- Cancelamento entre fatores comuns
- Cancelamento algébrico
- Cancelar o fator (polinômial) que zera o denominador

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t-2}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\,P(x)}{(t-1)(t+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)}(t+2)}{\cancel{(t-1)}(t+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{t+2}{t+1}$$

$$= \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

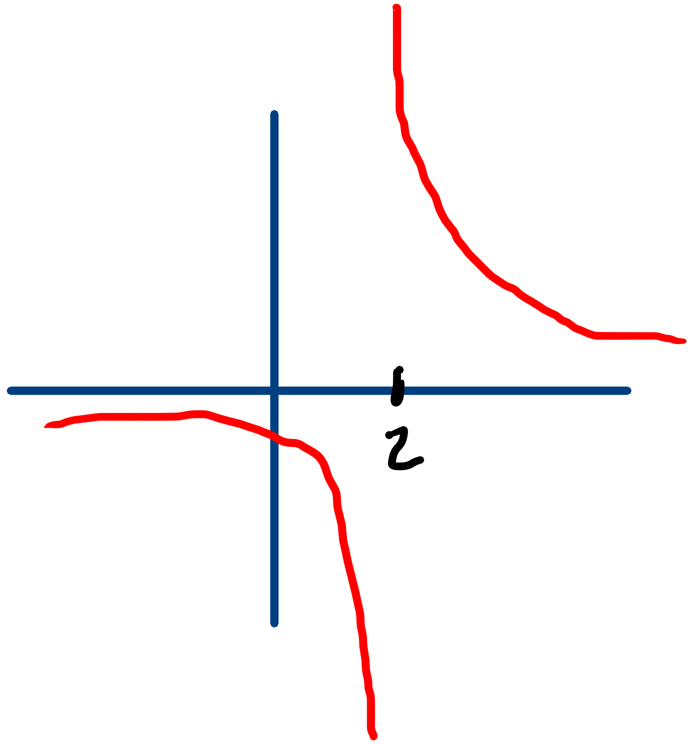
$$\boxed{\begin{array}{l} t^2+t-2=0 \\ \Delta = 9 \quad \text{raízes } x=1 \text{ e } x=-2 \\ \text{fatores} \quad (x-\text{raiz})(x-\text{raiz}) \end{array}}$$

$$6 = 2\cdot\left(\frac{6}{2}\right) \quad\rightarrow\quad t^2+t-2 = (t-1)\underbrace{\left(\frac{t^2+t-2}{t-1}\right)}_{P(x)}$$

$$\begin{array}{r|l} t^2+t-2 & t-1 \\ \cline{2-2} -\;\; t^2-t & t+2 \\ \hline 2t-2 & \\ -\;\; 2t-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

P(x)

Divisão de polinômios

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \rightarrow$$ 

$\rightarrow$ não existe

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \qquad \frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1000$$

$$\frac{1}{-1} = -1 \qquad \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4 \qquad \frac{1}{-\frac{1}{1000}} = -1000$$

$$\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} \qquad f(t) = \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$$

$-1 \notin Dom(f)$

Regra do quociente de polinômios

$t^2-t-2 \neq 0$ se $t=-1$?

$(-1)^2-(-1)-2 = 1+1-2 = 0$ falha

$t=-1$ é raiz de $t^2-t-2=0$

$t=-1$ é raiz de $t^2+3t+2=0$

$(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x + ab = 0$

OBS: se $t=-1$ t^2+3t+2. De fato

$(-1)^2+3(-1)+2 = 1-3+2 = 0$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$9-t^2 = 3^2-t^2 = (3-t)(3+t)$

$t^2+2t = t(t+2)$

$$\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} = \lim_{t\to -1} \frac{(t-(-1))\,P(t)}{(t-(-1))\,Q(t)} =$$

$$= \lim_{t\to -1} \frac{\cancel{(t+1)}(t+2)}{\cancel{(t+1)}(t-2)} =$$

$t \neq -1$

$t+1 \neq 0$

$$= \lim_{t\to -1} \frac{t+2}{t-2} = \frac{-1+2}{-1-2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

RQP: se $t=-1$, $t-2\neq 0$. De fato

$(-1)-2 = -3 \neq 0$

$$\lim_{x \to -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$$

R.Q.P. não funciona.

Se $x = -5$, então $x^2 + 3x - 10 = 0$. De fato

$$(-5)^2 + 3(-5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$$

-5 é raiz de $x^2 + 3x - 10 = 0$

$x + 5$ é fator de $x^2 + 3x - 10$

$$\lim_{x \to -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5} = \lim_{x \to -5} \frac{\cancel{(x+5)}\, P(x)}{\cancel{x+5}} \overset{?}{=} \lim_{x \to -5} \frac{\cancel{(x+5)}(x-2)}{\cancel{x+5}} =$$

$$= \lim_{x \to -5} x - 2 = -5 - 2 = -7$$

$$(x+5)\, P(x) = x^2 + 3x - 10$$

$$P(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{(x+5)}$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & \cancel{x^2} + 3x - 10 & x + 5 \\ \cline{3-3}
- & \cancel{x^2} + 5x & x - 2 \leftarrow P(x) \\ \cline{2-2}
 & -2x - 10 & \\
- & -2x - 10 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Cuidado que nem todo limite tem que ser complicado...

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5}$$

Se $x = -1$, $x^2 + 5 \neq 0$, De fato

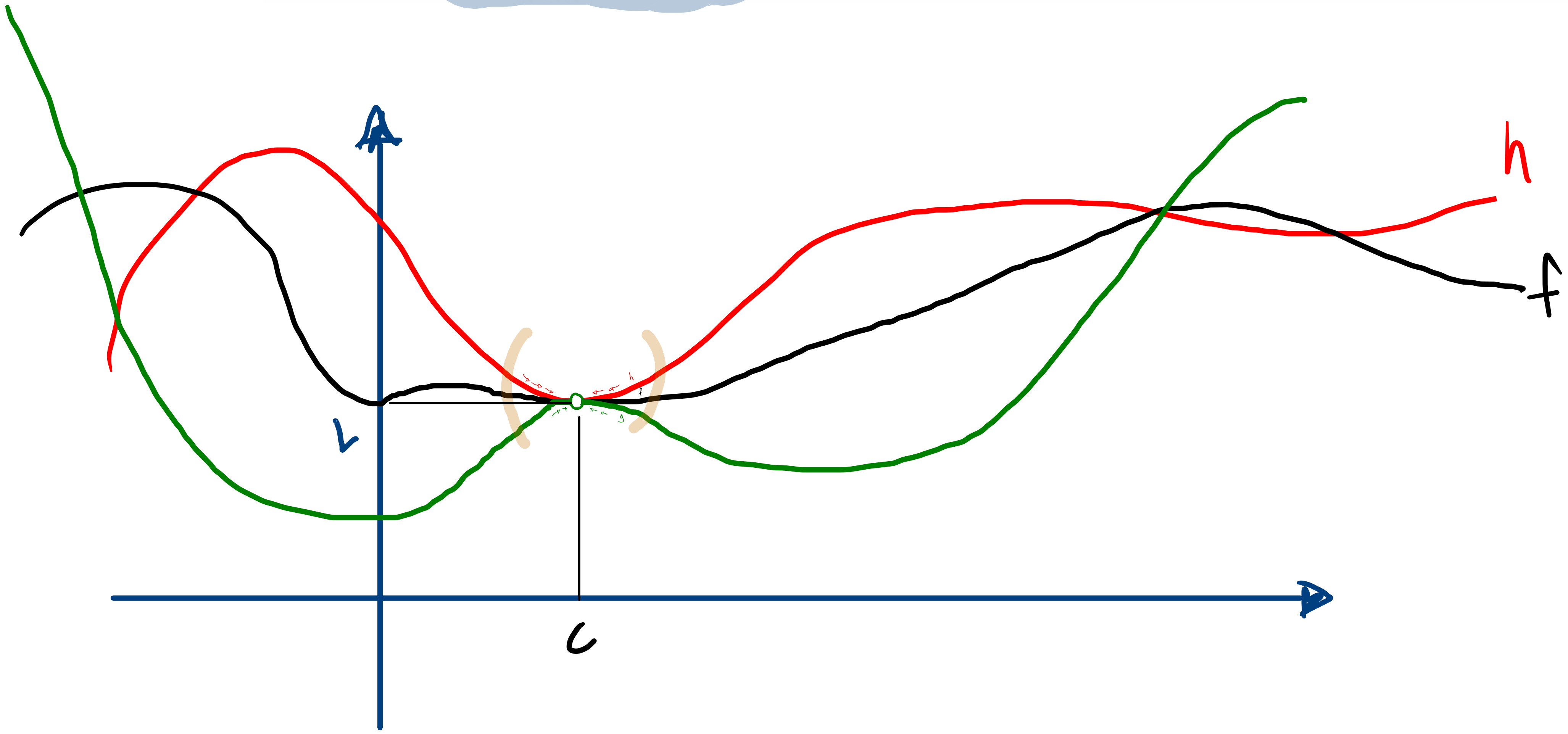
$(-1)^2 + 5 = 6 \neq 0 \rightarrow$ Vale RQP

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{-1 + 4 - 3}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

TEOREMA 4 — Teorema do confronto Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo c, exceto, possivelmente, no próprio $x = c$. Suponha também que

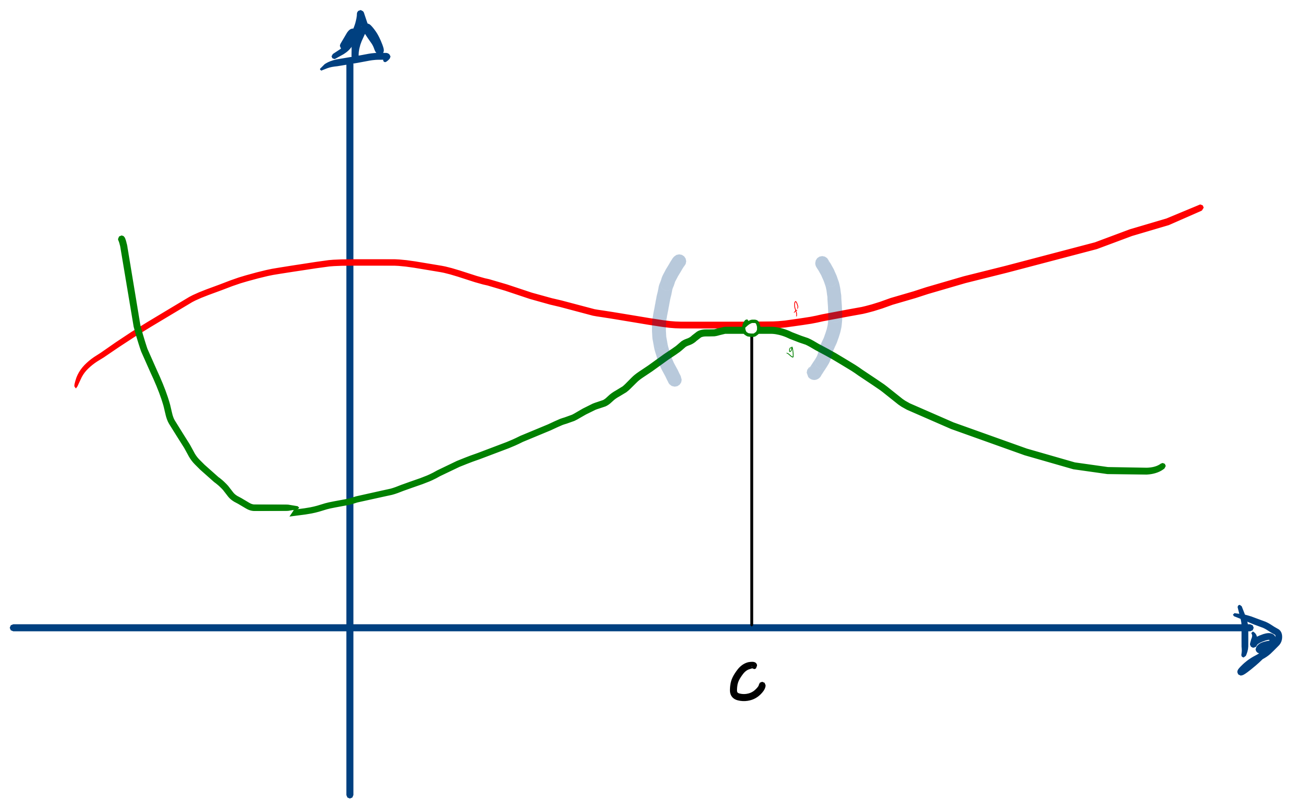
$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L.$$

Então, $\lim_{x \to c} f(x) = L$.



TEOREMA 5 Se $f(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente em $x = c$, e os limites de f e g existirem quando x se aproxima de c, então

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

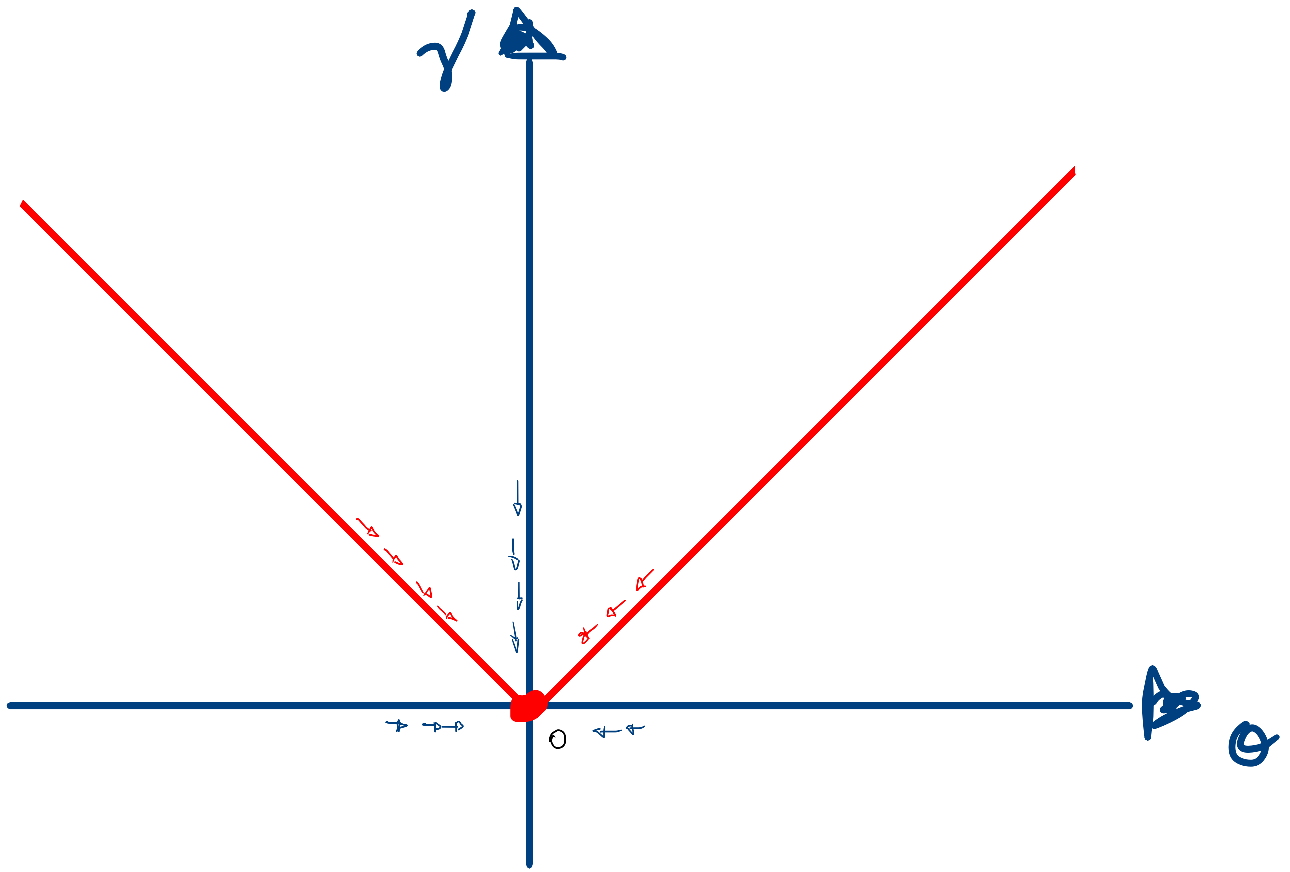


Limite intuitivo da função módulo

$f(\theta) = |\theta|$

$$f(\theta) = |\theta| = \begin{cases} \theta, & \text{se } \theta \geq 0 \\ -\theta, & \text{se } \theta < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} f(\theta) = 0}$$



O que fazer com as funções trigonométricas?

O teorema do confronto nos ajuda a estabelecer importantes regras de limite:

sen(0)

cos(1)

(a) $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$ ✓ **(b)** $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$ ... análogo

(c) Para qualquer função f, $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$ implica $\lim_{x \to c} f(x) = 0$.

$$\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$$

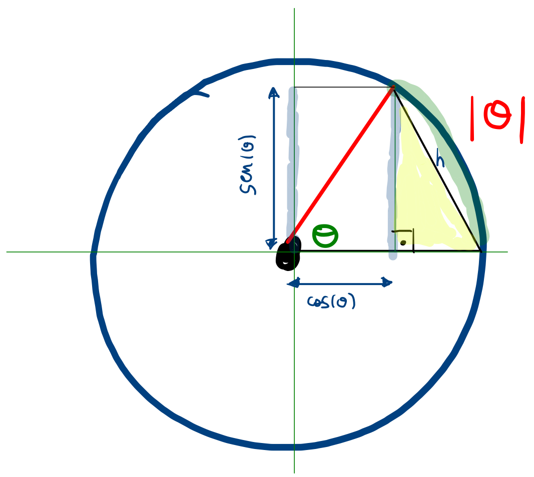
$g(\theta) \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq h(\theta)$ próximo de $\theta = 0$

$\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = \lim_{\theta \to 0} h(\theta) = 0$

$\Downarrow$

$\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}(\theta) = 0$

círculo trigonométrico $\boxed{\text{raio é } 1}$



$|\operatorname{sen}(\theta)| < h < |\theta|$

$|\theta| < 1$ próximo de zero

$-1 < \theta < 1$

$|\operatorname{sen}(\theta)| < |\theta|$

$-|\theta| < \operatorname{sen}(\theta) < |\theta|$

$\boxed{\begin{array}{c} |x| < a \\ -a < x < a \end{array}}$

$\lim_{\theta \to 0} -|\theta| = -\lim_{\theta \to 0} |\theta| = -0 = 0$

$\lim_{\theta \to 0} |\theta| = 0$

Pelo T. do confronto $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}(\theta) = 0$

$$|1-\cos(\theta)| < |\theta|$$

$$-|\theta| < 1-\cos(\theta) < |\theta|$$

T.d.C. $\Downarrow$

$$\lim_{\theta \to 0} 1-\cos(\theta) = 0$$

$$1 - \lim_{\theta \to 0} \cos(\theta) = 0$$

$$1 = \lim_{\theta \to 0} \cos(\theta)$$

Para qualquer função f, $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$ implica $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Se $f(x) = 0$

$$-|f(x)| = f(x) = |f(x)|$$

Se $f(x) > 0$

$$-|f(x)| < f(x) = |f(x)|$$

Se $f(x) < 0$

$$-|f(x)| = -(-f(x)) = f(x) < -f(x) = |f(x)|$$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$\lim_{x\to c} -|f(x)| = -\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$$

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$$

$\to$ Pelo T. do confronto

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0$$