

Universidade Estadual de Londrina
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Relatório de Iniciação Científica

TÍTULO DO PROJETO:

*Introdução à Morfologia Matemática
Binária e em Tons de Cinza*

Orientando: Raul Ambrozio Valente Neto

Orientador: Prof. Dr. Marcos Eduardo R. Valle Mesquita

Londrina, 7 de junho de 2010.

1 Introdução

A morfologia matemática se refere ao estudo e análise de imagens usando operadores não lineares. Esses estudos foram inicializados por Georges Matheron e Jean Serra que se concentraram em estruturas dentro de imagens [5, 6]. Eles começaram estudando imagens binárias, como serão extensivamente estudadas na primeira parte do projeto de iniciação científica. Na segunda parte, as operações de dilatação e erosão para imagens em tons de cinza serão apresentadas. As operações para imagens em tons de cinza foram apresentadas por Sternberg e Serra [3, 8, 5].

Dentre as atividades que a morfologia executa no processamento de imagens estão: aumento de qualidade, restauração, detecção de falhas, análise da textura, análise particular, análise de formas, compreensão, dentre outras [7, 2]. Essas ferramentas são aplicadas em diversas áreas como visão em robos, inspeções, microscopia, biologia, metalurgia e documentos digitais. Ambas áreas e técnicas continuam a se expandir [1].

O processo da morfologia morfológica se baseia na geometria, em um contexto bem específico. A idéia básica é percorrer uma imagem com um *elemento estruturante* e quantificar a maneira com que este se encaixa ou não na imagem. No caso afirmativo, marca-se o local ou nível de cinza onde o elemento estruturante coube na imagem. Dessa forma, pode-se extrair informações relevantes sobre o tamanho e forma de estruturas na imagem. Segundo Matheron, as informações extraídas da imagem dependem da maneira com que se observa a imagem. Assim, existem algoritmos que selecionam o elemento estruturante mais adequado de acordo com as necessidades, embora, esse processo também pode ser efetuado por um ser humano. Resumindo, todos os processos da morfologia dependem da escolha e do lugar onde o elemento estruturante se encaixa na imagem.

Parte I

Morfologia Matemática Binária

2 Imagens Euclidianas e Imagens Binárias Discretas

Uma imagem binária é composta por dois tipos de pixels: plano de fundo e o plano principal, que são representados normalmente usando preto e branco. A morfologia é baseada na teoria dos conjuntos e no fato de que o conjunto de todos os pixels pretos constituem uma completa descrição de imagens binárias.

No estudo da morfologia é usado as operações entre conjuntos. Em particular, lembramos as Leis de DeMorgan:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ e } (A \cap B)' = A' \cup B', \quad (1)$$

onde A e B são conjuntos e A' denota o complementar do conjunto A .

Serão considerados dois tipos de imagens binárias: Euclidianas e discretas. Uma imagem binária Euclidiana é um subconjunto do espaço Euclidiano n -dimensional. Para processar sinais, tem-se $n = 1$ e para imagens, tem-se $n = 2$. Nesse projeto de iniciação científica, o foco será em imagens binárias definidas em \mathbb{R}^2 . Portanto as imagens Euclidianas serão um subconjunto do plano cartesiano \mathbb{R}^2 . Aqui, um conjunto no plano Euclidiano representa a região principal de uma certa imagem binária enquanto que seu complementar corresponde ao plano de fundo.

Para implementação digital serão usadas as imagens discretas, como subconjunto do plano cartesiano \mathbb{Z}^2 , onde \mathbb{Z} denota o conjunto dos números inteiros.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Imagem Digital b) Elemento Estruturante

Figura 1: Exemplo de imagem e elemento estruturante digital.

Na maioria das vezes, as letras A, B, C, D e E representam imagens Euclidianas, e as letras S, T, U e V para imagens digitais. As letras B e E serão usadas para os elementos estruturantes (que são geralmente imagens pequenas).

As imagens digitais serão representadas por matrizes. Entretanto, representações distintas serão usadas para imagens e elemento estruturantes por conta da origem. De fato, para imagens digitais, a origem sempre estará no topo esquerdo. Para elementos estruturantes, a origem será o pixel central. Para facilitar a visualização da imagem, pode-se usar matrizes cujos elementos assumem apenas os valores 1 e 0. Nesse caso, 1 representa representando o plano principal e 0 o plano de fundo. A figura 1 apresenta um exemplo de imagem e elemento estruturante digital.

Na próximas seções apresentaremos as operações de erosão e dilatação. Posteriormente, apresentaremos algumas propriedades algébricas desses operadores. Em seguida, apresentamos as operações de abertura e fechamento e suas propriedades algébricas como filtros. A primeira parte do projeto termina com implementações computacionais das operações de dilatação e erosão.

3 Erosão

Para que o elemento estruturante caiba na imagem é necessário somente uma operação básica no Espaço-Euclidiano que é seguinte: A *translação* de um conjunto A por x , denotado $A + x$ ou A_x , e definido por:

$$A + x = \{a + x : a \in A\}. \quad (2)$$

Geometricamente, $A + x$ translada A por um vetor x do plano.

Uma operação fundamental da morfologia matemática é a erosão. A erosão do conjunto A pelo conjunto B , denotado por $A \ominus B$, é definida através da seguinte equação:

$$A \ominus B = \{x : B + x \subseteq A\} = \{x : B_x \subseteq A\}, \quad (3)$$

onde \subseteq significa a relação de inclusão de conjuntos. Em palavras, $A \ominus B$ consiste de todos os pontos em que B transladoado x cabe em A . A cerca da erosão, A é a imagem de entrada e o B o elemento estruturante. A erosão é escrita usando uma notação de operador da seguinte forma: $\varepsilon_B(A) := A \ominus B$.

Se a origem do elemento estruturante assume valor 1, então a erosão diminui o tamanho da imagem.

O seguinte teorema mostra que a erosão de uma imagem A por um elemento estruturante B pode ser interpretada como a intersecção de translações da imagem A .

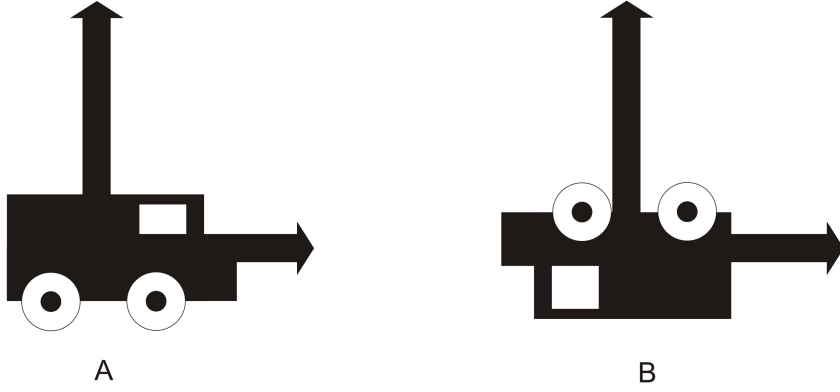


Figura 2: Elemento estruturante A e $B = \check{A}$.

Teorema 1. A seguinte equação vale para todo A e B , onde A_{-b} é a translação de A por $-b$:

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_{-b}. \quad (4)$$

Demonstração.

$$x \in A \ominus B \Leftrightarrow B_x \subseteq A \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B, x + b \in A \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A : x + b = a \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A : x = a - b \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B, x \in A_{-b} \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{b \in B} A_{-b}. \quad (10)$$

□

Em geral, o elemento estruturante B é muito menor que a imagem A . Consequentemente, como veremos na seção 7, o teorema 1 fornece um método eficiente de determinar a erosão $A \ominus B$.

Um exemplo da erosão aparece na figura 3.

4 Dilatação

A segunda operação básica da morfologia matemática é a dilatação. A dilatação de uma imagem A por um elemento estruturante B é definida através da equação:

$$A \oplus B = [(A)' \ominus \check{B}]', \quad (11)$$

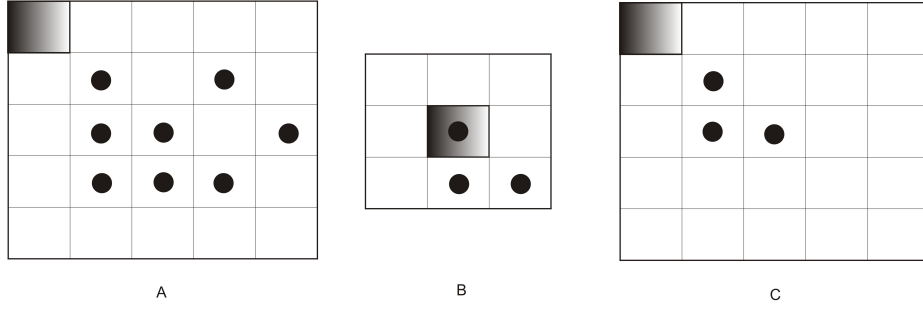


Figura 3: Erosão: $C = A \ominus B$.

onde A' é o complementar de A e $\check{B} = \{-b : b \in B\}$ é a reflexão de B ou uma rotação de 180° sobre a origem. A dilatação também é denotada na forma de um operador da seguinte forma $\delta_B(A) := A \oplus B$.

Note que a dilatação de A por B é determinada da seguinte forma: Primeiro, B é rotacionado em torno da origem, para obter \check{B} . Depois, A' é erodido por \check{B} e, finalmente, a dilatação é obtida determinando o complementar do resultado da erosão. Intuitivamente, a dilatação incha a imagem utilizando o elemento estruturante.

A dilatação satisfaz várias propriedades interessantes. Por exemplo, o seguinte teorema vale para todo conjunto A e B :

Teorema 2. A dilatação $A \oplus B$ pode ser escrita como segue usando união de translações do conjunto A :

$$A \oplus B = \cup\{A + b : b \in B\} = \bigcup_{b \in B} A_b. \quad (12)$$

Demonstração. Denotando $C = A'$, temos

$$A \oplus B = [A' \ominus \check{B}]' \quad (13)$$

$$= [C \ominus \check{B}]' \quad (14)$$

$$= [\cap\{C + b : b \in B\}]' \quad (15)$$

$$= \cup\{C' + b : b \in B\} \quad (16)$$

$$= \cup\{A + b : b \in B\}. \quad (17)$$

□

Teorema 3. A dilatação é uma operação comutativa, isto é $A \oplus B = B \oplus A$:

Demonstração. Denotando $C = A'$ e $D = \check{B}$, temos:

$$A \oplus B = \{c : c = a + b, a \in A, b \in B\} \quad (18)$$

$$= \{c : c = b + a, a \in A, b \in B\} \quad (19)$$

$$= B \oplus A. \quad (20)$$

□

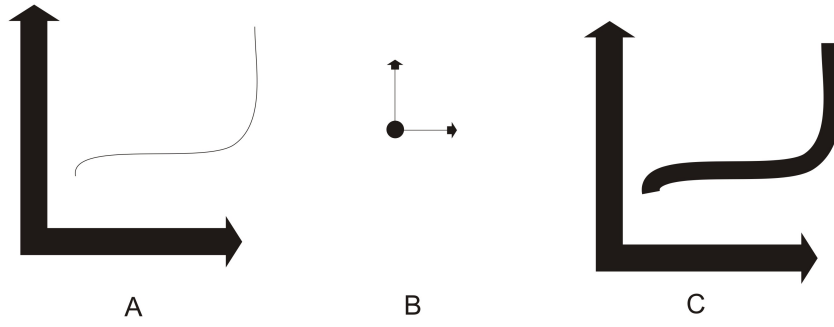


Figura 4: Dilatação: $C = A \oplus B$.

O teorema 2 diz que a dilatação é obtida efetuando a união de translações da imagem por todos os pontos do elemento estruturante B . Escrita dessa fórmula, a dilatação coincide com a adição de Minkowski [4, 2]. Essa formulação é usada para implementar a dilatação de uma imagem, pois assim só é necessário transladar a imagem pelos elementos do elemento estruturante, que em geral são poucos comparados com o número de pixels da image. Finalmente, como a dilatação é comutativa, temo-se que

$$A \oplus B = \cup \{B + a : a \in A\} = \bigcup_{a \in A} B_a. \quad (21)$$

Geometricamente, essa formulação significa estampar o elemento estruturante em cada pixel ativo da figura 4. Essa operação é usada também em softwares gráficos como Corel Draw e Photo Shop em algumas de suas ferramentas. Outra formulação da dilatação é dada quando o elemento estruturante rotacionado intersecciona a imagem. Precisamente, através do seguinte teorema.

Teorema 4. *A dilatação também pode ser expressa como $A \oplus B = \{x : \check{B}_x \cap A \neq \emptyset\}$*

Demonstração.

$$A \oplus B = [A' \ominus \check{B}]' \quad (22)$$

$$= \{x : \check{B} + x \subseteq A'\}' \quad (23)$$

$$= \{x : (\check{B} + x) \cap A = \emptyset\}' \quad (24)$$

$$= \{x : (\check{B} + x) \cap A \neq \emptyset\}. \quad (25)$$

□

Um exemplo da dilatação é dado nas figuras 5 e 4. Visualmente, a dilatação carimba o elemento estruturante na imagem, já a erosão diminui a estrutura da imagem.

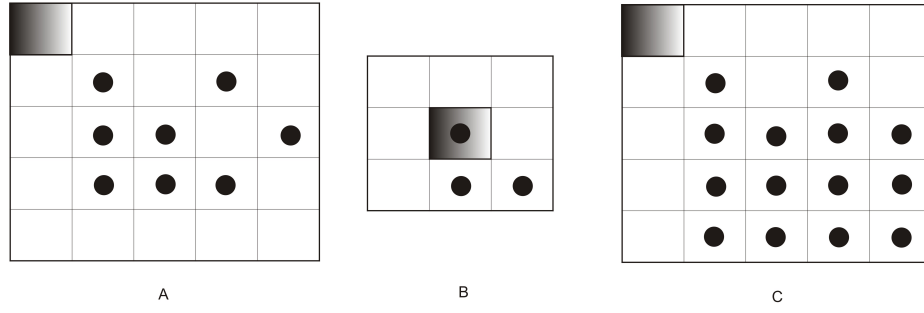


Figura 5: Dilatação: $C = A \oplus B$, onde A é uma imagem digital e B é um elemento estruturante digital.

5 Abertura e Fechamento

A abertura da imagem A por um elemento estruturante B , denotado $A \circ B$, é definida como a erosão de A por B seguida da dilatação por B . Precisamente, tem-se

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B. \quad (26)$$

A notação de função para abertura é $\gamma_B(A) := A \circ B$. O seguinte teorema apresenta uma forma alternativa de se expressar a abertura de A por B .

Teorema 5. *A abertura pode ser escrita como: $A \circ B = \cup\{B_x : B_x \subset A\}$.*

Demonstração.

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (27)$$

$$= \{x : B + x \subseteq A\} \oplus B \quad (28)$$

$$= \cup\{B + x : B + x \subseteq A\} \quad (29)$$

$$= \cup\{B_x : B_x \subseteq A\}. \quad (30)$$

□

Esse teorema revela que a abertura é a união de todas as translações do elemento estruturante que cabem na imagem. Intuitivamente, a abertura carimba o elemento estruturante em cada ponto onde esse cabe na imagem. A abertura pode ser aplicada como filtro para suavizar bordas ou cantos em imagens [2, 7].

A operação dual da abertura é o fechamento, que é definido por uma dilatação seguido da erosão pelo mesmo elemento estruturante. O fechamento de A por B , denotado por $A \bullet B$, é definido como segue:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B \quad (31)$$

O fechamento também é denotado por $\phi_B(A) := A \bullet B$ em notação de função. Visualmente, ao contrário da abertura que suaviza as bicos das imagens, o fechamento de uma imagem suaviza bicos dentro do plano de fundo.

O seguinte teorema confirma que a abertura é o operador dual do fechamento e vice-versa.

Teorema 6. A abertura pode ser escrita em função do fechamento: $A \circ B = (A' \bullet \check{B})'$. Dualmente, o fechamento pode ser escrito em função da abertura: $A \bullet B = (A' \circ \check{B})'$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $A \circ B = (A' \bullet \check{B})'$:

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (32)$$

$$= ((A \ominus B)' \ominus \check{B})' \quad (33)$$

$$= ((A' \oplus \check{B}) \ominus \check{B})' \quad (34)$$

$$= (A' \bullet \check{B})'. \quad (35)$$

A segunda parte do teorema segue da seguinte observação: Como a equação $A \circ B = (A' \bullet \check{B})'$ é válida para todos conjuntos A e B , tomando $C = A'$ e $D = \check{B}$ obtemos:

$$A' \circ \check{B} = (C \bullet D)' \quad (36)$$

$$\Leftrightarrow (A' \circ \check{B})' = C \bullet D \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow A \bullet B = (C' \circ \check{D})'. \quad (38)$$

□

6 Algumas Propriedades das Operações de Erosão, Dilatação, Abertura e Fechamento

Uma qualidade que torna a morfologia matemática muito atraente é a existência de um sistema algébrico de relações envolvendo a erosão, dilatação, abertura e fechamento, e as operações básicas de conjuntos.

Duas relações importantes são a comutatividade e a associatividade da dilatação. A comutatividade já foi vista. A associatividade é expressa no seguinte teorema:

Teorema 7. A dilatação é uma operação associativa, isto é: $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$.

Demonstração. Lembre-se que

$$A \oplus B = \cup\{B + a : a \in A\} = \cup\{B_a : a \in A\} \quad (39)$$

$$= \cup\{b + a : a \in A, b \in B\}. \quad (40)$$

Assim,

$$(A \oplus B) \oplus C = \cup\{C + d : d \in A \oplus B\} \quad (41)$$

$$= \cup\{c + d : d \in A \oplus B, c \in C\} \quad (42)$$

$$= \cup\{c + (b + a) : a \in A, b \in B, c \in C\} \quad (43)$$

$$= \cup\{a + (b + a) : a \in A, b \in B, c \in C\} \quad (44)$$

$$= \cup\{a + e : a \in A, e \in B \oplus C\} \quad (45)$$

$$= \cup\{A + e : e \in B \oplus C\} \quad (46)$$

$$= (B \oplus A) \oplus A = A \oplus (B \oplus C). \quad (47)$$

□

A associatividade da dilatação permite a omissão do parenteses em expressões da forma $A \oplus B \oplus C$.

Quando $B \oplus C$ é um elemento estruturante grande, pode-se empregar o seguinte teorema para calcular a erosão de A por $B \oplus C$:

Teorema 8. A equação $A \ominus (B \oplus C) = (A \ominus B) \ominus C$ vale para todos conjuntos A, B e C :

Demonstração.

$$A \ominus (B \oplus C) = \cap \{A - d : d \in B \oplus C\} \quad (48)$$

$$= \cap \{a - d : a \in A, d \in B \oplus C\} \quad (49)$$

$$= \cap \{a - (b + c) : a \in A, b \in B, c \in C\} \quad (50)$$

$$= \cap \{(a - b) - c : a \in A, b \in B, c \in C\} \quad (51)$$

$$= \cap \{e - c : e \in A \ominus B, c \in C\} \quad (52)$$

$$= \cap \{(A \ominus B) - c : c \in C\} \quad (53)$$

$$= (A \ominus B) \ominus C. \quad (54)$$

□

Em vista dos teoremas anteriores, emprega-se a seguinte notação para a dilatação repetida da mesma imagem:

$$nB = B \oplus B \oplus B \oplus \dots \oplus B. \quad (55)$$

Desse modo, tem-se

$$A \ominus 2B = A \ominus (B \oplus B) = (A \ominus B) \ominus B \quad (56)$$

e

$$A \ominus 3B = [(A \ominus B) \ominus B] \ominus B. \quad (57)$$

Assim como a erosão e a dilatação, a abertura e o fechamento são ambas operações invariante para a translação. Em termos matematicos, tem-se $A_x \circ B = (A \circ B)_x$ e $A_x \bullet B = (A \bullet B)_x$. Além disso, o seguinte teorema mostre que as operações de abertura e fechamento são crescentes com respeito a inclusão de conjuntos:

Teorema 9. Se $A \subseteq B$ então $A \oplus D \subseteq B \oplus D$ e $A \ominus D \subseteq B \ominus D$.

Demonstração. Suponha $A \subseteq B$. Primeiramente, mostraremos que $A \oplus D \subseteq B \oplus D$. De fato, tome $x \in A \oplus D$. Pela definição de dilatação, existem $a \in A$ e $d \in D$, tais que $x = a + d$. Como $a \in A$ e $A \subseteq B$, então $a \in B$. Entretanto $a \in B$ e $d \in D$ implica $x \in B \oplus D$.

Mostraremos agora que $A \ominus D \subseteq B \ominus D$. De fato, tome $x \in A \ominus D$. Assim, $x + d \in A$ para todo $d \in D$. Entretanto $A \subseteq B$ portanto, $x + d \in B$ para todo $d \in D$. Pela definição de dilatação, $x \in B \ominus D$. □

Um operador Ψ é chamado de anti-extensivo se $\Psi(A)$ é sempre um subconjunto de A . Dualmente, Ψ é dito extensivo se $\Psi(A)$ sempre contém A . A abertura é anti-extensiva, i.e., $A \circ B$ tem de ser um conjunto de A . Isso pelo fato da abertura ser a união de todos os pontos onde o elemento estruturante cabe na imagem. Por outro lado, o fechamento é extensivo, i.e., $A \bullet B$ tem que conter A . Resumindo, a ordem de relação é sempre válida:

$$(A \circ B) \subseteq A \subseteq (A \bullet B). \quad (58)$$

O seguinte teorema mostra que as operações de dilatação e erosão foram uma adjunção [4].

Teorema 10. Para todos conjuntos A , B e C , tem-se $A \subseteq B \ominus C \iff B \supseteq A \oplus C$.

Demonstração.

\Rightarrow Suponha $A \subseteq B \ominus C$. Tomemos $x \in A \oplus C$. Há um $a \in A$ e um $c \in C$ onde $x = a + c$. Mas, $a \in B \ominus C$ implica $C + a \subseteq B$, ou seja, para todo $c \in C$, $a + c \in B$. Mas, $x = a + c$. Portanto $x \in B$.

\Leftarrow Seja $x \in A$. Para todo $c \in C$, $x + c \in A \oplus C$. Mas, por hipótese, $A \oplus C \subseteq B$. Logo, $x + c \in B$, ou seja, $C + x \subseteq B$, pois a equação 38 é válida para todo $c \in C$.

Pela definição de erosão, temos que:

$$x \in B \ominus C = \{x : C + x \subseteq B\} \quad (59)$$

que conclui a demonstração. \square

O operador Ψ é chamado idepotente se, para qualquer conjunto A , $\Psi(\Psi(A)) = \Psi(A)$. Em outras palavras, operando Ψ^2 é equivalente à Ψ . Tanto a abertura quanto o fechamento são idepotentes:

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B \quad (60)$$

$$(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B. \quad (61)$$

Para demonstrar as relações apresentadas acima, é necessário o seguinte lema:

Lema 11. As seguintes relações entre erosão, dilatação, abertura e fechamento são válidas para todos conjuntos A e B :

$$A \oplus B = (A \oplus B) \circ B = (A \bullet B) \oplus B. \quad (62)$$

Demonstração. Primeiramente, tome $G = A \oplus B$, $H = G \ominus B$ e $I = H \oplus B$. Agora, pelo teorema 10, $G = A \oplus B \Rightarrow A \subseteq G \ominus B = H$ e $H = G \ominus B \Rightarrow G \supseteq H \oplus B = I$. Mas $A \subseteq H \Rightarrow A \oplus B \subseteq H \oplus B$. Como $G = A \oplus B$ e $I = H \oplus B$, $G \subseteq I$. Finalmente, $G \supseteq I$ e $G \subseteq I \Rightarrow G = I$. Logo, $A \oplus B = H \oplus B = (G \ominus B) \oplus B = ((A \oplus B) \ominus B) \oplus B = (A \bullet B) \oplus B$. \square

Teorema 12. O fechamento é um operação indepotente, ou seja, $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$.

Demonstração.

$$A \oplus B = (A \bullet B) \oplus B, \text{ aplicando a erosão nos dois lados} \quad (63)$$

$$(A \oplus B) \ominus B = ((A \bullet B) \oplus B) \ominus B \quad (64)$$

$$A \bullet B = ((A \bullet B) \bullet B). \quad (65)$$

\square

A importância da idepotencia é que a imagem aberta ou fechada não terá mudanças após serem abertas ou fechadas novamente. Em síntese, ao passo em que a erosão e dilatação satisfazem duas propriedades operacionais básicas, invariância translacional e aumento monotônico, abertura (fechamento) satisfazem outras duas, antiextensividade (extensividade) e idepotencia.

7 Implementação Computacional da Erosão e Dilatação

As operações de dilatação e erosão foram implementadas nos softwares MATLAB e GNU OCTAVE como segue:

7.1 Erosão 1

Utilizando a equação $A \ominus B = \{x : B + x \subseteq A\}$, pode-se formular o algoritmo:

```
function C=erosao(A,B)

[M,N]=size(A); % Dimensão da matriz;
[Q,R]=size(B); % Dimensão do elemento estruturante;

% Os seguintes passos são efetuados para deixar o zero do
% elemento estruturante exatamente no centro dele!
if mod(Q,2)==0
B=[B;zeros(1,R)]; % Adicionar uma linha em B se
%ele tiver um número par de linhas;
Q=Q+1;
end
if mod(R,2)==0
B=[B,zeros(Q,1)]; % Adicionar uma coluna em B se
%ele tiver um número par de colunas;
R=R+1;
end

Q=floor(Q/2); R=floor(R/2); % Metada da dimensão do
%elemento estruturante;

A=[zeros(M,R), A, zeros(M,R)]; % Adicionar colunas;
A=[zeros(Q,N+2*R); A; zeros(Q,N+2*R)]; % Adicionar linhas;

% EFETUAR A EROSÃO!!!
C=zeros(M,N); % Construir uma matriz de zeros com o mesmo
%tamanho da imagem;
for i=Q+1:M+Q
for j=R+1:N+R
% figure(1); imshow(A((i-Q):(i+Q),(j-R):(j+R))); pause(0);
if (min(min(B<=A((i-Q):(i+Q),(j-R):(j+R))))==1)
% Verificar se B_x é um subconjunto de A;
C(i-Q,j-R)=1; % Em caso afirmativo, incluir x em C.
% disp('Coube!!!'); pause(2);
end
end
end
```

end

Essa forma de implementação não é muito viável para imagens muito grandes, pois a varredura demorará muito e o número de operações se torna muito elevado. Em outras palavras, essa implementação é recomendada para imagens pequenas.

7.2 Erosão 2

Utilizando a equação $A \ominus B = \cap \{A - b : b \in B\}$, pode-se obter o seguinte algoritmo:

```
function C=erosao2(A,B)

[M,N]=size(A); % Dimensão da matriz;
[Q,R]=size(B); % Dimensão do elemento estruturante;

S=floor(Q/2); T=floor(R/2); % Metade da dimensão do
%elemento estruturante;

C=A;
for i=1:Q
for j=1:R
if B(i,j)==1
Left=max(T-j+1,0);
Right=max(0,j-T-1);
Up=max(S-i+1,0);
Down=max(0,i-S-1);
C=min(C,[zeros(Up,N);zeros(M-Up-Down,Left),
A(1+Down:M-Up,1+Right:N-Left),zeros(M-Down-Up,Right);zeros(Down,N)])];
end
end
end
end
```

Essa implementação é mais rápida que a anterior pois o número de operações é menor. Isso ocorre porque é transladado a imagem nas direções dos pixels ativos do elemento estruturante, que usualmente é pequeno.

7.3 Dilatação

Utilizando a equação $A \oplus B = \cup \{A + b : b \in B\}$, obtem-se o seguinte algoritmo:

```
function C=dilatacao(A,B)

[M,N]=size(A); % Dimensão da matriz;
[Q,R]=size(B); % Dimensão do elemento estruturante;

S=floor(Q/2); T=floor(R/2); % Metade da dimensão do
```

```
&elemento estruturante;
```

```
C=A;
for i=1:Q
for j=1:R
if B(i,j)==1
Right=max(T-j+1,0);
Left=max(0,j-T-1);
Down=max(S-i+1,0);
Up=max(0,i-S-1);
C=max(C,[zeros(Up,N);zeros(M-Up-Down,Left),
A(1+Down:M-Up,1+Right:N-Left),zeros(M-Down-Up,Right);zeros(Down,N) ]);
end
end
end
end
```

Essa forma é rápida e eficiente e é análoga a 7.2.

Parte II

Morfologia em Escala de Cinza

Voltamos agora nossa atenção para a morfologia em tons de cinza, onde serão extendidas as operações de dilatação e erosão de imagens binárias para imagens em tons de cinza.

As imagens binárias estão no plano, já as imagens em tons de cinza são superfícies.

8 Preliminares

Antes de começarmos a discutir a morfologia em tons de cinza, relembremos algumas definições e operações.

Os valores das imagens em tons de cinza não está restrito aos valores entre $\{0, 1\}$, podendo estar extendido por um conjunto finito de valores não negativos inteiros. Precisamente uma imagem f em tons de cinza é definida como um subconjunto X do conjunto $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}$:

$$f : X \subset \mathbb{G} \rightarrow \{0, 1, \dots, t_{max}\} \quad (66)$$

onde t_{max} , o valor máximo, depende do número de bits utilizado na figura.

Uma imagem pode ser transladada horizontalmente ou verticalmente. Dizemos que a imagem está *transladada* por x , quando há um deslocamento horizontal. Em termos matemáticos, tem-se

$$f_x(z) = f(z - x). \quad (67)$$

Quando o deslocamento é vertical, chamamos de *offset* por y , que é definido por:

$$(f + y)(z) = f(z) + y. \quad (68)$$

Finalmente, pode ocorrer os dois simultaneamente, chamado translação morfológica e definida como

$$(f_x + y)(z) = f(z - x) + y. \quad (69)$$

Para organizar os conjuntos na escala de cinza definiremos o conceito de *beneath*, que significa abaixo. Se f e g são sinais com domínios $D[f]$ e $D[g]$, respectivamente, dizemos que g está *abaixo* de f se

1. o domínio de g é um subconjunto do domínio de f , e
2. para todo x no domínio de g , $g(x) \leq f(x)$.

Nesse caso, escrevemos $g \leq f$.

Outra importante definição é a de *mínimo* de f e g : se x está contido na intersecção dos domínios, $D[f] \cap D[g]$, então:

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}. \quad (70)$$

Dualmente, o *máximo* de f e g é definido para todo x dentro da intersecção $D[f] \cap D[g]$:

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad (71)$$

A exigência de x estar contido dentro da intersecção do domínio de f e g é fundamental, pois caso contrário, como veremos mais à frente, teremos problemas com o infinito negativo.

O análogo do complementar (binário) na morfologia em escala de tons de cinza é a negação. A *negação* de f é dada por $\neg f$ e é dada por: $\neg f(x)$.

A reflexão de um sinal em tons de cinza também é um operador importante. Se r é um sinal com domínio $D[r]$, a *reflexão* de r pela origem é definido como $\check{r}(x) = r(-x)$.

9 Umbra

Como pode ser visto até agora e será reforçado mais adiante, há uma relação entre a morfologia em tons de cinza e binária. Essa relação é formalizada pela umbra. A umbra é a chave para a formulação da morfologia em tons de cinza.

Para um sinal f , temos $G[f]$, chamado *gráfico* de f ,

$$G[f] = \{(x, f(x)) : x \in D[f]\} \quad (72)$$

que é um subconjunto do produto cartesiano $X \times \mathbb{G}$. A *umbra* de f consiste em todos os pontos que cabem abaixo do gráfico da f , incluindo os pontos do gráfico. Ela é denotada por $U[f]$ e é definida por:

$$U[f] = \{(x, y) : x \in D[f] \text{ e } y \leq f(x)\} \quad (73)$$

A figura 6 apresenta o gráfico de um sinal f , sua umbra e a superfície dessa umbra, exemplificando que a superfície da umbra de um sinal é igual ao sinal da função.

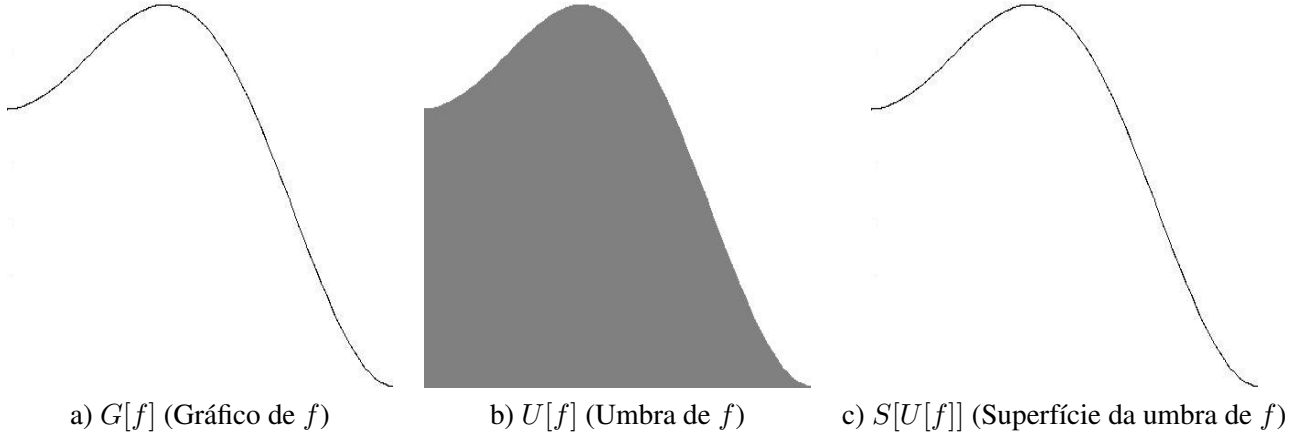


Figura 6: Umbra e superfície de um sinal f .

Dado um conjunto A de pontos em $X \times \mathbb{G}$, podemos tomar a *superfície*, que é o gráfico de um sinal. Assumindo que o conjunto A é topologicamente fechado, ou seja, que contém sua fronteira, definimos a superfície de A por:

$$S[f] = \{(x, y) \in A : y \geq z, \forall (x, z) \in A\} \quad (74)$$

A superfície retira somente o topo do conjunto.

Para qualquer sinal f , a superfície da umbra é o gráfico dela:

$$S[U[f]] = G[f] \quad (75)$$

como na figura 6 c).

A importância da umbra na morfologia matemática é que ela provê um mecanismo para expressar os operadores em tons de cinza em termos dos operadores binários. Esse mecanismo facilita o entendimento da morfologia em tons de cinza e pode ser usado teoricamente na definição das operações elementares de dilatação e erosão.

Retomando a erosão e a dilatação, podemos obtê-las em tons de cinza a partir da binária, a definição abaixo nos mostra essa associação para a erosão e a dilatação.

Definição 13. A erosão e a dilatação de dois sinais f por g são definidas como:

$$f \ominus g = S[U[f] \ominus U[g]] \quad (76)$$

$$f \oplus g = S[U[f] \oplus U[g]] \quad (77)$$

A erosão pode ser obtida tomando a superfície da erosão da umbra de f e de g . Graficamente podemos pensar que tomamos dois sinais que estão no espaço e projetamos eles para o plano, os transformando em binários, calculamos a erosão binária e depois desprojetamos o resultado do plano.

A dilatação acontece de forma análoga a erosão.

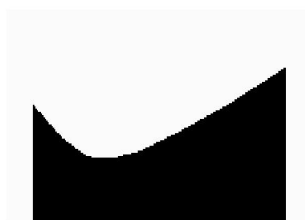
Essas duas definições são ilustrados na figura 7.



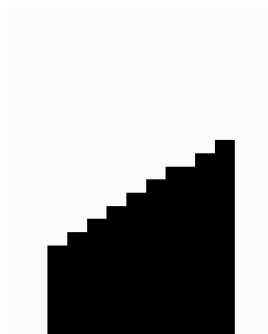
a) Sinal f



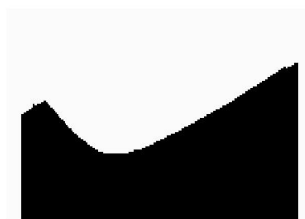
b) Sinal g



c) $U[f]$ (Umbra de f)



d) $U[g]$ (Umbra de g)



e) $U[f] \oplus U[g]$ (dilatação da umbra de f por g)



f) $U[f] \ominus U[g]$ (erosão da umbra de f por g)



g) $S[U[f] \oplus U[g]]$ (superfície da dilatação das umbras de f e g)



h) $S[U[f] \ominus U[g]]$ (superfície da erosão das umbras de f e g)

Figura 7: Erosão e Dilatação pela Umbra.

10 Dilatação e Erosão em Tons de Cinza

Como a dilatação e erosão satisfazem algumas identidades algébricas, há várias definições equivalente para elas. Como a origem da morfologia matemática está baseada em encaixar o elemento estruturante na imagem (ou sinal), exploraremos a definição 13 de acordo com este fato.

Teorema 14. *A erosão de um sinal f pelo elemento estruturante g (que também é um sinal) é dada por:*

$$(f \ominus g)(x) = \max\{y : (g_x + y) \leq f\}. \quad (78)$$

Geometricamente, a erosão consiste em deslocar o centro do elemento estruturante até o ponto x e aplicar o máximo entre a imagem e o elemento estruturante. Uma maneira diferente é dada pelo teorema seguinte.

Teorema 15. *A erosão pode ser escrita como o mínimo entre a imagem e o elemento estruturante para todos os pontos do domínio do elemento estruturante:*

$$(f \ominus g)(z) = \min\{f(x) - g_z(x) : x \in D[g_z]\}. \quad (79)$$

Demonstração. Tomando

$$(f \ominus g)(z) = \min\{f(r) - g_z(r) : x \in D[g_z]\} \quad (80)$$

onde $x = z$ e $x + z = r$, portanto:

$$(f \ominus g)(x) = \min\{f(x + z) - g(z) : z \in D[g]\} \quad (81)$$

Supondo $z = (f \ominus g)(x)$. Então $z = [U[f] \ominus U[g](x)$. Pela definição de superfície $z = \{y : (x, y) \in (U[f] \ominus U[g])\}$. Agora pela definição de erosão,

$$z = \max\{y : \forall (u, v) \in U[g], (x, y) + (u, v) \in U[f]\} \quad (82)$$

Utilizando a definição de Umbra,

$$z = \max\{y : \forall u \in g, v \leq g(u), y + v \leq f(x + u)\} \quad (83)$$

$$= \max\{y : \forall u \in g, v \leq g(u), y \leq f(x + u) - v\} \quad (84)$$

Mas $y \leq f(x + u) - v \forall v \leq g(u) \Rightarrow y \leq f(x + u) - g(u)$. Portanto $z = \max\{y : \forall u \in g, y \leq f(x + u) - g(u)\}$.

Mas $y \leq f(x + u) - g(u) \forall u \in g$ implica $y \leq \min\{f(x + u) - g(u), u \in g\}$.

Agora,

$$z = \max\{y : y \leq \min\{f(x + u) - g(u), u \in g\}\} \quad (85)$$

$$= \min\{f(x + u) - g(u), u \in g\} \quad (86)$$

□

Esse teorema formula a erosão como transladar horizontalmente o elemento estruturante por todos os pontos da imagem e obter o mínimo entre a imagem e o elemento estruturante para todos os pontos do domínio desse.

Assim a imagem será percorrida apenas uma vez, e o elemento estruturante será percorrido uma vez para cada ponto da imagem.

De forma análoga a binária, a dilatação e erosão possuem uma operação relacionando-as. O teorema a seguir define essa relação.

Teorema 16. *A dilatação de f por g é definida por:*

$$(f \oplus g)(x) = \min\{y : (-\check{g}_x + y) \geq f\}. \quad (87)$$

Esse teorema diz que a dilatação é dada tomando o mínimo do valor cuja a soma com elemento estruturante, invertido e refletido, seja maior ou igual ao valor da imagem ou função no ponto. Ou seja, o elemento estruturante depois de invertido e refletido deve ser deslocado verticalmente até que o ponto mais baixo desse toque a função.

O próximo teorema traz outra forma de obter a dilatação.

Teorema 17. *A dilatação de f por g pode ser reescrita como:*

$$(f \oplus g)(z) = \max\{f_x(z) + g(x) : x \in D[f]\}. \quad (88)$$

Demonstração. Tomando uma função $r = (f \oplus g)(x) = S[U[f] \oplus U[g]](x)$, onde $f : X \rightarrow \mathbb{G}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{G}$. Pela definição de superfície:

$$r = \max\{y : (x, y) \in [U[f] \oplus U[g]]\} \quad (89)$$

Pela definição de dilatação:

$$r = \max\{a + b : \text{há um } z \in X \text{ que satisfaz } x - z \in X, (x - z, a) \in U[f] \text{ e } (z, b) \in U[g]\} \quad (90)$$

Pela definição de umbra o maior a cujo $(x - z, a) \in U[f]$ é $a = f(x - z)$. De modo semelhante, o maior b onde $(z, b) \in U[g]$ é $b = g(z)$. Portanto:

$$r = \max\{f(x - z) + g(z), (x - z) \in X\}. \quad (91)$$

□

Outra forma de operar a dilatação é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 18. *A dilatação de f por g pode ser escrita como:*

$$f \oplus g = \max\{g_x + f(x) : x \in D[f]\}, \quad (92)$$

Demonstração. Sabendo que a dilatação é comutativa e escrita pelo teorema 17:

$$(f \oplus g)(z) = \max\{f_x(z) + g(x) : x \in D[f]\} \quad (93)$$

$$= (g \oplus f)(z) \quad (94)$$

$$= \max\{g_x(z) + f(x) : x \in D[f]\}. \quad (95)$$



Figura 8: Imagem seguida da sua dilatação e sua erosão pelo elemento estruturante S dado por (96).

□

O teorema 18 diz que o elemento estruturante é deslocado verticalmente até estar posicionada logo acima da imagem e depois é tomado o maior valor para todos os pontos da imagem, o que a torna muito cara operacionalmente caso a imagem for grande.

A diferença entre os teoremas 17 e 18 é que no segundo o elemento estruturante é deslocado verticalmente em sentido positivo, partindo da origem para o infinito positivo, e no primeiro o elemento estruturante é deslocado verticalmente em sentido oposto, ou seja, é deslocado de cima da imagem para baixo, em sentido da origem. Exemplo de dilatação e erosão em tons de cinza são dadas pela figura 8 para o seguinte elemento estruturante:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 1 & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \quad (96)$$

Lembrando que esse elemento estruturante é uma umbra, por isso aparece alguns pixels como $-\infty$.

11 Propriedades Algébricas das Operações de Dilatação e Erosão em Tons de Cinza

De forma análoga as propriedades algébricas no caso binário, as operações de dilatação e erosão em tons de cinza satisfazem diversas propriedades. Por exemplo, como o teorema abaixo.

Teorema 19. *A dilatação de f por g é uma operação comutativa e associativa.*

$$f \oplus g = g \oplus f \quad e \quad f \oplus (g \oplus h) = (f \oplus g) \oplus h \quad (97)$$

Demonstração.

$$f \oplus g = T[U[f] \oplus U[g]] \quad (98)$$

$$= T[U[g] \oplus U[f]] \quad (99)$$

$$= g \oplus f. \quad (100)$$

$$f \oplus (g \oplus h) = T[U[f] \oplus [U[g \oplus h]]] \quad (101)$$

$$= T[U[f] \oplus [U[g] \oplus U[h]]] \quad (102)$$

$$= T[[U[f] \oplus U[g]] \oplus U[h]] \quad (103)$$

$$= T[U[f \oplus g] \oplus U[h]] \quad (104)$$

$$= (f \oplus g) \oplus h. \quad (105)$$

□

Como exemplo deste teorema pode-se pegar o elemento estruturante mostrado na equação 96 e decompô-lo no seguinte:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & -\infty \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & -\infty \end{bmatrix}. \quad (106)$$

Essa decomposição torna o algoritmo utilizado bem mais rápido, pois necessita de menos iterações. Considerando a foto da figura 8 com 256 pixels de lado e pegando o elemento estruturante grande seriam necessárias $256^2 \cdot 25$, quantidade de pixels da imagem multiplicado pelos do elemento estruturante. Utilizando agora, com as mesmas condições, os dois elementos estruturantes menores seriam necessárias $256^2 \cdot 9 + 256^2 \cdot 9$ iterações, que é bem menor que o outro valor. Se fosse utilizado imagens e elementos estruturantes maiores os ganhos em decompor o elemento estruturante seriam bem maiores. Assim é sempre vantagoso decompor o elemento estruturante quando possível.

Outras propriedades interessantes e úteis são dadas pelos teoremas abaixo:

Teorema 20. *Homomorfismo da Umbra - Dado um conjunto X contido no espaço e $f : X \rightarrow \mathbb{G}^n$ e $g : X \rightarrow \mathbb{G}$, então:*

$$1) U[f \oplus g] = U[f] \oplus U[g] \quad (107)$$

e

$$2) U[f \ominus g] = U[f] \ominus U[g]. \quad (108)$$

Demonstração. 1) $f \oplus g = S[U[f] \oplus U[g]]$ então $U[f \oplus g] = U[S[U[f] \oplus U[g]]]$. Mas $U[f] \oplus U[g]$ é uma umbra e para conjuntos que são umbras o operador umbra cancela o operador superfície. Portanto $U[f \oplus g] = U[T[U[f] \oplus U[g]]] = U[f] \oplus U[g]$.

2) $f \ominus g = S[U[f] \ominus U[g]]$ então $U[f \ominus g] = U[S[U[f] \ominus U[g]]]$. Mas $U[f] \ominus U[g]$ é uma umbra e para conjuntos que são umbras o operador umbra cancela o operador superfície. Portanto $U[f \ominus g] = U[T[U[f] \ominus U[g]]] = U[f] \ominus U[g]$. □

Teorema 21. *A erosão satisfaz a seguinte propriedade:*

$$(f \ominus g) \ominus h = f \ominus (g \oplus h) \quad (109)$$

Demonstração. Lembre-se da demonstração do teorema 8.

$$(f \ominus g) \ominus h = T[U[f \ominus g] \ominus U[h]] \quad (110)$$

$$= T[(U[f] \ominus U[g]) \ominus U[h]] \quad (111)$$

$$= T[U[f] \ominus (U[g] \oplus U[h])] \quad (112)$$

$$= T[U[f] \ominus U[g \oplus h]] \quad (113)$$

$$= f \ominus (g \oplus h) \quad (114)$$

□

Teorema 22. *A dilatação satisfaz a seguinte relação com respeito à operação de máximo:*

$$f \oplus (g \vee h) = (f \oplus g) \vee (f \oplus h) \quad (115)$$

Teorema 23. *A erosão satisfaz a seguinte relação com a operação de mínimo:*

$$f \ominus (g \wedge h) = (f \ominus g) \wedge (f \ominus h) \quad (116)$$

Teorema 24. *O mínimo entre dois sinais f e g erodido por h é dado por:*

$$(f \wedge g) \ominus h = (f \ominus h) \wedge (g \ominus h) \quad (117)$$

E também a relação de dualidade entre a dilatação e a erosão em tons de cinza.

Teorema 25. *A relação entre dilatação e erosão é escrita, na morfologia em tons de cinza, como:*

$$f \oplus g = \neg[(\neg f) \ominus \check{g}]. \quad (118)$$

Demonstração. Devido a comutatividade da dilatação e pelo teorema 17 sabemos que:

$$(f \oplus g)(z) = (g \oplus f)(z) \quad (119)$$

$$= \max\{g_x(z) + f(x), x \in D[g_x]\} \quad (120)$$

multiplicando por -1 ; obtemos

$$(f \oplus g)(z) = -\min\{-[g_x(z) + f(x)], x \in D[g_x]\} \quad (121)$$

$$= -\min\{-g(z - x) - f(x), x \in D[g_x]\} \quad (122)$$

$$= -\min\{-g(-(x - z)) - f(x), x \in D[g_x]\} \quad (123)$$

$$= -\min\{-\check{g}(x - z) - f(x), x \in D[g_x]\} \quad (124)$$

$$= -\min\{-\check{g}_z(x) - f(x), x \in D[g_x]\} \quad (125)$$

$$= -\min\{(\neg f)(x) - \check{g}_z(x), x \in D[g_x]\} \quad (126)$$

$$= -[(\neg f) \ominus \check{g}] \quad (127)$$

$$= \neg[(\neg f) \ominus \check{g}] \quad (128)$$

12 Conclusão

Nesse projeto de iniciação científica estudamos as operações elementares da morfologia matemática binária e em tons de cinza. Precisamente, na primeira parte do projeto estudamos o caso binário. Aqui, revisamos os conceitos de dilatação e erosão para imagens binárias. Depois, estudamos as operações de abertura e fechamento que são definidas em termos das operações de dilatação e erosão. Algumas propriedades das operações de dilatação, erosão, abertura e fechamento foram investigadas. Concluímos a primeira parte do projeto apresentando implementações em MATLAB e GNU Octave das operações de dilatação e erosão. Nessa seção, observamos que formulações alternativas das operações de dilatação e erosão podem produzir implementações mais eficientes. Na segunda parte do projeto, estudamos as operações de dilatação e erosão para imagens em tons de cinza. Também foram discutidas algumas propriedades algébricas desses operadores.

Referências

- [1] BANON, G., BARRERA, J., AND BRAGA-NETO, U., Eds. *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing*. INPE, São José dos Campos, 2007. Proceedings of the 8th International Symposium on Mathematical Morphology.
- [2] DOUGHERTY, E., AND LOTUFO, R. *Hands-on Morphological Image Processing*. SPIE Publications, Bellingham, WA, 2003.
- [3] HARALICK, R., STERNBERG, S., AND ZHUANG, X. Image analysis using mathematical morphology: Part I. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 9, 4 (July 1987), 532–550.
- [4] HEIJMANS, H. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [5] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [6] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.
- [7] SOILLE, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [8] STERNBERG, S. Grayscale morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 35 (1986), 333–355.