	Universidade de Brasília Departamento de Engenharia Elétrica **Controle Digital** ENE 154887 TURMA: A

Simulação 5

Aluno:

Caio de Freitas Porphirio

Professor: Henrique Cezar Ferreira
Brasília, 18 de Outubro de 2016

1- Considere um processo descrito pela seguinte função de transferência.

$$\boldsymbol{G(z) = \frac{0,0125(z+0,195)(z+2,821)}{z(z-1)(z-0,368)(z-0,8187)}}$$

a) Projete um controlador com resposta deadbeat de modo que a saída siga um <u>degrau</u> unitário em tempo mínimo;

$$G(z) = \frac{0{,}0125(z+0{,}195)(z+2{,}821)}{z(z-1)(z-0{,}368)(z-0{,}8187)} =$$

$$G(z) = \frac{0.0125z^2 + 0.0377z + 0.0069}{z^4 - 2.1867z^3 + 1.488z^2 - 0.3012z}$$

$$G(z) = \frac{0{,}0125z^{-2}(1+0{,}195z^{-1})(1+2{,}821z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0{,}368z^{-1})(1-0{,}8187z^{-1})}$$

$$R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$P = max\{\#polos\ de\ R(z) em\ z=1, \#polos\ de\ G(z) em\ z\}$$

$$P = max\{1{,}1\} = 1 \quad n = 4-2 = 2 \quad \rightarrow \quad k \geq n = 2$$

$Para\ o\ tempo\ minimo\ escolhido\ de\ k = 2$:

$$M(z) = (1 + zero_{foroa} z^{-1})(M_k z^{-k} + \cdots)$$

$$1 - M(z) = (1-z^{-1})^p (1 + a_1 z^{-1} + \cdots)$$

$$M(z) = (1+2{,}821z^{-1})(M_2 z^{-2} + \cdots) \qquad (1)$$

$$1 - M(z) = (1-z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + \cdots) \qquad (2)$$

$Substituindo\ (1) em\ (2)$:

$$1 - (1+2{,}821z^{-1})(M_2 z^{-2} + \cdots) = (1-z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + \cdots)$$

$Para\ manter\ esta\ relação\ com\ grau\ maximo\ z^{-3}$:

$$1 - (1+2{,}821z^{-1})M_2 z^{-2} = (1-z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$$

$Assim$:

$$1 - M_2 z^{-2} - 2{,}821z^{-3} = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} - z^{-1} - a_1 z^{-2} - a_2 z^{-3}$$

$$1 - M_2 z^{-2} - 2{,}821z^{-3} = 1 + (a_1 - 1)z^{-1} + (a_2 - a_1)z^{-2} - a_2 z^{-3}$$

$Igualando\ os\ termos\ de\ mesma\ ordem\ da\ igualdade$:

$$1 = 1$$

$$0 = (a_1 - 1) \rightarrow a_1 = 1$$

$$\begin{cases} M_2 = a_1 - a_2 \\ 2{,}821M_2 = a_2 \end{cases}$$

$Resolvendo\ o\ sistema\ de\ 2\ eq\ e\ 2\ incognitas$:

$$a_2 = 0{,}7383$$

$$M_2 = 0{,}2617$$

$Assim$:

$$M(z) = (1 + 2{,}821z^{-1})(M_2 z^{-2}) = (1 + 2{,}821z^{-1})(0{,}2617z^{-2})$$

$$= \frac{(z + 2{,}821)(0{,}2617)}{z^3}$$

e

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$$

$$= (1 - z^{-1})(1 + 1z^{-1} + 0{,}7383z^{-2}) =$$

$$\frac{(z - 1)(z^2 + z^1 + 0{,}7383)}{z^3}$$

$COMO$:

$$G_D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)}$$

$Temos$:

$$\frac{M(z)}{1 - M(z)} = \frac{\left(\frac{(z + 2{,}821)(0{,}2617)}{z^3}\right)}{\frac{(z - 1)(z^2 + z^1 + 0{,}7383)}{z^3}} = \frac{0{,}2617(z + 2{,}821)}{(z - 1)(z^2 + z^1 + 0{,}7383)}$$

$$G_D(z) = \frac{z(z - 1)(z - 0{,}368)(z - 0{,}8187)}{0{,}0125(z + 0{,}195)(z + 2{,}821)} . \frac{0{,}2617(z + 2{,}821)}{(z - 1)(z^2 + z^1 + 0{,}7383)}$$

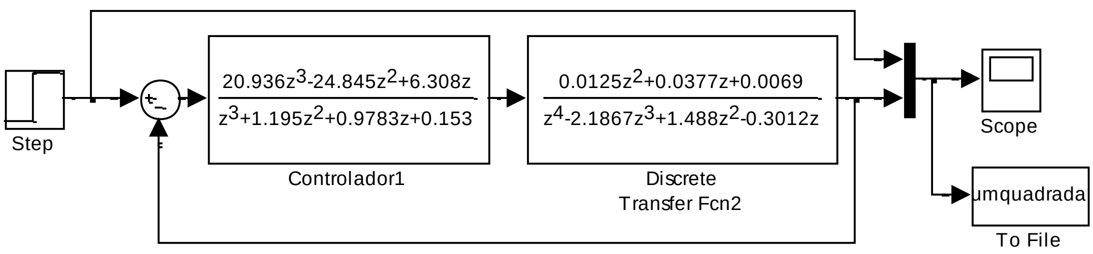
$$G_D(z) = \ 20{,}936z \frac{(z - 0{,}368)(z - 0{,}8187)}{(z + 0{,}195)(z^2 + z + 0{,}7833)}$$

$$G_D(z) = \ \frac{20{,}936z^2 - 24{,}845z + 6{,}308}{z^3 + 1{,}195z^2 + 0{,}9783z + 0{,}153}$$

$$G_D(z)G(z) = \frac{0{,}0125(z + 0{,}195)(z + 2{,}821)}{z(z - 1)(z - 0{,}368)(z - 0{,}8187)} . 20{,}936z \frac{(z - 0{,}368)(z - 0{,}8187)}{(z + 0{,}195)(z^2 + z + 0{,}7833)}$$

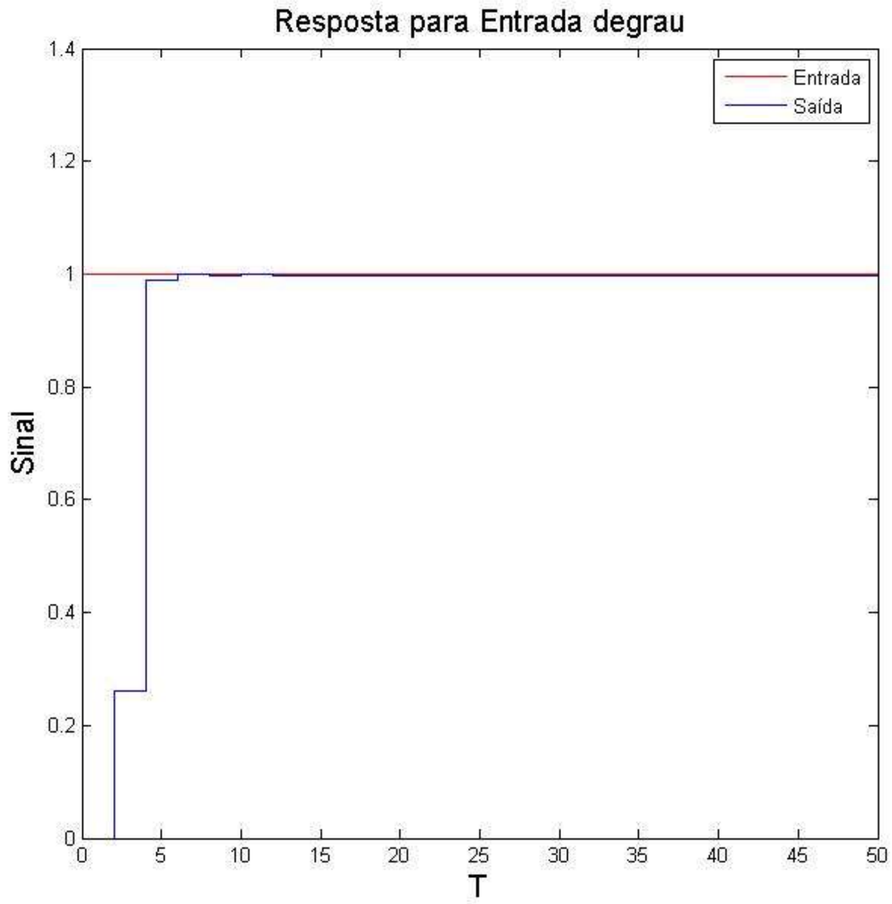
$$G_D(z)G(z) = 0{,}0125 * \frac{20{,}936z(z + 2{,}821)}{z(z - 1)(z^2 + z + 0{,}7833)}$$

b) No Simulink, simule o sistema a malha fechada para entrada <u>degrau</u> unitário;



```
clear all;
close all;
%%% Leitura do arquivo de dados
load umquadrada;
t = umb(1,:);
entrada = umb(2,:);
saida = umb(3,:);

figure(1)
plot(t,entrada,'r')
hold on;
stairs (t,saida, 'b')
legend('Entrada','Saída')
xlabel('T','FontSize', 15);
ylabel('Sinal','FontSize', 15);
title('Resposta para Entrada degrau','FontSize', 15);
grid off
```



c) ***Projete um controlador com resposta deadbeat de modo que a saída siga uma <u>rampa</u> unitária em tempo mínimo;***

$$R(z) = \frac{TZ^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$P = max\{\#polos\ de\ R(z) em\ z = 1, \#polos\ de\ G(z) em\ z\}$

$P = max\{2,1\} = 1 \quad n = 4 - 2 = 2 \quad \rightarrow \quad k \geq n = 2$

$Para\ o\ tempo\ minimo\ escolhido\ de\ k = 2$:

$M(z) = (1 + zero_{foroa} z^{-1})(M_k z^{-k} + \cdots)$

$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^p (1 + a_1 z^{-1} + \cdots)$

$$M(z) = (1 + 2{,}821 z^{-1})(M_2 z^{-2} + \cdots) \qquad (1)$$

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + a_1 z^{-1} + \cdots) \qquad (2)$$

$Substituindo\ (1) em\ (2)$:

$1 - (1 + 2{,}821 z^{-1})(M_2 z^{-2} + \cdots) = (1 - z^{-1})^2 (1 + a_1 z^{-1} + \cdots)$

$Para\ manter\ esta\ relação\ com\ grau\ maximo\ z^{-4}$:

$1 - (1 + 2{,}821 z^{-1})(M_2 z^{-2} + M_3 z^{-3}) = (1 - z^{-1})^2 (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$

$Assim$:

$$1 - M_2 z^{-2} - 2{,}821 M_2 z^{-3} - M_3 z^{-3} - 2{,}821 M_3 z^{-3}$$
$$= (1 - 2z^{-1} + z^{-2})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$$

$$1 - M_2 z^{-2} - 2{,}821 M_2 z^{-3} - M_3 z^{-3} - 2{,}821 M_3 z^{-4}$$
$$= 1 - 2z^{-1} + z^{-2} + a_1 z^{-1} - 2a_1 z^{-2} + a_1 z^{-3} + a_2 z^{-2} - 2a_2 z^{-3}$$
$$+ a_2 z^{-4}$$

$$1 - M_2 z^{-2} - (2{,}821 M_2 + M_3) z^{-3} - 2{,}821 M_3 z^{-4}$$
$$= 1 + (a_1 - 2) z^{-1} + (1 - 2a_1 + a_2) z^{-2} + (a_1 - 2a_2) z^{-3} + a_2 z^{-4}$$

$$\begin{cases} a_1 - 2 = 0 \\ 1 - 2a_1 + a_2 = -M_2 \\ a_1 - 2a_2 = -2{,}821 M_2 - M_3 \\ a_2 = -2{,}821 M_3 \end{cases}$$

$a_1 = 2$

$a_2 = 2{,}02$

$M_2 = 0{,}978$

$M_3 = -0{,}7166$

$M(z) = (1 + 2{,}821 z^{-1})(M_2 z^{-2} + M_3 z^{-3})$

$M(z) = (1 + 2{,}821 z^{-1})(0{,}978 z^{-2} - 0{,}7166 z^{-3})$

$M(z) = 0{,}978 z^{-2} (1 + 2{,}821 z^{-1})(1 - 0{,}733 z^{-1})$

$$M(z) = \frac{0{,}978 (z + 2{,}821)(z - 0{,}733)}{z^4}$$

$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$

$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + 2z^{-1} + 2{,}02 z^{-2})$

$$1 - M(z) = \frac{(z - 1)^2 (z^2 + 2z + 2{,}02)}{z^4}$$

$Como$:

$$G_D(z) = \frac{1}{G(z)}\frac{M(z)}{1-M(z)}$$

$$Temos:$$

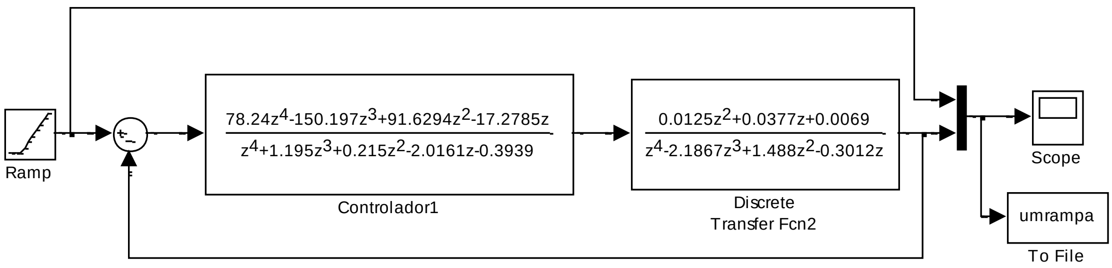
$$\frac{M(z)}{1-M(z)} = \frac{\left(\frac{0{,}978(z+2{,}821)(z-0{,}733)}{z^4}\right)}{\frac{(z-1)^2(z^2+2z+2{,}02)}{z^4}} = \frac{0{,}978(z+2{,}821)(z-0{,}733)}{(z-1)^2(z^2+2z+2{,}02)}$$

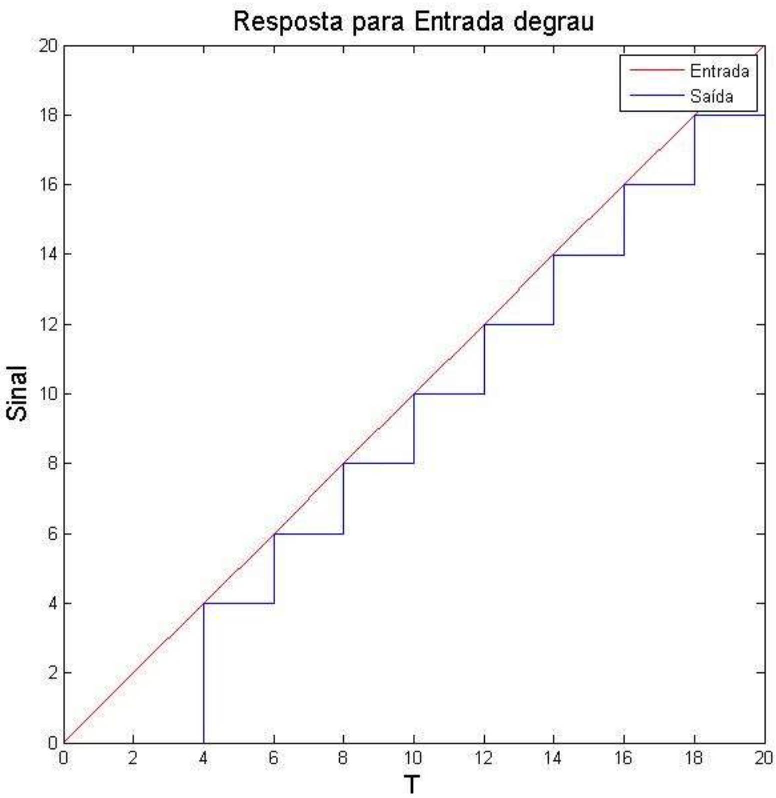
$$G_D(z) = \frac{z(z-1)(z-0{,}368)(z-0{,}8187)}{0{,}0125(z+0{,}195)(z+2{,}821)} \cdot \frac{0{,}978(z+2{,}821)(z-0{,}733)}{(z-1)^2(z^2+2z+2{,}02)}$$

$$G_D(z) = \frac{z(z-0{,}368)(z-0{,}8187)}{0{,}0125(z+0{,}195)} \cdot \frac{0{,}978(z-0{,}733)}{(z-1)(z^2+2z+2{,}02)}$$

$$G_D(z) = \frac{78.24z(z-0.368)(z-0.8187)(z-0.733)}{(z+0.195)(z-1)(z^2+2z+2.02)}$$

d) No Simulink, simule o sistema a malha fechada para entrada <u>rampa</u> unitária;





2- Considere um processo descrito pela seguinte função de transferência.

$$\boldsymbol{G(z)} = \frac{\mathbf{0,0003916(z+2,8276)(z+0,19)}}{\mathbf{(z-1)^2(z-0,2865)}}$$

a) Projete um controlador com resposta deadbeat de modo que a saída siga um <u>degrau unitário</u> em tempo mínimo;

$$R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$P = max\{\#polos\ de\ R(z) em\ z = 1, \#polos\ de\ G(z) em\ z\}$$

$$P = max\{1,2\} = 2 \quad n = 4-2 = 2 \quad \rightarrow \quad k \geq n = 2$$

$$Para\ o\ tempo\ minimo\ escolhido\ de\ k = 2:$$

$$M(z) = (1 + zero_{foroa} z^{-1})(M_k z^{-k} + \cdots)$$

$$M(z) = (1 + 2{,}8276 z^{-1})(M_1 z^{-1} + \cdots) \qquad (1)$$

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + \cdots) \qquad (2)$$

$$Substituindo\ (1) em\ (2):$$

$$1 - (1 + 2{,}8276 z^{-1})(M_1 z^{-1} + \cdots) = (1 - z^{-1})^2(1 + a_1 z^{-1} + \cdots)$$

$$Para\ manter\ esta\ relação\ com\ grau\ maximo\ z^{-3}:$$

$$1 - (1 + 2{,}8276 z^{-1})(M_1 z^{-1} + M_2 z^{-2}) = (1 - z^{-1})^2(1 + a_1 z^{-1})$$

$$1 - M_1 z^{-1} - (M_2 + 2{,}8276 M_1) z^{-2} - 2{,}8276 M_2 z^{-3} =$$

$$= 1 + (a_1 - 2) z^{-1} + (1 - 2a_1) z^{-2} + a_1 z^{-3}$$

$$\begin{cases} a_1 - 2 = M_1 \\ 1 - 2a_1 = M_2 - 2{,}8276 M_1 \\ a_1 = -2{,}8276 M_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1{,}2845 \\ M_1 = 0{,}7155 \\ M_2 = -0{,}4543 \end{cases}$$

$$M(z) = (1 + 2{,}8276 z^{-1})(0{,}7155 z^{-1} - 0{,}4543 z^{-2})$$

$$M(z) = \frac{0{,}7155(z + 2{,}8276)(z - 0{,}6349)}{z^3}$$

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^2(1 + 1{,}2845 z^{-1})$$

$$1 - M(z) = \frac{(z-1)^2(z + 1{,}2845)}{z^3}$$

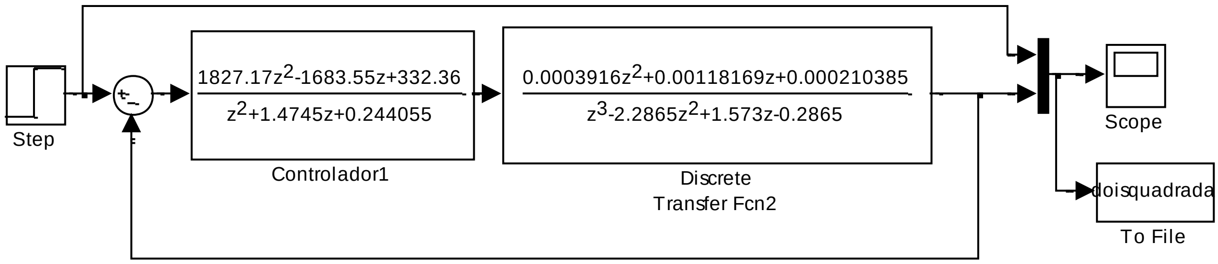
$$\frac{1}{G(z)} = \frac{(z-1)^2(z - 0{,}2865)}{0{,}0003916(z + 2{,}8276)(z + 0{,}19)}$$

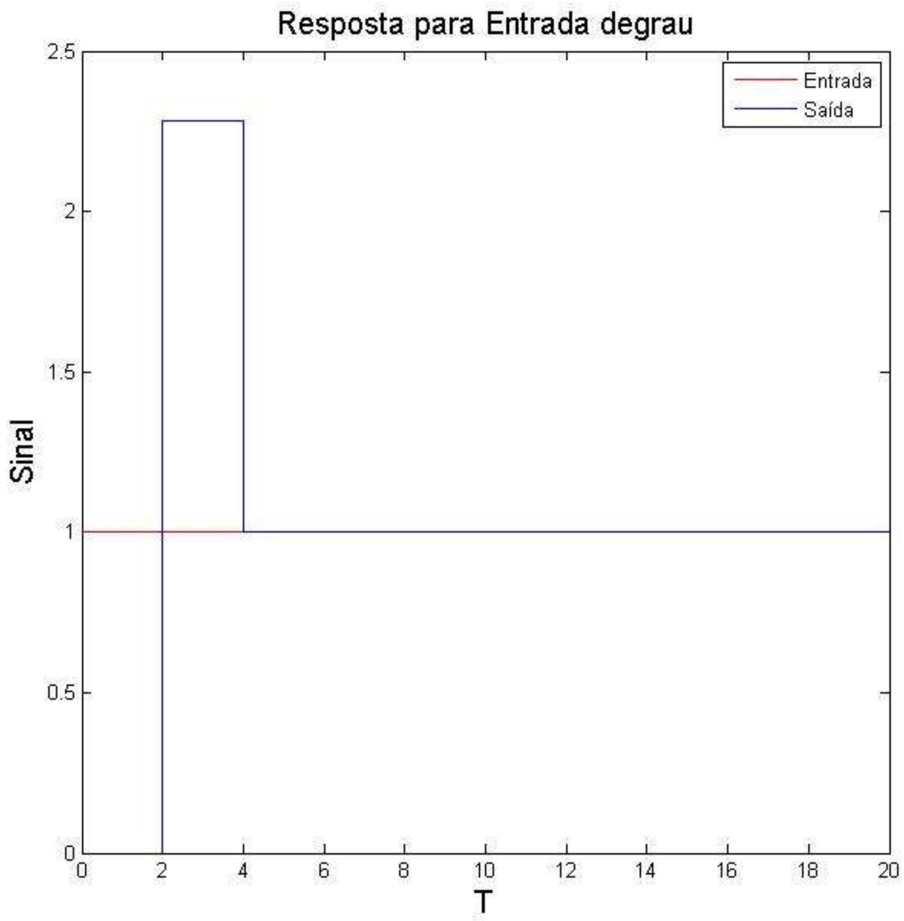
$$G_D(z) = \frac{1}{G(z)} . \frac{M(z)}{1 - M(z)} =$$

$$= \frac{(z-1)^2(z - 0{,}2865)}{0{,}0003916(z + 2{,}8276)(z + 0{,}19)} \frac{\frac{0{,}7155(z + 2{,}8276)(z - 0{,}6349)}{z^3}}{\frac{(z-1)^2(z + 1{,}2845)}{z^3}}$$

$$G_D(z) = \frac{1827{,}17(z - 0{,}6349)(z - 0{,}2865)}{(z + 0{,}19)(z + 1{,}2845)}$$

b) No Simulink, simule o sistema a malha fechada para entrada <u>degrau</u> unitário;





c) Projete um controlador com resposta deadbeat de modo que a saída siga uma <u>rampa</u> unitária em tempo mínimo;

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$P = max\{\#polos\ de\ R(z) em\ z = 1, \#polos\ de\ G(z) em\ z\}$$

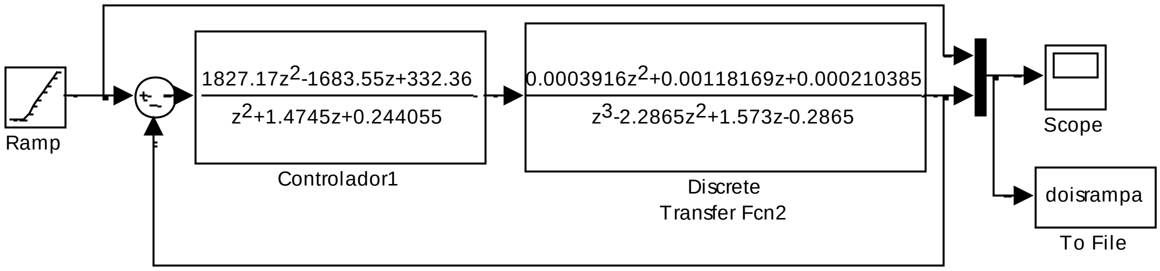
$$P = max\{2,2\} = 2 \quad n = 4 - 2 = 2 \quad \rightarrow \quad k \geq n = 2$$

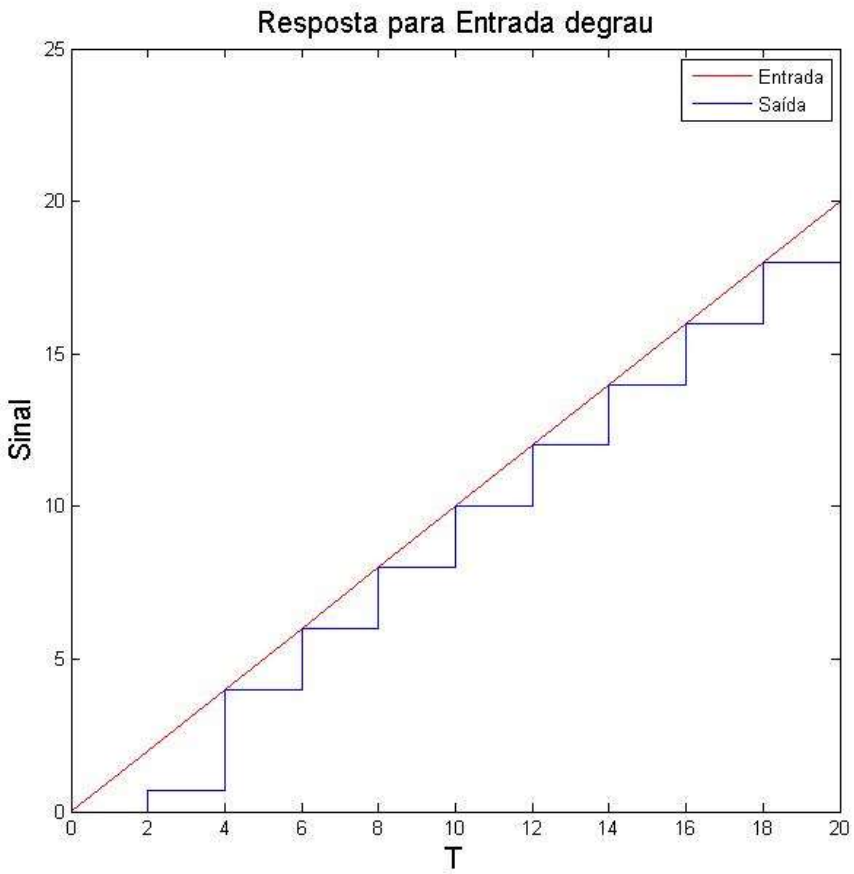
$$Para\ o\ tempo\ minimo\ escolhido\ de\ k = 2:$$

$$Como\ k\ e\ p\ nao\ mudaram\ o\ controlador\ \acute{e}\ o\ mesmo:$$

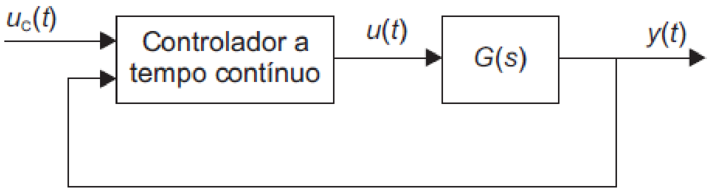
$$G_D(z) = \frac{1827{,}17(z - 0{,}6349)(z - 0{,}2865)}{(z + 0{,}19)(z + 1{,}2845)}$$

d) No Simulink, simule o sistema a malha fechada para entrada <u>rampa</u> unitária;





3- Considere o sistema de controle da figura 1



Onde a planta tem função de transferência é:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_P}{Js^2}$$

E o controlador é descrito por

$$U(s) = \frac{bk_C}{a}U_C(s) - k_C\frac{s+b}{s+a}Y(s)$$

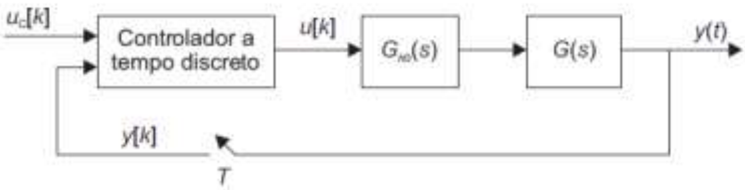
Se os parâmetros do controlador forem escolhidos como:

$$a = 2\omega_0, \qquad b = \frac{\omega_0}{2}, \qquad k_c = \frac{2J\omega^2}{k_p}$$

A função de transferência fica:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\left(\frac{\omega_0^2}{2}\right)(s + 2\omega_0)}{s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega^3}$$

E o tempo de acomodação de 5% para entrada degrau é $t_s(5\%) = 5,52/\omega_0$ como foi visto no exercício de simulação 2. Para a mesma planta deseja-se projetar um sistema de controle a tempo discreto como pode ser visto na figura a seguir:



Onde a ação de controle tem a seguinte forma:

$$u[k] = t_0 u_c[k] - s_0 y[k] - s_1 y[k-1] - r_1 u[k-1]$$

a) Mostre que a planta discretizada pode ser descrita pela função de transferência:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \alpha\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2}$$

Onde:

$$\alpha = \frac{T^2}{2}\frac{kp}{J}$$

E pela equação a diferenças:

$$y[k] - 2y[k-1] + y[k-2] = \alpha(u[k-1] + u[k-2]);$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})z\left\{\frac{k_P}{Js^3}\right\}$$

$$G(z) = \frac{T^2}{2}(1 - z^{-1}).\frac{kp}{J}.\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$$

$$G(z) = \frac{T^2}{2}\frac{kp}{J}\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2} = \alpha\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2}$$

$Assim$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \alpha\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$Y(z)(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) = \alpha U(z)(z^{-1} + z^{-2})$$

$$Y(z) - 2Y(z)z^{-1} + Y(z)z^{-2} = \alpha(U(z)z^{-1} + U(z)z^{-2})$$

Aplicando equação de diferenças:

$$y[k] - 2y[k - 1] + y[k - 2] = \alpha(u[k - 1] + u[k - 2])$$

b) Encontre a função de transferência de malha fechada do sistema, com entrada Uc(z) e saída Y (z);

$$u[k] = t_0u_c[k] - s_0y[k] - s_1y[k - 1] - r_1u[k - 1]$$

$$U(z) = t_0U_c(z) - s_0Y(z) - s_1z^{-1}Y(z) - r_1z^{-1}U(z)$$

$$U(z)(1 + r_1z^{-1}) = t_0U_c(z) - Y(z)(s_0 + s_1z^{-1})$$

Como:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \alpha\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2} \rightarrow U(z) = \frac{Y(z)(1 - z^{-1})^2}{\alpha.z^{-1}(1 + z^{-1})}$$

$$\frac{Y(z)(1 - z^{-1})^2}{\alpha.z^{-1}(1 + z^{-1})}(1 + r_1z^{-1}) = t_0U_c(z) - Y(z)(s_0 + s_1z^{-1})$$

$$Y(z)\left[\frac{(1 - z^{-1})^2(1 + r_1z^{-1})}{\alpha.z^{-1}(1 + z^{-1})} + (s_0 + s_1z^{-1})\right] = t_0U_c(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U_c(z)} = \frac{t_0\alpha.z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2(1 + r_1z^{-1}) + (s_0 + s_1z^{-1})\alpha.z^{-1}(1 + z^{-1})}$$

c) Lembrando que para o sistema tem malha fechada tenha resposta deadbeat é necessário que todos os polos estejam na origem do plano z, mostre que essa condição é alcançada para:

$$\boldsymbol{r_1 = 0,75,\ s_0 = \frac{1,25}{\alpha}, s_1 = \frac{-0,75}{\alpha}\ e\ t_0 = \frac{0,5}{\alpha};}$$

Mostre também que nessas condições, a saída é dada por:

$$\boldsymbol{y[k] = \frac{1}{2}(u_c[k - 1] + u_c[k - 2])}$$

$$\frac{Y(z)}{U_c(z)} == \frac{\frac{0,5}{\alpha}\alpha.z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^2(1+0,75z^{-1})+\left(\frac{1,25}{\alpha}+\frac{-0,75}{\alpha}z^{-1}\right)\alpha.z^{-1}(1+z^{-1})}$$

$$= \frac{0,5.z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-2z^{-1}+z^{-2})(1+0,75z^{-1})+(1,25-0,75z^{-1})(z^{-1}+z^{-2})} =$$

$Expandindo\ o\ denominador\ temos$:

$$\frac{Y(z)}{U_c(z)} = \frac{0,5.z^{-1}(1+z^{-1})}{1}$$

$$Y(z) = 0,5U_c(z)(z^{-1}+z^{-2})$$

$Aplicando\ equação\ de\ diferenças$:

$$y[k] = \frac{1}{2}(u_c[k-1]+u_c[k-2])$$

d) Abra o arquivo exsim5model.mdl, que contém o diagrama de simulação do sistema em malha fechada com controlador a tempo contínuo e a tempo discreto, o arquivo <u>ctrld.m</u> que contém a ação de controle a tempo discreto e o arquivo <u>exsim5script.m</u> onde estão definidos os parâmetros e comandos para a simulação. Considere o período de amostragem $T = \frac{1,4}{\omega_0}$ e $\omega_0 = 1$ quando necessário. Verifique como foram implementadas as ações de controle. Rode o arquivo <u>exsim5script.m</u> e analise as respostas dos sistemas com controlador a tempo contínuo e a tempo discreto e as respectivas ações de controle. Compare o desempenho da resposta do controlador deadbeat a tempo discreto com os controladores discretizados do exercício de simulação 2 levando em conta os diferentes períodos de amostragem utilizados em cada controlador.

Como pode ser observado na figura a seguir o controlador deadbeat garante que a saída do sistema se comporte como o controlador a tempo continuo, apresentando ainda um melhor tempo de resposta. Observa-se ainda que a ação de controle do controlador deadbeat não apresenta instabilidades e se comporta de forma similar ao controlador a tempo continuo. Comparando-se o desempenho do controlador deadbeat a tempo discreto e os controladores discretizados do exercício de simulação 2, podemos observar que para um elevado tempo de amostragem o controlador deadbeat garante que a ação de controle se aproxime-se da ação de controle do controlador a tempo continuo. Como pôde ser observado no exercício de simulação 2, para o período de amostragem de 1,08/wo observou-se que a ação de controle do controlador discretizado já apresentava instabilidade, o que não ocorreu com o controlador deadbeat.

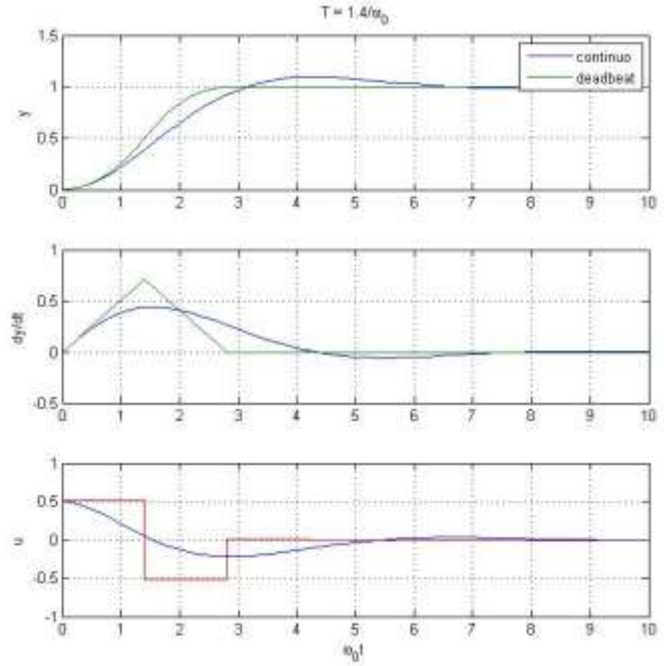


Figura : **respostas dos sistemas com controlador deadbeat**
a tempo contínuo e a tempo discreto e as respectivas ações de controle

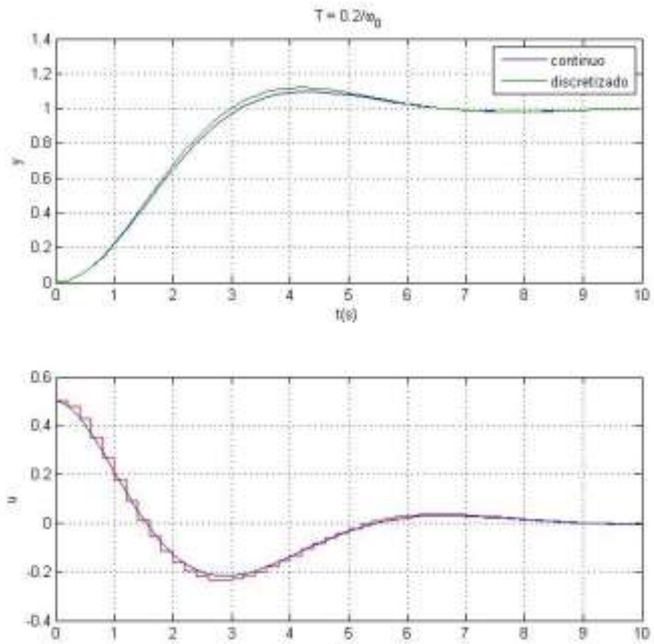


Figura : controladores discretizados do exercício de simulação 2

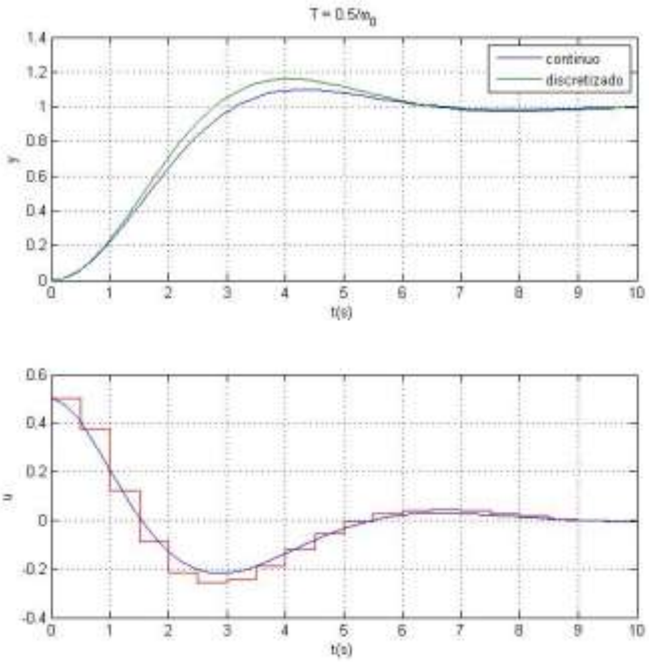


Figura : controladores discretizados do exercício de simulação 2

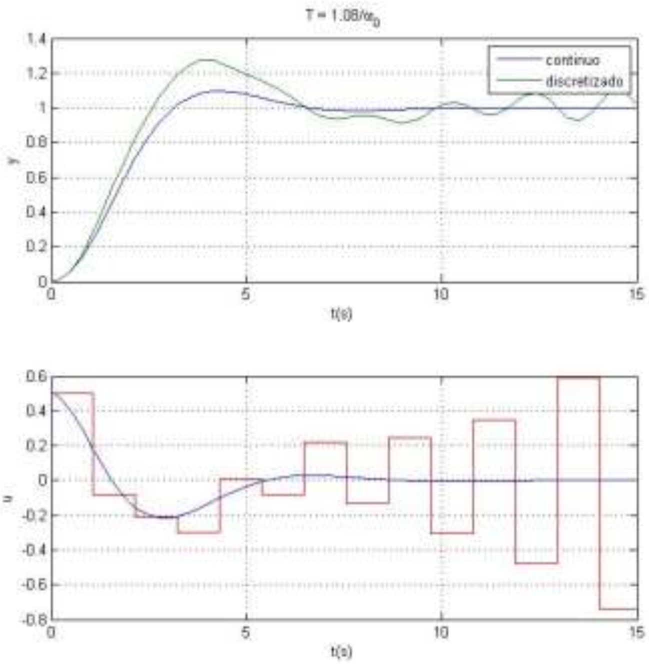


Figura : controladores discretizados do exercício de simulação 2

e) ***A resposta do sistema de controle deadbeat a tempo discreto oscila entre os instantes de amostragem? Explique a razão.***

Sim, o controle deadbeat a tempo discreto oscila entre os instantes de amostragem. Também conhecido como “inter sampling ripples” na saída do sistema. Como a planta continua evoluindo no tempo (é um sistema contínuo no tempo) como resposta às fortes atuações de controle realizadas, o que faz a planta oscilar ou apresentar um ripple na sua saída. Tanto o "ripple" do sinal de controle ou do sinal de saída da planta implica em redução da vida útil do sistema.