UEPB
Universidade
Estadual da Paraíba

Calculo III

Resumos professora: Wenia Valdevino Felix de Lima

UEPB

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial e Integral III
PERÍODO: 2022.2
HORÁRIO: 3ª 07h às 09h e 5ª 09h às 11h
PROFESSORA: Wenia Lima
E-MAIL: wenialima@servidor.uepb.edu.br

EMENTA DA DISCIPLINA

Funções de várias variáveis. Limite e Continuidade. Derivadas Parciais e Direcionais. Regra da Cadeia. Extremos. Multiplicadores de Lagrange. Integrais múltiplas. Integração por Coordenadas Polares, Coordenadas cilíndricas e esféricas. Funções com valores vetoriais.

OBJETIVO GERAL

Fornecer aos estudantes alguns procedimentos usados no cálculo diferencial e integral III, para a resolução de problemas relacionados a outras disciplinas do curso, bem como aplicar esses conhecimentos no desenvolvimento de atividades profissionais tanto na sua área como também em outras.

CONTÉUDO PROGRAMÁTICO (A SER DISTRIBUIDO NAS UNIDADES I E II)

- Funções vetoriais;
- Funções de várias variáveis;
- Máximos e mínimos de funções de várias variáveis;
- Integrais duplas;
- Integrais triplas;

RECURSOS DIDÁTICOS

Material de apoio (notas de aulas). Será utilizada a plataforma OneDrive para o depósito de materiais (lista de exercícios, notas de aula e etc).

AVALIAÇÃO

O processo avaliativo será feito de forma contínua, por meio de participação durante as aulas (em especial, aula de exercícios) e de uma prova para cada unidade. A prova corresponderá a 10,0 pontos.

Datas das avaliações (Atenção, este cronograma pode ser alterado caso haja necessidade.)

Avaliação da Unidade I - 13/10/2022

Reposição da Unidade I – 18/10/2022

Avaliação da Unidade II - 29/11/2022

Reposição da Unidade II - 01/12/2022

Avaliação Final - 06/12/2022

REFERÊNCIAS BÁSICAS

FLEMMING, D. M. GONÇALVES, M. B. **Cálculo B**, 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**, v.2. 1, 3. ed. São Paulo: HARBRA, 2016.

STEWART, J. **Cálculo**, v. 2, 8ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

THOMAS, G. B., WEIR, M. D. e HASS, J. **Cálculo**, v. 2, 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES

GOMES, F.M. **Pré-Cálculo: operações, equações, funções e sequências**. 1.ed. São Paulo: Cengage Learning. 2018.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**, v. 1 e 2, 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

DICAS PARA BOM DESEMPENHO NA DISCIPLINA

1. Diga não a procrastinação;
2. Não deixe para fazer as atividades de última hora;
3. Se possível, reveja as aulas e anote suas dúvidas para perguntar ao professor.
4. Resolva todos os exercícios e problemas da lista proposta;
5. Bons estudos!

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

Semana 01 e 02

1 Funções vetoriais e curvas espaciais

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem. Uma **função vetorial**, ou **função a valores vetoriais**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Considere o caso de funções vetoriais $\boldsymbol{r}$ cujos valores são vetores tridimensionais, ou seja, para todo número t do domínio de $\boldsymbol{r}$ existe um único vetor de V_3 denotado por $\boldsymbol{r}(t)$. Se $f(t), g(t)$ e $h(t)$ são as funções componentes de $\boldsymbol{r}$ e podemos escrever

$$\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}.$$

Denotamos por t a variável independente que representa o tempo na maioria das aplicações de funções vetoriais.

Exemplo 1. *Se $\boldsymbol{r}(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t})$, então as funções componentes são:*

$$f(t) = t^3, \ \ g(t) = \ln(3-t), \ \ h(t) = \sqrt{t}.$$

O domínio de $\boldsymbol{r}$ é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão $\boldsymbol{r}(t)$ está definida. Note que as funções componentes estão definidas quando $3-t>0$ e $t \geq 0$. Portanto, o domínio de $\boldsymbol{r}$ é o intervalo $[0,3)$

1.1 Limite e continuidade

O limite de uma função vetorial $\boldsymbol{r}$ é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como a seguir:

Definição 1. *Se* $\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, *então*

$$\lim_{t\to a} \boldsymbol{r}(t) = (\lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t))$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Exemplo 2. *Determine* $\lim_{t\to 0} \boldsymbol{r}(t)$, *em que* $\boldsymbol{r}(t) = (1 + t^3, te^{-t}, \frac{sen(t)}{t})$.

Exemplo 3. *Determine* $\lim_{t\to \pi/4} \boldsymbol{r}(t)$, *em que* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t), sen(t), t)$.

Definição 2. *Uma função vetorial* $\boldsymbol{r}(t)$ *é contínua em um ponto* $t = a$ *no seu domínio se* $\lim_{t\to a} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(a)$. *A função é contínua se for contínua em todos os pontos.*

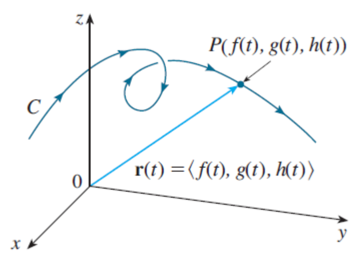
1.2 Curvas no espaço

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que f, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I. Em seguida, o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço, em que

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

e t varia no intervalo I, é chamado curva espacial. As equações acima são denominadas de equações paramétricas de C e t é conhecido como parâmetro.

Podemos pensar em C como tendo sido traçada pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante t é $(f(t), g(t), h(t))$. Se considerarmos agora a função vetorial $\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, então $\boldsymbol{r}(t)$ é o vetor posição do ponto de $P(f(t), g(t), h(t))$ em C, ou seja, C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição $\boldsymbol{r}(t)$.



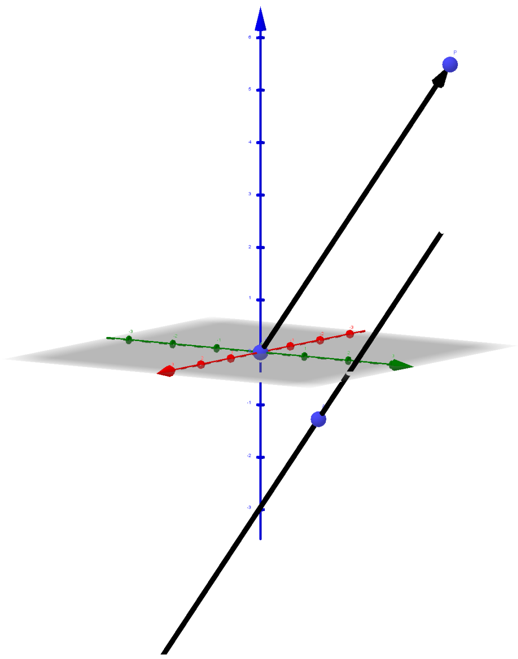
Exemplo 4. *Descreva a curva definida pela função vetorial* $\boldsymbol{r}(t) = (1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t)$.

Solução:

As equações paramétricas correspondentes são:

$$x = 1 + t, \quad y = 2 + 5t, \quad z = -1 + 6t$$

Note que essa equação paramétrica da reta passa pelo ponto $P(1, 2, -1)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (1, 5, 6)$. Como alternativa, podemos observar que a função pode ser reescrita da seguinte forma: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$. Logo, $\boldsymbol{r}(t) = (1, 2, -1) + t \cdot (1, 5, 6)$.



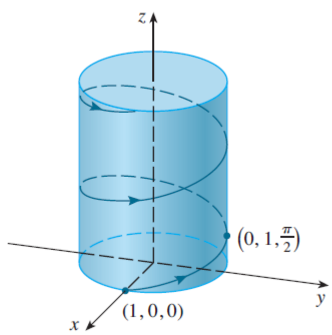
Exemplo 5. *Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t), sen(t), t)$.

Solução:

Note que as equações paramétricas para essa curva são:

$$x = cos(t), \quad y = sen(t) \quad z = t.$$

Pela relação fundamental da trigonometria, segue que $x^2 + y^2 = sen^2(t) + cos^2(t) = 1$, isso implica que para todos os valores de t, a curva deve situar-se no cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. O ponto (x, y, z) está diretamente acima do ponto $(x, y, 0)$, que se move para a esquerda em torno do círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy. Como $z = t$, a curva gira para cima ao redor do cilindro quando t aumenta.



A curva esboçada acima se chama de hélice.

Exemplo 6. *Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P(1,3,-2)$ ao ponto $Q(2,-1,3)$.*

Observação 1 *- Lembre que uma equação vetorial para o segmento de reta que une a extremidade do vetor $\boldsymbol{r}_0$ a extremidade do vetor $\boldsymbol{r}_1$ é dada por:*

$$\boldsymbol{r}(t) = (1-t)\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{r}_1 \quad com \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Dessa forma, tome $\boldsymbol{r}_0 = (1,3,-2)$ e $\boldsymbol{r}_1 = (2,-1,3)$. A equação vetorial obtida será:

$$\boldsymbol{r}(t) = (1-t)(1,3,-2) + t(2,-1,3) = (1+t, 3-4t, -2+5t) \quad com \quad 0 \leq t \leq 1.$$

As equações paramétricas da reta são:

$$x = 1+t; \quad y = 3+4t; \quad z = -2+5t$$

1.3 Derivadas de funções vetoriais

Definição 3. *A derivada $\boldsymbol{r}'$ de uma função vetorial $\boldsymbol{r}$ é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:*

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h}$$

se este limite existir.

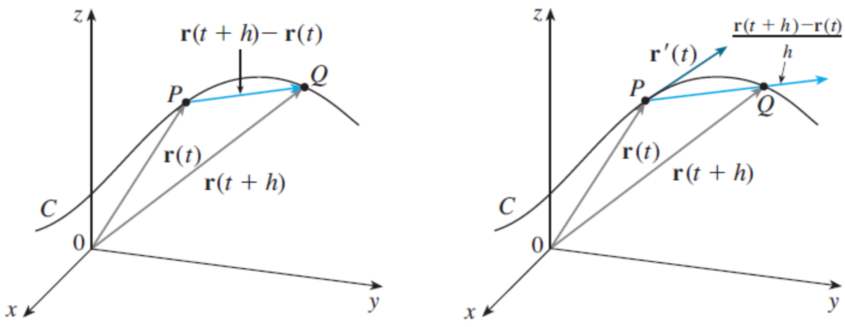
Ideia geométrica - Se os pontos P e Q têm vetores posição $\boldsymbol{r}(t)$ e $\boldsymbol{r}(t+h)$, então $\vec{PQ}$ representa o vetor $\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)$, que pode ser visto como um vetor secante. Se $h > 0$, o múltiplo escalar $(1/h)(\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t))$ tem o mesmo sentido que $\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)$. Quando $h \to 0$, parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão, o vetor $\boldsymbol{r}'(t)$ é chamado o **vetor tangente** à curva definida por $\boldsymbol{r}$ no ponto P, desde que $\boldsymbol{r}'(t)$ exista e $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$. A **reta tangente** a C em P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\boldsymbol{r}'(t)$. Além disso, definimos o **vetor tangente unitário**, dado por

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

O teorema a seguir fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial $\boldsymbol{r}$ por derivação de cada componente de $\boldsymbol{r}$.

Teorema 1. *Se $\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, em que f, g e h são funções diferenciáveis, então*

$$\boldsymbol{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$



(a) O vetor secante (b) O vetor tangente

Exemplo 7.

a) *Determine a derivada de* $\boldsymbol{r}(t) = (1 + t^3, te^{-t}, sen(2t))$.

b) *Encontre o vetor tangente unitário no ponto em que* $t = 0$.

Teorema 2. *(**Regras de Derivação**) Suponha que* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *sejam funções vetoriais diferenciáveis,* c *um escalar e* f *uma função real. Então,*

a) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}(t)] = (\boldsymbol{u}^{'}(t)) + (\boldsymbol{v}^{'}(t))$.

b) $\dfrac{d}{dt}(c\boldsymbol{u}(t)) = c\boldsymbol{u}^{'}(t)$.

c) $\dfrac{d}{dt}[f(t)\boldsymbol{u}(t)] = f(t)^{'}\boldsymbol{u}(t) + f(t)\boldsymbol{u}^{'}(t)$.

d) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}^{'}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}^{'}(t)$.

e) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}^{'}(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}^{'}(t)$.

f) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(f(t))] = f^{'}(t)\boldsymbol{u}^{'}(f(t))$*(**Regra da cadeia**)*.

Exemplo 8. *Mostre que, se* $|\boldsymbol{r}(t)| = c$ *(uma constante), então* $\boldsymbol{r}^{'}(t)$ *é ortogonal a* $\boldsymbol{r}(t)$ *para todo* t.

1.4 Integrais de funções vetoriais

A integral definida de uma função vetorial $\boldsymbol{r}(t)$ pode ser definida da mesma forma que para a função real, exceto que a integral resulta em um vetor. Mas podemos expressar a integral de suas funções componentes f, g e h como segue:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\boldsymbol{k}$$

Podemos estender o Teorema Fundamental o Cálculo para as funções vetoriais contínuas como se segue:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{R}(t)\Big|_a^b = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

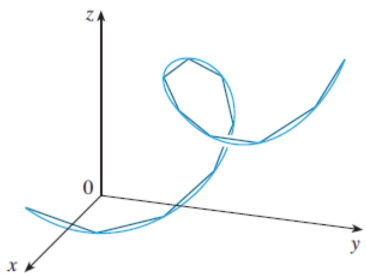
em que $\boldsymbol{R}$ é uma primitiva de $\boldsymbol{r}$, ou seja, $\boldsymbol{R}'(t) = \boldsymbol{r}(t)$. Usaremos a notação $\int \boldsymbol{r}(t)dt$ para as integrais indefinidas (primitivas).

Exemplo 9. *Se* $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos(t)\boldsymbol{i} + sen(t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$, *determine* $\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{r}(t)dt$.

1.5 Comprimento de arco

Definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas $x = f(t), y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, como o limite do comprimento das poligonais inscritas e, para o caso no qual f' e g' são contínuas, chegamos à seguinte fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt. \tag{1}$$



Para o caso de uma curva espacial a definição é equivalente. Suponha que a curva tenha equação vetorial $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $a \leq t \leq b$, ou, o que é equivalente, equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde f', g' e h' são funções contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que t cresce, a partir de a para b, é possível mostrar que

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt. \tag{2}$$

Observe que, o comprimento de arcos de curvas dados pelas fórmulas acima, podem ser escritos de forma mais compacta

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|dt. \tag{3}$$

Exemplo 10. *Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (sent)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ *do ponto* $(1, 0, 0)$ *até o ponto* $(1, 0, 2\pi)$.

Uma única curva C pode ser representada por mais de uma função vetorial. Por exemplo, a cúbica retorcida

$$\boldsymbol{r}_1(t) = (t, t^2, t^3), \quad 1 \leq t \leq 2, \tag{4}$$

poderia ser representada também pela função

$$\boldsymbol{r}_2(t) = (e^u, e^{2u}, e^{3u}), \quad 0 \leq u \leq \ln(2), \tag{5}$$

em que a relação entre os parâmetros t e u é dada por $t = e^u$. Ou seja, a mesma curva C tem essas duas **parametrizações**. Uma pergunta natural agora, seria se o comprimento de arco é independente dessas parametrizações. Em verdade, pode ser mostrado que, quando a equação 3 é usada para calcular o comprimento do arco, a resposta é independente da parametrização que é usada.

1.6 Função comprimento de arco

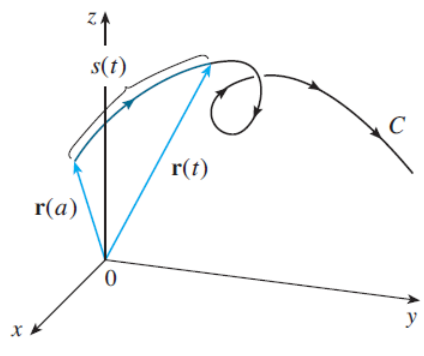
Suponhamos agora que C seja uma curva dada pela função vetorial

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

em que $\boldsymbol{r}'$ é contínua e C é percorrida exatamente uma vez à medida que t aumenta de a para b. Definimos sua **função de comprimento de arco** s por

$$s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(u)| du. \tag{6}$$

Então, $s(t)$ é o comprimento da parte de C entre $\boldsymbol{r}(a)$ e $\boldsymbol{r}(t)$, como vemos na figura a seguir.



É útil **parametrizar uma curva em relação ao comprimento do arco**, pois o comprimento de arco aparece naturalmente a partir da forma da curva e não depende do sistema de coordenadas utilizado. Se uma curva $\boldsymbol{r}(t)$ já está dada em termos de um parâmetro t e $s(t)$ é a função comprimento de arco dada pela equação 6, podemos ser capazes de escrever t como uma função de s: $t = t(s)$. Em seguida, a curva pode ser reparametrizada em termos de s

substituindo por t: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t(s))$. Assim, se $s = 3$, por exemplo, $\boldsymbol{r}(t(3))$ é a posição do ponto que está a três unidades de comprimento do início da curva.

Exemplo 11. *Reparametrize a hélice circular* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t))\boldsymbol{i} + (sen(t))\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ *utilizando o comprimento de arco medido a partir de* $(1, 0, 0)$ *na direção de crescimento de* t.

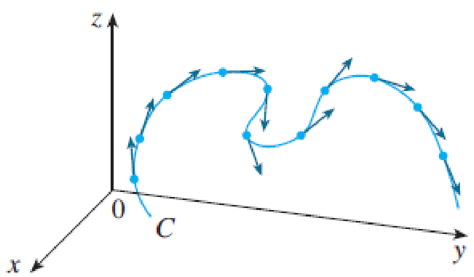
1.7 Curvatura

Uma parametrização $\boldsymbol{r}(t)$ é chamada **suave** em um intervalo I se $\boldsymbol{r}'$ for contínua e $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ em I. Uma curva é chamada de **suave** se tiver uma parametrização suave, ou seja, quando não possui quebras abruptas.

Se C for uma curva suave definida por uma função vetorial $\boldsymbol{r}$, lembre-se de que o vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$ será dado por

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

e indica a direção da curva. Na figura abaixo, podemos ver que $\boldsymbol{T}(t)$ muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta, mas muda de direção mais rapidamente quando a curva C se dobra ou se retorce mais acentuadamente. **Assim, a curvatura de C em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto.**



Definição 4. *A* ***curvatura*** *de uma curva é*

$$\kappa = \left| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right|$$

em que $\boldsymbol{T}$ *é o vetor tangente unitário.*

A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s. Assim, usando a regra da cadeia, escrevemos

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{e} \quad \kappa = \left| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\boldsymbol{T}/dt}{ds/dt} \right|$$

Isso implica que,

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|} \tag{7}$$

Exemplo 12. *Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é* $1/a$.

Solução:

Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos(t)\boldsymbol{i} + asen(t)\boldsymbol{j},$$

Portanto,

$$\boldsymbol{r}^{'}(t) = -asen(t)\boldsymbol{i} + acos(t)\boldsymbol{j} \quad e \quad |\boldsymbol{r}^{'}(t)| = a.$$

Logo,

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}^{'}(t)}{|\boldsymbol{r}^{'}(t)|} = -sen(t)\boldsymbol{i} + cos(t)\boldsymbol{j}.$$

e

$$\boldsymbol{T}^{'}(t) = -cos(t)\boldsymbol{i} - sen(t)\boldsymbol{j}.$$

Isso nos dá $|\boldsymbol{T}^{'}(t)| = 1$, *então usando a fórmula 7, temos*

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{T}^{'}(t)|}{|\boldsymbol{r}^{'}(t)|} = \frac{1}{a}.$$

Teorema 3. *A curvatura de uma curva dada pela função vetorial* $\boldsymbol{r}$ *é*

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}^{'}(t) \times \boldsymbol{r}^{''}(t)|}{|\boldsymbol{r}^{'}(t)|^3} \tag{8}$$

Exemplo 13. *Determine a curvatura da cúbica retorcida* $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ *em um ponto genérico e em* $(0, 0, 0)$.

Para o caso especial de uma curva plana com a equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro e escrevemos $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$. Então, $\mathbf{r}^{'}(x) = \mathbf{i} + f^{'}(x)\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}^{''}(x) = f^{''}(x)\mathbf{j}$. Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, segue que $\mathbf{r}^{'}(x) \times \mathbf{r}^{''}(x) = f^{''}(x)\mathbf{k}$. Além disso, segue que $|\mathbf{r}^{'}(x)| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ e pelo Teorema 3 obtemos:

$$\kappa(x) = \frac{|f^{''}(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}.$$

Referências

[1] ANTON, H., BIVENS, I. e DAVIS, S., **Cálculo**, vol. 2, 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

[2] LEITHOLD, L., **O Cálculo com Geometria Analítica**, vol 2, 3. ed. São Paulo: HARBRA, 2016.

[3] STEWART, J., **Cálculo**, vol. 2, 8. ed. São Paulo: CENGAGE, 2016.

[4] THOMAS, G. B., WEIR, M. D. e HASS,J., **Cálculo**, vol. 2, 12 ed. São Paulo: Pearson, 2012.

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III

Conteúdo da semana 02 e 03

1 Funções de duas variáveis

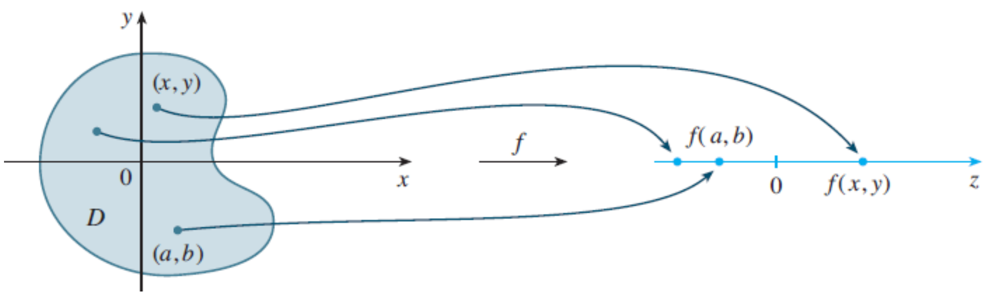
A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto. Podemos pensar em T como uma função de duas variáveis x e y, ou como uma função do par (x, y). Indicamos essa dependência funcional escrevendo $T = f(x, y)$.

O volume V de um cilindro circular depende de seu raio r e de sua altura h. De fato, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Podemos dizer que V é uma função de r e de h, e escrevemos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definição 1. *Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y)/(x, y) \in D\}$.*

Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y). As variáveis x e y são **variáveis independentes** e z é a **variável dependente**.

Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas como mostra a figura a seguir.



Em que o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy e a imagem é um conjunto de números na reta real, mostrado como um eixo z.

Por exemplo, se $f(x, y)$ representa a temperatura em um ponto (x, y) em uma placa de metal com formato de D, podemos pensar que o eixo z é um termômetro exibindo as temperaturas registradas.

Se a função f é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subtendido que o domínio de f é o conjunto de todos os pares os quais a expressão dada fornece um número real bem definido. Ou seja, ao definir funções de mais de uma variável, seguimos a prática habitual de excluir entradas que levem a números complexos ou à divisão por zero.

$$\text{Se} \quad f(x, y) = \sqrt{y - x^2} \text{ (perceba que } y \text{ não pode ser menor do que } x^2\text{).}$$

$$\text{Se} \quad f(x, y) = \frac{1}{xy}, \; xy \quad \text{não pode ser zero.}$$

Consideramos que o domínio de uma função seja o maior conjunto para o qual a regra de definição gera números reais, a menos que esses domínios sejam especificados de outra forma explicitamente. A imagem consiste no conjunto de valores de saída para a variável dependente.

Exemplo 1. *a) Estas são funções de duas variáveis. Observe as restrições que podem ser aplicadas a seus domínios para que seja obtido um valor real para a variável dependente z.*

Tabela 1: Função, domínio e imagem de funções de duas variáveis.

Função	Domínio	Imagem
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$z = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$z = sen(xy)$	Todo o plano	$[-1, 1]$

b) Funções de três variáveis com restrições em alguns de seus domínios.

Tabela 2: Função, domínio e imagem de funções de três variáveis.

Função	Domínio	Imagem
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Todo o espaço	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln(z)$	Semiespaço $z > 0$	$(-\infty, \infty)$

Exemplo 2. *Para cada uma das seguintes funções, calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.*

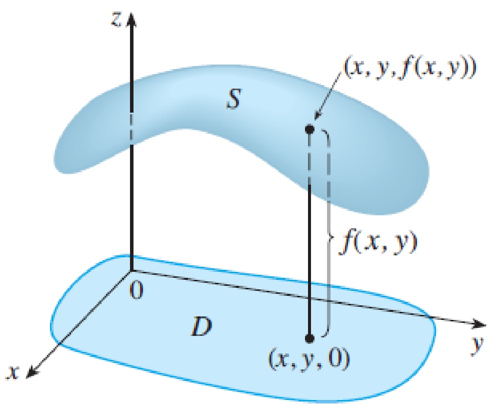
a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

2 Gráficos

Definição 2. *Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$, tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D.*

Assim como o gráfico de uma função f de uma única variável é uma curva C com equação $y = f(x)$, o gráfico de uma função f com duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x, y)$. Podemos visualizar o gráfico S de f como estando diretamente acima ou abaixo de seu domínio D no plano xy.



Exemplo 3. *Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.*

A função do exemplo anterior é um caso especial da função

$$f(x, y) = ax + by + c$$

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma dessas funções tem a equação

$$z = ax + by + c \text{ ou } ax + by - z + c = 0$$

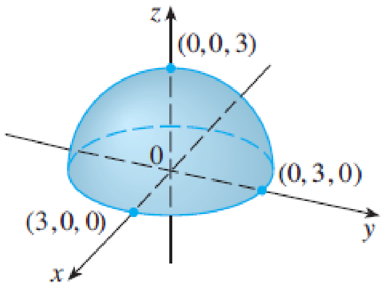
e, portanto, é um plano. Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

Exemplo 4. *Esboce o gráfico da função* $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Solução: *O gráfico tem a equação* $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. *Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos*

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

que reconhecemos como a equação da esfera de centro na origem e raio 3. Mas, como $z \geq 0$, *o gráfico de* g *é somente a metade superior da esfera.*



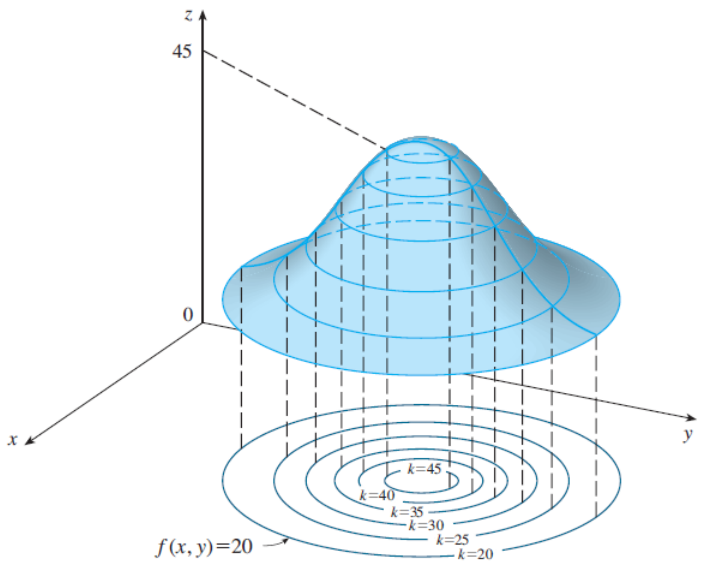
Nota 1: Uma esfera inteira não pode ser representada por uma única função de x e y. O hemisfério superior da esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$ é representado pela função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. O hemisfério inferior é representado pela função $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

3 Curvas de nível

Definição 3. *As* ***curvas de nível*** *de uma função* f *de duas variáveis são aquelas com equação* $f(x, y) = k$, *em que* k *é uma constante.*

Uma curva de nível $f(x, y) = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k. Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k.

Perceba que as curvas de nível $f(x, y) = k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetados sobre o plano xy. Assim se você traçar curvas de nível da função e



visualizá-las elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função colocando as duas informações juntas. A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem próximas umas das outras. Ela será um pouco mais achatada onde as curvas de nível estão distantes umas das outras.

Exemplo 5. *Esboce as curvas de nível da função* $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ *para os valores* $k = -6, 0, 6, 12$.

Solução: *As curvas de nível são* $6 - 3x - 2y = k$ *ou ainda* $3x + 2y + (k - 6) = 0$. *Essa é uma família de retas com inclinação* $-3/2$. *Para os valores de* k *pedidos na questão, temos que:*

$$Para \quad k = -6 \Rightarrow 3x + 2y - 12 = 0$$

$$Para \quad k = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

$$Para \quad k = 6 \Rightarrow 3x + 2y = 0$$

$$Para \quad k = 12 \Rightarrow 3x + 2y + 6 = 0$$

Exemplo 6. *Esboce as curvas de nível da função* $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ *para os valores* $k = 0, 1, 2, 3$.

4 Funções de três ou mais variáveis

Definição 4. *Uma **função com três variáveis**, f, é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real, denotado por $f(x, y, z)$.*

Por exemplo, a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude x e da longitude y do ponto e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$.

Exemplo 7. *Encontre o domínio de f se*

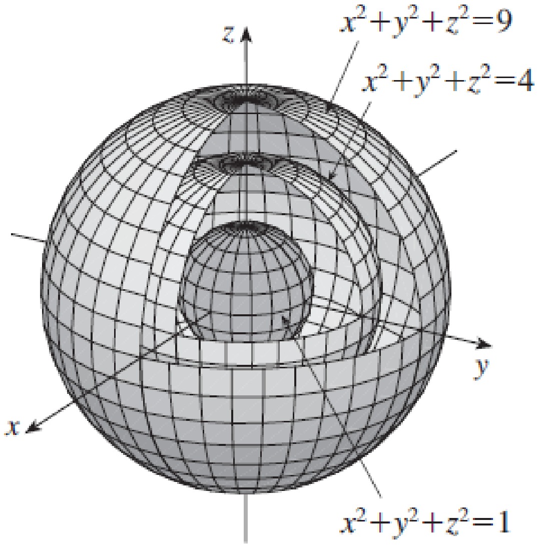
$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xysen(z).$$

É muito difícil visualizar uma função de f de três variáveis por seu gráfico, já que ele estaria em um espaço de **quatro dimensões**. No entanto, obtemos certo conhecimento de f ao examinar suas **superfícies de nível**, que são aquelas com equações $f(x, y, z) = k$, onde k é uma constante. Se o ponto (x, y, z) move-se ao longo de uma superfície de nível, o valor $f(x, y, z)$ permanece fixo.

Exemplo 8. *Encontre as superfícies de nível da função*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Solução: As superfícies de nível são $x^2 + y^2 + z^2 = k$, onde $k \geq 0$. Elas formam uma família de **esferas concêntricas** com raio $\sqrt{k}$. Assim, enquanto (x, y, z) varia sobre qualquer esfera com centro $O = (0, 0, 0)$, o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo, como vemos na figura abaixo:



5 Função com n variáveis

Funções com qualquer número de variáveis podem ser consideradas. Uma **função com n variáveis** é uma regra que associa um número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas essas n-uplas.

Por exemplo, se uma companhia usa n ingredientes diferentes na fabricação de um produto alimentício, c_i é o custo por unidade o i-ésimo ingrediente e x_i unidades do ingrediente são usadas; então o custo total C dos ingredientes é uma função das n variáveis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$C = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

A função f é uma função a valores reais cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Por vezes, usamos uma notação vetorial para escrever estas funções de forma mais compacta: se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, frequentemente escreveremos $f(\boldsymbol{x})$ no lugar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Com essa notação podemos reescrever a função C como

$$f(x) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x},$$

onde $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ e $\boldsymbol{cx}$ denota o produto escalar dos vetores $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{x}$ em V_n.

Tendo em vista a correspondência biunívoca entre os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e os vetores posição em V_n, temos três maneiras diferentes de ver uma função f definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como uma função de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
2. Como uma função de um único ponto n-dimensional $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
3. Como uma função de um único vetor n-dimensional $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Veremos que todos os três pontos de vista são úteis.

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III

Conteúdo da semana 04

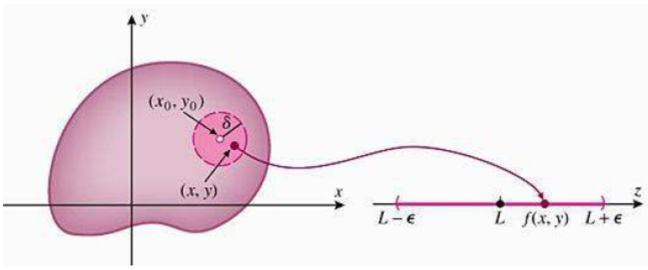
1 Limite e continuidade de funções de duas variáveis

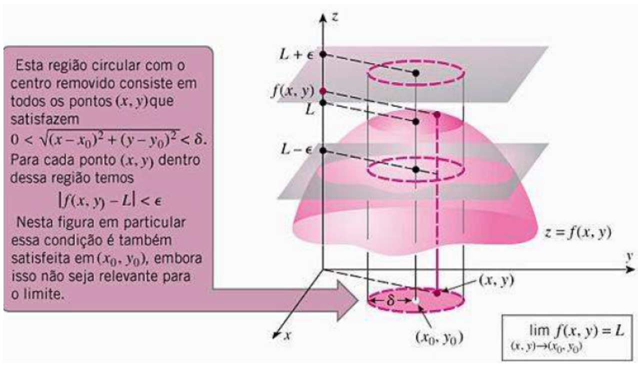
Definição 1. *Dizemos que uma função* $f(x, y)$ *se aproxima do* **limite** L *à medida que* (x, y) *se aproxima de* (x_0, y_0) *e escrevemos*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

se, dado $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* $(x, y) \in D$ *com* $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ *tem-se* $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Observação 1. *Observe que* $|f(x, y) - L|$ *corresponde à distância entre os números* $f(x, y)$ *e* L*, e* $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ *é a distância entre o ponto* (x, y) *e o ponto* (x_0, y_0).





Observação 2. *Para as funções* $f(x, y) = x, g(x, y) = y$ *e* $h(x, y) = k$*, temos*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k.$$

Teorema 1 **(Propriedades de limite).** *Sejam L, M e k números reais tais que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad e \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

Então

1) *Regra da soma*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = L + M.$$

2) *Regra da diferença*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - g(x,y)) = L - M.$$

3) *Regra da multiplicação por uma constante*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL.$$

4) *Regra do produto*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y)g(x,y)) = LM.$$

5) *Regra da quociente*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

6) *Regra da potência*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

7) *Regra da raiz*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_+ \text{ e, se } n \text{ for par assumimos que } L > 0$$

Exemplo 1. *a)*

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - 0 \cdot 1 + 3}{0^2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 1 - 1^3} = -3.$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

.

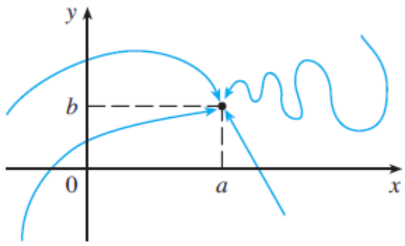
Exemplo 2. *Encontre*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

Solução: Note que o denominador $\sqrt{x}-\sqrt{y}\to 0$ quando $(x,y)\to(0,0)$, não podemos utilizar a regra do quociente. No entanto, se multiplicamos numerador e denominador por $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, produzimos uma fração equivalente, cujo limite podemos encontrar. Assim

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0(\sqrt{0}+\sqrt{0}) = 0.\end{aligned}$$

Observação 3. *Para as funções de uma única variável, quando fazemos $x\to a$, só existem duas direções possíveis de aproximação: pela esquerda ou pela direita. Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples, porque existem infinitas maneiras de (x,y) se aproximar de (a,b) por uma quantidade infinita de direções e de quaisquer maneiras que se queira, precisamos apenas que (x,y) se mantenha no domínio de f.*



Então se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais $f(x,y)$ tenha limites diferentes, segue que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

Ou seja, se $f(x,y)\to L_1$ quando $(x,y)\to(a,b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x,y)\to L_2$ quando $(x,y)\to(a,b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1\neq L_2$, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

Exemplo 3. *Se $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$, o limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

existe?

Solução: Note que o domínio $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\neq 0\}$, portanto não consideramos nenhum ponto (x,y) onde $x=0$ na aproximação à origem $(0,0)$. Ao longo do eixo x, o valor da função é $f(x,0)=0$ para todo $x\neq 0$. Portanto, se o limite existe quando $(x,y)\to(0,0)$, o valor do limite deve ser $L=0$. Por outro lado, ao longo da reta $y=x$, o valor da função é $f(x,x)=x/x=1$ para todo $x\neq 0$. Isto é, a função f se aproxima do valor 1 ao longo da reta $y = x$. O limite não existe, porque temos valores limite diferentes ao longo de diferentes trajetórias se aproximando do ponto $(0, 0)$.

Exemplo 4. *Mostre que o limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

não existe.

Exemplo 5. *(Questão usando o limite por definição.) Encontre o limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2},$$

se existir.

Solução: Primeiro, observamos que, ao longo da reta $x = 0$, a função tem sempre valor 0 quando $y \neq 0$. Da mesma forma, ao longo da reta $y = 0$, a função tem valor 0 contanto que $x \neq 0$. Dessa forma, se o limite existe à medida que $(x, y) \to (0, 0)$, o valor do limite deve ser 0. Para verificar se isso é verdadeiro, aplicamos a definição de limite.

Dado $\varepsilon > 0$ devemos encontrar $\delta > 0$ tal que se $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ tem-se

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

Note que $y^2 \leqslant x^2 + y^2$ então

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} \leqslant 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leqslant 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

Portanto, se escolhemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$ e fizermos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, obtemos

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leqslant 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

Pela definição concluímos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

1.0.1 Continuidade

Lembrem que o cálculo de limites de funções contínuas de uma única variável é simples. Ele pode ser obtido por substituição direta, porque pela definição de função contínua, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Funções contínuas de duas variáveis também são definidas pela propriedade da substituição direta.

Definição 2. *Uma função $f(x, y)$ é contínua no ponto (x_0, y_0) se*

1) *f for definida em (x_0, y_0);*

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ *existe;*

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Uma função é contínua se for contínua em todos os pontos de seu domínio.

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto (x, y) varia por uma pequena quantidade, o valor de $f(x, y)$ variará por uma pequena quantidade. Isso quer dizer que a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas.

Observação 4. *Uma consequência do Teorema 1 é que somas, diferenças, multiplicação por constantes, produtos, quocientes e potências de funções contínuas são contínuas onde definidos. Em especial, polinômios e funções racionais de duas variáveis são contínuas em todo ponto onde são definidos.*

Exemplo 6. *Calcule*

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) =$$

Solução:

Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é uma função polinomial de duas variáveis, ela é contínua em qualquer lugar, portanto podemos calcular seu limite pela substituição direta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y = 11.$$

Exemplo 7. *Mostre que*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em todo ponto exceto na origem.

Solução: Note que f é contínua em qualquer ponto $(x, y) \neq (0, 0)$, porque seus valores são dados por uma função racional de x e y e o valor limite é obtido através da substituição dos valores de x e y na expressão funcional.

Em $(0,0)$, o valor de f é definido que é $f(0,0)=0$, mas o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2},$$

não existe. De fato, para todo valor de m, a função f tem um valor constante na reta $y = mx,\ x \neq 0$,

$$f(x,mx) = \frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx) = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Note que para cada valor de m teremos valores distintos para o limite.

Teorema 2 **(Teste dos dois caminhos para a não existência de um limite).** *Se uma função $f(x,y)$ tem limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes no domínio de f quando (x,y) se aproxima de (x_0,y_0),então*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

não existe.

Exemplo 8. *Mostre que a função*

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

não tem limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$.

Solução: Examinamos os valores de f ao longo de curvas que terminam em $(0,0)$. Ao longo da curva $y = kx^2, x \neq 0$, a função possui o valor constante

$$f(x,kx^2) = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4+(kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$$

Logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,kx^2) = \frac{2k}{1+k^2}$$

Note que se $(x,y)\to(0,0)$ ao longo da parábola $y=x^2$, por exemplo, então $k=1$ e o limite é 1. Se $(x,y)\to(0,0)$ ao longo do eixo x, $k=0$ e o limite é 0. Pelo teste dos dois caminhos, f não tem limite quando $(x,y)\to(0,0)$.

Teorema 3 **(Continuidade de compostas).** *Se f é contínua em (x_0,y_0) e g é uma função contínua em $f(x_0,y_0)$, então a função composta $h = g\circ f$ definida por $h(x,y) = g(f(x,y))$ é contínua em (x_0,y_0).*

Exemplo 9. *As funções compostas*

$$f(x,y) = e^{x-y}, \quad f(x,y) = \cos\left(\frac{xy}{x^2+1}\right), \quad f(x,y) = \ln(1+x^2y^2)$$

são contínuas em todos os pontos (x,y).

Observação 5. *As definições de limite e continuidade para funções de duas variáveis e as conclusões sobre limites e continuidade para somas, produtos, quocientes, potências e composições estendem-se a funções de três ou mais variáveis.*

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Disciplina - Cálculo Diferencial e Integral III

Conteúdo da semana 05

1 Derivadas parciais

Se $z = f(x, y)$, então é possível indagar como os valores de z variam se x for mantido fixado e a y for permitido variar, ou se y for mantido fixado e a x for permitido variar. Por exemplo, a lei dos gases ideais da Física afirma que, sob condições apropriadas, a pressão exercida por um gás é uma função do volume do gás e sua temperatura.

Assim, um pesquisador estudando gases poderia estar interessado na taxa de variação da pressão se o volume for mantido fixado e a temperatura for permitido variar ou vice versa. Passamos a definir uma derivada que descreva tais taxas de variação denominada de **derivada parcial**.

Definição 1. *A* **derivada parcial de** $f(x, y)$ **em relação a** x *no ponto* (x_0, y_0) *é*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

Definição 2. *A* **derivada parcial de** $f(x, y)$ **em relação a** y *no ponto* (x_0, y_0) *é*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

Observação 1. *Outras notações*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Exemplo 1. *Dada a função* $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$, *calcule* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *no ponto* $(4, -5)$.

Solução:

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4,-5) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = 8 - 15 = -7.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x + 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(4,-5) = 3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13.$$

Exemplo 2. *Determine* $f_x(x,y), f_y(x,y)$, *se*

$$f(x,y) = \frac{2y}{y + \cos(x)}.$$

Solução:

Temos

$$\begin{aligned} f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right) &= \frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2} \\ &= \frac{(y+\cos x)(0) - 2y(-\operatorname{sen} x)}{(y+\cos x)^2} \\ &= \frac{2y \operatorname{sen} x}{(y+\cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right) &= \frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial y}(2y) - 2y\frac{\partial}{\partial y}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2} \\ &= \frac{2(y+\cos x) - 2y}{(y+\cos x)^2} \\ &= \frac{2y + 2\cos x - 2y}{(y+\cos x)^2} = \frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2} \end{aligned}$$

Exemplo 3. *Encontre* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *se a equação*

$$yz - \ln(z) = x + y$$

define z *como* $z = f(x,y)$.

Solução: Temos

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln(z) = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial x}y$$

Daí

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0 \Rightarrow \left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz - 1}$$

Exemplo 4. *Se* x, y *e* z *forem variáveis independentes e* $f(x,y,z) = x\operatorname{sen}(y+3z)$ *determine a derivada de* f *em relação a* z.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x\operatorname{sen}(y+3z)) = x\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen}(y+3z)) = x\cos(y+3z)\frac{\partial}{\partial z}(y+3z) = 3x\cos(y+3z)$$

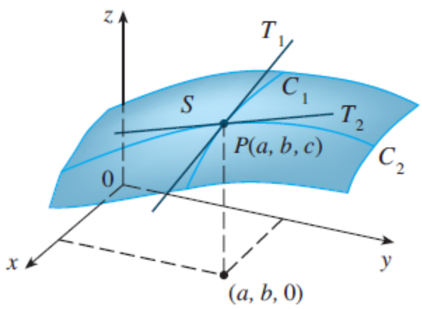
Resumindo para determinar as derivadas parciais de $z = f(x, y)$.

1. Para determinar $f_x(x, y)$ trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a x.

2. Para determinar $f_y(x, y)$ trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a y.

2 Interpretação das derivadas parciais

Para fornecer uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, lembremo-nos de que a equação $f(x, y)$ representa uma superfície S. Se $f(a, b) = c$, então o ponto $P(a, b, c)$ pertence a S. Ao fixar $y = b$, estamos restringindo nossa atenção à curva C_1, na qual o plano vertical $y = b$ intersecta S. Dessa maneira, o plano vertical $x = a$ a intersecta S na curva C_2. As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P (veja a figura abaixo).



Observe que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g^{'}(a) = f_x(a, b)$. A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a, y)$, de modo que a inclinação da tangente T_2 em P é $G^{'}(b) = f_y(a, b)$. **Portanto as derivadas parciais podem ser $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a, b, c)$ aos cortes C_1 e C_2 de S nos planos $y = b$ e $x = a$.**

Exemplo 5. *Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.*

Solução: Temos que,

$$f_x(x, y) = -2x \quad \Rightarrow f_x(1, 1) = -2.$$

$$f_y(x, y) = -4y \quad \Rightarrow f_y(1, 1) = -4.$$

Interseção com o plano y=1 - O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$, e o plano vertical $y = 1$ intercepta-o na parábola $z = 2 - x^2, y = 1$ (curva C_1). Note que a inclinação da reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 1, 1)$ é $f_x(1, 1) = -2$.

Interseção com o plano x=1 - Da mesma forma o plano $x = 1$ intercepta o paraboloide na parábola $z = 3 - 2y^2, x = 1$ (curva C_2) e a inclinação da reta tangente em $(1, 1, 1)$ é $f_y(1, 1) = -4$.

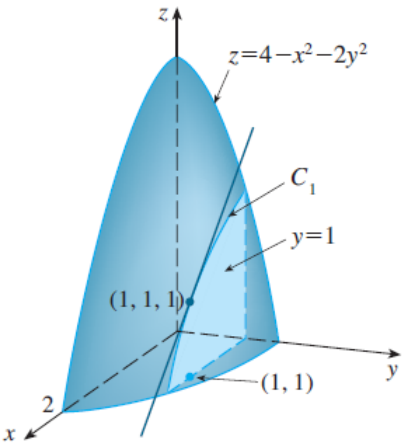


FIGURA 2

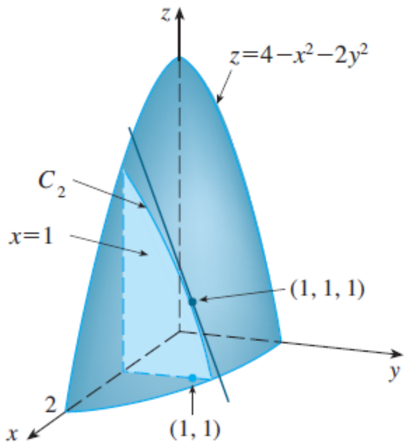


FIGURA 3

Exemplo 6. *Se* $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, *usando a regra da cadeia para funções de uma variável, determine* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+y}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}.$$

2.1 Derivadas parciais de ordem superior

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas f_x e f_y são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$, chamadas derivadas parciais de segunda ordem de f. Se $z = f(x, y)$ e for duas vezes diferenciável, então usamos a seguintes notação:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{ou} \quad f_{xx}, f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{ou} \quad f_{yx}, f_{xy}$$

As equações de definição são

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xx} = (f_x)_x, \quad f_{yx} = (f_y)_x$$

Exemplo 7. *Se $f(x, y) = x\cos(y) + ye^x$, encontre as derivadas de segunda ordem*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Solução: Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y) + ye^x, \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\,\mathrm{sen}(y) + e^x.$$

Agora as derivadas parciais de segunda ordem são

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x, \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\,\mathrm{sen}(y) + e^x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\cos(y), \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\,\mathrm{sen}(y) + e^x.$$

Teorema 1 (**Teorema de Clairaut**)**.** *Se $f(x, y)$ e suas derivadas parciais f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} forem definidas por toda uma região aberta contendo um ponto (a, b) e todas forem contínuas em (a, b), então*

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Derivadas de terceira ordem ou maior também podem ser definidas. Por exemplo,

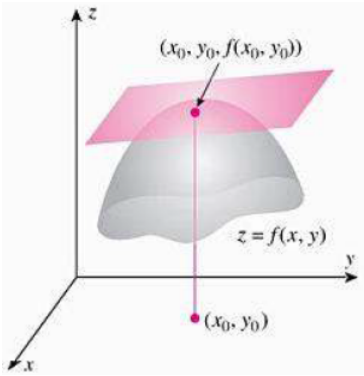
$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

e usando o Teorema de Clairaut pode-se mostrar que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ se essas funções forem contínuas.

3 Diferenciabilidade

Para que uma função $f(x, y)$ de duas variáveis seja diferenciável em um ponto (x_0, y_0), vamos querer que:

- a superfície $z = f(x, y)$ tenha um plano tangente não vertical no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
- os valores de f possam ser bem aproximados pelos valores de uma função linear na proximidade de (x_0, y_0).



- f seja contínua em (x_0, y_0).

Para uma função $f(x, y)$, o símbolo Δf, chamado de **incremento** de f, denota a variação do valor de $f(x, y)$ que resulta quando (x, y) varia de algum ponto inicial (x_0, y_0) para alguma posição nova $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, assim

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Vamos supor que $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existam façamos a **aproximação**

$$\Delta f \cong f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Com $\Delta x, \Delta y$ próximos de zero, queremos que o erro

$$\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

dessa aproximação seja muito menor do que a distância $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ entre (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

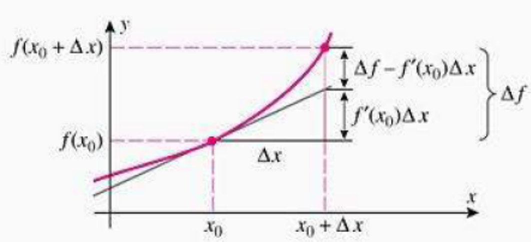


Figura 14.4.2

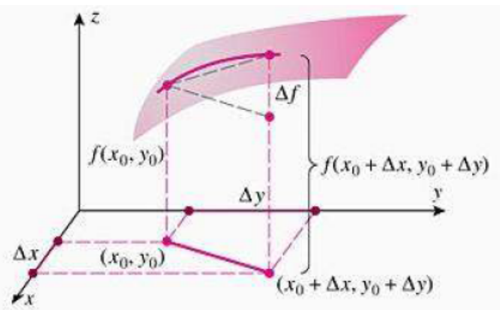


Figura 14.4.3

Definição 3. *Dizemos que uma função f de duas variáveis é* ***diferenciável*** *em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e*

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to 0} = \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

De modo semelhante ao caso de uma variável, a verificação da diferenciabilidade a partir da definição envolve o cálculo de um limite.

Exemplo 8. *Use a Definição 3 para mostrar que a função* $f(x, y) = x^2 + y^2$*, é diferenciável em* $(0, 0)$.

Dizemos que f é **diferenciável** se ela é diferenciável em todos os pontos de seu domínio, e dizemos que seu gráfico é uma **superfície lisa**.

Teorema 2. *Se as derivadas parciais* f_x *e* f_y *de uma função* $f(x, y)$ *são contínuas ao longo de uma região aberta* R*, então* f *é diferenciável em todos os pontos de* R*.*

Exemplo 9. *Considere a função* $f(x, y, z) = x + yz$*, como* $f_x(x, y, z) = 1, f_y(x, y, z) = z, f_z(x, y, z) = y$*, estão definidas e são contínuas em toda parte. Logo pelo Teorema 2 segue que* f *é diferenciável em toda parte.*

Teorema 3 (Diferenciabilidade implica continuidade). *Se uma função* $f(x, y)$ *é diferenciável em* (x_0, y_0)*, então ela é contínua em* (x_0, y_0)*.*

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III

Conteúdo da semana 06

1 Regra da cadeia

Lembremo-nos de que a Regra da Cadeia para uma função para uma função de uma variável nos dava uma regra para derivar uma função composta: se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, em que f e g são funções diferenciáveis, então y é uma função indiretamente diferenciável de t e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Para as funções de mais de uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de derivação de uma função composta. A primeira versão desta regra é dada no Teorema 1, como vemos a seguir:

Teorema 1. *(**Regra da Cadeia - caso 1**) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de $x = g(t), y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função derivável de t e*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Exemplo 1. *Utilize a regra da cadeia para encontrar a derivada de $z = xy$ com relação a t ao longo do caminho $x = \cos(t), y = \operatorname{sen}(t)$. Qual é o valor da derivada em $t = \dfrac{\pi}{2}$?*

Solução: Aplicando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(xy)\frac{d}{dt}(\cos(t)) + \frac{\partial}{\partial y}(xy)\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}(t)) \\
&= -y\operatorname{sen}(t) + x\cos(t) \\
&= -(\operatorname{sen}(t))(\operatorname{sen}(t)) + (\cos(t))(\cos(t)) \\
&= -\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) \\
&= \cos(2t) \quad \text{(Lembre da regra:} \quad cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b))
\end{aligned}$$

Para $t = \pi/2$,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1.$$

Exemplo 2. *A pressão em P (em kilopascals), volume V (em litros) e temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal relacionam-se pela equação $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é $300K$ e está aumentando com a taxa de $0,1K/s$ e o volume é $100L$ e está aumentando com a taxa de $0,2L/s$.*

Teorema 2. *(**Regra da Cadeia - caso 2**) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, mas x e y são funções de outras duas variáveis s e t, ou seja, $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$. Então,*

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Exemplo 3. *Se $z = e^x sen(y)$, em que $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.*

Solução:

Primeiramente note que,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x sen(y); \frac{\partial x}{\partial s} = t^2; \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos(y); \frac{\partial y}{\partial s} = 2st.$$

Aplicando a regra da cadeia para o caso 2, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\
&= (e^x sen(y))(t^2) + (e^x \cos(y))(2st) \\
&= t^2 e^{st^2} sen(s^2t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2t).
\end{aligned}$$

Teorema 3. *Suponha que $w = f(x, y, z), x = g(r, s), y = h(r, s)$ e $z = k(r, s)$. Se todas as quatro funções forem diferenciáveis, então w terá derivadas parciais em relação a r e s, dadas pelas fórmulas*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}
\end{aligned}$$

Exemplo 4. *Expresse $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ em termos de r e s, se $w = x + 2y + z^2$, $x = \frac{r}{s}, y = r^2 + \ln(s)$, e $z = 2r$.*

Solução: Aplicando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\ &= 1\cdot\frac{1}{s} + 2\cdot 2r + 2z\cdot 2\\ &= \frac{1}{s} + 4r + 4z = \frac{1}{s} + 4r + 8r = \frac{1}{s} + 12r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\ &= -\frac{r}{s^2} + 2\cdot\frac{1}{s} + 2z\cdot 0\\ &= \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}.\end{aligned}$$

Observação 1. *Se $w = f(x)$ e $x = g(r,s)$, então*

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r} \quad e \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Teorema 4. *(**Regra da Cadeia - versão geral**) Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots x_n$, em que cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \ldots t_m$. Então u é uma função de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ e*

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_i},$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

1.1 Diferenciação implícita

Suponha que $F(x,y)$ seja diferenciável e a equação $F(x,y) = 0$, defina y implicitamente como uma função diferenciável de x, digamos $y = f(x)$, em que $F(x, f(x)) = 0$, para todo x no domínio de f. Se F é diferenciável, podemos aplicar o caso 1 da Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação $F(x,y) = 0$ com relação a x. Já que x e y são funções de x, obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Para deduzir essa equação, presumimos que $F(x,y) = 0$ define y implicitamente como função de x.

Exemplo 5. *Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.*

Solução: *A equação dada pode ser escrita como*

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0.$$

e, dessa forma, a derivada

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(3x^2-6y)}{3y^2-6x} = -\frac{x^2-2y}{y^2-2x}.$$

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x,y)$ por uma equação da forma $F(x,y,z) = 0$. Isso significa que $F(x,y,f(x,y)) = 0$ para todo (x,y) no domínio de f. Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para derivar a equação $F(x,y,z) = 0$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, resolvemos a equação para $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e de forma análoga resolvemos também para $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, e dessa forma temos que,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Exemplo 6. *Encontre* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *em* $(0,0,0)$ *se* $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos(y) = 0$.

Solução: Seja $F(x,y,z) = x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos(y)$. Então

$$F_x = 3x^2 + zye^{xz}, \quad F_y = e^{xz} - z\,\mathrm{sen}(y), \quad F_z = 2z + xye^{xz} + \cos(y).$$

Como $F(0,0,0) = 0$, $F_z(0,0,0) = 1 \neq 0$ e todas as derivadas parciais de primeira ordem são contínuas, o teorema da função implícita afirma que $F(x,y,z) = 0$ define z como uma função diferenciável de x e y perto do ponto $(0,0,0)$. Então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + zye^{xz}}{2z + xye^{xz} + \cos(y)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^{xz} - z\,\mathrm{sen}(y)}{2z + xye^{xz} + \cos(y)}$$

Logo

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0,0) = -\frac{0}{1} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}(0,0,0) = -\frac{1}{1} = -1.$$

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III

Conteúdo da semana 07

1 Derivadas direcionais

Definição 1. *A* ***derivada direcional*** *de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\boldsymbol{u} = (a, b)$ é dada por:*

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Exemplo 1. *Utilizando a definição, encontre a derivada de $f(x, y) = x^2 + xy$ em $P_0(1, 2)$ na direção do vetor unitário $\boldsymbol{u} = \dfrac{2}{\sqrt{29}}i + \dfrac{5}{\sqrt{29}}j$.*

Solução: Aplicando a definição temos

$$\begin{aligned}
(D_{\mathbf{u}})f(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{2}{\sqrt{29}}h, 2 + \frac{5}{\sqrt{29}}h\right) - f(1, 2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + \frac{2}{\sqrt{29}}h)^2 + (1 + \frac{2}{\sqrt{29}}h)(2 + \frac{5}{\sqrt{29}}h) - (1 + 2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1 + \frac{4}{\sqrt{29}}h + \frac{4}{29}h^2 + 2 + \frac{5}{\sqrt{29}}h + \frac{4}{\sqrt{29}}h + \frac{10}{29}h^2 - 3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{13}{\sqrt{29}}h + \frac{14}{29}h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{13}{\sqrt{29}} + \frac{14}{29}h\right) = \frac{13}{\sqrt{29}} + \frac{14}{29} \cdot 0 = \frac{13}{\sqrt{29}}
\end{aligned}$$

A taxa de variação de f em $P_0(1, 2)$ na direção de $\mathbf{u}$ é $\dfrac{13}{\sqrt{29}}$.

Para facilitar os cálculos algébricos na obtenção da derivada direcional, o resultado a seguir fornece uma fórmula para o cálculo da derivada direcional.

Teorema 1. *Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivadas direcional na direção de qualquer vetor $\boldsymbol{u} = (a, b)$ e*

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

Observação 1. *Se o vetor unitário* $\boldsymbol{u}$ *faz um ângulo* θ *com o eixo* x *positivo, então podemos escrever o vetor* $\boldsymbol{u} = (\cos(\theta), sen(\theta))$ *e assim a derivada direcional pode ser calculada como:*

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = f_x(x,y)\cos(\theta) + f_y(x,y)sen(\theta).$$

Exemplo 2. *Encontre a derivada direcional* $D_{\boldsymbol{u}}f(x,y)$ *se*

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

e $\boldsymbol{u}$ *é o vetor unitário dado pelo ângulo* $\theta = \pi/6$*. Qual será* $D_{\boldsymbol{u}}f(1,2)$*?*

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x,y) &= f_x(x,y)\cos(\pi/6) + f_y(x,y)sen(\pi/6) \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}[3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y] \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_{\mathbf{u}}f(1,2) = \frac{1}{2}[3\sqrt{3}(1^2) - 3(1) + (8 - 3\sqrt{3})(2)] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

Definição 2. *Se* f *é uma função de duas variáveis* x *e* y*, então o* ***vetor gradiente*** *de* $f(x,y)$ *é a função vetorial* ∇f *definida por*

$$\nabla \boldsymbol{f}(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

Exemplo 3. *Se* $f(x,y) = sen(x) + e^{xy}$*, então*

Solução:

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (\cos(x) + ye^{xy}, xe^{xy})$$

Então,

$$\nabla f(0,1) = (2,0).$$

Agora com a notação de gradiente, podemos reescrever a notação para derivada direcional de uma função diferenciável f da seguinte forma:

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}.$$

Isso expressa a derivada direcional na direção de **u** como a projeção escalar do vetor gradiente sobre **u**.

Exemplo 4. *Determine a derivada direcional da função*

$$f(x,y) = x^2y^3 - 4y$$

no ponto $(2,-1)$ *na direção do vetor* $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$.

Solução:

Primeiramente vamos calcular o vetor gradiente em $(2,-1)$:

$$\nabla f(x,y) = 2xy^3\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

Então,

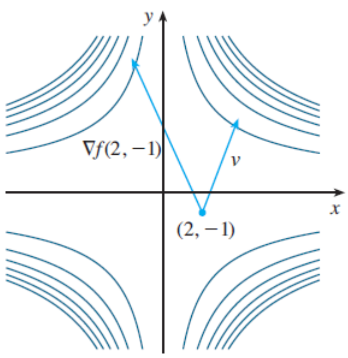
$$\nabla f(2,-1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Note que $\mathbf{v}$ não é um vetor unitário, mas como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, o vetor pode ser normalizado, dessa forma o vetor unitário na direção de $\mathbf{v}$ é dado por:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}.$$

Logo,

$$D_{\mathbf{u}}f(2,-1) = \nabla f(2,-1) \cdot \mathbf{u} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}\right) = \frac{32}{\sqrt{29}}.$$



Para **funções de três variáveis** podemos definir a derivada direcional de modo semelhante.

Definição 3. *A* ***derivada direcional*** *de f em (x_0, y_0, z_0) na direção do vetor unitário $\boldsymbol{u} = (a, b, c)$ é dada por:*

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Se $f(x, y, z)$ for diferenciável e $\mathbf{u} = (a, b, c)$, então o mesmo método apresentado no Teorema 1, pode ser generalizado, assim

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c.$$

Para uma função de três variáveis o **vetor gradiente** é dado por:

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

E então a fórmula para a derivada direcional fica reescrita como:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}.$$

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Disciplina - Cálculo Diferencial e Integral III

Conteúdo da semana 07 - Parte B

1 Maximizando a derivada direcional

Suponha que tenhamos uma função f de duas ou três variáveis e consideremos todas as derivadas direcionais possíveis de f em um ponto determinado. Isso nos dará a taxa de variação de f em todas direções possíveis. Podemos então perguntar: em qual dessas direções f varia mais rapidamente e qual a taxa máxima de variação? O resultado a seguir responde estas perguntas.

Teorema 1. *Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})$ é $|\nabla f(\boldsymbol{x})|$ ocorre quando $\boldsymbol{u}$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(\boldsymbol{x})$.*

Exemplo 1.

a) Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(1/2, 2)$.

b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

Solução:

a) Note que o vetor gradiente é dado por:

$$\nabla f(x, y) = (e^y, xe^y) \Rightarrow \nabla f(2, 0) = (1, 2)$$

Para determinar o vetor unitário na direção $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = (-3/2, 2)$ vamos encontrar o vetor $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}|}$. Temos que

$$|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}| = \sqrt{(-3/2)^2 + (2)^2} = \sqrt{25/4} = 5/2.$$

Assim,

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}|} = \frac{\left(-\frac{3}{2}, 2\right)}{\frac{5}{2}} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Desta forma, a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é dada por:

$$D_{\mathbf{u}}f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \mathbf{u} = (1,2) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 1.$$

b) De acordo com o Teorema 1, a função f aumenta mais depressa na direção do vetor gradiente que é $\nabla f(2,0) = (1,2)$. Além isso, a taxa máxima de variação é

$$|\nabla f(2,0)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Exemplo 2. *Suponha que a temperatura em um ponto $P(x,y,z)$ do espaço seja dada por*

$$T(x,y,z) = \frac{80}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)},$$

em que T é medida em graus Celsius e x, y e z em metros. Em que direção no ponto $(1,1,-2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

Solução:

O gradiente de T é dado por:

$$\begin{aligned}
\nabla T &= \frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial T}{\partial y} j + \frac{\partial T}{\partial z} k \\
&= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} i - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} j - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} k \\
&= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}(-xi - 2yj - 3zk)
\end{aligned}$$

No ponto $(1,1,-2)$, o vetor gradiente é dado por:

$$\nabla T(1,1,-2) = \frac{160}{256}(-i - 2j + 6k) = \frac{5}{8}(-i - 2j + 6k).$$

A temperatura irá aumentar mais rapidamente na direção do vetor gradiente $\nabla T(1,1,-2)$, ou equivalentemente na direção do vetor unitário

$$u = \frac{1}{\sqrt{41}}(-i - 2j + 6k).$$

A taxa máxima de aumento é o módulo do vetor gradiente

$$|\nabla T(1,1,-2)| = \frac{5}{8}|(-i-2j+6k)| = \frac{5}{8}\sqrt{41}.$$

2 Planos tangente às superfícies de nível

Suponha que S seja à superfície com a equação $F(x,y,z) = k$, ou seja, uma superfície de nível de uma função F e três variáveis, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S. Seja C qualquer curva na superfície S e que passe pelo ponto P. Lembrem-se que a curva C é descrita por uma função vetorial contínua $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Seja t_0 o valor do parâmetro corresponde ao ponto P; ou seja, $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Como C pertence a S, qualquer ponto $(x(t), y(t), z(t))$ precisa satisfazer a equação de S, ou seja,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k.$$

Se x, y, z são funções diferenciáveis de t e F também diferenciável, então podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação acima, como segue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

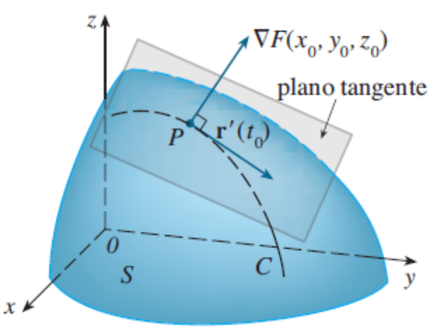
Sabendo que $\nabla \mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ e $\mathbf{r}^{'} = (x^{'}(t), y^{'}(t), z'(t))$ a equação acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}^{'}(t) = 0.$$

Em particular, quando $t = t_0$ temos que $r^{'}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, e assim,

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}^{'}(t_0) = 0. \tag{1}$$

A equação 1 nos diz que o vetor gradiente em P, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, é perpendicular ao vetor tangente $r^{'}(t_0)$, a qualquer curva C em S que passe por P, como vemos na figura a seguir:



Se $\nabla \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, é natural definir o **plano tangente à superfície de nível** $F(x, y, z) = k$ em $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que o plano que passa por P e tem vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, temos que a equação do plano tangente é dada por

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

A **reta normal** a S em P é a reta passando através de P e perpendicular ao plano tangente. A direção da reta normal é, portanto, dada pelo vetor gradiente $\nabla \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$ e suas equações simétricas são dadas por:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

No caso especial em que a equação de uma superfície S é da forma $z = f(x, y)$, podemos reescrever a equação como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

e considerar S como uma superfície de nível (com $k = 0$) de F. Então,

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1.$$

o que implica que a equação (2) se torna

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Exemplo 3. *Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto* $(-2, 1, -3)$ *ao elipsoide*

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3.$$

Solução:

Seja $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9}$. O elipsoide é a superfície de nível (com $k = 3$) da função $F(x, y, z)$. Para determinar a equação do plano tangente temos que encontrar as derivadas parciais:

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{x}{2}\ ;\ F_y(x_0, y_0, z_0) = 2y\ ;\ F_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{2z}{9}.$$

Aplicando no ponto

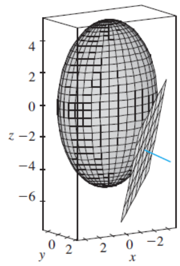
$$F_x(-2,1,-3) = -1 \ ; \ F_y(-2,1,-3) = 2 \ ; \ F_z(x_0, y_0, z_0) = -\frac{2}{3}.$$

Logo, a equação do plano tangente no ponto $(-2, 1, -3)$ é dado por:

$$-1(x+2) + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0$$

que pode ser simplificada para $3x - 6y + 2z + 18 = 0$. As equações simétricas da reta normal são:

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2/3}.$$



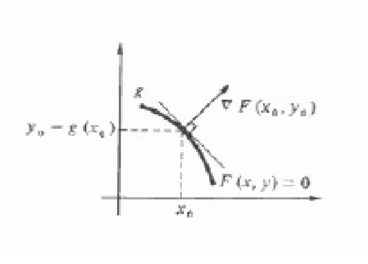
Observação 1. *Podemos ainda utilizar o gradiente de uma função de duas variáveis para obter a reta tangente ao gráfico de uma função $y = g(x)$. Consideremos a função de duas variáveis $F(x,y) = g(x) - y$; evidentemente , o gráfico de g coincide com a curva de nível $F(x,y) = 0$. Seja (x_0, y_0), com $y_0 = g(x_0)$, um ponto do gráfico de g. Segue assim que $\nabla F(x_0, y_0)$ é normal ao gráfico de g em (x_0, y_0).*

Como $\nabla F(x_0, y_0) = (g'(x_0), -1)$. Isso implica que a equação da reta tangente ao gráfico de g, no ponto x_0, é dada por:

$$\nabla F(x_0, y_0) \cdot [(x,y) - (x_0, y_0)] = 0$$

ou ainda

$$(g'(x_0), -1) \cdot [(x,y) - (x_0, y_0)] = 0.$$



Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

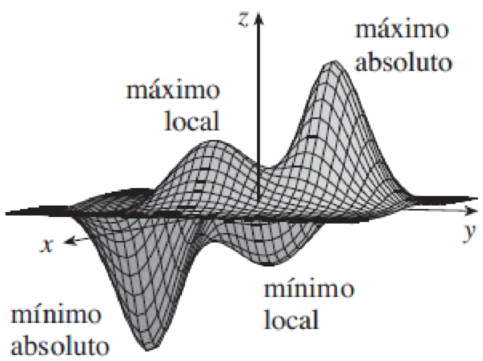
Disciplina - Cálculo Diferencial e Integral III

Conteúdo da semana 08

1 Valores máximo e mínimo

Definição 1. *Uma função de duas variáveis tem um* ***máximo local*** *em* (a, b) *se* $f(x, y) \leq f(a, b)$ *quando* (x, y) *está próximo de* (a, b)*. O número* $f(a, b)$ *é chamado* ***valor máximo local****. Se* $f(x, y) \geq f(a, b)$ *quando* (x, y) *está próximo* (a, b)*, então* f *tem um* ***mínimo local*** *em* (a, b) *e* $f(a, b)$ *é um* ***valor mínimo local****.*

Observação 1. *Se as inequações na Definição 1 são válidas para todos os pontos* (x, y) *do domínio de* f*, então* f *tem um* ***máximo absoluto*** *(ou* ***mínimo absoluto****) em* (a, b)*.*



Teorema 1. *Se* f *tem um máximo ou mínimo local em* (a, b) *e as derivadas parciais de primeira ordem de* f *existem nesses pontos, então* $f_x(a, b) = 0$ *e* $f_y(a, b) = 0$*.*

Definição 2. *Um ponto* (a, b) *é chamado* ***ponto crítico*** *de* f*, se* $f_x(a, b) = 0$ *e* $f_y(a, b) = 0$*, ou se uma das derivadas parciais não existir.*

Observação 2. *De acordo com a Definição 2, o Teorema 1 nos diz que,* ***se*** f ***tem um máximo ou mínimo local em*** (a, b)***, então*** (a, b) ***é um ponto crítico de*** f***.*** *No entanto,* *nem todos os pontos críticos originam máximos e mínimos. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.*

Exemplo 1. *Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Vamos verificar que a função possui um ponto de mínimo local e absoluto.*

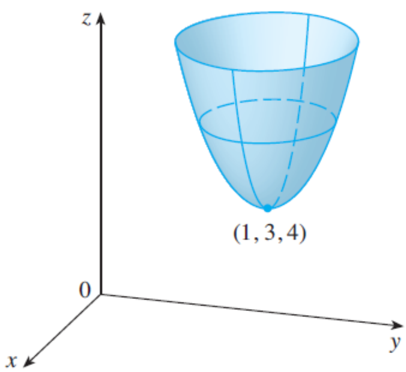
Solução: *As derivadas parciais da função f são:*

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \quad f_y(x, y) = 2y - 6$$

As derivadas parciais acima são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$, portanto, o único ponto crítico é $(1, 3)$. Note que podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14 \\ &= (x^2 - 2x + 1^2) + (y^2 - 6y + 3^2) + 4 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4 \end{aligned}$$

Uma vez que $(x - 1)^2 \geq 0$ e $(y - 3)^2 \geq 0$, temos que $f(x, y) \geq 4$ para todos os valores de x e y. Assim, decorre do Teorema 1 que $f(1, 3) = 4$ é um mínimo local e, de fato, é o mínimo absoluto de f. Isso pode ser confirmado geometricamente a partir do gráfico de f, que é o paraboloide elíptico com vértice no ponto $(1, 3, 4)$ como vemos na figura abaixo.



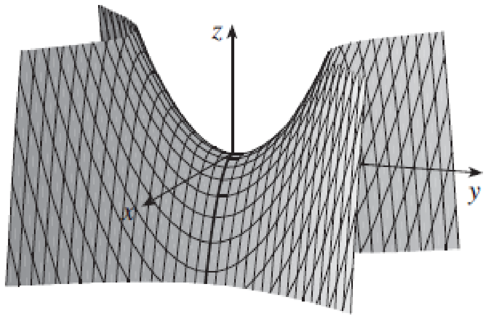
Exemplo 2. *Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.*

Solução:

Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, então o único ponto crítico é $(0, 0)$. Note que na função $f(x, y)$:

- Pontos sobre o eixo x $(y = 0)$, o que implica que $f(x, y) = -x^2 < 0$ (supondo que $x \neq 0$).
- Pontos sobre o eixo y $(x = 0)$, o que implica que $f(x, y) = y^2 > 0$ (supondo que $y \neq 0$).

Assim, todo disco com centro $(0, 0)$ contém pontos em que a função tem valores positivos, assim como pontos em que f tem valores negativos. Concluímos então que o ponto $(0, 0)$ não pode ser um valor extremo de f, portanto f não tem valor extremo. Veja no gráfico da função f a seguir que próximo a origem do gráfico existe o formato de uma sela, portanto o ponto $(0, 0)$ é denominado de **ponto de sela**.



Precisamos ser capazes de determinar se uma função tem um valor extremo em um ponto crítico. **O teste a seguir nos fornece uma forma de determinar um valor extremo** e é análogo ao teste da segunda derivada para as funções de uma única variável.

Teorema 2. *Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f. Seja,*

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

*a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um **mínimo local**.*

*b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um **máximo local**.*

*c) Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é **mínimo local nem máximo local**. Nesse caso dizemos que o ponto (a, b) é denominado de **ponto de sela** de f e o gráfico de f irá cruzar seu plano tangente em (a, b).*

Observação 3. *Se $D = 0$, **não há nenhuma informação**: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b), ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f.*

Exemplo 3. *Determine os valores de máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Solução: Primeiro localizamos os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \quad \text{e} \quad f_y = 4y^3 - 4x.$$

Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

$$x^3 - y = 0 \Rightarrow y = x^3 \quad (I) \quad \text{e} \quad y^3 - x = 0 \quad (II).$$

Substituindo (I) em (II) temos que:

$$x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

e existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$. Dessa forma, os três pontos críticos são $(0,0), (1,1)$ e $(-1,-1)$. Temos que as derivadas parciais são:

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{xy} = -4, \quad f_{yy} = 12y^2.$$

Assim,

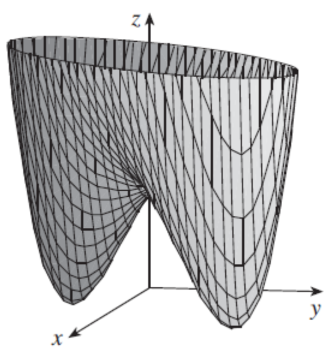
$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16.$$

- Como $D(0,0) = -16 < 0$, do item (c) do Teorema 2 segue que a origem é um ponto de sela, portanto a função f não tem nem máximo e nem mínimo local em $(0,0)$.

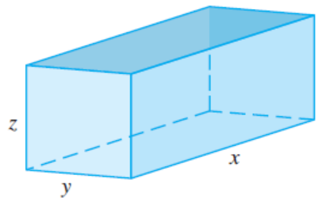
- Para o ponto $(1,1)$ temos que $D(1,1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, então segue do item (a) que $f(1,1) = -1$ é um valor mínimo local.

- Finalmente, no ponto $(-1,-1)$ temos que $D(-1,-1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$. Logo $f(-1,-1) = -1$ é também um valor mínimo local.

O gráfico da função f é ilustrado a seguir:



Exemplo 4. *Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com* $12m^2$ *de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.*



1.1 Valores máximo e mínimo absolutos

Para uma função f de uma variável, o Teorema do valor extremo diz que, se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f tem um valor mínimo e máximo absoluto. Encontramos estes valores calculando não somente os pontos críticos, mas também nas extremidades a e b (Métodos dos Intervalos Fechados).

Para as funções de duas variáveis, a situação é semelhante. Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um conjunto fechado de $\mathbb{R}^2$ contém todos os seus pontos de fronteira.

Definição 3. *Um **ponto da fronteira** de D é um ponto (a, b), tal que qualquer bola aberta com centro em (a, b) contém pontos de D e pontos não pertencentes a D.*

Definição 4. *Um **conjunto limitado** em $\mathbb{R}^2$ é aquele que está contido em alguma bola aberta. Em outras palavras, ele é finito em extensão.*

Teorema 3. *(**Teorema do valor extremo para funções de duas variáveis**) Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.*

Passos para determinar os valores de máximo e mínimo absolutos de uma função contínua em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplo 5. *Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.*

2 Multiplicadores de Lagrange

Teorema 4. *(Método os multiplicadores de Lagrange) Para determinar os valores de máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeitos à restrição $g(x, y, z) = k$ (supondo que esses valores extremos existam) e que $\nabla g \neq \boldsymbol{0}$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$:*

a) Determine todos os valores de x, y, z e λ tais que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad e \quad g(x, y, z) = k$$

b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo anterior. O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

Exemplo 6. *Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.*

Exemplo 7. *Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto $(3, 1, -1)$.*

Solução: A distância de um ponto $(3, 1, -1)$ é

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

mas a os cálculo ficam mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado dessa distância:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

A restrição é que o ponto (x, y, z) pertença à esfera, ou seja,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acordo com o método de multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$, em que $g = 4$. O que implica que:

$$\begin{cases} 2(x-3) = & 2x\lambda \quad (I) \\ 2(y-1) = & 2y\lambda \quad (II) \\ 2(z+1) = & 2z\lambda \quad (III) \\ x^2 + y^2 + z^2 = & 4 \quad (IV) \end{cases}$$

Isolando os valores de x, y e z nas equações $(I), (II)$ e (III) na equação (IV) segue que

$$x = \frac{3}{1-\lambda}; \quad y = \frac{1}{1-\lambda} \quad \text{e} \quad z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

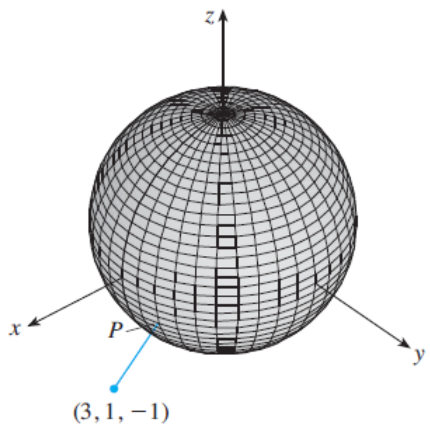
Substituindo essas expressões em (IV), segue que

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4$$

Logo $\lambda = 1 \pm \dfrac{\sqrt{11}}{2}$. O que correspondem aos pontos:

$$P\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{e} \quad Q\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Note que f tem valor menor no primeiro desses pontos; dessa forma, o ponto mais próximo é P e o mais distante é Q. A figura a seguir ilustra o gráfico da esfera juntamente com o ponto P.



Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III - 2022.2

1ª Lista de Exercícios

1. Determine o domínio das funções vetoriais:

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = \left(\ln(t+1), \dfrac{t}{\sqrt{9-t^2}}, 2^t\right)$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = \left(\cos(t), \ln(t), \dfrac{1}{\sqrt{t-2}}\right)$

2. Determine os limites a seguir:

   (a) $\lim\limits_{t\to 0}\left(e^{-3t}, \dfrac{t^2}{sen^2(t)}, cos(2t)\right)$

   (b) $\lim\limits_{t\to \infty}\left(\dfrac{t^2+1}{3t^2+2}, \dfrac{1}{t}\right)$

   (c) $\lim\limits_{t\to 2}(t\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k})$

   (d) $\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{3}{t^2}, \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}, sen(2t)\right)$

3. Obtenha equações paramétricas da reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{r}(t)$ no ponto em que $t = t_0$.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (2 - \ln(t))\boldsymbol{j}\,; t_0 = 1.$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos(\pi t)\boldsymbol{i} + 2sen(\pi t)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}\,; t_0 = \dfrac{1}{3}.$

4. Obtenha uma equação vetorial da reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{r}(t)$ no ponto P_0 da curva.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (2t-1)\boldsymbol{i} + \sqrt{3t+4}\boldsymbol{j};\ P_0(-1, 2).$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} - \dfrac{1}{t+1}\boldsymbol{j} + (4-t^2)\boldsymbol{k};\ P_0(4, 1, 0).$

5. Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro t cresce.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (sen(t), t).$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = (t, 2-t, 2t).$

   (c) $\boldsymbol{r}(t) = (3, t, 2-t^2).$

   (d) $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + t^4\boldsymbol{j} + t^6\boldsymbol{k}.$

6. Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga os pontos P e Q.

   (a) $P(0,0,0), Q(1,2,3)$.

   (b) $P(0,-1,1), Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$.

7. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos(t), y = tsen(t), z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

8. Em quais pontos a curva $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (2t - t^2)\boldsymbol{k}$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$?

9. Determine a derivada da função vetorial.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{t-2}, 3, \frac{1}{t^2})$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = (t^2, \cos(t^2), sen^2(t))$

   (c) $\boldsymbol{r}(t) = (tsen(t), e^t\cos(t), sen(t)\cos(t))$

10. Determine o vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$ no ponto com valor e parâmetro dado t.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t), 3t, 2sen(2t))$ no ponto $t = 0$.

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4)$ no ponto $t = 1$.

11. Se $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, encontre $\boldsymbol{r}^{'}(t), \boldsymbol{T}(1), \boldsymbol{r}^{''}(t)$ e $\boldsymbol{r}^{'}(t) \times \boldsymbol{r}^{''}(t)$.

12. Se $\boldsymbol{r}(t) = (e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t})$, encontre $\boldsymbol{T}(0), \boldsymbol{r}^{''}(0)$ e $\boldsymbol{r}^{'}(t) \cdot \boldsymbol{r}^{''}(t)$.

13. Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

    (a) $x = t^2 + 1, y = 4\sqrt{t}, z = e^{t^2 - t}$; $P(2,4,1)$.

    (b) $x = e^{-t}\cos(t), y = e^{-t}sen(t), z = e^{-t}$; $P(1,0,1)$.

14. Calcule as integrais a seguir.

    (a) $\displaystyle\int_0^1 (6t^2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - 8t^3\boldsymbol{k})dt$

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1}\boldsymbol{i} + \frac{1}{t^2+1}\boldsymbol{j} + \frac{2t}{t^2+1}\boldsymbol{k}\right) dt$

(c) $\int (e^t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + \ln(t)\boldsymbol{k})dt$

15. Determine o comprimento da curva dada.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos(t), \sqrt{5}t, 2sen(t))$, $-2 \leq t \leq 2$

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$, $0 \leq t \leq 1$

    (c) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$, $0 \leq t \leq 1$

16. Encontre a função comprimento de arco da curva medida a partir do ponto P na direção de t crescente e, a seguir, reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco começando de P.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (5-t)\boldsymbol{i} + (4t-3)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}$; $P(4,1,3)$

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = e^t sen(t)\boldsymbol{i} + e^t\cos(t)\boldsymbol{j} + \sqrt{2}e^t\boldsymbol{k}$; $P(0,1,\sqrt{2})$.

17. Determine o vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$ e a curvatura.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (t, 3\cos(t), 3sen(t))$

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$

18. Em que ponto a curva $y = e^x$ tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \to \infty$.

19. Determine a curvatura das funções:

    a) $y = x^3$

    b) $y = cos(x)$

20. Encontre a curvatura de $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ no ponto $(1,1,1)$.

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III - 2022.1

2ª Lista de exercícios

1. Determine o domínio da função.

   a) $f(x,y) = \sqrt{x-2} + \sqrt{y-1}$

   b) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

   c) $g(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

   d) $h(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

   e) $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{9-y^2} + \sqrt{1-z^2}$

2. Esboce o gráfico das funções:

   a) $f(x,y) = y$

   b) $g(x,y) = 10 - 4x - 5y$

   c) $h(x,y) = x^2 + 4y^2 + 1$

3. Determine o limite, se existir, ou mostre que não existe.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} (x^2y^3 - 4y^2)$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi/2)} ysen(x-y)$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos(y)}{3x^2 + y^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2\cos(y)}{x^2 + y^4}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2} tg(xz)$

4. Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

   a) $f(x,y) = (y-2x)^2$

   b) $g(x,y) = \sqrt[3]{y^2 + x^2}$

5. Descreva as superfícies de nível da função:

a) $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

b) $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

6. Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

   (a) $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$

   (b) $g(t) = t + \ln(t), \quad f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

7. Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

   (a) $F(x, y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$

   (b) $F(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$

8. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações.

9. Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

   (a) $f(x, y) = y^4 + 5xy^3$

   (b) $f(x, t) = t^2e^{-x}$

   (c) $z = \ln(x + t^2)$

   (d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

   (e) $z = (2x + 3y)^{10}$

   (f) $w = ln(x + 2y + 3z)$

   (g) $u = xysen^{-1}(yz)$

   (h) $f(x, y, z) = x^3yz^2 + 2yz$

10. Use derivação implícita para encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

    (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

    (b) $e^x = xyz$

    (c) $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

11. Verifique se a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$,

    (a) $u = x^4y^3 - y^4$

    (b) $u = \cos(x^2y)$

Afirmação 1. *As derivadas parciais ocorrem em equações diferenciais parciais que exprimem certas leis físicas. Por exemplo, a equação diferencial parcial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada equação de Laplace. As soluções dessa equação são chamadas funções harmônicas e são muito importantes no estudo do calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

12. Mostre que a função $u(x, y) = e^x sen(y)$ é solução da equação de Laplace.

Afirmação 2. *A equação da onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante.

13. Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda.

    (a) $u = sen(kx)sen(akt)$

    (b) $u = \dfrac{t}{a^2t^2 - x^2}$

14. Use a definição de diferenciabilidade para provar que

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

15. Use a regra da cadeia para achar $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dfrac{dw}{dt}$.

    (a) $z = xy^3 - x^2y, \quad x = t^2 + 1, y = t^2 - 1.$

    (b) $z = sen(x)\cos(y), \quad x = \sqrt{t}, y = 1/t.$

    (c) $w = xe^{y/z}, x = t^2, y = 1 - t, z = 1 + 2t.$

16. Use a regra da cadeia para achar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ ou $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

    (a) $z = (x - y)^5, x = s^2t, y = st^2.$

    (b) $z = \ln(3x + 2y), x = ssen(t), y = t\cos(s).$

17. A pressão de 1 mol de um gás ideal está aumentando em uma taxa de $0,05$k Pa/s e a temperatura está aumentando em uma taxa de $0,15$K/s. Use a equação $PV = 8,31T$ para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for 20 kPa e a temperatura for 320K.

18. O comprimento l, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em um determinado momento, as dimensões são $l = 1m$ e $w = h = 2m$, l e w estão aumentando em uma taxa de $2m/s$ enquanto h está decrescendo em uma taxa de $3m/s$. Nesse instante, encontre as taxas em que as seguintes quantidades estão variando.

    (a) O volume.

    (b) A área da superfície.

19. Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

    (a) $f(x,y) = xy^3 - x^2, \quad (1,2), \quad \theta = \pi/3.$

    (b) $f(x,y) = y\cos(xy), \quad (0,1), \quad \theta = \pi/4.$

20. Determine o gradiente de f, depois calcule o gradiente no ponto P. Encontre também a taxa de variação de f em P na direção do vetor u.

    (a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}, \quad P(2,1), \quad \mathbf{u} = (3/5, 4/5).$

    (b) $f(x,y,z) = xe^{2yz}, \quad P(3,0,2), \quad \mathbf{u} = (2/3, -2/3, 1/3)$

21. Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

    (a) $f(x,y) = e^x sen(y), \quad P(0,\pi/3), \quad \mathbf{v} = (-6,8).$

    (b) $g(s,t) = s\sqrt{t}, \quad P(2,4), \quad \mathbf{v} = (2,-1)$

    (c) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z, \quad P(1,2,3), \quad \mathbf{v} = (2,-1,2)$

22. Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

    (a) $f(x,y) = 4y\sqrt{x},\ (4,1).$

    (b) $f(x,y) = sen(xy),\ (1,0).$

23. Encontre uma equação (a) do plano tangente e (b) da reta normal à superfície dada no ponto especificado.

    (a) $2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10,\ (3,3,5).$

    (b) $xy^2z^3 = 8,\ (2,2,1).$

24. Se $f(x, y) = xy$, encontre o vetor gradiente $\nabla f(3, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 6$ no ponto $(3, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.