Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Departamento de Matemática

Componente Curricular: Cálculo Diferencial e Integral II

Professora: Joselma

EMENTA

- Integral Definida.
- Teorema Fundamental do Cálculo.
- Técnicas de Integração.
- Aplicações da Integral;
- Integrais Impróprias.
- Sequências e Séries.
- Séries de Potências;
- Série de Taylor e Série de Maclaurin.

Bibliografia:

FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. Cálculo A. Editora McGraw Hill.

SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica. Volumes 1 e 2. Editora McGraw.

THOMAS, G. B. Cálculo Volumes1 e 2. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.

Cronograma com as datas das avaliações:

	Unidade I	**Unidade II**
1ª Avaliação	**17/05/2022**	**30/06/2022**
2ª Avaliação	**07/06/2022**	**19/07/2022**
Reposição	**09/06/2022**	**21/07/2022**
Final	**26/07/2022**	

RESUMO DO CONTEÚDO A SER ESTUDADO.

1. REVISÃO DE INTEGRAL INDEFINIDA

1.1 Definição de Integral Indefinida

Relembremos um pouco de derivadas, determinando uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para cada uma das funções $f(x)$ dadas na 1ª coluna da tabela abaixo:

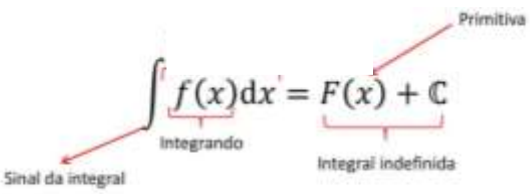
Função dada	Função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$	Cálculos
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}.2x = x = f(x)$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$F'(x) = \left(\frac{x^6}{6}\right)' = \frac{1}{6}.6x^5 = x^5 = f(x)$
$f(x) = x^{-3}$	$F(x) = -\frac{x^{-2}}{2}$	$F'(x) = \left(-\frac{x^{-2}}{2}\right)' = -\frac{1}{2}.(-2x^{-3}) = x^{-3} = f(x)$
$f(x) = x^{-1}$	$F(x) = lnx$	$F'(x) = (lnx)' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x} = x^{-1} = f(x)$
$f(x) = senx$	$F(x) = -cosx$	$F'(x) = (-cosx)' = -(-senx) = senx = f(x)$
$f(x) = cosx$	$F(x) = senx$	$F'(x) = (senx)' = cosx = f(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$F'(x) = (e^x)' = e^x = f(x)$

- A função $F(x)$ que satisfaz $F'(x) = f(x)$ é chamada primitiva da função $f(x)$. Além disso, em Cálculo I vimos que se $F(x)$ é uma primitiva (ou anti-derivada) de $f(x)$, então $F(x) + C$, com C uma constante qualquer, também é uma primitiva de $f(x)$.

Definição 1.1: Se $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$, a expressão $F(x) + C$ é chamada integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

onde C representa uma constante qualquer.



Exemplo 1.1: Por definição, $\int senxdx = -cosx + C$, pois $F(x) = -cosx + C$ é uma primitiva de $f(x) = senx$. De fato,

$$F'(x) = (-cox + C)' = -(-senx) + 0 = senx = f(x).$$

Observação 1.1: Da definição de integral indefinida, decorre que

i) $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$, assim, $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$.

ii) $\int f(x)dx$ representa uma família de funções (a família de todas as primitivas da função integrando).

IMPORTANTE: Não esqueça da constante de integração $\boldsymbol{C}$. (Pois ao calcularmos a Integral Indefinida $\int f(x)dx$ obtemos uma família de funções, sem a constante está errado!).

1.2. Propriedades da Integral Indefinida

Proposição 1.1: Sejam $f, g: I \to \mathbb{R}$ e K uma constante. Então:

i) $\int K.f\,(x)dx = K.\int f(x)dx$.

ii) $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

(Como f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x)), do item (ii) temos $\int \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.)

Exemplo 1.2: Encontre as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int (\boldsymbol{x - 5x^2 + 4x^3 + \frac{3}{x} - 2})\boldsymbol{dx} = \int xdx - \int 5x^2\,dx + \int 4x^3dx + \int \frac{3}{x}dx - \int 2dx =$

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 - 5\int x^2dx + 4\int x^3dx + 3\int \frac{1}{x}dx - 2\int dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 - \frac{5x^3}{3} + C_2 + 4\frac{x^4}{4} + C_3 + 3\ln|x| + C_4 - 2x + C_5 =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} + x^4 + 3\ln|x| - 2x + C,$$

onde $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$.

Observação: Como a soma de constantes é igual a uma nova constante, podemos colocar uma única constante para representar esta soma, como faremos no exemplo a seguir.

b) $\int (\boldsymbol{cost - \frac{3}{4}e^t + 5t^{-3}})\boldsymbol{dt} = \int costdt - \frac{3}{4}\int e^tdt + 5\int t^{-3}\,dt =$

$$= sent - \frac{3}{4}e^t + \frac{5t^{-2}}{-2} + C = sent - \frac{3}{4}e^t - \frac{5}{2}t^{-2} + C.$$

c) $\int (\boldsymbol{5 - e^t + 3sent + sec^2t})\boldsymbol{dt} =$

d) $\int \left(\boldsymbol{4cosx + \frac{2}{x} - \sqrt{x^3}}\right)\boldsymbol{dx} =$

1.3. Tabela das Integrais Indefinidas

TABELA: Derivadas, Integrais e Identidades Trigonométricas

• *Derivadas*

Sejam u e v funções deriváveis de x e n constante.

1. $y = u^n \Rightarrow y' = n\,u^{n-1}u'$.
2. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$.
3. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
4. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u(\ln a)\,u', \ (a > 0, \ a \neq 1)$.
5. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$.
6. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}\log_a e$.
7. $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u}u'$.
8. $y = u^v \Rightarrow y' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v(\ln u)\,v'$.
9. $y = \text{sen}\ u \Rightarrow y' = u' \cos\ u$.
10. $y = \cos\ u \Rightarrow y' = -u'\text{sen}\ u$.
11. $y = \text{tg}\ u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$.
12. $y = \text{cotg}\ u \Rightarrow y' = -u'\text{cosec}^2 u$.
13. $y = \sec\ u \Rightarrow y' = u' \sec\ u\ \text{tg}\ u$.
14. $y = \text{cosec}\ u \Rightarrow y' = -u'\text{cosec}\ u\ \text{cotg}\ u$.
15. $y = arc\ \text{sen}\ u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $y = arc\ \cos\ u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $y = arc\ \text{tg}\ u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$.
18. $y = arc\ \cot g\ u \Rightarrow \frac{-u'}{1+u^2}$.
19. $y = arc\ \sec\ u, \ |u| \geqslant 1$
    $\Rightarrow y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.
20. $y = arc\ \text{cosec}\ u, \ |u| \geqslant 1$
    $\Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.

• *Identidades Trigonométricas*

1. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
2. $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$.
3. $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$.
4. $\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos\ 2x}{2}$.
5. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos\ 2x}{2}$.
6. $\text{sen}\ 2x = 2\ \text{sen}\ x\ \cos\ x$.
7. $2\ \text{sen}\ x\ \cos\ y = \text{sen}\,(x - y) + sen\,(x + y)$.
8. $2\ \text{sen}\ x\ \text{sen}\ y = \cos\,(x - y) - \cos\,(x + y)$.
9. $2\ \cos\ x\ \cos\ y = \cos\,(x - y) + \cos\,(x + y)$.
10. $1 \pm \text{sen}\ x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

• *Integrais*

1. $\int du = u + c$.
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \ n \neq -1$.
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$.
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, \ a > 0, \ a \neq 1$.
5. $\int e^u du = e^u + c$.
6. $\int \text{sen}\ u\ du = -\cos\ u + c$.
7. $\int \cos\ u\ du = \text{sen}\ u + c$.
8. $\int \text{tg}\ u\ du = \ln|\sec\ u| + c$.
9. $\int \text{cotg}\ u\ du = \ln|\text{sen}\ u| + c$.
10. $\int \sec\ u\ du = \ln|\sec\ u + \text{tg}\ u| + c$.
11. $\int \text{cosec}\ u\ du = \ln|\text{cosec}\ u - \text{cotg}\ u| + c$.
12. $\int \sec\ u\ \text{tg}\ u\ du = \sec\ u + c$.
13. $\int \text{cosec}\ u\ \text{cotg}\ u\ du = -\text{cosec}\ u + c$.
14. $\int \sec^2 u\ du = \text{tg}\ u + c$.
15. $\int \text{cosec}^2 u\ du = -\text{cotg}\ u + c$.
16. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arc\ \text{tg}\frac{u}{a} + c$.
17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c, \ u^2 > a^2$.
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$.
19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$.
20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\ \text{sen}\frac{u}{a} + c, \ u^2 < a^2$.
21. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arc\ \sec\left|\frac{u}{a}\right| + c$.

• *Fórmulas de Recorrência*

1. $\int sen^n au\ du = -\frac{sen^{n-1} au\ \cos\ au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int sen^{n-2} au\ du$.
2. $\int \cos^n au\ du = \frac{sen\ au\ \cos^{n-1} au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int \cos^{n-2} au\ du$.
3. $\int tg^n au\ du = \frac{tg^{n-1} au}{a(n-1)} - \int tg^{n-2} au\ du$.
4. $\int cotg^n au\ du = -\frac{cotg^{n-1} au}{a(n-1)} - \int cotg^{n-2} au\ du$
5. $\int \sec^n au\ du = \frac{\sec^{n-2} au\ tg\ au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int \sec^{n-2} au\ du$
6. $\int cosec^n au\ du = -\frac{cosec^{n-2} au\ cotg\ au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int cosec^{n-2} au\ du$.

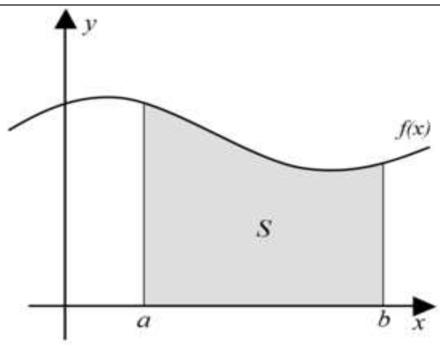
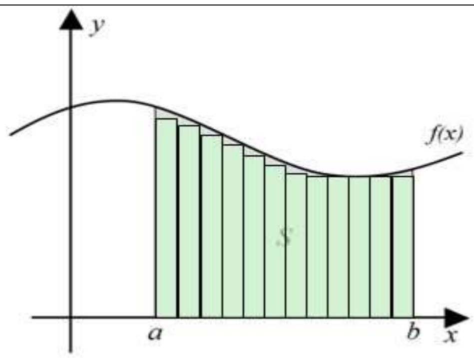
(imagem retirada do site: edisciplinas.usp.br)

2. INTEGRAL DEFINIDA

2.1. Definição de Integral Definida

O conceito de integral definida nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas. Sabemos que desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. Antes de surgir a definição de integral definida, o procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar uma figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Comecemos então falando um pouco desses problemas para em seguida formalizar a definição de integral definida.

1º) Consideremos o problema de definir a área de uma região plana S, delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa f, pelo eixo dos x e por duas retas $x = a$ e $x = b$. (Conforme figura 1).	Para isso, fazemos uma partição do intervalo $[a, b]$, isto é, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. (Conforme figura 2)
 **Figura 1**	 **Figura 2**

Escolhendo os pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

temos:

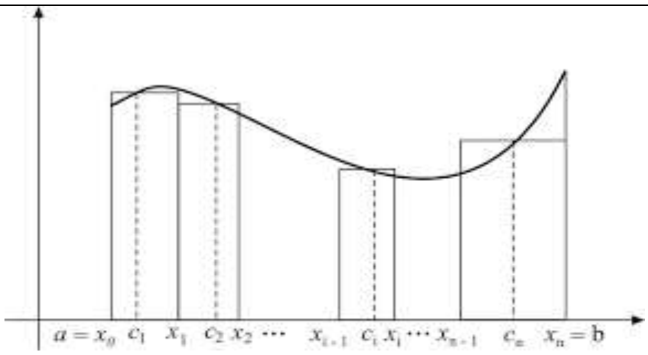


Figura 3

Assim, temos uma partição do intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$, $i = 1,2,\dots,n$, cujo comprimento iremos denotar por Δx_i, assim, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Agora, se em cada um destes intervalos $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$, escolhermos um ponto qualquer c_i. E, para cada i $(i = 1,2,\dots,n)$ construirmos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$, teremos n retângulos cuja área é $\Delta x_i . f(c_i)$.

Logo, a soma das áreas dos n retângulos, que representamos por S_n, é dada por:

$$\boldsymbol{S_n} = \underbrace{\boldsymbol{\Delta x_1 . f(c_1)}.}_{\text{área do 1º retângulo}} + \underbrace{\boldsymbol{\Delta x_2 . f(c_2)}}_{\text{área do 2º retângulo}} + \cdots + \underbrace{\boldsymbol{\Delta x_n . f(c_n)}}_{\substack{\text{área do } n\text{-ésimo} \\ \text{retângulo}}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Delta x_i . f(c_i)}.$$

Esta soma é chamada de soma de Riemann da função $f(x)$.

Note que a medida que n cresce muito, cada Δx_i $(i = 1,2,\dots,n)$ torna-se muito pequeno (ou seja, quanto mais n cresce Δx_i se aproxima de zero), e a soma das áreas retangulares aproxima-se do que intuitivamente entendemos como área de S. Daí, temos a seguinte definição.

Definição 2.1: Seja $y = f(x)$ uma função contínua, não negativa em $[a,b]$. A área sob a curva $y = f(x)$, de a até b, é definida por

$$\boldsymbol{A} = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Delta x_i . f(c_i)},$$

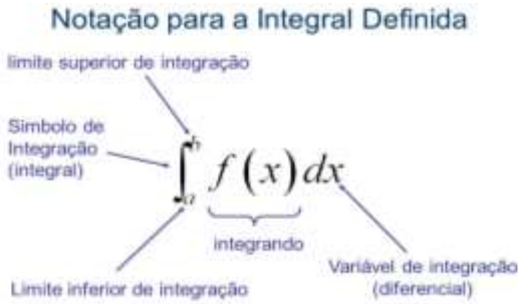
onde para cada $i = 1,2,\dots,n$, c_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$. (É possível provar que este limite existe e é um número não negativo)

A partir deste limite, temos a definição de integral definida dada a seguir.

Definição 2.2: Seja f uma função contínua definida no intervalo $[a,b]$ com $a < b$, e seja P uma partição qualquer de $[a,b]$. A integral definida de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(t)dt$, é dada por

$$\int_a^b \boldsymbol{f(t)dt} = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Delta x_i . f(c_i)},$$

desde que o limite do 2º membro exista.



Observação 2.1:

i. Se $\int_a^b f(t)dt$ existe, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

ii. Quando a função $y = f(x)$ é contínua e não negativa em $[a, b]$, a integral definida de f de a até b coincide com a área sob a curva $y = f(x)$, limitadas pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo dos x. ($A = \int_a^b f(t)dt$)

iii. Na notação $\int_a^b f(t)dt$, os números $a\ e\ b$ são chamados limites de integração (a limite inferior e b limite superior).

iv. Se f é integrável em $[a, b]$, então $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(s)ds}$, isto é, podemos usar qualquer letra para representar a variável independente.

v. Se $a > b$, então $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt}$.

vi. Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então $\boldsymbol{\int_a^a f(t)dt = 0}$.

É importante saber quais funções são integráveis. Uma ampla classe de funções usadas no cálculo, são as funções contínuas.

Teorema 2.1: Se f é contínua sobre $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Demonstração:

2.2. Propriedades da Integral Definida

Proposição 2.1: Se f é integrável em $[a, b]$ e k é um número real arbitrário, então $k.f$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b k.f(t)dt = k.\int_a^b f(t)dt$.

Demonstração: Como f é integrável em $[a, b]$, por definição:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.f(c_i),,$$

ou seja, o limite do 2º membro existe, assim podemos escrever

$$\int_a^b k.f(t)dt = \underbrace{\lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.kf(c_i)}_{\substack{Def.\ de\ Integral \\ definida\ de\ k.f}} \underbrace{=}_{\substack{Prop. \\ de \\ limites}} k.\underbrace{\lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.f(c_i),}_{\substack{Def.\ de\ Integral \\ definida\ de\ f}} = k.\int_a^b f(t)dt.$$

■

Proposição 2.2: Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

Demonstração:

Observação 2.2: No caso de termos a diferença de funções:

$$\int_a^b [f(t) - g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt.$$

Proposição 3: Se $a < c < b$ e f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstração:

Proposição 2.4: Se f é integrável em $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Demonstração: Como $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, temos que $f(c_i) \geq 0$ para todo x em $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$, daí

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{máx\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . f(c_i) \geq 0.$$

■

Proposição 2.5: Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

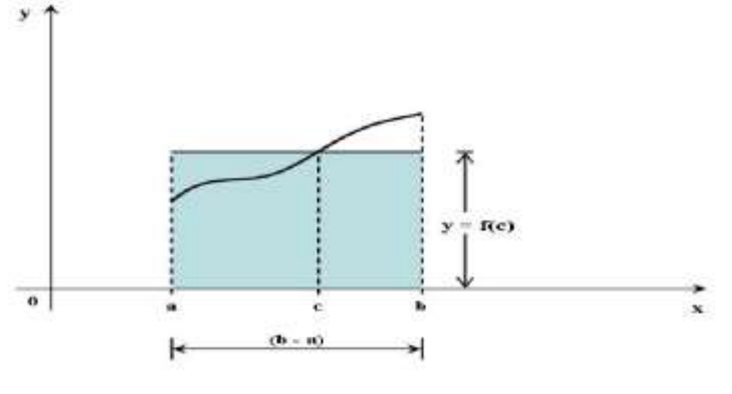
Demonstração:

Proposição 2.6: Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Demonstração:

Proposição 2.7 (Teorema do Valor Médio para Integrais): Se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe um ponto c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c).$$

	Geometricamente, este teorema nos diz que a área da região abaixo da curva $y = f(x)$, entre a e b, é igual a área do retângulo de base $b - a$ e altura $f(c)$.

Demonstração:

Proposição 2.8: Seja f é contínua sobre o intervalo $[a, b]$. Então a função $G: [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

tem derivada em todos os pontos x ∈ $[a, b]$ que é dada por $G'(x) = f(x)$, ou seja,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Demonstração:

2.3. O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

O Teorema Fundamental do Cálculo nos permite relacionar as operações de derivação e integração. Ele nos diz que, conhecendo uma primitiva F de uma função contínua $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, podemos calcular a sua integral definida $\int_a^b f(t)dt$. Com isso, obtemos uma maneira rápida e simples de resolver inúmeros problemas que envolvem o cálculo da integral definida sem utilizar diretamente o cálculo de limites.

Teorema Fundamental do Cálculo: Se f é contínua sobre o intervalo $[a, b]$ e se F é uma primitiva de f neste intervalo, então

$$\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}.$$

Demonstração: Seja $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, pela **Proposição 2.8** temos que $G'(x) = f(x)$, ou seja, G é uma primitiva de f nesse intervalo.

Assim, se $F(x)$ é uma primitiva qualquer de f sobre $[a, b]$, vimos que:

$$F(x) = G(x) + C,\ \forall x \in [a, b],$$

onde C é uma constante qualquer.

Logo,

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C]$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a).\quad (I)$$

Como por hipótese $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, temos $G(b) = \int_a^b f(t)dt\ e\ G(a) = \int_a^a f(t)dt.\ (II)$

Consequentemente, de (I) e (II), obtemos

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{=0}$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

■

Observação 2.3:

i) A diferença $F(b) - F(a)$ usualmente é denotada por $\boldsymbol{F(t)}\Big|_{a}^{b}$. Daí,

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(Ao calcular $F(t)\Big|_a^b$ não é necessário escrever a constante de integração em $F(t)$, pois ao fazermos a diferença $F(b) - F(a)$ elas se anularão, conforme podemos observar na demonstração do Teorema).

ii) Como $F(t)$ é uma primitiva de $f(t)$, por definição $\int f(t)dt = F(t) + C$, ou seja para determinar a integral definida, primeiro temos que encontrar a integral indefinida (e com isso a primitiva) e depois aplicamos os limites de integração a e b, e calculamos a diferença entre os valores numéricos de $F(b) e\ F(a)$.

Exemplo 2.1. Calcular as integrais definidas dadas abaixo:

a) $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$

<u>Solução 1:</u>

PASSO 1: Resolver a integral indefinida $\int x^3 dx$, e assim encontrar uma primitiva F de $f(x) = x^3$. Para isto, usaremos as propriedades da integral indefinida e a tabela. Temos,

$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, ou seja, uma primitiva é $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$.

PASSO 2: Calcular a integral definida $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$\int_{-1}^{2} x^3\, dx = F(2) - F(-1)$, onde $F(2) = \frac{2^4}{4} + C = 4 + C$ e $F(-1) = \frac{(-1)^4}{4} + C = \frac{1}{4} + C$,

Daí, $\int_{-1}^{2} x^2\, dx = 4 + C - \left(\frac{1}{4} + C\right) \Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{2} x^2\, dx = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}}$.

Podemos resolver esta integral de forma mais imediata.

<u>Solução 2:</u>

I) Resolvendo a integral indefinida $\int x^3 dx$, temos pela tabela,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

II) Resolvendo a integral definida $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\int_{-1}^{2} x^3\,dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{2^4}{4}\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4}\right) = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

<u>**Observação:**</u> Como esta integral indefinida calculada no item (a) é imediata (resolvida apenas com a aplicação da tabela e propriedades), a solução podia ser ainda mais simplificada ainda, poderíamos colocar apenas o item II, como faremos no item (b) a seguir.

b) $\int_0^{\pi} sent\,dt$

Solução:

$$\int_0^{\pi} sent\,dt = (-cost)\Bigg|_0^{\pi} = -cos\pi - (-cos0) = -(-1) + 1 = 2.$$

c) $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{1}{4x} - \sqrt[3]{x^2}\right) dx$

d) $\int_0^{\pi} (cosx - secx.tgx)\,dx$

e) $\int_0^1 \left(5^t - \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\right) dt$

3. TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

3.1. Método da Substituição ou Mudança de Variável para Integração

Algumas integrais não podem ser resolvidas diretamente pela tabela estudada, neste caso, algumas vezes depois de ser feita uma mudança de variável, a fim de encontrarmos uma integral mais simples onde possamos aplicar uma das fórmulas básicas estudadas.

Exemplo 3.1: Calcular as integrais indefinidas usando o método da substituição.

a) $\int senx.cos^2x\,dx =$

Solução: Escolhendo $u = cosx$, temos

$$\frac{du}{dx} = -senx \Rightarrow -senxdx = du \Rightarrow senxdx = -du \Rightarrow dx = -\frac{du}{senx}.$$

Substituindo na integral dada,

$$\int senx.cos^2x\,dx = \int cos^2x.senxdx = \int u^2.senx\left(-\frac{du}{senx}\right) = -\int u^2du = -\frac{u^3}{3} + C.$$

Voltando à variável x, temos:

$$\int senx.cos^2x\,dx = -\frac{cos^3x}{3} + C.$$

b) $\int \boldsymbol{sen(3x-7)dx}$ =**I**

Solução: Fazendo $u = 3x - 7$, temos $\frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow 3dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$.

Substituindo na integral dada, obtemos:

$$I = \int senu\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int senudu = \frac{1}{3}(-cosu) + C = -\frac{1}{3}cosu + C = -\frac{1}{3}\cos(3x-7) + C.$$

c) $\int(\boldsymbol{t}^3.\boldsymbol{cost^4})\boldsymbol{dt} =$

Solução: Escolhendo $u = t^4$, temos $\frac{du}{dt} = 4t^3 \Rightarrow 4t^3dt = du \Rightarrow dt = \frac{du}{4t^3}$.

Substituindo na integral dada, obtemos:

$$\int(t^3.cost^4)dt = \int t^3.cosu.\frac{du}{4t^3} = \frac{1}{4}\int cosu\,du = \frac{1}{4}senu + C = \frac{1}{4}sent^4 + C.$$

Exemplo 3.2: Calcular as integrais definidas usando o método da substituição.

a) $\int_{-1}^{2}\left(\frac{x}{2+x^2}\right)\boldsymbol{dx} =$

Solução:

1º) Calculando a integral indefinida $\int \left(\frac{x}{2+x^2}\right)dx$ pelo método da substituição.

Fazendo $u = 2 + x^2$, temos $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$.

Substituindo na integral dada, obtemos:

$$\int\left(\frac{x}{2+x^2}\right)dx = \int\frac{x}{u}.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{du}{u}}_{tabela} = \frac{1}{2}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2+x^2| + C = \frac{1}{2}\ln(2+x^2) + C.$$

2º) Calculando a integral definida pelo TFC, temos:

$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{x}{2+x^2}\right)dx = \left(\frac{1}{2}\ln(2+x^2)\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}ln\,(2+2^2) - \frac{1}{2}ln(2+(-1)^2) = \frac{1}{2}ln6 - \frac{1}{2}ln3.$$

b) $\int_0^2 \frac{2e^t}{e^t+4}\boldsymbol{dt} = \boldsymbol{I}$

Solução:

1º) Calculando a integral indefinida $\int \frac{\boldsymbol{2e^t}}{\boldsymbol{e^t+4}}\boldsymbol{dt}$ pelo método da substituição.

Fazendo $u = e^t + 4$, temos $\frac{du}{dt} = e^t \Rightarrow e^t dt = du \Rightarrow dt = \frac{du}{e^t}$.

Substituindo na integral dada, obtemos:

$$\int \frac{2e^t}{e^t+4}dt = \int \frac{2e^t}{u}.\frac{du}{e^t} = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln\ |e^t+4| + C.$$

2º) Calculando a integral definida pelo TFC, temos

$$I = (2\ln\ |e^t+4|)\Big|_0^2 = 2\ln|e^2+4| - 2\ln|e^0+4| = 2\ln(e^2+4) - 2ln5.$$

IMPORTANTE: Podemos resolver a integral definida levando em consideração a substituição efetuada nos limites de integração, sem precisar calcular primeiro a integral definida. Vejamos como fica a solução do exemplo 3.2.

a) $\int_{-1}^{2} \frac{x}{2+x^2}\boldsymbol{dx} =$

Solução: Pelo Método da Substituição, fazendo $u = 2 + x^2$, temos $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$.

Note que, se $x = -1$ temos $u = 2 + (-1)^2 = 3$ e se $x = 2$ temos $u = 2 + 2^2 = 6$.

Substituindo na integral dada, obtemos:

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{2+x^2}dx = \int_3^6 \frac{x}{u}.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_3^6 \frac{du}{u} = \left(\frac{1}{2}\ln|u|\right)\Big|_3^6 = \frac{1}{2}ln\ |6| - \frac{1}{2}\ln\ |3| = \frac{1}{2}ln6 - \frac{1}{2}ln3.$$

b) $\int_0^2 \frac{\boldsymbol{2e^t}}{\boldsymbol{e^t+4}}\boldsymbol{dt} =$

3.2. Método de Integração por Partes

Sejam f e g funções deriváveis com derivadas f' e g' contínuas, temos:

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$\Rightarrow f(x).g'(x) = [f(x).g(x)]' - f'(x).g(x).$$

Integrando ambos os membros dessa última equação e usando as propriedades de integral indefinida já estudadas, obtemos:

$$\int f(x).g'(x)dx = \int \{[f(x).g(x)]' - f'(x).g(x)\}dx$$

$$\Rightarrow \int f(x).g'(x)dx = \underbrace{\int [f(x).g(x)]'dx}_{=f(x).g(x)} - \int f'(x).g(x)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int g(x).f'(x)dx}. (*)$$

Esta última igualdade é chamada **Fórmula de Integração por Partes.**

Neste caso, ainda não escrevemos a constante de integração, pois no decorrer do desenvolvimento de $(*)$ aparecerão outras constantes, assim, representaremos todas as constantes por uma única constante “C” que será introduzida no final do processo.

Na prática no método de Integração por Partes, costumamos fazer a seguinte mudança de variável:

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, e derivando u e v em relação à x, obtemos:

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow du = f'(x)dx \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dx} = g'(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx.$$

Agora, substituindo $u,\ v,\ du$ e dv em $(*)$, obtemos

$$\boxed{\int udv = u.v - \int vdu,}$$

que é a fórmula de integração por partes, dada em (*).

Observação 3.1: Para integrais definidas temos uma fórmula análoga:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x).g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

RESUMO: Para usar este método, temos que:

1) escolher u e dv para que a integral dada fique na forma $\int udv$ (que aparece na fórmula de Integração por partes);
2) Derivar u para determinar du;
3) Integrar dv para determinar v, pois $\int dv = v + C$;
4) Tendo $u,\ v,\ du$ e dv é só aplicar a fórmula de Integração por partes e calcular a integral.

Observação 3.2: Ao aplicar a fórmula chegamos em uma integral que em alguns casos: pode ser resolvida diretamente pela tabela, ou pelo método da substituição, ou pelo método de integração por partes novamente.

Exemplo 3.3: Calcular as integrais indefinidas usando o método de integração por partes.

a) $\int \boldsymbol{x.e^{-5x}dx} =$

Solução: Escolhendo $u = x$ e $dv = e^{-5x}dx$. Temos: $$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow \boxed{du = dx}$$ e $\int dv = \int e^{-5x}dx \Rightarrow \boxed{v = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C.}$ Substituindo u e dv na integral dada, e usando a fórmula de integral por partes, obtemos: $$\int x.e^{-5x}dx = \underbrace{\int u\,dv = u.v - \int v\,du}_{fórmula\ de\ integ.\ por\ partes}$$ $$\Rightarrow \int x.e^{-5x}dx = x.\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) - \int -\frac{1}{5}e^{-5x}dx$$ $$\Rightarrow \int x.e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}x.e^{-5x} + \frac{1}{5}\underbrace{\int e^{-5x}dx}_{Cálc.\ Auxiliar\ 1}$$ $$\Rightarrow \int x.e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}x.e^{-5x} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) + C$$ $$\Rightarrow \boxed{\int x.e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}x.e^{-5x} - \frac{1}{25}e^{-5x} + C.}$$	**Cálculo Auxiliar 1: $\int e^{-5x}dx$** Usaremos o Método da Substituição: Fazendo $u = -5x$, temos $\frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow -5dx = du \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$. Substituindo na integral: $\int e^{-5x}dx = \int e^u\left(-\frac{du}{5}\right) = -\frac{1}{5}e^u + C_1 = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C_1$ **Observação:** Ao aplicar a fórmula não usaremos a constante de integração obtida no cálculo de v, deixaremos para introduzi-la no final do processo.

b) $\int lnx\ dx =$

Solução: Escolhendo $u = lnx$ e $dv = dx$, temos: $$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow x.du = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$ e $\int dv = \int dx \Rightarrow v = x + C_1.$ Substituindo u e dv na integral dada, e usando fórmula de integral por partes, obtemos $$\int lnx\,dx = \underbrace{\int u\,dv = u.v - \int v\,du}_{fórmula\ de\ integ.\ por\ partes}$$ $$\Rightarrow \int lnx\,dx = lnx.\ x - \int x\frac{dx}{x}$$ $$\Rightarrow \boxed{\int lnx\,dx = x.lnx - x + C.}$$	Cálculo Auxiliar: Lembre-se: $u = lnx$ $du = \frac{dx}{x}$ $v = x$ $dv = dx$

c) $\int x^2.e^x dx =$

d) $\int e^{3x} cos4x\, dx =$

Solução: Escolhendo $u = e^{3x}$ e $dv = cos4x\, dx$. Temos:

OBS.: Alguns cálculos estão efetuados num cálculo auxiliar dado no final da solução.

$$\frac{du}{dx} = 3.e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x} dx.$$

e

$$\int dv = \int cos4x\, dx \Rightarrow v = \frac{1}{4} sen4x + C.$$

Substituindo u e dv na integral dada e aplicando a fórmula de integração por partes, obtemos:

$$\int e^{3x} cos4x\, dx = \underbrace{\int u\, dv = u.v - \int v\, du}_{fórmula\ de\ integ.\ por\ partes} = e^{3x}.\frac{1}{4} sen4x - \int \frac{1}{4} sen4x\, .3e^{3x} dx$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} cos4x\, dx = \frac{1}{4} e^{3x}.sen4x - \frac{3}{4} \underbrace{\int e^{3x} sen4x\, dx}_{\substack{integral\ por\ partes \\ (resolvido\ separadamente \\ no\ cálculo\ auxiliar\ ao\ lado)}}. \qquad \text{(I)}$$

Com o cálculo auxiliar (item iv) obtemos

$$\int e^{3x} sen4x\, dx = -\frac{1}{4} e^{3x} cos4x + \frac{3}{4} \underbrace{\int e^{3x} cos4x\, dx.}_{voltamos\ a\ integral\ inicial} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos

$$\int e^{3x} cos4x\, dx = \frac{1}{4} e^{3x}.\ sen4x\ sen4x - \frac{3}{4} \underbrace{\left[-\frac{1}{4} e^{3x} cos4x + \frac{3}{4} \int e^{3x}.\ cos4x\, dx\right]}$$

$$\Rightarrow \underline{\int e^{3x} cos4x\, dx} = \frac{1}{4} e^{3x}.\ sen4x + \frac{3}{16} e^{3x} cos4x \underline{- \frac{9}{16} \int e^{3x} cos4x\, dx}$$

$$\Rightarrow \underline{\int e^{3x} cos4x\, dx + \frac{9}{16} \int e^{3x} cos4x\, dx} = \frac{1}{4} e^{3x}.\ sen4x + \frac{3}{16} e^{3x} cos4x + C$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{25}{16} \int e^{3x} cos4x\, dx} = \frac{1}{4} e^{3x}.\ sen4x + \frac{3}{16} e^{3x} cos4x + C$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} cos4x\, dx = \frac{16}{25} \left[\frac{1}{4} e^{3x}.\ sen4x + \frac{3}{16} e^{3x} cos4x + C\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\int e^{3x} cos4x\, dx = \frac{4}{25} e^{3x}.\ sen4x + \frac{3}{25} e^{3x} cos4x + C.}$$

Cálculo Auxiliar item d):

i) Se $u = e^{3x}$, temos $\frac{du}{dx} = e^{3x}.(3x)' \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^{3x}.3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3.e^{3x}$.

(usamos a Regra da Cadeia)

ii) $Se\ v = \frac{1}{4}sen4x,$ temos $\frac{dv}{dx} = cos4x\ (4x)' \Rightarrow \frac{dv}{dx} = cos4x\ .4 \Rightarrow dv = cos4x\ dx.$

iii) $\int cos4x\ dx$ (Método da Substituição)

Escolhendo $u = 4x$, temos:

$$\frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow 4dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{4}.$$

Substituindo na integral dada:

$$\int cos4x\ dx = \int cosu \frac{du}{4} =.$$

$=\frac{1}{4}\int cosu\ du = \frac{1}{4}senu + C =$

$$= \frac{1}{4}sen4x + C$$

iv) $\int e^{3x}\ sen4x\ dx$

1º) Escolhendo $u = e^{3x}\ e\ dv = sen4x\ dx$. Temos:

$$\frac{du}{dx} = e^{3x}.3 \Rightarrow du = 3e^{3x}dx.$$

e

$$\int dv = \int sen4x\ dx \Rightarrow v = -\frac{1}{4}cos4x.$$

2º) Substituindo u e dv na integral dada e aplicando a fórmula de integração por partes, temos:

$$\int e^{3x}cos4x\ dx = \underbrace{\int u\ dv = u.v\ -\ \int v\ du}_{fórmula\ de\ integ.\ por\ partes}\ =$$

$$= e^{3x}.\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) - \int \left(-\frac{1}{4}cos4x\right)3e^{3x}dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int e^{3x}cos4x\ dx = -\frac{1}{4}e^{3x}cos4x + \frac{3}{4}\underbrace{\int e^{3x}\ cos4x\ dx}_{voltamos\ a\ integral\ inicial}}$$

e) $\int cos^3x\, dx =$

Solução 1: Primeiramente, note que

$\int cos^3x\, dx = \int cos^2x.\ cosx\, dx.$

Escolhendo $u = cos^2x$ e $dv = cosx\, dx$, temos:

$$\frac{du}{dx} = -2cosx.senx \Rightarrow du = -2cosx.senx\, dx$$

e

$$\int dv = \int cosx\, dx \Rightarrow v = senx.$$

Substituindo u e dv na integral dada e aplicando a fórmula de integração por partes, temos:

$$\int cos^3x\, dx = \underbrace{\int u\, dv = u.v - \int v\, du}_{fórmula\ de\ integ.por\ partes}$$

$$= cos^2x.senx - \int senx.(-2cosx.senx)\, dx$$

$$= cos^2x.senx + 2\underbrace{\int sen^2x.\ cosx\, dx}_{Cálculo\ Auxiliar}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int cos^3x\, dx = cos^2x.senx + 2.\frac{sen^3x}{3} + \text{C}.}(I)$$

Cálculo Auxiliar (item e)):

$\int sen^2x.\ cosx\, dx$ (Método da Substituição)

Fazendo $u = senx$, temos:

$$\frac{du}{dx} = cosx \Rightarrow cosx\, dx = du.$$

Substituindo na integral, obtemos

$$\int sen^2x.\ cosx\, dx = \int u^2du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{sen^3x}{3} + C$$

Solução 2: Resolvendo a integral sem utilizar integração por partes.

Primeiramente, note que

$\int cos^3x\, dx = \int cos^2x.\ cosx\, dx = \int(1 - sen^2x).\ cosx\, dx$

$$\Rightarrow \int cos^3x\, dx = \int cosx\, dx - \int \underbrace{sen^2x.\, cosx\, dx}_{\substack{integral\ resolvida\ pelo \\ método\ da\ substituição\ (feito \\ no\ cálculo\ auxiliar\ da\ solução 1)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int cos^3x\, dx = senx - \frac{sen^3x}{3} + C}. (II)$$

Observação: Os resultados (I) e (II) obtidos nas soluções 1 e 2 do item e) são equivalentes.

Exemplo 3.4: Calcular as integrais definidas dadas a seguir.

a) $\int_0^1 x.e^{-5x}dx =$

Solução:

Obs.: Não foi efetuado o cálculo desta integral, pois a mesma já foi resolvida, do contrário, deve deixar o cálculo.

1º) Calculando a integral indefinida $\int x.e^{-5x}dx$.

Vimos no item a) do exemplo 3.3 que

$$\int x.e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}x.e^{-5x} - \frac{1}{25}\ e^{-5x} + C.$$

2º) Calculando a integral definida pelo TFC, obtemos:

$$\int_0^1 x.e^{-5x}dx = \left(-\frac{1}{5}x.e^{-5x} - \frac{1}{25}\ e^{-5x}\right)\Big|_0^1$$
$$= \left(-\frac{1}{5}.1.e^{-5.1} - \frac{1}{25}\ e^{-5.1}\right) - \left(-\frac{1}{5}.0.e^{-5.0} - \frac{1}{25}\ e^{-5.0}\right) = -\frac{6}{25}e^{-5} + \frac{1}{25}.$$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} cos^3x\, dx =$

3.3. Método de Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Antes de apresentarmos o método, lembremos que uma função racional é uma função $f(x)$ definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$.

Algumas integrais de funções racionais são facilmente resolvidas, como por exemplo:

i) $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + C$. (Tabela)

ii) $\int \frac{3x^2+2}{3x^3+6x}dx = \frac{1}{3}\ln|3x^3 + 6x| + C$. (Método da Substituição)

Caso isto não aconteça, apresentaremos um procedimento sistemático para calcular a integral de qualquer função racional, onde escrevemos a função racional dada como uma soma de funções mais simples de serem integradas. Para isto, usaremos o seguinte resultado de Álgebra (que não será demonstrado).

Proposição 1: Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais, $p(x)$ pode ser expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos, todos com coeficientes reais.

Exemplo:

a) $p(x) = x^2 - 3x + 2 \iff p(x) = (x-2)(x-1)$.

b) $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1 \iff p(x) = \underbrace{(x^2+1)}_{\substack{fator\ do\ 2º\ grau \\ irredutível, pois\ este \\ polinômio\ não\ possui \\ raízes\ reais.}} . \quad (x-1)$.

A decomposição da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples, depende do modo de como o denominador $q(x)$ se decompõe nos fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis. Vamos considerar os vários casos separadamente. As formas das respectivas frações parciais que iremos ver são provadas por resultados de Álgebra e não serão demonstradas.

Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e se o grau de $p(x)$ é inferior ao grau de $q(x)$, então pode-se provar que $\frac{p(x)}{q(x)} = F_1 + F_2 + \ldots + F_r$, de tal forma que cada termo F_i $(i = 1,2, \ldots, r)$ da soma é uma fração e tem uma das formas

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad ou \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

para A e B reais e n inteiro não negativo, onde $ax^2 + bx + c$ é irredutível.

A soma $F_1 + F_2 + \ldots + F_r$, é a *decomposição em frações parciais* de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ e cada F_r é uma *fração parcial*.

Lembre-se que: $ax^2 + bx + c$ é irredutível se este polinômio quadrático não têm zeros reais (ou seja, $ax^2 + bx + c$ não pode expressar-se como o produto de dois polinômios do primeiro grau com coeficientes reais).

Observação 3.3:

I. Neste método, vamos considerar que o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$. Caso isto não ocorra, devemos primeiro efetuar a divisão de $p(x)$ por $q(x)$.

II. É necessário que vocês revisem: Fatoração de Polinômios; Igualdade de Polinômios; Divisão de Polinômios; Sistemas de equações lineares.

Iremos estudar inicialmente dois casos envolvendo fatores lineares, e em seguida veremos mais dois casos envolvendo fatores quadráticos:

Fatores Lineares

1º Caso: Os fatores de $q(x)$ (denominador) são lineares (1º grau) e distintos.

Neste caso, temos:

$$q(x) = (x - a_1).(x - a_2). \ \dots \ . (x - a_n),$$

onde os $a_i, \ i = 1,2,\dots,n$ são distintos dois a dois (isto é, $a_i \neq a_j, \ se \ i \neq j$). E,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n},$$

onde $A_1, \ A_2, \ \dots, \ A_n$ são constantes que devem ser determinadas.

2º Caso: Os fatores de $q(x)$ são lineares sendo que alguns deles se repetem.

Neste caso, se um fator linear $(x - a_i)$ de $q(x)$ tem multiplicidade r (ou seja, se na decomposição de $q(x)$ aparecer o fator $(x - a_i)^r$) a esse fator corresponderá a soma de r frações parciais:

$$\frac{B_1}{(x - a_i)^r} + \frac{B_2}{(x - a_i)^{r-1}} + \frac{B_r}{(x - a_i)^{r-2}} \dots + \frac{B_r}{(x - a_i)^2} + \frac{B_r}{(x - a_i)},$$

onde $B_1, \ B_2, \ \dots, \ B_r$ são constantes que devem ser determinadas.

Observação:

- Se tivermos $(x - a_i)^2$em $q(x)$, teremos duas frações parciais referentes a este fator;
- Se tivermos $(x - a_i)^3$em $q(x)$, teremos três frações parciais referentes a este fator; e assim sucessivamente.

Fatores Quadráticos

1º Caso: Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem.

Neste caso, a cada fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$, corresponderá uma fração parcial da forma:

$$\frac{Cx + D}{x^2 + bx + c},$$

onde $C \ e \ D$ são constantes que devem ser determinadas.

Observação: Neste caso, para os fatores lineares de $q(x)$ usamos o 1º e o 2º caso onde o numerador das frações parciais é uma constante. Já para os fatores quadráticos irredutíveis o numerador será do tipo $Cx + D$, com $C \ e \ D$ constantes.

2º Caso: Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos se repetem.

Neste caso, se um fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$ tem multiplicidade r, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma:

$$\frac{C_1 x + D_1}{(x^2 + bx + c)} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{C_r x + D_r}{(x^2 + bx + c)^r},$$

onde $C_1,\ C_2, \ldots,\ C_r,\ D_1,\ D_2, \ldots,\ D_r$ são constantes que devem ser determinadas.

Observação:

- Se tivermos $(x^2 + bx + c)^2$ em $q(x)$ teremos duas frações parciais referentes a este fator;
- Se tivermos $(x^2 + bx + c)^3$em $q(x)$, teremos três frações parciais referentes a este fator; e assim sucessivamente.

EM QUALQUER UM DOS CASOS APRESENTADOS, PARA DECOMPOR UMA FUNÇÃO RACIONAL EM FRAÇÕES PARCIAIS, SEGUIMOS SEMPRE OS PASSOS DADOS ABAIXO:

1º PASSO: Fatorar o denominador do integrando em fatores do 1º e/ou 2º grau irredutíveis (Caso o mesmo não seja dado na forma fatorada);

2º PASSO: Fazer a decomposição em frações parciais, ou seja, escrever a fração do integrando como uma soma de frações mais simples de serem integradas;

3º PASSO: Encontrar os valores das constantes A, B.... usadas nas frações do 2º passo;

4º PASSO: Substituir os valores das constantes A,B.... na soma de frações encontradas no passo (2) e finalmente integrar usando as regras e métodos já estudados.

Exemplo 3.5: Calcular as integrais dadas a seguir usando o método de integração por frações parciais.

a) $\int \frac{5x}{x^2-3x+2} dx =$

Solução: Usando o método de integração por frações parciais

1º) Fatorar o denominador $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. (produto de fatores lineares distintos)

2º) Decompor em frações parciais.

$$(*) \quad \frac{5x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}, com\ A\ e\ B\ constantes\ a\ determinar.$$

3º) Encontrar os valores das constantes $A\ e\ B$

$$\frac{5x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \underbrace{=}_{mmc} \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Longrightarrow 5x = A(x-2) + B(x-1) \quad \Longrightarrow \quad 5x = Ax - 2A + Bx - B$$

$$\Longrightarrow 5x = (A+B)x - 2A - B$$

$$\overset{iguald.de\ polinômios}{\Longrightarrow} \begin{cases} A+B=5 \\ -2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A=-5 e\ B=10.$$

4º) Substituir $A=-5$ e $B=10$ em $(*)$ e integrar

$$\frac{5x}{x^2-3x+2}=\frac{-5}{x-1}+\frac{10}{x-2}$$

$$\int \frac{5x}{x^2-3x+2}dx=\int \frac{-5}{x-1}dx+\int \frac{10}{x-2}dx=-5\ln|x-1|+10\ln|x-2|+C.$$

Observação: No caso de uma integral definida com integrando desta forma, além dos cálculos já efetuados, teríamos que aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Por exemplo, se tivéssemos

$$\int_3^4 \frac{5x}{x^2-3x+2}dx=\left(-5\ln|x-1|+10\ln|x-2|\right)\Big|_3^4=\cdots.$$

$$(concluir\ os\ cálculos!)$$

b) $\int \frac{3x+1}{(x-1)^2(x+3)}dx=$

Solução:

1º) O denominador já está na forma fatorada: $(\boldsymbol{x-1})^2(\boldsymbol{x+3})$**.** (Fatores lineares, onde o fator $(x-1)$ se repete 2 vezes).

2º) Decompondo em frações parciais temos:

$$(*)\frac{3x+1}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+3}, com\ A, B, C\ constantes.$$

3º) Encontrando os valores das constantes $A, B\ e\ C$.

$$\frac{3x+1}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+3}\underset{mmc}{=}\frac{A(x-1)(x+3)+B(x+3)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)}$$

$$\Rightarrow 3x+1= A(x-1)(x+3)+B(x+3)+C(x-1)^2$$

$$\Rightarrow 3x+1= \underbrace{Ax^2+2Ax-3A}+\underbrace{Bx+3B}+\underbrace{Cx^2-2Cx+C}$$

$$\Rightarrow 3x+1=(A+C)x^2+(2A+B-2C)x+(-3A+3B+C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B-2C=3 \\ -3A+3B+C=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=1\ e\ C=-\frac{1}{2}.$$

4º) Substituindo $A=\frac{1}{2}, B=1\ e\ C=-\frac{1}{2}$ em $(*)$ e integrando

$$\int \frac{3x+1}{(x-1)^2(x+3)}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)}dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}dx=$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \left(-\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln|x+3| + C.$$

(Este resultado não está na forma simplificada)

c) $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4} dx =$

Observação: Os casos em que aparecem fatores quadráticos irredutíveis na decomposição do denominador, serão estudados mais adiante.

1ª Lista de Exercícios

1- Determinar a função $f(x)$ tal que $\int f(x)dx = x^2 + \frac{1}{2}cos2x + c$.

2- Encontrar uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$, que se anule no ponto $x = 2$.

3- Sabendo que a função $f(x)$ satisfaz a igualdade

$$\int f(x)dx = senx - x.cosx - \frac{1}{2}x^2 + c, \text{ determinar } f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

4- Calcule as integrais definidas:

a) $\int_{-1}^{2} x^2(1+x^2)dx$	b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos\theta d\theta$
c) $\int_{-3}^{0}(x^2-4x+7)dx$	d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sec^2\theta d\theta$
e) $\int_{2}^{1}\frac{dx}{x^6}$	f) $\int_{1}^{3}\left(3e^x + \frac{1}{4x} - \sqrt[5]{x^3}\right)dx$
g) $\int_{-3}^{-2}(z-\frac{1}{z})^2dz$	h) $\int_{0}^{2}\sqrt{2x}(\sqrt{x}+\sqrt{5})\,dx$
i) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{cos\theta}{sen^2\theta}d\theta$	j) $\int_{-1}^{1}\frac{2}{1+t^2}dt$
k) $\int_{-2}^{5}\lvert 2t-4\rvert dt$	l) $\int_{3}^{3}\left(3e^x + \frac{1}{4x} - \sqrt[5]{x^3}\right)dx$

5- Calcular as integrais usando o método da substituição:

a) $\int (2x^2+2x-3)^{10}(2x+1)dx =$	b) $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}}dx =$
c) $\int 5x.\sqrt{4-3x^2}dx =$	d) $\int (e^{2t}+2)^{\frac{1}{3}}dt$
e) $\int \frac{e^t}{e^t+4}dt =$	f) $\int e^x \cos(2e^x)\,dx =$
g) $\int \sqrt[3]{sen\theta}\; cos\theta\; d\theta =$	h) $\int \frac{1}{t\,lnt}dt =$
i) $\int sen(3x-\pi)dx =$	j) $\int x^4.e^{-x^5}dx =$
k) $\int \frac{x}{2}.cosx^2dx =$	l) $\int (e^{2x}+2)^5e^{2x} =$
m) $\int x.e^{3x^2}dx =$	n) $\int (1+e^{-at})^{\frac{3}{2}}e^{-at}dt,\ a>0$
o) $\int \frac{sen\ x}{cos^5x}dx =$	p) $\int \frac{dy}{y^2-4y+4} =$
q) $\int sec^2(5x+3)dx =$	r) $\int 8x\sqrt{1-2x^2}dx =$
s) $\int \frac{cox}{3-senx}dx =$	t) $\int (x^3-2)^{\frac{1}{7}}.x^2\,dx =$
u) $\int \frac{x}{2}\cos x^2\,dx =$	v) $\int \frac{4t\,dt}{\sqrt{4t^2+5}} =$
w) $\int \ (2x-1)^3\,dx$	x) $\int \ \frac{v^2}{(v^3-2)^2}dv$
y) $\int \ e^{2x-1}dx$	z) $\int \ \frac{lnx}{x}\,dx$

6 - Calcule as integrais por partes:

a) $\int \ te^{4t}dt$	b) $\int \ (x-1)e^{-x}\,dx$
c) $\int \ cos^3x\,dx$	d) $\int \ xsen(5x)\,dx$
e) $\int \ e^xcosx\,dx$	f) $\int \ lnx\,dx$
g) $\int \ x^2cosx\,dx$	h)

7 - Calcular as integrais abaixo utilizando o método da substituição simples. (Na solução resolva a integral indefinida associada pelo método da substituição e depois use o TFC para resolver a integral definida)

a) $\int_{-1}^{1}(2x-1)^3\,dx$	b) $\int_0^1 5x\sqrt{4-3x^2}\,dx$
c) $\int_{-1}^{0}(2x^2+2x-3)^{10}(2x+1)dx$	d) $\int_0^{\pi} sen(3x-\pi)dx$
e) $\int_{\pi/4}^{\pi} senx\ cosx\ dx$	f) $\int_{-2}^{0}\frac{v^2}{(v^3-2)^2}dv$
g) $\int_0^{\pi/2}\frac{cosx}{(1+senx)^5}dx$	h) $\int_{\pi/2}^{\pi} sen^4x\ cosx\ dx$
i) $\int_1^2 \frac{lnx}{x}\,dx$	j) $\int_{-2}^{2} e^{2x-1}dx$
k) $\int_0^1 x^4e^{-x^5}dx$	

8 – Calcule as integrais seguintes pelo método de integração por partes. (Na solução resolva a integral indefinida associada pelo método de integração por partes e depois use o TFC para resolver a integral definida)

a) $\int_0^1 te^{4t}dt$	b) $\int_{-1}^0 (x-1)e^{-x}\,dx$
c) $\int_{\pi/2}^{\pi} cos^3x\,dx$	d) $\int \; xsen(5x)\,dx$
e) $\int \; e^x cosx\,dx$	f) $\int_1^3 lnx\,dx$
g) $\int_0^{2\pi} x^2 cosx\,dx$	

9 – Calcule as integrais abaixo, utilizando o método de frações parciais:

a) $\int \; \frac{1}{(x-3)(x+3)}dx$	b) $\int \; \frac{x}{(x-3)^2}dx$
c) $\int \; \frac{2x^3}{x^2+x}dx$	d) $\int \; \frac{2x+1}{2x^2+3x-2}dx$
e) $\int \; \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4}dx$	f) $\int \; \frac{x-1}{(x-1)^2(x-3)^2}dx$
g) $\int \frac{2x^2-25x-33}{(x+1)^2(x-5)}dx$	h) $\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}dx$

10 – Calcule as integrais dadas abaixo, e indique o método que foi utilizado:

a) $\int_1^2 \left(\frac{5x^3+7x^2-5x+2}{x^2}\right)dx$	b) $\int_0^2 x\,e^{-x^2}dx$
c) $\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$	d) $\int \; x\sqrt{2x+1}\,dx$
e) $\int \; \frac{5}{x^3+4x}dx$	f) $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{3y+1}}$
g) $\int_1^2 \frac{2x^3}{x^2+x}dx$	

11 – Determinar as seguintes derivadas:

a) $\frac{d}{dx}\int_2^x \sqrt{t^2+4}\,dt$	b) $\frac{d}{dt}\int_{-1}^t \frac{2x}{x^2+5}dt$

12 – Seja $F(x) = \int_2^x \sqrt{3t^2+1}\,dt$. Calcule: $F'(x),\; F'(2)\; e\; F''(2)$.

13 – Em cada um dos itens abaixo, calcular a integral da função no intervalo dado. Em seguida, esboçar o gráfico de f.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & -1 \le x < 0 \\ 5, & 0 \le x \le 1 \end{cases}; em\ [-1,1]$	b) $f(x) = 2\|x\|;\; em\ [-1,1]$

Gabarito (Como as questões e o gabarito foram digitadas, podem ter alguns erros de digitação tanto no enunciado, quanto no gabarito)

1) $2x - sen2x$ 3) $\frac{\pi(\sqrt{2}-2)}{8}$		
5) a) $\frac{1}{22}(2x^2+2x-3)^{11}+c$ b) $\frac{5}{8}(x^2-1)^{\frac{4}{5}}+c$ c) $-\frac{5}{9}(4-3x^2)^{\frac{3}{2}}+c$		
d) $\frac{3}{8}(e^{2t}+2)^{4/3}+c$ e) $\ln(e^t+4)+c$ f) $\frac{1}{2}sen(2e^x)+c$ g) $\frac{3}{4}sen^{4/3}\theta+c$		
h) $\ln\|lnt\|+c$ i) $-\frac{1}{3}\cos(3x-\pi)+c$ j) $-\frac{1}{5}e^{-x^5}+c$ k) $\frac{1}{4}senx^2+c$		
l) $\frac{1}{12}(e^{2x}+2)^6+c$ m) $\frac{1}{6}e^{3x^2}+c$ n) $-\frac{2}{5a}(1+e^{-at})^{\frac{5}{2}}+c$		
o) $\frac{1}{4}sec^4x+c$ p) $\frac{1}{2-y}+c$ q) $\frac{1}{5}tg(5x+3)+c$ r) $-\frac{4}{3}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}+c$		
s) $-\ln\|3-senx\|+c$ t) $\frac{7}{24}(x^3-2)^{\frac{8}{7}}+c$ u) $\frac{1}{4}senx^2+c$ v) $\sqrt{4t^2+5}+c$		
6) Falta o gabarito		
7) a) 0 b) $\frac{35}{9}$ c) 0 d) $-\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{4}$ h) $-\frac{1}{5}$ k) $\frac{e-1}{5e}$		
8) a) $\frac{3e^4+1}{16}$ b) $-e$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $-\frac{x}{5}\cos(5x)+\frac{1}{25}sen(5x)+c$ f) $3ln3-2$ g) 4π		
9) a) $\frac{1}{6}\ln\|x-3\|-\frac{1}{6}\ln\|x+3\|+c$ c) $-1+2ln2$ d) $\frac{2}{5}\ ln\left\|x-\frac{1}{2}\right\|+\frac{3}{5}\ln\|x+2\|+c$ e) $\frac{1}{12}\ln\|x-2\|+\frac{2}{3}\ln\|x+1\|-\frac{3}{4}\ln\|x+2\|+c$ f) $3\ln\frac{1}{2}-3\ln\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$		
10) a) $\frac{31}{2}-5ln2$ b) $-\frac{1}{2}(e^2-1)$ c) $-\frac{1}{6}$ e) $\frac{5}{4}\left[\ln\|x\|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+c\right]$ f) $\frac{2}{3}$		
12) $F'(2)=\sqrt{13}$ e $F''(2)=\frac{6\sqrt{13}}{13}$	13) a) 9 b) 2	

Referência Bibliográfica: Cálculo A: funções, limite, derivação, integração - Diva Marília Flemming.