TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO (Continuação)

3.4. Integração de algumas Funções envolvendo Funções Trigonométricas

Iremos estudar agora as integrais

$$\int sen^n u du,\ \int cos^n u du, \int sec^n u du, \int cosec^n u du,\ \int tg^n u du \text{ e } \int cotg^n u du,$$

onde n é um número inteiro positivo.

Nestas integrais podemos usar artifícios de cálculo com o auxílio das identidades trigonométricas, dadas abaixo, com o objetivo de preparar o integrando para a aplicação do Método da substituição estudado anteriormente.

$$sen^2u + cos^2u = 1(\ sen^2u = 1 - cos^2u \ e\ cos^2u = 1 - sen^2u);$$

$$sen^2u = \frac{1 - cos2u}{2}; \qquad cos^2u = \frac{1 + cos2u}{2};$$

$$tg^2u = sec^2u - 1 \quad e \quad cotg^2u = cosec^2u - 1$$

Já vimos anteriormente como calcular, por exemplo, algumas das integrais abaixo, onde inicialmente preparamos o integrando utilizando as identidades trigonométricas, para aplicação do método da substituição. Estes exemplos ilustram os dois possíveis casos: n é ímpar ou n é par.

Exemplo 3.6: Calcular as integrais indefinidas:

a) $\int sen^3 x dx$

Solução: Usando as identidades trigonométricas, temos

$sen^3x = sen^2x. senx = (1 - cos^2x). senx = senx - cos^2x. senx.$

Daí,

$$\int sen^3xdx = \int (senx - cos^2x. senx)dx = \int senxdx - \underbrace{\int cos^2x. senx\, dx}_{Cálc.\ Auxiliar}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^3xdx = -cosx - \left(-\frac{cos^3x}{3}\right) + C = -cosx + \frac{cos^3x}{3} + C.}$$

► Cálculo Auxiliar item a): $\int cos^2x. senx\, dx$. Pelo método da Substituição.

Fazendo $u = cosx$, temos $\frac{du}{dx} = -senx \Rightarrow senxdx = -du.$ Substituindo na integral dada,

$$\int cos^2x. senx\, dx = \int u^2. (-du) = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{cos^3x}{3} + C.$$

b) $\int sen^5 x dx$

Solução: Usando as identidades trigonométricas, temos

$sen^5x = (sen^2x)^2.senx = (1 - cos^2x)^2.senx = senx - 2cos^2x.senx + cos^4x.senx.$

Daí,

$$\begin{aligned}\int sen^5xdx &= \int (senx - 2cos^2x.senx + cos^4x.senx)dx \\ &= \int senxdx - 2\underbrace{\int cos^2x.senx\,dx + \int cos^4x.senxdx}_{Cálc.\ Auxiliar}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^3xdx = -cosx - \left(-\frac{cos^3x}{3}\right) + C = -cosx + \frac{cos^3x}{3} + C.}$$

- **Cálculo Auxiliar item b):** $\int cos^2x.senx\,dx$ e $\int cos^4x.senxdx$. Pelo método da Substituição.

Fazendo $u = cosx$, temos $\frac{du}{dx} = -senx \Rightarrow senxdx = -du$. Substituindo na integral dada,

- $\int cos^2x.senx\,dx = \int u^2.(-du) = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{cos^3x}{3} + C.$
- $\int cos^4x.senxdx = \int u^4.(-du) = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{cos^5x}{5} + C.$

c) $\int sen^4xdx$

Solução: Usando as identidades trigonométricas, temos

$$\begin{aligned}sen^4x = (sen^2x)^2 &= \left(\frac{1 - cos\,2x}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2cos2x + cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - 2cos2x + \frac{1 + cos2.2x}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow sen^4x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}cos4x \Rightarrow \boxed{sen^4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{8}cos4x}.$$

Daí,

$$\int sen^4xdx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{8}cos4x\right)dx = \int \frac{3}{8}dx - \int \frac{1}{2}cos2xdx + \int \frac{1}{8}cos4x\ dx$$

$$\Rightarrow \int sen^4xdx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}sen2x + \frac{1}{8}.\frac{1}{4}sen4x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^4xdx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + C.}$$

d) $\int cotg^3 3x\,dx$

Solução: Usando as identidades trigonométricas, temos

$cotg^3 3x = cotg^2 3x . cotg3x = (cosec^2 3x - 1). cotg3x = cosec^2 3x . cotg3x - cotg3x.$

Daí,

$$I = \int cotg^3 3xdx = \int (cosec^2 3x . cotg3x - cotg3x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int cosec^2 3x . cotg3xdx - \int cotg3x\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^3 xdx = -\frac{1}{6} cotg^2 3x - \frac{1}{3} ln|sen3x| + C.}$$

- **Cálculo Auxiliar item d):** $\int cosec^2 3x . cotg3xdx$.Pelo método da substituição. Fazendo $u = cotg\ 3x$ temos $\frac{du}{dx} = -cosec^2 3x.\ (3x)' \Rightarrow cosec^2 3xdx = -\frac{du}{3}$. Daí, substituindo na integral

$$\int cosec^2 3x . cotg3xdx = \int u. \left(-\frac{du}{3}\right) = -\frac{1}{3}.\frac{u^2}{2} + C = -\frac{1}{6} cotg^2 3x + C.$$

e) $\int tg^4 x\, dx$

Solução: Usando as identidades trigonométricas, temos

$tg^4 x = tg^2 x . tg^2 x = (sec^2 x - 1). tg^2 x = sec^2 x\ .\ tg^2 x - tg^2 x =$

$$= sec^2 x\ .\ tg^2 x - (sec^2 x - 1) = sec^2 x\ .\ tg^2 x - sec^2 x + 1.$$

Daí,

$$\int sen^3 xdx = \int (sec^2 x\ .\ tg^2 x - sec^2 x + 1)dx = \int sec^2 x\ .\ tg^2 xdx - \int sec^2 x\, dx + \int dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^3 xdx = \frac{1}{3} tg^3 x - tgx + x + C.}$$

Cálculo Auxiliar item e)

- $\int sec^2 x\ .\ tg^2 xdx$. Pelo Método da substituição fazendo $u = tgx$, temos $\frac{du}{dx} = sec^2 x \Rightarrow sec^2 x. dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{sec^2 x}$. Substituindo na integral

$$\int sec^2 x\ .\ tg^2 xdx\ . = \int sec^2 x\ .\ u^2 . \frac{du}{sec^2 x} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3} tg^3 x + C.$$

- $\int cosec^2 3x . cotg3xdx$. Pelo Método da substituição fazendo $u = cotg3x$. (Concluir!)

FÓRMULAS DE REDUÇÃO OU RECORRÊNCIA: O método de integração por partes pode ser usado para obtermos as chamadas Fórmulas de Redução ou Recorrência, que servem para resolver estas integrais que acabamos de estudar. A ideia é reduzir uma integral em outra mais simples do mesmo tipo. A aplicação repetida dessas fórmulas nos levará ao cálculo da integral dada. As mais usadas são:

- (1) $\int sen^n u\, du = -\frac{1}{n} sen^{n-1}u \,.\, cosu + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}udu$;
- (2) $\int cos^n u\, du = \frac{1}{n} cos^{n-1}u \,.\, senu + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}udu$;
- (3) $\int sec^n u\, du = \frac{1}{n-1} sec^{n-2}u \,.\, tgu + \frac{n-2}{n-1}\int sec^{n-2}udu$;
- (4) $\int cosec^n u\, du = -\frac{1}{n-1} cosec^{n-2}u \,.\, cotgu + \frac{n-2}{n-1}\int cosec^{n-2}udu$;
- (5) $\int tg^n u\, du = \frac{1}{n-1} tg^{n-1}u - \int tg^{n-2}udu$;
- (6) $\int cotg^n u\, du = -\frac{1}{n-1} cotg^{n-1}u - \int cotg^{n-2}udu.$

Exemplo 3.7: Resolva as integrais abaixo, usando as fórmulas de recorrência:

a) $\int sen^4xdx =$

Solução: Usando a fórmula de recorrência, temos:

$\int sen^4xdx = -\frac{1}{4}sen^3xcosx + \frac{3}{4}\int sen^2xdx$

$$\Rightarrow \int sen^4xdx = -\frac{1}{4}sen^3xcosx + \frac{3}{4}\int \frac{1-cos2x}{2}dx$$

$$\Rightarrow \int sen^4xdx = -\frac{1}{4}sen^3xcosx + \frac{3}{8}\left(\int dx - \int cos2x\, dx\right)$$

$$\Rightarrow \int sen^4xdx = -\frac{1}{4}sen^3xcosx + \frac{3}{8}\left(x - \frac{1}{2}sen2x\right) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^4xdx = -\frac{1}{4}sen^3xcosx + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}sen2x + C.}$$

Observação: Ao resolvermos esta integral no exemplo1, sem usar a fórmula de recorrência, encontramos:

$$\boxed{\int sen^4xdx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + C.}$$

No entanto, estes dois resultados são equivalentes. De fato,

$$-\frac{1}{4}sen^3xcosx + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}sen2x + C = -\frac{1}{4}\underbrace{sen^2x}\,.\,\underbrace{senx.cosx} + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}sen2x + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1 - cos2x}{2}\right).\frac{sen2x}{2} + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}sen2x + C =$$

$$= -\frac{1}{16}sen2x + \frac{1}{16}\underbrace{cos2x.sen2x} + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}sen2x + C =$$

$$= -\frac{1}{16}sen2x + \frac{1}{16}.\frac{sen4x}{2} + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}sen2x + C =$$

$$= -\frac{4}{16}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + \frac{3}{8}x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + C.$$

Ou seja, a solução pelos dois métodos nos dá resultados equivalentes (iguais).

b) $\int cotg^3 3x\, dx$

Solução: Antes de usarmos a fórmula de recorrência, como o arco é $3x$, usaremos primeiro o método da substituição. Fazendo $u = 3x$, temos $\frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$. Daí, substituindo temos:

$$\int cotg^3 3x\, dx = \int cotg^3 u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\underbrace{\int cotg^3 u\, du}_{\substack{fórm.\ de \\ Resorrência}}$$

$$\Rightarrow \int cotg^3 3x\, dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}cotg^2 u - \int cotgudu\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}cotg^2 u - ln|senu|\right) + C$$

$$\Rightarrow \int cotg^3 3x\, dx = -\frac{1}{6}cotg^2 u - \frac{1}{3}ln\ |senu| + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int cotg^3 3x\, dx = -\frac{1}{6}cotg^2 3x - \frac{1}{3}ln|sen3x| + C}.$$

Observação: Nesta integral quando resolvemos sem usar as fórmulas, no exemplo1, chegamos exatamente no mesmo resultado.

c) $\int cos^5(2x + 1)dx$

Solução: Antes de usarmos a fórmula de recorrência, como o arco é $2x + 1$, usaremos primeiro o método da substituição. Fazendo $u = 2x + 1$, temos $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$. Daí, substituindo temos:

$$\int cos^5(2x + 1)dx = \int cos^5 u\,.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \underbrace{cos^5 u}_{fórm.\ de\ Recorrência} du$$

$$\Rightarrow \int cos^5(2x + 1)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}cos^4 u\,.senu + \frac{4}{5}\int cos^3 udu\right)$$

$$\Rightarrow \int cos^5(2x + 1)dx = \frac{1}{10}cos^4 u\,.senu + \frac{2}{5}\underbrace{\int cos^3 udu}_{fórm.\ de\ recorrência}$$

$$\Rightarrow \int cos^5(2x+1)dx = \frac{1}{10}cos^4u\,.senu + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}cos^2u.senu + \frac{2}{3}\int cosudu\right)$$

$$\Rightarrow \int cos^5(2x+1)dx = \frac{1}{10}cos^4u\,.senu + \frac{2}{15}cos^2u.senu + \frac{4}{15}senu + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered}\int cos^5(2x+1)dx = \frac{1}{10}cos^4(2x+1)\,.sen(2x+1) + \frac{2}{15}cos^2(2x+1)\,sen(2x+1) + \\ + \frac{4}{15}sen(2x+1) + C.\end{gathered}}$$

Observação: Usando as identidades trigonométricas, existem outras formas equivalentes de escrever este resultado.

Exercício: Usando as fórmulas de recorrência calcular a integral indefinida:

$$\int cos^6\,3x\,dx =$$

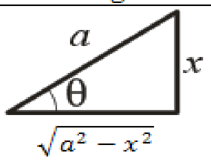
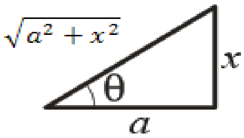
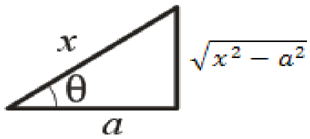
3.5. Integração por Substituição Trigonométrica

Muitas vezes, substituições trigonométricas convenientes nos levam à solução de uma integral. Se o integrando contém funções envolvendo as expressões:

$$\sqrt{a^2-x^2},\ \sqrt{x^2-a^2}\ \ ou\ \ \sqrt{a^2+x^2}\left(=\sqrt{x^2+a^2}\right),\ onde\ a>0,$$

é possível fazermos uma substituição trigonométrica adequada, a fim de resolvermos a integral.

As figuras dos triângulos retângulos abaixo nos sugerem tal substituição:

Para	Usamos	Para obter	Triângulo
Caso I $\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\,\text{sen}(\theta)$	$a\cos(\theta)$	
Caso II $\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\,\text{tg}(\theta)$	$a\sec(\theta)$	
Caso III $\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec(\theta)$	$a\,\text{tg}(\theta)$	
http://obaricentrodamente.blogspot.com			

Vejamos:

<u>**Caso I:**</u> A função integrando envolve $\sqrt{a^2-x^2}$.

Neste caso, usamos $x = a\,sen\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a.cos\theta \Rightarrow dx = a\,cos\theta\,d\theta$. Daí, supondo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2sen^2\theta} = \sqrt{a^2\underbrace{(1 - sen^2\theta)}_{=cos^2\theta}} = \sqrt{\underbrace{a^2cos^2\theta}_{a>0\ e\ cos\theta>0}} = a.cos\theta.$$

<u>Caso II:</u> A função integrando envolve $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Neste caso, usamos $x = a\,sec\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a.sec\theta.tg\theta \Rightarrow dx = a\,sec\theta\,tg\theta\,d\theta$. Daí, supondo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ ou\ \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2\underbrace{(sec^2\theta - 1)}_{=tg^2\theta}} = \sqrt{\underbrace{a^2tg^2\theta}_{a>0\ e\ tg\theta>0}} = a.tg\theta.$$

<u>Caso III:</u> A função integrando envolve $\sqrt{x^2 + a^2}$.

Neste caso, usamos $x = a\,tg\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a.sec^2\theta \Rightarrow dx = a\,sec^2\theta\,d\theta$. Daí, supondo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2tg^2\theta + a^2} = \sqrt{a^2\underbrace{(tg^2\theta + 1)}_{=sec^2\theta}} = \sqrt{\underbrace{a^2sec^2\theta}_{a>0\ e\ sec\theta>0}} = a.sec\theta.$$

Observações:

- Ao fazermos esta substituição, o resultado da integral será dado na variável θ, então temos que escrever o resultado em termos da variável x. (Devemos ter atenção para quais valores a função está definida).
- Esta técnica é útil para eliminar radicais de certos tipos de integrando, pois como vimos, iremos transformar o integrando numa expressão trigonométrica sem radicais.

Exemplo 3.8: Calcular as seguintes integrais:

a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx = I$

Solução: Como o integrando contém $\sqrt{16 - x^2}$, que é da forma $\sqrt{a^2 - x^2},\ com\ a = 4$, fazemos

$$x = 4.sen\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 4cos\theta \Rightarrow dx = 4cos\theta d\theta.$$

Daí, para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16sen^2\theta} = \sqrt{16(1 - sen^2\theta)} = \sqrt{16cos^2\theta} = 4cos\theta$$

e

$$x^2\sqrt{16 - x^2} = (4.sen\theta)^2.\ 4cos\theta = 16sen^2\theta.4cos\theta.$$

Substituindo na integral dada, temos:

$$I = \int \frac{1}{16sen^2\theta.4cos\theta}.4cos\theta.d\theta = \frac{1}{16}\int cosec^2\theta d\theta = -\frac{1}{16}cotg\theta + C. \ \mathbf{(1)}$$

Devemos agora voltar a variável de integração original x. Como $x = 4sen\theta$, temos $sen\theta = \frac{x}{4}$, de onde segue que $cotg\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$. Logo, substituindo em (1), obtemos

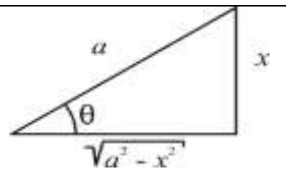
$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C.$$

Cálculo Auxiliar item a): Como $sen\theta = \frac{x}{4}$, usando a identidade trigonométrica $cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$,temos:

$$cos^2\theta = 1 - \frac{x^2}{16} \Rightarrow cos^2\theta = \frac{16-x^2}{16} \Rightarrow cos\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}.$$

$(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, logo cos θ é positivo)

Daí, $cotg\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta} = \frac{\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}}{\frac{x}{4}} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$.

Para encontrar $cotg\theta$, poderíamos apenas observar a figura ao lado e usar os conceitos de trigonometria.		$cotg\theta = \frac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$

Observação: Alguns livros ao voltarmos para a variável inicial x, usamos apenas as definições de funções trigonométricas inversas. Assim, neste exemplo, como $x = 4sen\theta$, temos $sen\theta = \frac{x}{4} \Rightarrow \theta = arc\ sen\left(\frac{x}{a}\right)$. Logo,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx = -\frac{1}{16}cotg\left(arc\ sen\left(\frac{x}{4}\right)\right) + C.$$

b) $\int x^3\sqrt{x^2+3}dx$

Solução: Como o integrando contém $\sqrt{x^2+3}$, que é da forma $\sqrt{x^2+a^2}$, $com\ a = \sqrt{3}$, fazemos

$$x = \sqrt{3}.tg\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{3}sec^2\theta \Rightarrow dx = \sqrt{3}\ sec^2\theta d\theta. \qquad (*1)$$

Daí, para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos:

$$x^3.\sqrt{x^2+3}=(\sqrt{3}.tg\theta)^3.\sqrt{(\sqrt{3}.tg\theta)^2+3}=3\sqrt{3}.tg^3\theta.\sqrt{3tg^2\theta+3}=$$

$$=3\sqrt{3}.tg^3\theta\sqrt{3(tg^2\theta+1)}=3\sqrt{3}.tg^3\theta.\sqrt{3sec^2\theta}=3\sqrt{3}.tg^3\theta.\sqrt{3}sec\theta=$$

$$=9.tg^3\theta.sec\theta. \qquad (*\,2)$$

Substituindo (*1) e (*2) na integral dada, temos:

$$\int x^{3\sqrt{x^2+3}}dx=9.\int tg^3\theta.sec\theta\sqrt{3}sec^2\theta d\theta=$$

$$=9\sqrt{3}\int(sec^2\theta-1).tg\theta.sec\theta.sec^2\theta\, d\theta=$$

$$=9\sqrt{3}\int tg\theta.sec\theta.sec^4\theta\, d\theta-9\sqrt{3}\int tg\theta.sec\theta sec^2\theta d\theta=$$

$$=9\sqrt{3}.\frac{sec^5\theta}{5}-9\sqrt{3}.\frac{sec^3\theta}{3}+C=\frac{9\sqrt{3}}{5}.sec^5\theta-3\sqrt{3}.sec^3\theta+C.$$

Voltando a variável de integração original x. Como $x=\sqrt{3}.tg\theta \Rightarrow tg\theta=\frac{x}{\sqrt{3}}$, temos

$$sec^2\theta=1+\frac{x^2}{3}\Rightarrow sec^2\theta=\frac{3+x^2}{3}\Rightarrow sec\theta=\sqrt{\frac{x^2+3}{3}}.$$

$(sec\theta>0\ em\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$. Logo,

$$\int x^3\sqrt{x^2+3}dx=\frac{9\sqrt{3}}{5}.\left(\sqrt{\frac{x^2+3}{3}}\right)^5-3\sqrt{3}.\left(\sqrt{\frac{x^2+3}{3}}\right)^3+C$$
$$=\frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2+3}\right)^5-\left(\sqrt{x^2+3}\right)^3+C.$$

Observação: No item (b) para voltar a variável x, também poderíamos ter usado o triangulo retângulo, como no exemplo anterior. Além disso, se usarmos a função inversa, como $x=\sqrt{3}.tg\theta$ temos

$tg\theta=\frac{x}{\sqrt{3}}\Rightarrow\theta=arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right).$

Logo,

$$\int x^3\sqrt{x^2+3}dx=\frac{9\sqrt{3}}{5}.sec^5\left(arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)-3\sqrt{3}.sec^3\left(arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)+C$$

Cálculo Auxiliar item b):

i) $\int sec^2\theta.tg\theta.sec\theta\, d\theta$. Pelo método da substituição, fazendo $u=sec\theta$, temos:

$\frac{du}{d\theta} = sec\theta.tg\theta \Rightarrow sec\theta.tg\theta\, d\theta = du$. Daí,

$$\int sec^2\theta.tg\theta.sec\theta\, d\theta = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{sec^3\theta}{3} + C.$$

ii) $\int tg\theta.sec\theta\, d\theta = \int \frac{sen\theta}{cos^2\theta} d\theta$. Pelo método da substituição, fazendo $u = cos\theta$, temos: $\frac{du}{d\theta} = -sen\theta \Rightarrow sen\theta\, d\theta = -du$. Daí,

$$\int tg\theta.sec\theta\, d\theta = \int -\frac{du}{u^2} = -\int u^{-2}\, du = -\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + C = \frac{1}{cos\theta} + C = sec\theta + C.$$

c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}}$

Solução: Como o integrando contém $\sqrt{x^2-5}$, que é da forma $\sqrt{x^2-a^2},\ com\ a = \sqrt{5}$, fazemos

$$x = \sqrt{5}.sec\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{5}sec\theta.tg\theta \ \Rightarrow dx = \sqrt{5}\, sec\theta.tg\theta d\theta.$$

Daí, para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$x^2\sqrt{x^2-5} = (\sqrt{5}.sec\theta)^2\sqrt{(\sqrt{5}.sec\theta)^2 - 5} = 5.sec^2\theta\sqrt{5(sec^2\theta - 1)}$$
$$= 5.sec^2\theta.\sqrt{5\, tg^2\theta} = 5sec^2\theta.\sqrt{5}.tg\theta.$$

Substituindo na integral dada, temos:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{\sqrt{5}\, sec\theta.tg\theta d\theta}{5sec^2\theta.\sqrt{5}.tg\theta} = \int \frac{d\theta}{5sec\theta} = \frac{1}{5}\int cos\theta d\theta = \frac{1}{5}sen\theta + C.$$

Voltando à variável x. Como $x = \sqrt{5}.sec\theta$, temos:

$$sec\theta = \frac{x}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{5}} \Rightarrow cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{x}.$$

Daí, como $sen^2\theta = 1 - cos^2\theta \Rightarrow sen^2\theta = 1 - \frac{5}{x^2} \Rightarrow sen^2\theta = \frac{x^2-5}{x^2} \Rightarrow sen\theta = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}$.

Logo,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}} = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2-5}}{x} + C.$$

Observação: Ao voltarmos para a variável x, podemos apenas fazer:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}} = \frac{1}{5} sen\left(arcsec\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right) + C.$$

3.6. Integração de Funções Envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes.

Na resolução deste tipo de integral geralmente utilizamos as identidades trigonométricas:

$$sena.cosb = \frac{1}{2}[sen(a+b) + sen(a-b)];$$

$$sena.senb = \frac{1}{2}[cos(a-b) - cos(a+b)];$$

$$cosa.cosb = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)\,;$$

onde a e b são dois inteiros quaisquer.

Exemplo 3.9: Resolva as seguintes integrais

a) $\int_{-\pi}^{\pi} sen2x\, cos5x\, dx$

Solução: Temos:

$$sen2x\, cos5x = \frac{1}{2}[sen(2x+5x) + sen(2x-5x)]$$

$$\Rightarrow sen2x\, cos5x = \frac{1}{2}[sen(7x) + sen(-3x)].$$

Resolvendo a integral indefinida

$$\int sen2x\, cos5x\, dx = \int \frac{1}{2}[sen(7x) + sen(-3x)]dx$$

$$\Rightarrow \int sen2x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int sen7xdx + \int \underbrace{sen(-3x)}_{\substack{função\\ ímpar}} dx\right]$$

$$\Rightarrow \int sen2x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int sen7xdx - \int \underbrace{sen(3x)}_{\substack{função\\ ímpar}} dx\right]$$

$$\Rightarrow \int sen2x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7x) - \left(-\frac{1}{3}cos(3x)\right)\right] + \mathrm{C}$$

$$\Rightarrow \int sen2x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7x) + \frac{1}{3}cos(3x)\right] + C.$$

Resolvendo a integral definida pelo TFC:

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen2x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7x) + \frac{1}{3}cos(3x)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7\pi) + \frac{1}{3}cos(3\pi)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos\big(7(-\pi)\big) + \frac{1}{3}\underbrace{cos\big(3(-\pi)\big)}_{função\ par}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7\pi) + \frac{1}{3}cos(3\pi)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7\pi) + \frac{1}{3}cos(3\pi)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7} \times (-1) + \frac{1}{3} \times (-1)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7} \times (-1) + \frac{1}{3} \times (-1)\right] =$$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right]$-$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right] = 0.$

a) b)$\int_{-\pi}^{\pi} cos2x\, cos3x\, dx$

Solução: Temos:

$$cos2x.cos3x = \frac{1}{2}[cos(2x + 3x) + cos(2x - 3x)]$$

$$\Rightarrow cos2x.cos3x = \frac{1}{2}[cos(5x) + cos(-x)].$$

Resolvendo a integral indefinida $\int cos2xcos3x\, dx = I$, temos

$$I = \int \frac{1}{2}[cos(5x) + cos(-x)]\, dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[\int cos(5x)\, dx + \int cos(-x) dx\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}sen(5x) + [-sen(-x)]\right\} + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}sen(5x) - sen(-x)\right\} + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{10}sen(5x) - \frac{1}{2}sen(-x) + C.$$

Usando o TFC, temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos2x\, cos3x\, dx = = \left[\frac{1}{10}sen(5x) - \frac{1}{2}sen(-x)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{1}{10}\underbrace{sen(5\pi)}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{sen(-\pi)}_{=0}\right] - \left[\frac{1}{10}\underbrace{sen(-5\pi)}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{sen(\pi)}_{=0}\right] = 0$$

2ª Lista de Exercícios (Unidade I)

1 – Calcular as integrais indefinidas:

a) $\int sen5x\ cos3x\ dx$	b) $\int 15sen^2x.cos^3xdx$
c) $\int sen^3 2\theta\ cos^4 2\theta\ d\theta$	d) $\int tg^2(5x)dx$
e) $\int sen(\omega t)sen(\omega t+\theta)dt$	f) $\int cosec^4(3-2x)dx$
g) $\int 2xsen^4(x^2-1)dx$	h) $\int cos^5(3-3x)dx$
i) $\int \cos(5x)\cos(8x)\,dx$	j) $\int tg^3x\ cos^4x\ dx$
k) $\int sen^3(2x+1)dx$	l) $\int sen^{19}(t-1)\cos(t-1)\,dt$
m) $\int sec^3(1-4x)dx$	n) $\int 15sen^5xdx$
o) $\int \frac{x^3dx}{(x^2+2)^2}$	p) $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$

2 – Calcular as integrais por substituição trigonométrica:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx$	b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}}$
c) $\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx$	d) $\int \sqrt{4-x^2}dx$
e) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}dx$	f) $\int \sqrt{4+x^2}dx$

3 – Calcular as integrais definidas:

a) $\int_1^2 \frac{dt}{t^4\sqrt{4+t^2}}$	b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$

GABARITO

Q 1) a) $-\frac{1}{14}cos7x-\frac{1}{4}cos2x+C$	b) $5sen^3x-3sen^5x+C$		
c) $-\frac{1}{10}cos^5 2\theta+\frac{1}{14}cos^7 2\theta+C$	d) $\frac{1}{5}tg5x-x+C$		
e) $\frac{1}{2}tcos\theta-\frac{1}{4w}sen(2wt+\theta)+C$	f) $\frac{1}{2}cotg(3-2x)+\frac{1}{6}cotg^3(3-2x)+C$		
g) $-\frac{1}{4}sen3(x^2-1)\cos(x^2-1)-\frac{3}{8}sen(x^2-1)\cos(x^2-1)+\frac{3}{8}(x^2-1)+C$			
h) $-\frac{1}{3}sen(3-3x)+\frac{2}{9}sen^3(3-3x)-\frac{1}{15}sen^{15}(3-3x)+C$	i) $\frac{1}{26}sen13x+\frac{1}{6}sen3x+C$		
j) $\frac{1}{4}sen^4x+C$	k) $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}cos^3(2x+1)+C$	l) $\frac{1}{20}sen^{20}(t-1)+C$	
m) $-\frac{1}{8}\sec(1-4x)tg(1-4x)-\frac{1}{8}\ln\lvert\sec(1-4x)+tg(1-4x)\rvert+C$			
n) $-15cosx+10cos3x-3cos^5x+C$			
o) $\frac{1}{2}\ln(x2+2)+\frac{1}{x^2+2}+C$	p) $\frac{-x-2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}arc\ tg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$		
Q 2) a) $ln\left\lvert\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{x}{2}\right\rvert+C$	b) $\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}+C$	c) $\frac{1}{2}ln\left\lvert\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right\rvert+C$	d) $2arcsen\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C$
e) $\left(\frac{1}{3}x^2+6\right)\sqrt{x^2-9}+C$	f) $\frac{x\sqrt{4+x^2}}{2}+2\ln\lvert\sqrt{4+x^2}+x\rvert+C$		
Q3) a) $\frac{1}{48}\left(\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)$	b) $\frac{1}{\sqrt{3}}ln\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$		

Observação: As questões retiradas do livro Cálculo A.

Agora que já estudamos as integrais por substituição trigonométricas, podemos voltar as integrais por frações parciais nas quais os fatores lineares do denominador são fatores quadráticos irredutíveis, e resolver exemplos.

- Exemplo: (Frações parciais) Calcular a integral $\int \frac{2x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}dx$.