Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental

③ Métodos Numéricos – Sistemas de Numeração/Bases

2020.1

Prof. Antonio Carlos

Sistema de Numeração Posicional – é aquele em que o valor do algarismo (unidade, dezena, centena, etc.) depende do lugar onde ele se encontra no número; número este que está escrito em uma certa base (base 10, base 2, etc.)

Posição 1

Posição 2

Posição 0

Número

$$222_{10}$$

Base

Algarismo

$$200 + 20 + 2$$

• Esta soma é o valor do número; o valor do número é a soma do valor de cada algarismo

$$2 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

• O valor do algarismo depende da posição onde ele se encontra no número.

Esta fórmulazinha é o segredo de tudo!

Valor do algarismo = $algarismo \times base^{Posição}$

- **Recapitulando os conceitos do slide anterior:**

1. ***Número* é composto de algarismos**
2. ***Algarismo* é cada símbolo do número**
3. **Número representa um *valor***
4. **O valor do número depende de sua *base***
5. **Número = *soma do valor de cada algarismo***
6. ***O valor do algarismo depende da posição* em que ele se encontra dentro do número. Portanto,**

$$\textit{Valor do algarismo} = \textit{algarismo} * \textit{base}^{\textit{Posição}}$$

Obs.: <u>se não souber determinar a posição do algarismo</u>, então "Babau seu Nicolau!"

Eu acho que ***<u>isso</u>*** quer dizer que não é boa coisa!

É MUITO IMPORTANTE SABER DISSO:

O maior algarismo em qualquer base é sempre igual a

Base – 1

- **Exemplo**: Base 10, maior algarismo = 9 (10 – 1)

  Base 2, maior algarismo = 1 (2 – 1)

  Base 8, maior algarismo = 7 (8 – 1)

  Base 6, maior algarismo = ? (6 – 1)

Diga qual é...

Exemplo: o número 345_5 não existe, pois o 5 não pertence a base 5; na base 5 o maior algarismo possível é o 4 (5 – 1). O número 345 só tem chance de existir em uma base ≥ 6.

Bases Mais Usadas e Seus Respectivos Algarismos

Computadores e Bases Numéricas

- Todos as CPUs dos computadores atuais são construídas para processarem apenas os símbolos “0” e “1”; ou seja...
- Todos são construídos para trabalhar na base 2... Por quê?
- Porque fica mais fácil construir esse hardware pois, como todos dependem de eletricidade, então só é necessário 0 volts (o “terra”) para representar o “0” e um potencial “de poucos volts” para representar o “1”.
- O primeiro computador a ser construído, o ENIAC, era um processador numérico que usava a base 10, e foi preciso dez níveis diferentes de voltagem elétrica para representar de 0 a 9. Deu muito trabalho construir esse computador.
- Para poder trabalhar com números maiores em operações realizadas em níveis acima da CPU, o computador usa bases maiores que 2 para representar tais números...

Computadores e Bases Numéricas

- Completando o raciocínio do slide anterior...
- Você digita um certo número na base 10...
- O computador poderá representar esse número internamente em uma base X que não seja a 10 (e por enquanto pode não ser a base 2 ainda)...
- Quando a CPU vai processar esse número ele vai ser convertido daquela base X para a base 2, e é processado na base 2...
- Quando termina esse processamento, então esse resultado vai sendo convertido de base em base até ser mostrado na tela do seu computador como um número na base 10 que é a que você usa...
- Ou seja, quando o computador trabalha com números ele realiza um monte de mudanças de base...
- Essa é a realidade dentro da máquina.

Mudança de Base

- As técnicas para a mudança de base de um número são separadas em duas categorias:

1. Técnicas de conversão da parte inteira do número
2. Técnicas de conversão da parte decimal do número

- Cada uma das técnicas acima ainda se divide em duas subcategorias:

   a. Conversão da base 10 para outra base qualquer

   b. Conversão de qualquer base para a base 10

- Como se pode observar, a base 10 vai ser uma espécie de "terminal de integração" na conversão de base, ou seja...
- Para se converter da base X para a base Y, ou vice-versa, o primeiro passo é converter para a base 10.

Mudança de Base

1. Parte Inteira do Número

1.a. Da Base 10 para qualquer outra base – o dividendo escrito na base 10 é <u>dividido sucessivamente pela base de destino</u> até que o quociente da divisão seja igual a zero. O número na base de destino é composto pelos restos de todas as divisões escritos de baixo para cima.

- **Ex.: Converta 100_{10} para a base 5**

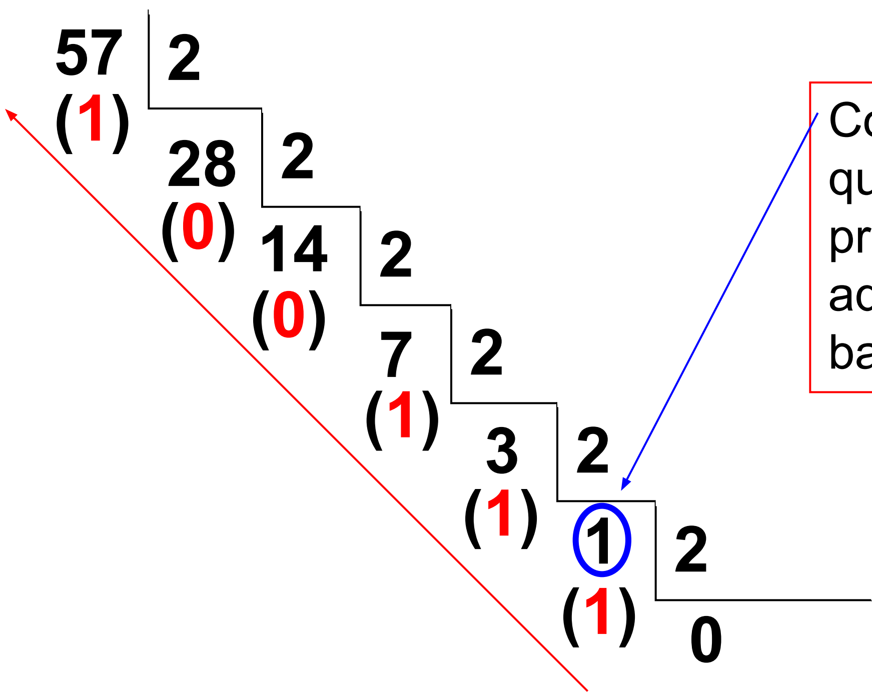
```
100 | 5
(0)  -----
     20 | 5
     (0) -----
         4 | 5
        (4) -----
             0
```

Como o 4 é menor do que o 5, então o quociente é 0 e o resto da divisão é o próprio 4. Pronto. As divisões param aqui. Agora, é só pegar os restos, de baixo para cima.

Resultado: $100_{10} = 400_5$

• Parte Inteira – Base 10 para outra base

• **Ex.: Converta 57_{10} para a base 2**



Como o 1 é menor do que o 2, então o quociente é 0 e o resto da divisão é o próprio 1. Pronto. As divisões param aqui. Agora, é só pegar os restos, de baixo para cima.

Resultado: $57_{10} = 111001_2$

Métodos Para Mudança de Base – Parte Inteira do Número

1. Parte Inteira do Número

1.b. De Base Qualquer para a Base 10 – usa-se o polinômio de conversão, ou seja, faz-se a soma do valor de cada algarismo considerando sua respectiva posição no número escrito na base de origem

- Ex.1: Converta 243_5 para a base 10
- Analisando o problema: a base de origem é a 5, o algarismo 3 está na posição 0; o 4 na posição 1 e o 2 na posição 2.

$$2 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = \quad 50 + 20 + 3 = 73_{10}$$

Algarismo Base Posição

Obs.: as posições da parte inteira do número começam em 0 e crescem para a esquerda.

Métodos Para Mudança de Base – Parte Inteira do Número

1. Parte Inteira do Número
1.b. De Base Qualquer para a Base 10

- Ex.2: Converta 3.562_7 para a base 10
- Analisando o problema: a base de origem é a 7, o algarismo 2 está na posição 0; o 6 na posição 1, o 5 na posição 2 e o 3 na posição 4.

$3 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 2 \times 7^0 = 343 + 245 + 42 + 2 = 632_{10}$

- Ex.3: Converta 100111_2 para a base 10

$1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 32 + 4 + 2 + 1 = 39_{10}$

Agora vamos ver exemplos de conversão entre duas bases diferentes da base 10

- **Conversões entre Bases diferentes da Base 10 – sempre vai ser em duas etapas: 1º. Da base de origem para a base 10 (técnica 1.b.), e 2º. Da base 10 para a base de destino (1.a.).**

- **Ex.4: Converta 213_4 para a base 8**

1º. Base 4 → base 10: $2 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 3 \times 4^0 = 32 + 4 + 3 = 39_{10}$
(1.b.)

2º. Base 10 → base 8:
(1.a.)

$$\begin{array}{r|l} 39 & 8 \\ \hline (7) & 4 \;|\; 8 \\ & (4) \;\; 0 \end{array}$$

$$213_4 = 47_8$$

Resultado final

③ Métodos Numéricos - Sistemas de Numeração/Mudança de Base

- **Ex.5: Converta 583_9 para a base 5**

1º. Base 9 base 10 (1.b.)

$$5 \times 9^2 + 8 \times 9^1 + 3 \times 9^0 = 405 + 72 + 3 = 480_{10}$$

2º. Base 10 → base 5:

(1.a.)

480 | 5
(0) 96 | 5
(1) 19 | 5
(4) 3 | 5
(3) 0

$$583_9 = 3.410_5$$

- **Ex.6: Converta $5BD_{16}$ para a base 5**

1º. Base 16 → base 10 (1.b.)

Obs.: De acordo com as colunas 1 e 4 da tabela do slide 5: B vale 11 e D vale 13.

$$5 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 1.280 + 176 + 13 = 1.469_{10}$$

2º. Base 10 → base 5:

(1.a.)

1469 | 5
(4) 293 | 5
(3) 58 | 5
(3) 11 | 5
(1) 2 | 5
(2) 0

$$5BD_{16} = 21.334_5$$

- **Ex.7: Converta 365_7 para a base 16**

1º. Base 7 → base 10 (1.b.)

$$3 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 5 \times 7^0 = 147 + 42 + 5 = 194_{10}$$

2º. Base 10 → base 16:
(1.a.)

194 | 16
(2)　12 | 16
(12)　0

$$365_7 = C2_{16}$$

Como na base 16 12 é C, então

Equivalência de Inteiros de 0 a 15 nas Bases 10, 2 e 16

Técnica Rápida para Converter Números Inteiros entre Bases Múltiplas de 2

- As principais bases múltiplas de 2 são: 2, 4, 8 e 16.
- Todo múltiplo de 2 pode ser escrito como 2^k (2^1, 2^2, 2^3, 2^4,...).
- Conversões entre Bases Múltiplas da Base 2 (da base 2^m para a base 2^n) – todos os algarismos do número da base 2^m são convertidos em grupos de m bits da base 2 e depois são reagrupados da direita para a esquerda em quantidade de n bits que são traduzidos para o valor na base de destino.
- Ex.8: Converta 1.326_8 para a base 4
- base 8 (2^3) e base 4 (2^2), portanto m = 3 e n = 2

2º. reagrupados com tamanho de 2 bits e traduzidos para algarismos da base 4.

$$1\ 3\ 2\ 6 = 001\ 011\ 010\ 110 = 10\ 11\ 01\ 01\ 10_2 = 23.112_4$$

1º. cada um foi convertido para a base 2, com tamanho de 3 bits

Técnica Rápida para Converter Números Inteiros entre Bases Múltiplas de 2

- Ex.9: Converta $110\ 1001\ 1101\ 1011_2$ para a base 16
- Como o número acima já está escrito na base 2, então só resta agora separar os bits de 4 em 4, pois $16 = 2^4$.

$110\ 1001\ 1101\ 1011_2 = 69DB_{16}$ (Vide tabela do slide 17)

Obs.: essa técnica de conversão entre bases múltiplas de 2 é apenas uma sugestão para facilitar o trabalho. Se você achar complicado usar essa técnica, continue usando a seqüência de técnicas 1.b. e 1.a.

2. Técnicas de conversão da parte decimal do número

- Na parte decimal do número, os algarismos assumem as seguintes posições NEGATIVAS:

Posição -2

Posição -1

Posição -3

$0,222..._{10}$

$0,2 + 0,02 + 0,002$

$2 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$

ATENÇÃO!!!

Observe que na parte decimal NÃO TEM a posição 0, depois da vírgula a 1ª. posição é -1 (a posição 0 só existe na parte inteira do número.

Portanto, as posições da parte decimal decrescem para a direita a partir de -1.

2. Técnicas de conversão da parte decimal do número

2.a. De qualquer base para a base 10 - usa-se o polinômio de conversão, ou seja, faz-se a soma do valor de cada algarismo considerando sua respectiva posição no número escrito na base de origem

Ex.10: Converta $0{,}325_7$ para a base 10

$$3 \times 7^{-1} + 2 \times 7^{-2} + 5 \times 7^{-3} = 3/7 + 2/49 + 5/343 \cong 0{,}484_{10}$$

Obs.1: um número fracionário em uma certa base, quando ele for convertido para outra base, ele permanece fracionário; embora a representação seja diferente, ele ainda permanece fracionário.

Obs.2: um número fracionário finito em uma certa base pode não ser finito quando ele é convertido para outra base. A conversão da parte decimal de uma base para outra pode gerar uma dízima periódica ou um número irracional, ou seja, a parte decimal na nova base pode ter uma seqüência de algarismos completamente aleatória.

Obs.3: usando a calculadora do Windows XP que possui uma precisão de 32 casas decimais, a conversão acima dá o número irracional... 0,48396501457725947521865889212828 que foi arredondado para 0,484.

2. Técnicas de conversão da parte decimal do número

2.a. De Qualquer Base para a Base 10

- **Ex.11: Converta $0,110101_2$ para a base 10**

$$1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/16 + 1/64 \cong 0,828_{10}$$

Com 3 casas decimais, aproximadamente...

2. Técnicas de conversão da parte decimal do número

2.a. De Qualquer Base para a Base 10

- Ex.12: Converta $0{,}7B6_{16}$ para a base 10

$$7 \times 16^{-1} + 11 \times 16^{-2} + 6 \times 16^{-3} = 7/16 + 11/256 + 6/4096 \cong 0{,}482_{10}$$

2. Técnicas de conversão da parte decimal do número

2.b. Da base 10 para qualquer base - sucessivamente, a parte decimal do número é multiplicada pela base de destino até a parte decimal ser zerada ou gerar uma dízima periódica; a cada multiplicação toma-se parte inteira gerada.

- **Ex.13: Converta $0,7_{10}$ para a base 2**

$0,7 \times 2 = 1,4 \Rightarrow 0,4 \times 2 = 0,8 \Rightarrow 0,8 \times 2 = 1,6 \Rightarrow 0,6 \times 2 = 1,2 \Rightarrow$

$0,2 \times 2 = 0,4 \Rightarrow 0,8 \times 2$ ... A partir daqui começa a repetir o período 0110. Assim,

$$0,7_{10} = 0,1011001100110\ldots_2 =$$

Aí está um exemplo de uma mudança de base de um número decimal finito que gera uma dízima periódica na base de destino.

2. Técnicas de conversão da parte decimal do número

2.b. Da Base 10 para Qualquer Base

- **Ex.14: Converta $0{,}485_{10}$ para a base 5**

$0{,}485 \times 5 = 2{,}425 \Rightarrow 0{,}425 \times 5 = 2{,}125 \Rightarrow 0{,}125 \times 5 = 0{,}625 \Rightarrow$

$0{,}625 \times 5 = 3{,}125 \Rightarrow 0{,}125 \times 5$ ... A partir daqui começa a repetir o período 03. Assim,

$$0{,}485_{10} =$$

- **A técnica consiste em multiplicar sucessivamente a parte fracionária do número pela base de destino, e subtrair a parte inteira do resultado da multiplicação para compor o resultado final, ou seja, o número na base de destino. O processo pára quando a parte fracionária é "zerada". Nesse caso, o número resultante na base de destino é composto pelas partes inteiras que foram subtraídas.**

Exercícios Propostos

- **Obs.:** Se você resolver os exercícios 1 e 2 a seguir, então você está pra lá de bom nesse assunto de mudança de base.
- **Dica:** Observe que cada número dos exercícios 1 e 2 tem uma parte inteira e uma parte decimal. Então, você tem de separar o problema da mudança de base em duas partes: primeiro você faz a conversão da parte inteira e depois você faz a conversão da parte decimal. No resultado final da conversão você junta as duas partes que você obteve, escrevendo da seguinte maneira:

parte inteira, parte decimal

1. Converta $134{,}25_6$ para a base 9
2. Converta $5D8{,}B3_{16}$ para a base 7
3. Converta $100111001001{,}0110111_2$ para a base 8
4. Converta $2453{,}7654_8$ para a base 16

Exercícios Propostos

5. Converta $2313{,}3132_4$ para a base 8

6. Converta $3231{,}1323_4$ para a base 2

7. Converta $BEBE{,}EACABA_{16}$ para a base 2

8. Converta $ABECAFEDEA{,}BABA_{16}$ para a base 2

9. Converta $AFACADA{,}DADA_{16}$ para a base 2

   Resposta: $1010111110101100101011011010{,}1101101011011010_2$

0. (DESAFIO) Chegou um pacote de Marte e na caixa estava escrito que o mesmo continha 34 peças, mas quando foi aberto aqui na Terra só continha 28 peças. Quantos dedos um marciano tem em cada mão?

ATENÇÃO!

- Já vimos todos os temas até o tema 4 que trata de Erros;
- Após o tema 4 vamos fazer nossa primeira avaliação;
- Resolvam os exercícios propostos nas apresentações, pois eles serão a base da prova.
- A 1ª. Avaliação vai estar disponível no ambiente de Atividades do Classroom; você vai ter 5 dias corridos para devolver as respostas de volta para o ambiente Classroom; basta devolver as respostas, não precisa escrever o quesito.
- O arquivo com as respostas deverá ter o nome 1av seguido de seu número de matrícula no formato pdf ou doc (Ex.: 1av161010377.pdf ou 1av161010377.pdf.

Por enquanto é só...

Estão abençoados!