A e uma súbita redução em G, e consequentemente em V. Como G cai muito, R também diminui muito rápido, causando "explosões"em todas as populações (apenas L não é muito afetado). Até que em t=45, voltamos ao θ_R original, R cai muito rápido devido a essa diferença em sua taxa de crescimento, fazendo com que G creça bastante, o que faz com que R cresça novamente e o processo se repete até o sistema entrar em equilíbrio novamente.

2.2 SIMULAÇÃO 2

Na segunda simulação, consideramos as seguintes populações iniciais:

- $G(0) = 1000$
- $R(0) = 20$
- $V(0) = 50$
- $A(0) = 20$
- $L(0) = 15$

E utilizamos os seguintes valores para os parâmetros:

Tabela 4: Valor dos parâmetros utilizados na Simulação 2.

Símbolo	Valor
κ	8
k	10000
γ_{G_1}	0.1
γ_{G_2}	0.1
θ_R	0.04
γ_{R_1}	0.8
γ_{R_2}	0.002
μ_R	0.9
θ_V	0.05
γ_V	0.999
μ_V	0.02
θ_A	0.029
μ_A	0.8
θ_{L_1}	0.001
θ_{L_2}	0.03
μ_L	0.99

Plotando as diferentes populações do modelo nos diferentes instantes de tempo t, temos o seguinte gráfico:

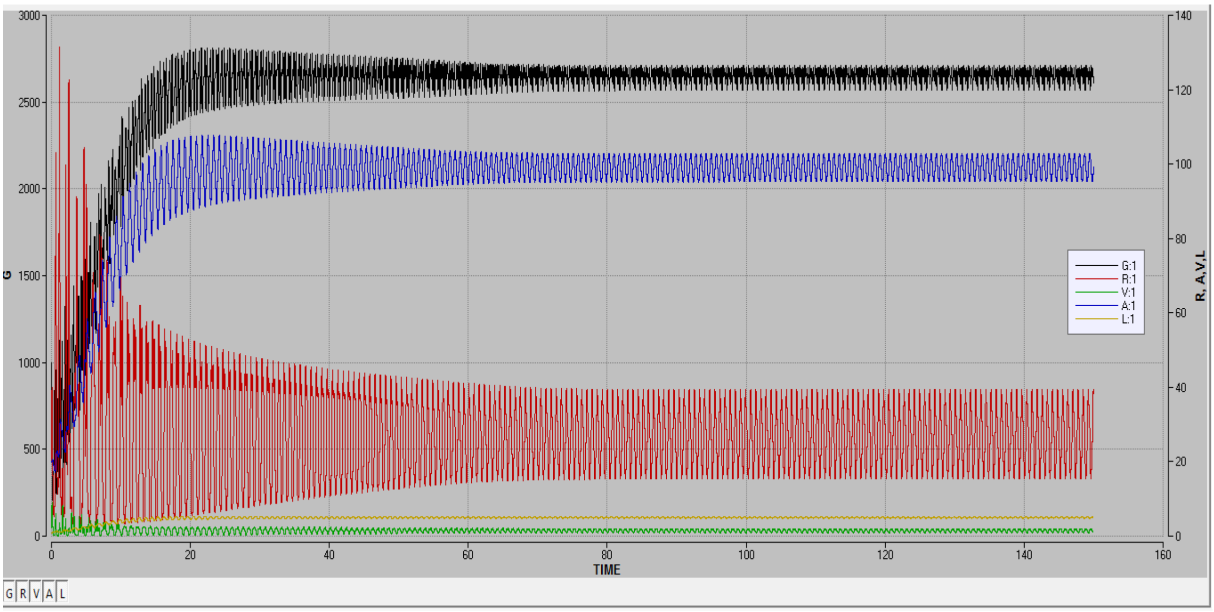

Figura 8: Gráfico das populações, por tempo, da Simulação 2.

Em que as cores representam as mesmas populações da Simulação 1.(Note que alteramos a escala do eixo vertical à direita, para melhor representar as populações de R,A,V,L).

Após variações significativas das populações nos instantes iniciais, todas as populações começam a convergir, oscilando entre diferentes valores:

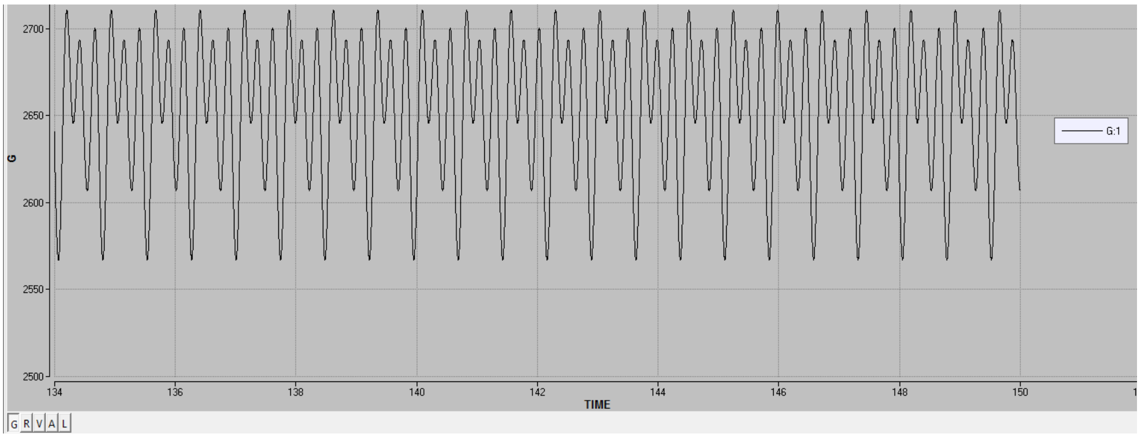

Figura 9: Zoom na figura acima, focando na população G.

Da figura [9], podemos observar que a população varia entre aproximadamente 2560 a 2720

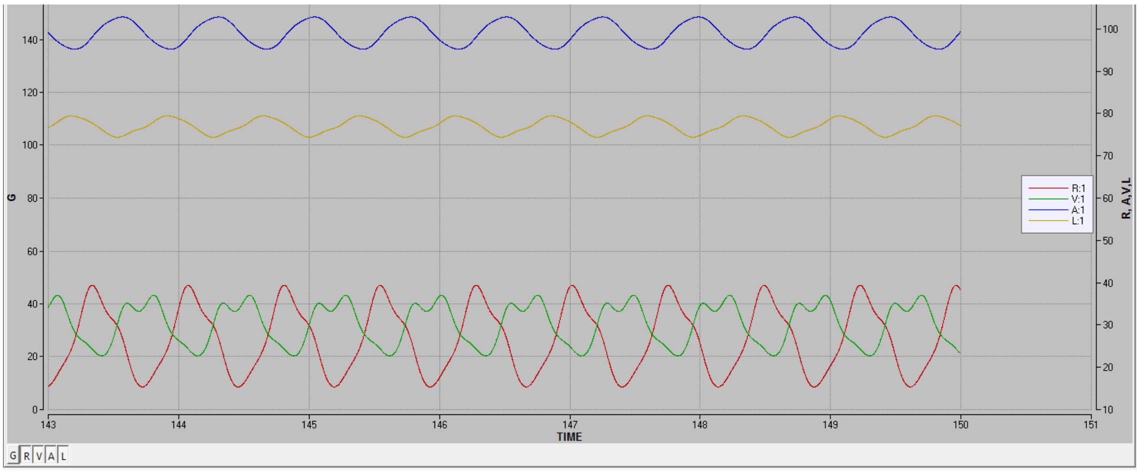

Figura 10: Zoom na figura, focando as populações de R,V,A,L.

Da imagem, podemos observar que a R varia entre aproximadamente 13 e 40; V varia entre aproximadamente 22 e 38; A varia entre aproximadamente 135 e 148; L varia entre aproximadente entre 102 e 112.

Afim de verificar o ponto de equilíbrio do sistema modelado, fizemos as seguintes pertubações durante a execução da Simulação 2:

2.2.1 *Perturbação 1: Temporada de caça de Águia*

Incluímos como uma perturbação na Simulação 2, uma temporada de caça de águia, que se repete a cada t=40, a partir de t=40. Dura t=5 no total, e durante esse período, a taxa de mortalidade (μ_A) da águia vai de 0.8 para 0.9999 e quando acaba a temporada, μ_A volta ao valor inicial. Os resultados obtidos são apresentadas nas figuras [10] e [11] na próxima página

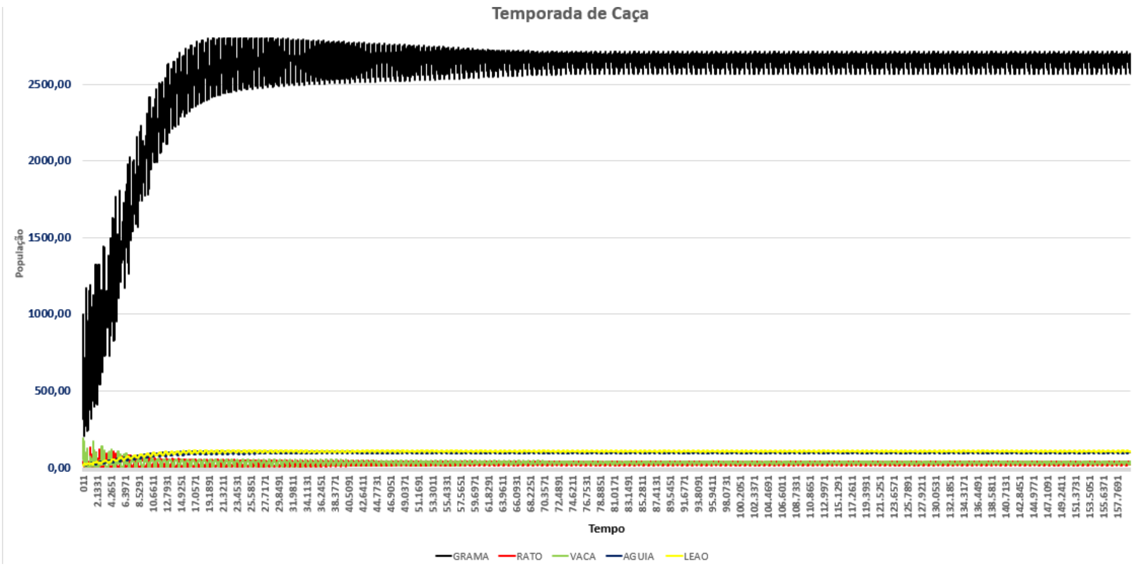

Figura 10: Gráfico das populações por tempo, sob a Perturbação 1.

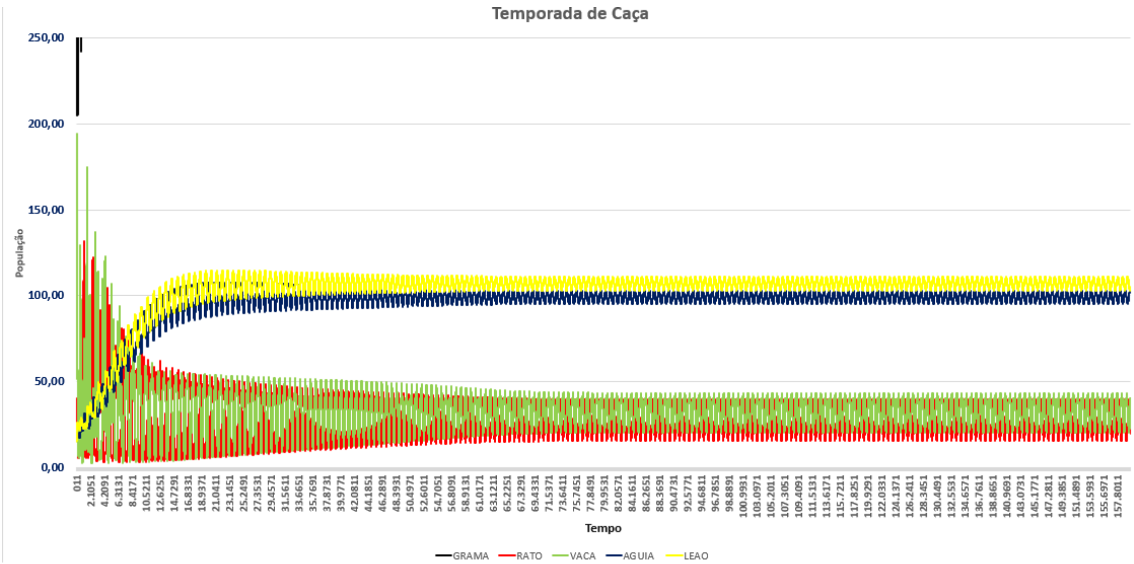

Figura 11: Gráfico anterior, com escalas diferentes.

Note que o gráfico resultante dessa perturbação não difere muito em relação ao gráfico do modelo sem perturbação, já que o μ_A já é muito grande originalmente, e o perído em que esse parâmetro varia é relativamente pequeno.

2.2.2 *Perturbação 2: Migração de Leões*

Consideramos, que após o momento em que sistema atinja estabilidade, em t=50, a população de L dobra de tamanho, decorrente de um processo migratório muito rápido. O impacto do processo nas outras populações pode ser visto no gráfico a seguir:

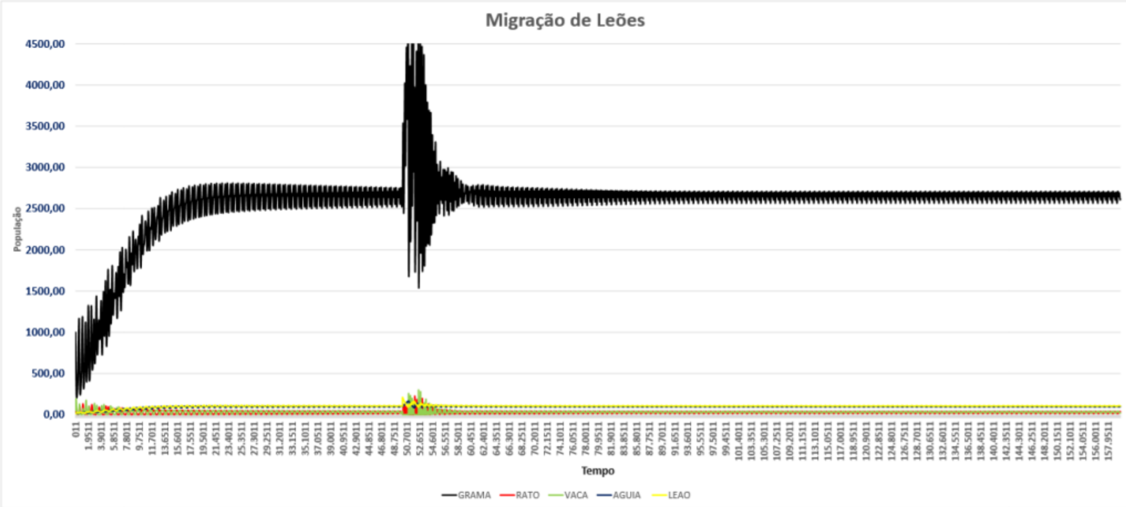

Figura 12: Gráfico das populações por tempo, sob a Perturbação 2.

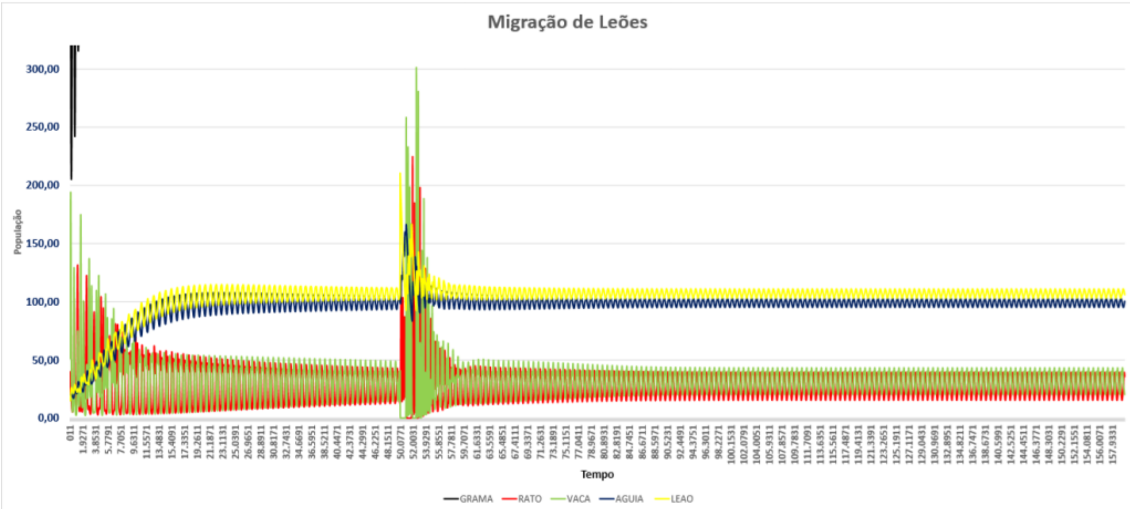

Figura 13: Gráfico anterior, com escalas diferentes.

Podemos notar que a população de L dobrando, rapidamente, V diminui, causando um aumento em G e consequentemente em R (devido ao fato de que L tem preferência em comer V, ao invés de R. A súbita redução de V, faz com que L decaía também, e assim, o comportamento do sistema fica bem instável. Mas, após t=10, as populações voltam a se estabilizar, tendendo aos mesmos valores do sistema sem perturbação. Ou seja, dobrando a população de L, não foi o suficiente pra desestabilizar o sistema no longo prazo.