Séries (Resumo de algumas definições e resultados – Parte I)

(Obs.: Os exemplos enunciados serão resolvidos em aula)

1. Série de Números Reais

Definição 1.1: Uma série de números reais é uma soma infinita da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$ é dito o termo geral ou n$^{\underline{mo}}$ Termo da série.

Exemplo 1.1: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Exemplo 1.2: $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

Observação 1: Para representar a série dada na definição 1, podemos usar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $\sum a_n$.

2. Séries Convergentes ou Divergentes

Definição 2.1: Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, considere a sequência (S_n), da por

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \\ &\vdots \end{aligned}$$

A sequência (S_n) é chamada sequência das somas parciais da série.

- Se $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, ou seja, se a sequência $\{S_n\}$ tem um limite S, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, converge e sua soma é S.
  Escreve-se: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$.
- Se $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe ou é $\pm\infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. (Uma série divergente não tem soma).

Observação 2.1: Na maioria dos casos é muito difícil achar uma fórmula para S_n. Mais adiante, veremos que é possível estabelecer a convergência ou divergência de uma série empregando outros métodos.

Exemplo 2.1: Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

a) Ache S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5.	b) Ache S_n.
c) Mostre que a série é convergente e ache sua soma.	

Solução:

Exemplo 2.2: A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ é divergente.

Solução: Temos

$S_1 = -1$; $S_2 = -1 + 1 = 0$; $S_3 = -1 + 1 - 1 = -1$; $S_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$; ... ,.

Ou seja, $S_n = \begin{cases} -1, se\ n\ é\ impar \\ 0, se\ n\ é\ par \end{cases}$, logo a sequência (S_n) diverge e consequentemente a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverge.

Exemplo 2.3: Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

Definição 2.2: Chamamos de série harmônica, a série divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Definição 2.3: Chamamos de série geométrica, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} a.r^n$, onde a e r são números reais com $a \neq 0$.

Teorema 2.1: Seja $a \neq 0$. A série geométrica

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}.$$

(i) Converge e tem por soma $S = \frac{a}{1-r}$, se $|r| < 1$.

(ii) Diverge se $|r| \geq 1$.

Exemplo 2.4: Determine para cada uma das séries geométricas abaixo, se ela converge ou diverge; se convergir, determine sua soma.

a) $0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}.3^{n-1}$
c) $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \cdots$	d) $\sum_{n=1}^{\infty} 3.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
e) $3 + \frac{3}{(-4)} + \frac{3}{16} + \frac{3}{(-64)} + \cdots + \frac{3}{(-4)^{n-1}} + \cdots$	f) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} \ldots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

Definição 2.4: Uma série-p, ou série hiperarmônica, é uma série da forma

$$\sum \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

onde p é um número real positivo.

Observação 2.2: Se $p = 1$, obtemos uma série harmônica.

Teorema 2.2: A série-p $\sum \frac{1}{n^p}$

i) Converge se $p > 1$

ii) Diverge se $p \leq 1$.

Exemplo 2.5: Verifique se as séries convergem ou divergem:

a) $\sum \frac{1}{n^2}$	b) $\sum \frac{2}{\sqrt{n}}$	c) $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$	d) $\sum \frac{1}{3\sqrt{n}}$

Teorema 2.3: Se uma série $\sum a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Observação 2.3: A recíproca deste Teorema é falsa, isto é, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não decorre necessariamente que a série seja convergente, como exemplo disto temos a série harmônica.

3. Operações com Séries Convergentes

Teorema 3.1: Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem e $c \in \mathbb{R}$, então:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = c.\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Observação 3.1:

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge e $c \in \mathbb{R}.c \neq 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n$ também diverge.
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

Exemplo 3.1: Verifique se a série converge ou diverge. Se convergir, ache sua soma.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5^n}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \frac{2}{3^{n-1}}\right]$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n}\right]$

4. Alguns Testes de Convergência de Séries

Vejamos agora, alguns testes que nos permitem saber se algumas séries convergem ou divergem.

4.1. Teste do nmo. Termo

i) Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum a_n$ é divergente.

ii) Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então é necessária uma investigação adicional para determinar se a série $\sum a_n$ é convergente ou divergente.

Exemplo 4.1: Aplique o Teste do nmo. Termo, para as seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$	e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n-1}$	f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)}$

4.2. Teste da Integral

Seja $\sum a_n$ uma série, $f(n) = a_n$ e f a função obtida substituindo-se n por x. Se f é positiva, contínua e decrescente para todo real $x \geq 1$, então:

i. A série $\sum a_n$ converge se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

ii. A série $\sum a_n$ diverge se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge.

Exemplo 4.2: Use o Teste da integral para verificar se a série converge ou diverge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-n^2}$

Cuidado: O valor encontrado na integral imprópria não é a soma da série. Este valor serve apenas para verificar se este tipo de série converge ou diverge.

4.3. Teste da Comparação:

Sejam $\sum \boldsymbol{a_n}$ *e* $\sum \boldsymbol{b_n}$ séries de termos positivos, isto é, $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) Se $\sum \boldsymbol{b_n}$ converge, então $\sum \boldsymbol{a_n}$ converge.

ii) Se $\sum \boldsymbol{a_n}$ diverge, então $\sum \boldsymbol{b_n}$ diverge.

Exemplo 4.3: Determine se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}$ e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$ convergem ou divergem, usando o Teste da Comparação.

4.4. Teste para séries alternadas

Costuma-se representar as séries alternadas como $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ *ou* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n > 0$ para todo n. A série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ *é* convergente se são verificadas as duas condições seguintes: $a_k \geq a_{k+1} > 0$ para todo k e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplo 4.4: Determine se a série alternada converge ou diverge:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n-3}$

4.5. Teste da Razão

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos, e suponhamos $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$

i) Se L<1, a série é absolutamente convergente.

ii) Se L>1 ou $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$, a série é divergente.

iii) Se L=1, nada se pode afirmar; deve-se então aplicar outro teste.

4.6. Teste da Raiz

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos, e suponhamos $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$

i) Se L<1, a série é convergente.

ii) Se L>1 ou $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty$, a série é divergente.

iii) Se L=1, devemos aplicar outro teste, pois a série pode ser convergente ou divergente.

Exemplo 4.5: Determine a convergência ou divergência das séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{n^n}$	d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

5. Séries Absolutamente Convergentes

Definição 5.1: Uma série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum |a_n| = |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|+\cdots$ é convergente. Quando $\sum a_n$, mas $\sum |a_n|$ não converge, dizemos que $\sum a_n$ é condicionalmente convergente.

Observação 5.1: Note que se $\sum a_n$ é uma série de termos positivos, então $|a_n|=a_n$, e neste caso convergência absoluta e convergência coincidem.

Proposição 5.1: Se a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n$ é convergente. (Em outras palavras: se $\sum |a_n|$ converge, então $\sum a_n$ converge.

Exemplo 5.1: Verifique se as séries abaixo convergem ou divergem

$a)\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^7}+\cdots$	$b) sen1+\frac{sen2}{2^2}+\frac{sen3}{3^2}+\cdots+\frac{sen\,n}{n^2}+\cdots$

5.1. Teste da Razão para convergência absoluta

Seja $\sum a_n$ uma série de termos não-nulos, e suponhamos $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$

i) Se L<1, a série é absolutamente convergente.

ii) Se L>1 ou $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$, a série é divergente.

iii) Se L=1, devemos aplicar outro teste, pois a série pode ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

Exemplo 5.2: Determine se a série abaixo é absolutamente convergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+4}{2^n}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$	d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^n}$

Referências:

FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. Cálculo A. Editora McGraw Hill.

CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.