Pêndulo duplo

Lucas Fernandes Pereira Lima Lucas Gabriel de Almeida Reis
Victor França Tápia Guzman

Novembro 2023

1 Objetivo

O objetivo do nosso trbalho é estudar o movimento do pêndulo duplo através de simulações e cálculos, construir gráficos das funções de θ e simular o movimento

2 Overview

O pêndulo duplo é um sistema física que explicita bem o conceito de sistema caótico, para equaciná-lo será preciso a introdução e outro formalismo da mecânica clássica, o formalismo Lagrangeano, já que é bem complicado abordado de formalismo Newtoneano. Nosso objetivo com o trabalho é a dedução desse formalismo e a aplicação dele para a resolução do problema proprosto.

3 Dedução da equação de Lagrange

Sabemos que:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}, \tag{1}$$

$$\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} \tag{2}$$

$$\delta r_i = \sum_{k=i}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k \tag{3}$$

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_{k=i}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \delta r_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=i}^{n} F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=i}^{n} Q_k \delta q_k \tag{5}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{p}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{v}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} m_i \dot{v}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{v}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} \left(m_i v_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) - m_i v_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \right) \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \right) \tag{9}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \tag{11}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{v}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} \left(m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \right) \tag{13}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] \right) \tag{14}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0 \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \tag{17}$$

$$F = -\nabla V \tag{18}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{20}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{24}$$

4 Aplicação da equação de Lagrange no problema

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 \tag{25}$$

$$y_1 = -l_1 \cos\theta_1 \tag{26}$$

$$x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \tag{27}$$

$$y_2 = -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 \tag{28}$$

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \tag{29}$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \tag{30}$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \theta_1^2 \tag{31}$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \tag{32}$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \tag{33}$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 + \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \tag{34}$$

A energia cinética do sistema:

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \tag{35}$$

Unindo as equações (31), (34) e (35):

$$T = \frac{m_1}{2}(l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{m_2}{2}(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2) \tag{36}$$

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}(l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{m_2}{2} l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \tag{37}$$

As energias potenciais:

$$U_1 = -m_1 g l_1 \cos\theta_1 \tag{38}$$

$$U_2 = -m_2 g (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2) \tag{39}$$

$$U = -m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2) \tag{40}$$

$$U = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2 \tag{41}$$

Sabemos que a lagrangeana de um sistema isolado é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{42}$$

Tal que:

$$L = T - V \tag{43}$$

Logo:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 cos\theta_2 \tag{44}$$

Para resolver em θ_1 devemos calcular:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \tag{45}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \tag{46}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_2 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1 \tag{47}$$

Para θ_2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \tag{48}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \tag{49}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin\theta_2 \tag{50}$$

Portanto as soluções para $\ddot{\theta}_1$ e para $\ddot{\theta}_2$ ficam:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1^2 l_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_1(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - \theta_2))} \tag{51}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1^2 l_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_1))}{l_2(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - \theta_2))} \tag{52}$$

5 Flowchart

Usaremos bibliotecas do sympy para a resolução das EDOs do pêndulo duplo. Mudaremos as condições iniciais, iremos fazer gráficos e simularemos posteriormente os resultados obtidos utilizando também bibliotecas do sympy, evidenciando o sistema caótico

6 Equipe

Lucas Gabriel de Almeida Reis (ficará encarregado da apresentação da parte conceitual do problema, e explicação de conceitos necessários para o entendimento do problema)
Victor França Tápia Guzman (ficará encarregado da parte da implementação do problema no sympy, e simulação do movimento)
Lucas Fernandes Pereira Lima (ficará encarregado do estudo e dedução da parte matemática do problema, e montagem dos slides, também ajudará na revisão do código e da simulação)

7 Milestones e Linha do Tempo

Trabalharemos primeiro no estudo e entendimento da física do problema, depois resolveremos as equações diferenciais via sympy e simularemos em gif o resultados variando as condições iniciais

8 Referências

Mecânica Analítica, Nivaldo Lemos
Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana, João Barcelos Neto
Classical Mechanics, John Robert and Taylor
Dinâmica clássica de partículas e sistemas, Stephen Thornton