Vetores e Geometria Analítica
Aula 15 - A Reta no Espaço

por

Maxwell Aires da Silva

Universidade Estadual da Paraíba – UEPB

Campina Grande
28 de fevereiro de 2022

Equações Paramétricas

As equações paramétricas da reta no espaço é uma extensão do que foi visto no plano, então considere um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ paralelo à reta que contém o ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$, então tem-se $t\vec{v} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, em que $P = (x, y, z)$ é um ponto arbitrário dessa reta, o que nos dá Logo, tem-se

$$\begin{aligned}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= t\vec{v}\\ &= t(a, b, c)\\ &= (at, bt, ct).\end{aligned}$$

Daí, tem-se as seguintes igualdades:

$$x - x_0 = at \Rightarrow x = x_0 + at$$

$$y - y_0 = bt \Rightarrow y = y_0 + bt$$

$$z - z_0 = ct \Rightarrow z = z_0 + ct$$

As equações paramétricas da reta no espaço é uma extensão do que foi visto no plano, então considere um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ paralelo à reta que contém o ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$, então tem-se $t\vec{v} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, em que $P = (x, y, z)$ é um ponto arbitrário dessa reta, o que nos dá Logo, tem-se

$$\begin{aligned} (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= t\vec{v} \\ &= t(a, b, c) \\ &= (at, bt, ct). \end{aligned}$$

Daí, tem-se as seguintes igualdades:

$$x - x_0 = at \Rightarrow x = x_0 + at$$

$$y - y_0 = bt \Rightarrow y = y_0 + bt$$

$$z - z_0 = ct \Rightarrow z = z_0 + ct$$

Estas equações são chamadas de **Equações Paramétricas da Reta**, isto é, são as equações da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e que é paralela ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo

Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $P = (1, 2, -5)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, -4, 3)$.

Solução: Substituindo os valores dados, tem-se

$$x = 1 + 2t,$$

$$y = 2 - 4t,$$

$$z = -5 + 3t.$$

□

Estas equações são chamadas de **Equações Paramétricas da Reta**, isto é, são as equações da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e que é paralela ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo

Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $P = (1, 2, -5)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, -4, 3)$.

Solução: Substituindo os valores dados, tem-se

$$x = 1 + 2t,$$

$$y = 2 - 4t,$$

$$z = -5 + 3t.$$

□

Estas equações são chamadas de **Equações Paramétricas da Reta**, isto é, são as equações da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e que é paralela ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo

Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $P = (1, 2, -5)$ *e é paralela ao vetor* $\vec{v} = (2, -4, 3)$.

Solução: Substituindo os valores dados, tem-se

$$x = 1 + 2t,$$

$$y = 2 - 4t,$$

$$z = -5 + 3t.$$

$\square$

Exemplo

Determine um vetor gerador e as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2, -2)$ *e* $B = (-1, 4, 2)$.

Solução: O vetor gerador é o vetor paralelo à reta, o qual é obtido a partir dos pontos dados, ou seja,

$$\vec{AB} = (-1 - 1, 4 - 2, 2 - (-2)) \Rightarrow \vec{AB} = (-2, 2, 4).$$

Logo, as equações paramétricas são

$$x = 1 - 2t,$$

$$y = 2 + 2t,$$

$$z = -2 + 4t.$$

□

Exemplo

Determine um vetor gerador e as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2, -2)$ e $B = (-1, 4, 2)$.

Solução: O vetor gerador é o vetor paralelo à reta, o qual é obtido a partir dos pontos dados, ou seja,

$$\vec{AB} = (-1 - 1, 4 - 2, 2 - (-2)) \Rightarrow \vec{AB} = (-2, 2, 4).$$

Logo, as equações paramétricas são

$$x = 1 - 2t,$$

$$y = 2 + 2t,$$

$$z = -2 + 4t.$$

$\square$

Exemplo

Determine um vetor gerador e as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2, -2)$ e $B = (-1, 4, 2)$.

Solução: O vetor gerador é o vetor paralelo à reta, o qual é obtido a partir dos pontos dados, ou seja,

$$\vec{AB} = (-1 - 1, 4 - 2, 2 - (-2)) \Rightarrow \vec{AB} = (-2, 2, 4).$$

Logo, as equações paramétricas são

$$x = 1 - 2t,$$

$$y = 2 + 2t,$$

$$z = -2 + 4t.$$

$\square$

Posições Relativas entre Retas

Sabemos que dadas duas retas r_1 e r_2, existem as possíveis posições relativas entre estas:

- Coincidentes, quando possuem todos os pontos em comum;
- Paralelas, quando não possuem ponto algum em comum;
- Concorrentes, quando possuem apenas um ponto em comum;
- Reversas, quando não possuem ponto algum em comum e não são paralelas .

Sabemos que dadas duas retas r_1 e r_2, existem as possíveis posições relativas entre estas:

• Coincidentes, quando possuem todos os pontos em comum;

• Paralelas, quando não possuem ponto algum em comum;

• Concorrentes, quando possuem apenas um ponto em comum;

• Reversas, quando não possuem ponto algum em comum e não são paralelas .

Exemplo

Determine a posição relativa entre as retas r_1 e r_2 com as seguintes propriedades: r_1 passa pelo ponto $A_1 = (2, -1, 0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, e r_2 passa pelo ponto $A_2 = (0, 1, -1)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_2 = (0, 1, -2)$.

Solução: As equações paramétricas de r_1 e r_2 são, respectivamente

$$r_1 : \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

e

$$r_2 : \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + s \\ z = -1 - 2s \end{cases}$$

Exemplo

Determine a posição relativa entre as retas r_1 e r_2 com as seguintes propriedades: r_1 passa pelo ponto $A_1 = (2, -1, 0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, e r_2 passa pelo ponto $A_2 = (0, 1, -1)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_2 = (0, 1, -2)$.

Solução: As equações paramétricas de r_1 e r_2 são, respectivamente

$$r_1 : \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= -1 + t \\ z &= 0 \end{aligned}$$

e

$$r_2 : \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 + s \\ z &= -1 - 2s \end{aligned}$$

em que t e s são os parâmetros de cada reta. Vamos agora analisar a posição relativa entre r_1 e r_2. Vejamos se r_1 e r_2 são concorrentes, e se este for o caso, deve existir um ponto P tal que $P \in r_1 \cap r_2$. Daí, temos

$$P \in r_1 \Rightarrow P = (2 + t, -1 + t, 0),$$

e

$$P \in r_2 \Rightarrow P = (0, 1 + s, -1 - 2s).$$

Igualando as coordenadas, obtemos

$$\begin{aligned} 2 + t = 0 &\Rightarrow t = -2 \\ -1 + t = 1 + s &\Rightarrow s = -4 \\ -1 - 2s = 0 &\Rightarrow s = -1/2 \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois gerou dois valores distintos para s. Logo, r_1 e r_2 não são concorrentes.

em que t e s são os parâmetros de cada reta. Vamos agora analisar a posição relativa entre r_1 e r_2. Vejamos se r_1 e r_2 são concorrentes, e se este for o caso, deve existir um ponto P tal que $P \in r_1 \cap r_2$. Daí, temos

$$P \in r_1 \Rightarrow P = (2 + t, -1 + t, 0),$$

e

$$P \in r_2 \Rightarrow P = (0, 1 + s, -1 - 2s).$$

Igualando as coordenadas, obtemos

$$\begin{aligned} 2 + t = 0 &\Rightarrow t = -2 \\ -1 + t = 1 + s &\Rightarrow s = -4 \\ -1 - 2s = 0 &\Rightarrow s = -1/2 \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois gerou dois valores distintos para s. Logo, r_1 e r_2 não são concorrentes.

É claro que r_1 e r_2 também não podem ser coincidentes, pois não possuem ponto algum em comum.

Resta-nos saber se são paralelas ou reversas. Vejamos se r_1 e r_2 são paralelas, e se este for o caso, os vetores de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ também serão paralelos.

Se $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$, então deve existir um $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$. Daí, tem-se

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 = k\vec{v}_2 \quad &\Rightarrow \quad (1,1,0) = k(0,1,-2) \\ &\Rightarrow \quad (1,1,0) = (0,k,-2k), \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois $1 \neq 0$, e com isso as retas não são paralelas. Logo, r_1 e r_2 são retas reversas. $\square$

É claro que r_1 e r_2 também não podem ser coincidentes, pois não possuem ponto algum em comum.

Resta-nos saber se são paralelas ou reversas. Vejamos se r_1 e r_2 são paralelas, e se este for o caso, os vetores de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ também serão paralelos.

Se $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$, então deve existir um $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$. Daí, tem-se

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 = k\vec{v}_2 \quad &\Rightarrow \quad (1,1,0) = k(0,1,-2) \\ &\Rightarrow \quad (1,1,0) = (0,k,-2k), \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois $1 \neq 0$, e com isso as retas não são paralelas. Logo, r_1 e r_2 são retas reversas.

$\square$

É claro que r_1 e r_2 também não podem ser coincidentes, pois não possuem ponto algum em comum.

Resta-nos saber se são paralelas ou reversas. Vejamos se r_1 e r_2 são paralelas, e se este for o caso, os vetores de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ também serão paralelos.

Se $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$, então deve existir um $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$. Daí, tem-se

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 = k\vec{v}_2 \quad &\Rightarrow \quad (1,1,0) = k(0,1,-2) \\ &\Rightarrow \quad (1,1,0) = (0,k,-2k), \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois $1 \neq 0$, e com isso as retas não são paralelas. Logo, r_1 e r_2 são retas reversas.

$\square$

Exemplo

Determine a posição relativa entre as retas r_1 e r_2 com as seguintes propriedades: r_1 passa pelo ponto $A_1 = (0,0,0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 = (1,2,1)$, e r_2 passa pelo ponto $A_2 = (-4,2,0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_2 = (1,2,1)$.

Solução: As equações paramétricas de r_1 e r_2 são, respectivamente

$$r_1: \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

e

$$r_2: \quad \begin{cases} x = -4 + s \\ y = 2 + 2s \\ z = s \end{cases}$$

Exemplo

Determine a posição relativa entre as retas r_1 e r_2 com as seguintes propriedades: r_1 passa pelo ponto $A_1 = (0, 0, 0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, e r_2 passa pelo ponto $A_2 = (-4, 2, 0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_2 = (1, 2, 1)$.

Solução: As equações paramétricas de r_1 e r_2 são, respectivamente

$$r_1 : \quad \begin{aligned} x &= t \\ y &= 2t \\ z &= t \end{aligned}$$

e

$$r_2 : \quad \begin{aligned} x &= -4 + s \\ y &= 2 + 2s \\ z &= s \end{aligned}$$

Analogamente ao exemplo anterior, suponhamos que r_1 e r_2 são concorrentes, então deve existir um ponto P tal que $P \in r_1 \cap r_2$.

Disso, temos $P = (t, 2t, t)$ e $P = (-4 + s, 2 + 2s, s)$ donde tem-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned} t - s &= 4 \\ 2t - 2s &= 2 \\ t &= s \end{aligned}$$

o qual não possui solução, pois $t = s$ e $t - s = 4$ são incompatíveis. Logo, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$. Agora, note que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos, e isto nos diz que r_1 e r_2 são retas paralelas.

$\square$

Analogamente ao exemplo anterior, suponhamos que r_1 e r_2 são concorrentes, então deve existir um ponto P tal que $P \in r_1 \cap r_2$.

Disso, temos $P = (t, 2t, t)$ e $P = (-4 + s, 2 + 2s, s)$ donde tem-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned} t - s &= 4 \\ 2t - 2s &= 2 \\ t &= s \end{aligned}$$

o qual não possui solução, pois $t = s$ e $t - s = 4$ são incompatíveis. Logo, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$. Agora, note que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos, e isto nos diz que r_1 e r_2 são retas paralelas.

$\square$

Exemplo

Determine a posição relativa entre as retas r_1 e r_2 com as seguintes propriedades: r_1 passa pelo ponto $A_1 = (2, 1, -3)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 = (3, 1, -1)$, e r_2 passa pelo ponto $A_2 = (1, 0, -6)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_2 = (2, 1, 1)$.

Solução: As equações paramétricas de r_1 e r_2 são, respectivamente

$$r_1 : \quad \begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 1 + t \\ z &= -3 - t \end{aligned}$$

e

$$r_2 : \quad \begin{aligned} x &= 1 + 2s \\ y &= s \\ z &= -6 + s \end{aligned}$$

Exemplo

Determine a posição relativa entre as retas r_1 e r_2 com as seguintes propriedades: r_1 passa pelo ponto $A_1 = (2, 1, -3)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 = (3, 1, -1)$, e r_2 passa pelo ponto $A_2 = (1, 0, -6)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}_2 = (2, 1, 1)$.

Solução: As equações paramétricas de r_1 e r_2 são, respectivamente

$$r_1 : \quad \begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 1 + t \\ z &= -3 - t \end{aligned}$$

e

$$r_2 : \quad \begin{aligned} x &= 1 + 2s \\ y &= s \\ z &= -6 + s \end{aligned}$$

Analogamente ao exemplo anterior, suponhamos que r_1 e r_2 são concorrentes, então deve existir um ponto P tal que $P \in r_1 \cap r_2$.

Disso, temos $P = (2 + 3t, 1 + t, -3 - t)$ e $P = (1 + 2s, s, -6 + s)$ donde tem-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned} 3t - 2s &= -1 \\ t - s &= -1 \\ t + s &= 3 \end{aligned}$$

o qual possui $t = 1$ e $s = 2$ como única solução. Logo, r_1 e r_2 são retas concorrentes, pois $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são vetores paralelos.

$\square$

Analogamente ao exemplo anterior, suponhamos que r_1 e r_2 são concorrentes, então deve existir um ponto P tal que $P \in r_1 \cap r_2$.

Disso, temos $P = (2 + 3t, 1 + t, -3 - t)$ e $P = (1 + 2s, s, -6 + s)$ donde tem-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned} 3t - 2s &= -1 \\ t - s &= -1 \\ t + s &= 3 \end{aligned}$$

o qual possui $t = 1$ e $s = 2$ como única solução. Logo, r_1 e r_2 são retas concorrentes, pois $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são vetores paralelos.

$\square$