Pêndulo duplo

Trabalho final de ICF

Lucas Fernandes Pereira Lima
Lucas Gabriel de Almeida Reis
Victor França Tápia Guzman

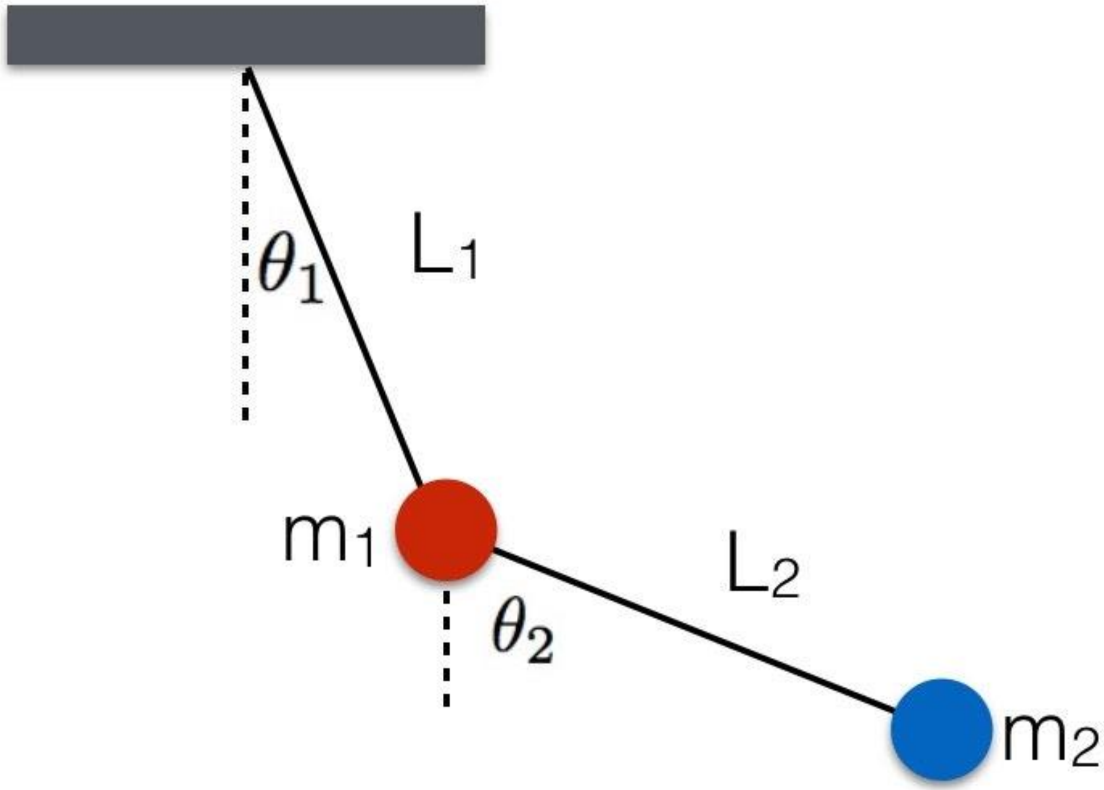
Referências

- Mecânica Analítica, Nivaldo Lemos
- Mecânica Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana, João Barcelos Neto
- Classical mechanics, Taylor
- Dinâmica clássica de partículas e sistemas, Stephen Thornton

Nessa apresentação:

- Equacionaremos o pendulo duplo pelo formalismo Lagrangeano
- Simularemos seu movimento
- Faremos gráficos das funções $\Theta(t)$
- Deixaremos explicito que é um sistema caótico

O que é um pêndulo duplo?



Formalismo Newtoniano x Formalismo Lagrangeano e Hamiltoniano

- Equacionar o pêndulo duplo pelo formalismo Newtoniano é muito complicado, o que nos leva a necessidade de abordarmos o problema de outra maneira, analiticamente, ou seja, pelo formalismo Lagrangeano e Hamiltoniano

Mecânica analítica

- Diferentemente da mecânica Newtoniana, que aborda os problemas com vetores, a mecânica analítica aborda os problemas, com escalares, coordenadas e energias, o que torna o problema do pêndulo mais simples de ser equacionado

Sistema caótico

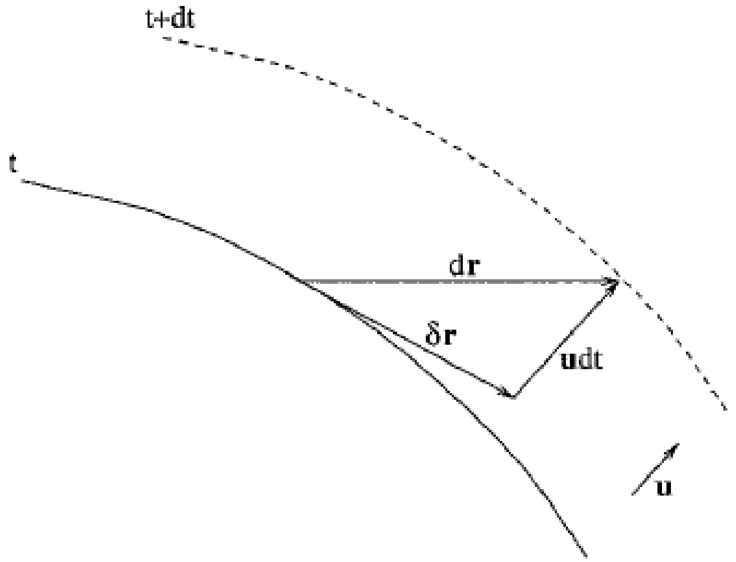
- Um sistema caótico, é aquele que é muito sensível a pequenas variações nas condições iniciais, ou seja, pequenas variações nas condições iniciais levam à resultados finais muito diferentes

Coordenadas generalizadas

- Vamos imaginar um sistema em que duas partículas estão ligadas por uma haste, com tamanho fixo. Para localizarmos esse sistema, precisaríamos de pelo menos 5 coordenadas (x, y, z, para a primeira partícula, e dois ângulos para localizar a segunda em relação a primeira).
- Podemos, SPDG, chamar essas 5 coordenadas de q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, em geral q_k
- Chamamos essas coordenadas q_i de coordenadas generalizadas, que serão de grande utilidade para o desenvolvimento do problema
- No caso do pêndulo duplo, as coordenadas generalizadas serão os ângulos de cada pêndulo com a vertical

Deslocamento virtual

- Deslocamento virtual: δr é chamado de deslocamento virtual, um deslocamento infinitesimal que leva um partícula de uma possível configuração para outra, num mesmo instante de tempo. São descolamentos infinitesimais nas posições r_n



Mecânica analítica, Nivaldo Lemos

Solução do problema (parte 1, equação de Lagrange)

- Nova notação!

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}, \qquad \ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

- Vamos às deduções!

$$\delta r_i = \sum_{k=i}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_{k=i}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \delta r_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=i}^{n} F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{k=i}^{n} Q_k \delta q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

(Chamamos Q_k
de força generalizada)

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{p}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{v}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} m_i \dot{v}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{v}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\left(m_i v_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right) - m_i v_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

O que nos permite escrever:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{v}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} \left(m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] \right)$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \Rightarrow \quad = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

Portanto:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

A equação que acabamos de encontrar é chamada de equação de Lagrange, um equivalente a segunda lei de Newton para a mecânica analítica. Vamos agora aplica-la para uma força conservativa:

$$F = -\nabla V$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k} = 0$$

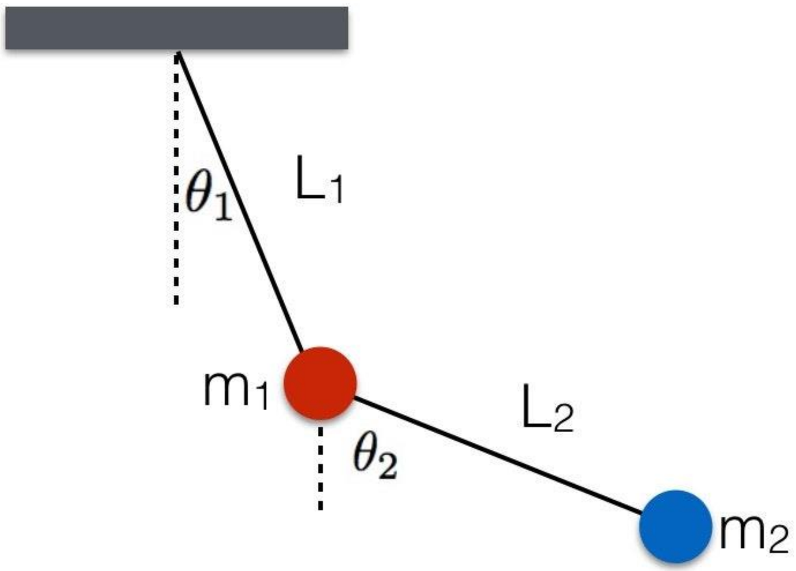
$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k} = 0$$

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Dados a L o nome de Lagrangeana do sistema

Solução do problema (parte 2, solução da Lagrangeana)



$$x_1 = l_1 \sin\theta_1$$

$$y_1 = -l_1 \cos\theta_1$$

$$x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$$

$$y_2 = -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2$$

$$\dot{x}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1$$

$$\dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

$$\dot{x}_2 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$

$$\dot{y}_2 = l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 + \dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

```
##definir as posiçoes das massas x1,y1,x2,y2

x1 = L1*sp.sin(the1)
y1 = -L1*sp.cos(the1)
x2 = L1*sp.sin(the1)+L2*sp.sin(the2)
y2 = -L1*sp.cos(the1)-L2*sp.cos(the2)
```

As energias cinéticas:

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$T = \frac{m_1}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2)$$

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{m_2}{2}l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

```
# energia cinética

K1 = 1/2 * m1 * (sp.diff(x1, t)**2 + sp.diff(y1, t)**2)
K2 = 1/2 * m2 * (sp.diff(x2, t)**2 + sp.diff(y2, t)**2)
K = K1+K2
```

As energias potenciais:

$$U_1 = -m_1gl_1\cos\theta_1$$

$$U_2 = -m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

$$U = -m_1gl_1\cos\theta_1 - m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

$$U = -(m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2$$

```
# energia potencial gravitacional

Pg1 = m1*g*y1
Pg2 = m2*g*y2
PG = Pg1 + Pg2
```

Sabemos pela parte 1 que a Lagrangeana de um sistema isolado com forças conservativas é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$L = T - V$$

```
# lagrangeana

L = K - PG
```

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 cos\theta_2$$

Para theta 1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_2 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1$$

Para theta 2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin\theta_2$$

Portanto, as soluções:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1^2 l_1(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_1(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - \theta_2))}$$

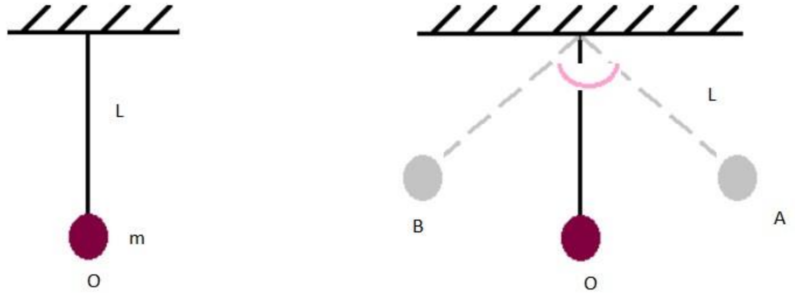
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1^2 l_1(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_1))}{l_2(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - \theta_2))}$$

```python
#obtendo as equaçoes de lagrange
EL1 = sp.diff(sp.diff(L, dthe1), t) - sp.diff(L, the1)
EL2 = sp.diff(sp.diff(L, dthe2), t) - sp.diff(L, the2)
```

$\Rightarrow$

```python
sol1 = sp.solve([EL1], (d2the1))
sol2 = sp.solve([EL2], (d2the2))
```

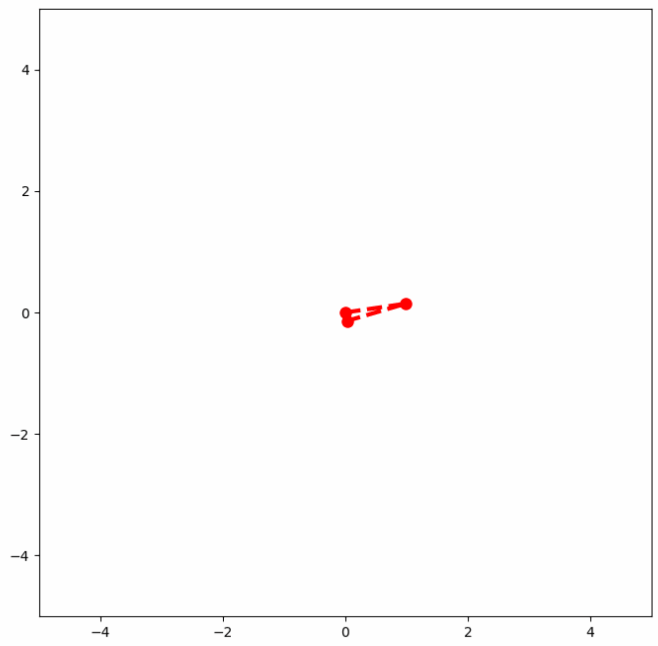
Em comparação com o pêndulo simples...



$$\ddot{\theta} = -\frac{g\theta}{l}$$

A partir daí, solucionamos as equações diferenciais via sympy e montamos gráficos e o gif a partir dos resultados

$m_1 = 1000; m_2 = 1000$
$l_1 = 1; l_2 = 1$



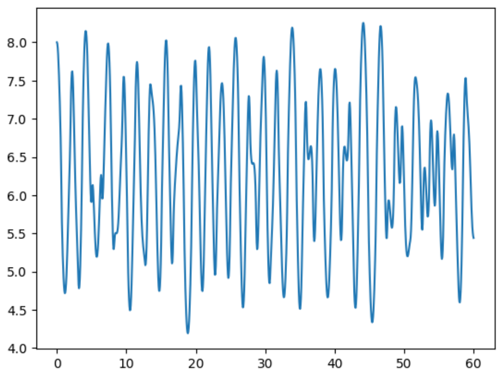


Gráfico Θ_1 (t)

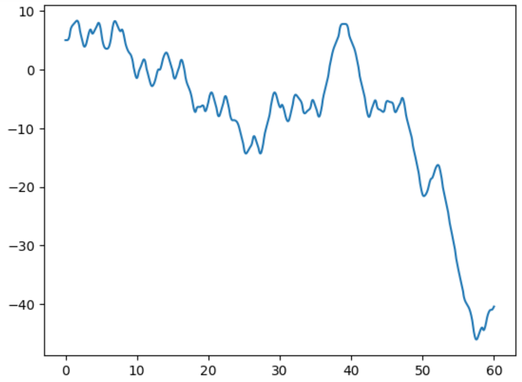
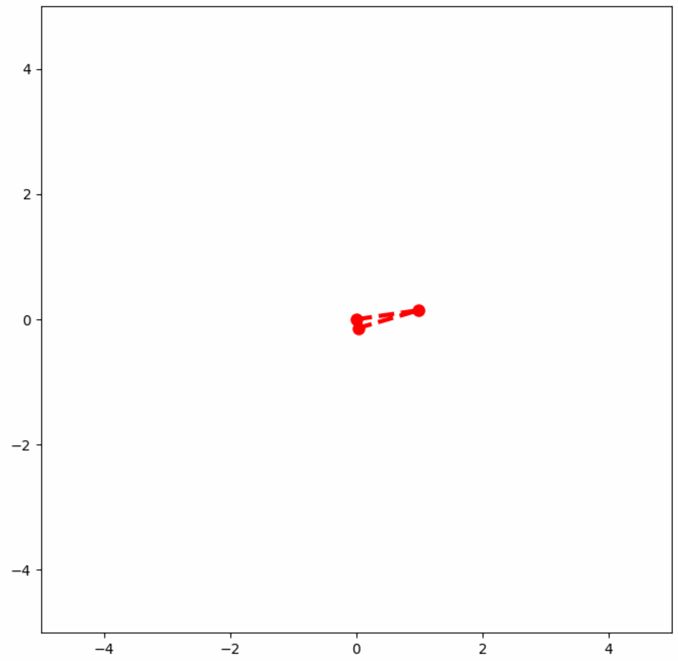


Gráfico Θ_2 (t)

$m_1 = 1000; m_2 = 1001$
$l_1 = 1; l_2 = 1$



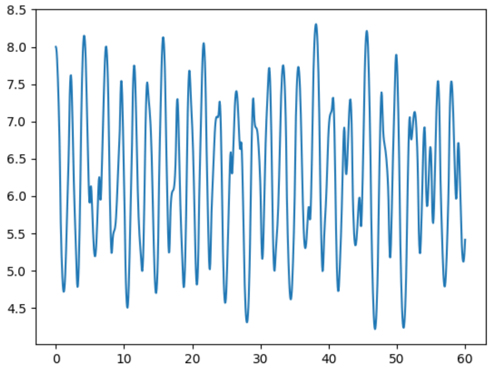


Gráfico Θ_1 (t)

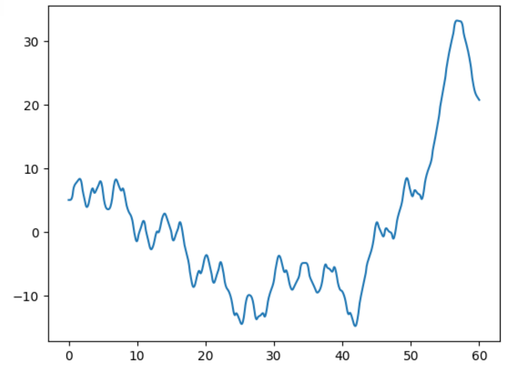


Gráfico Θ_2 (t)