Vetores e Geometria Analítica
Aula 13 - O Produto Vetorial

por

Maxwell Aires da Silva

Universidade Estadual da Paraíba – UEPB

Campina Grande
21 de feveriro de 2022

Construção

Considere π como sendo um plano que está contido no espaço $\mathbb{R}^3$. Então, existem pelo menos dois vetores paralelos a esse plano, por exemplo, os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$.

Suponha que $\vec{u}, \vec{v}$ possuam direções distintas. Então, como estamos no espaço, existe um terceiro vetor $\vec{w} = (x, y, z)$ que é ortogonal ao plano, e consequentemente, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Nosso objetivo é formular um algoritmo que nos permita determinar o vetor $\vec{w}$, e esse vetor é denominado o **Produto Vetorial** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por

$$\vec{u} \times \vec{v}.$$

Considere π como sendo um plano que está contido no espaço $\mathbb{R}^3$. Então, existem pelo menos dois vetores paralelos a esse plano, por exemplo, os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$.

Suponha que $\vec{u}, \vec{v}$ possuam direções distintas. Então, como estamos no espaço, existe um terceiro vetor $\vec{w} = (x, y, z)$ que é ortogonal ao plano, e consequentemente, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Nosso objetivo é formular um algoritmo que nos permita determinar o vetor $\vec{w}$, e esse vetor é denominado o **Produto Vetorial** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por

$$\vec{u} \times \vec{v}.$$

Considere π como sendo um plano que está contido no espaço $\mathbb{R}^3$. Então, existem pelo menos dois vetores paralelos a esse plano, por exemplo, os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$.

Suponha que $\vec{u}, \vec{v}$ possuam direções distintas. Então, como estamos no espaço, existe um terceiro vetor $\vec{w} = (x, y, z)$ que é ortogonal ao plano, e consequentemente, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Nosso objetivo é formular um algoritmo que nos permita determinar o vetor $\vec{w}$, e esse vetor é denominado o **Produto Vetorial** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por

$$\vec{u} \times \vec{v}.$$

Com isso, tem-se $\vec{u} \perp \vec{w}$ e $\vec{v} \perp \vec{w}$, e isso nos fornece as seguintes equações:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0,$$

e

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$

Ou ainda,

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$

e

$$(a_2, b_2, c_2) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0.$$

Observe que temos um sistema linear homogêneo formado por duas equações e três variáveis, isto é, é um sistema possível e indeterminado, pois possui infinitas soluções. O conjunto de soluções desse sistema é dado por

$$x = b_1 c_2 - b_2 c_1$$
$$y = a_2 c_1 - a_1 c_2$$
$$z = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

como pode ser verificado, bastando para isso fazer a substituição das coordenadas de $\vec{w}$ por essa solução em $\vec{u} \cdot \vec{w}$ e $\vec{v} \cdot \vec{w}$, obtendo zero como solução em ambas as equações.

Observe que temos um sistema linear homogêneo formado por duas equações e três variáveis, isto é, é um sistema possível e indeterminado, pois possui infinitas soluções. O conjunto de soluções desse sistema é dado por

$$x = b_1c_2 - b_2c_1$$
$$y = a_2c_1 - a_1c_2$$
$$z = a_1b_2 - a_2b_1$$

como pode ser verificado, bastando para isso fazer a substituição das coordenadas de $\vec{w}$ por essa solução em $\vec{u} \cdot \vec{w}$ e $\vec{v} \cdot \vec{w}$, obtendo zero como solução em ambas as equações.

Bem, tal solução pode não ser muito simples de memorizar. Pensando nisso, formula-se um algoritmo que torna mais simples a solução desse sistema, e esse algoritmo é dado por

$$\vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

em que $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Logo, tem-se

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Bem, tal solução pode não ser muito simples de memorizar. Pensando nisso, formula-se um algoritmo que torna mais simples a solução desse sistema, e esse algoritmo é dado por

$$\vec{w} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

em que $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$. Logo, tem-se

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Bem, tal solução pode não ser muito simples de memorizar. Pensando nisso, formula-se um algoritmo que torna mais simples a solução desse sistema, e esse algoritmo é dado por

$$\vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

em que $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$. Logo, tem-se

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Exemplos Práticos

Exemplo

Determine o produto vetorial entre os vetores a seguir:

(1) $\vec{u} = (1, 5, 4)$ *e* $\vec{v} = (2, -3, 3)$;

(2) $\vec{u} = (4, 0, -3)$ *e* $\vec{v} = (-5, 1, 0)$;

(3) $\vec{u} = (3, 2, 1)$ *e* $\vec{v} = (0, 1, 4)$.

Solução:

(1)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - (10\vec{k} + 3\vec{j} - 12\vec{i}) \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - 10\vec{k} - 3\vec{j} + 12\vec{i} \\
&= 27\vec{i} + 5\vec{j} - 13\vec{k} \\
&= (27, 5, -13).
\end{aligned}
$$

Solução:

(1)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - (10\vec{k} + 3\vec{j} - 12\vec{i}) \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - 10\vec{k} - 3\vec{j} + 12\vec{i} \\
&= 27\vec{i} + 5\vec{j} - 13\vec{k} \\
&= (27, 5, -13).
\end{aligned}
$$

Solução:

(1)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - (10\vec{k} + 3\vec{j} - 12\vec{i}) \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - 10\vec{k} - 3\vec{j} + 12\vec{i} \\
&= 27\vec{i} + 5\vec{j} - 13\vec{k} \\
&= (27, 5, -13).
\end{aligned}
$$

Solução:

(1)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - (10\vec{k} + 3\vec{j} - 12\vec{i}) \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - 10\vec{k} - 3\vec{j} + 12\vec{i} \\
&= 27\vec{i} + 5\vec{j} - 13\vec{k} \\
&= (27, 5, -13).
\end{aligned}
$$

Solução:

(1)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - (10\vec{k} + 3\vec{j} - 12\vec{i}) \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - 10\vec{k} - 3\vec{j} + 12\vec{i} \\
&= 27\vec{i} + 5\vec{j} - 13\vec{k} \\
&= (27, 5, -13).
\end{aligned}
$$

Solução:

(1)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - (10\vec{k} + 3\vec{j} - 12\vec{i}) \\
&= 15\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k} - 10\vec{k} - 3\vec{j} + 12\vec{i} \\
&= 27\vec{i} + 5\vec{j} - 13\vec{k} \\
&= (27, 5, -13).
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (1,5,4) \cdot (27,5,-13) \\
&= 1 \cdot 27 + 5 \cdot 5 - 4 \cdot 13 \\
&= 27 + 25 - 52 \\
&= 52 - 52 \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (2,-3,3) \cdot (27,5,-13) \\
&= 2 \cdot 27 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 13 \\
&= 54 - 15 - 39 \\
&= 54 - 54 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (1, 5, 4) \cdot (27, 5, -13) \\
&= 1 \cdot 27 + 5 \cdot 5 - 4 \cdot 13 \\
&= 27 + 25 - 52 \\
&= 52 - 52 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (2, -3, 3) \cdot (27, 5, -13) \\
&= 2 \cdot 27 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 13 \\
&= 54 - 15 - 39 \\
&= 54 - 54 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{w} &= (1,5,4)\cdot(27,5,-13)\\
&= 1\cdot 27+5\cdot 5-4\cdot 13\\
&= 27+25-52\\
&= 52-52\\
&= 0;
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{w} &= (2,-3,3)\cdot(27,5,-13)\\
&= 2\cdot 27-3\cdot 5-3\cdot 13\\
&= 54-15-39\\
&= 54-54\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (1, 5, 4) \cdot (27, 5, -13) \\
&= 1 \cdot 27 + 5 \cdot 5 - 4 \cdot 13 \\
&= 27 + 25 - 52 \\
&= 52 - 52 \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (2, -3, 3) \cdot (27, 5, -13) \\
&= 2 \cdot 27 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 13 \\
&= 54 - 15 - 39 \\
&= 54 - 54 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= (1,5,4) \cdot (27,5,-13) \\ &= 1 \cdot 27 + 5 \cdot 5 - 4 \cdot 13 \\ &= 27 + 25 - 52 \\ &= 52 - 52 \\ &= 0; \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (2,-3,3) \cdot (27,5,-13) \\ &= 2 \cdot 27 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 13 \\ &= 54 - 15 - 39 \\ &= 54 - 54 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (1, 5, 4) \cdot (27, 5, -13) \\
&= 1 \cdot 27 + 5 \cdot 5 - 4 \cdot 13 \\
&= 27 + 25 - 52 \\
&= 52 - 52 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (2, -3, 3) \cdot (27, 5, -13) \\
&= 2 \cdot 27 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 13 \\
&= 54 - 15 - 39 \\
&= 54 - 54 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (1, 5, 4) \cdot (27, 5, -13) \\
&= 1 \cdot 27 + 5 \cdot 5 - 4 \cdot 13 \\
&= 27 + 25 - 52 \\
&= 52 - 52 \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (2, -3, 3) \cdot (27, 5, -13) \\
&= 2 \cdot 27 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 13 \\
&= 54 - 15 - 39 \\
&= 54 - 54 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{w} &= (1,5,4)\cdot(27,5,-13)\\
&= 1\cdot 27 + 5\cdot 5 - 4\cdot 13\\
&= 27 + 25 - 52\\
&= 52 - 52\\
&= 0;
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{w} &= (2,-3,3)\cdot(27,5,-13)\\
&= 2\cdot 27 - 3\cdot 5 - 3\cdot 13\\
&= 54 - 15 - 39\\
&= 54 - 54\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte:

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{w} &= (1,5,4)\cdot(27,5,-13)\\
&= 1\cdot 27 + 5\cdot 5 - 4\cdot 13\\
&= 27 + 25 - 52\\
&= 52 - 52\\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{w} &= (2,-3,3)\cdot(27,5,-13)\\
&= 2\cdot 27 - 3\cdot 5 - 3\cdot 13\\
&= 54 - 15 - 39\\
&= 54 - 54\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (1,5,4) \cdot (27,5,-13) \\
&= 1 \cdot 27 + 5 \cdot 5 - 4 \cdot 13 \\
&= 27 + 25 - 52 \\
&= 52 - 52 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (2,-3,3) \cdot (27,5,-13) \\
&= 2 \cdot 27 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 13 \\
&= 54 - 15 - 39 \\
&= 54 - 54 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} - 3\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - 0\vec{k} - 0\vec{j} + 3\vec{i} \\
&= 3\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} \\
&= (3, 15, 4).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} - 3\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - 0\vec{k} - 0\vec{j} + 3\vec{i} \\
&= 3\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} \\
&= (3, 15, 4).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} - 3\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - 0\vec{k} - 0\vec{j} + 3\vec{i} \\
&= 3\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} \\
&= (3, 15, 4).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} - 3\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - 0\vec{k} - 0\vec{j} + 3\vec{i} \\
&= 3\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} \\
&= (3, 15, 4).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} - 3\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - 0\vec{k} - 0\vec{j} + 3\vec{i} \\
&= 3\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} \\
&= (3, 15, 4).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} - 3\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} - 0\vec{k} - 0\vec{j} + 3\vec{i} \\
&= 3\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k} \\
&= (3, 15, 4).
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{w} &= (4,0,-3)\cdot(3,15,4)\\
&= 4\cdot 3+0\cdot 15-3\cdot 4\\
&= 12+0-12\\
&= 12-12\\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{w} &= (-5,1,0)\cdot(3,15,4)\\
&= (-5)\cdot 3+1\cdot 15+0\cdot 4\\
&= -15+15+0\\
&= -15+15\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (4, 0, -3) \cdot (3, 15, 4) \\
&= 4 \cdot 3 + 0 \cdot 15 - 3 \cdot 4 \\
&= 12 + 0 - 12 \\
&= 12 - 12 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (-5, 1, 0) \cdot (3, 15, 4) \\
&= (-5) \cdot 3 + 1 \cdot 15 + 0 \cdot 4 \\
&= -15 + 15 + 0 \\
&= -15 + 15 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (4, 0, -3) \cdot (3, 15, 4) \\
&= 4 \cdot 3 + 0 \cdot 15 - 3 \cdot 4 \\
&= 12 + 0 - 12 \\
&= 12 - 12 \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (-5, 1, 0) \cdot (3, 15, 4) \\
&= (-5) \cdot 3 + 1 \cdot 15 + 0 \cdot 4 \\
&= -15 + 15 + 0 \\
&= -15 + 15 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (4, 0, -3) \cdot (3, 15, 4) \\
&= 4 \cdot 3 + 0 \cdot 15 - 3 \cdot 4 \\
&= 12 + 0 - 12 \\
&= 12 - 12 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (-5, 1, 0) \cdot (3, 15, 4) \\
&= (-5) \cdot 3 + 1 \cdot 15 + 0 \cdot 4 \\
&= -15 + 15 + 0 \\
&= -15 + 15 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (4, 0, -3) \cdot (3, 15, 4) \\
&= 4 \cdot 3 + 0 \cdot 15 - 3 \cdot 4 \\
&= 12 + 0 - 12 \\
&= 12 - 12 \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (-5, 1, 0) \cdot (3, 15, 4) \\
&= (-5) \cdot 3 + 1 \cdot 15 + 0 \cdot 4 \\
&= -15 + 15 + 0 \\
&= -15 + 15 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{w} &= (4,0,-3)\cdot(3,15,4)\\
&= 4\cdot 3+0\cdot 15-3\cdot 4\\
&= 12+0-12\\
&= 12-12\\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{w} &= (-5,1,0)\cdot(3,15,4)\\
&= (-5)\cdot 3+1\cdot 15+0\cdot 4\\
&= -15+15+0\\
&= -15+15\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{w} &= (4,0,-3)\cdot(3,15,4)\\
&= 4\cdot 3+0\cdot 15-3\cdot 4\\
&= 12+0-12\\
&= 12-12\\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{w} &= (-5,1,0)\cdot(3,15,4)\\
&= (-5)\cdot 3+1\cdot 15+0\cdot 4\\
&= -15+15+0\\
&= -15+15\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (4, 0, -3) \cdot (3, 15, 4) \\
&= 4 \cdot 3 + 0 \cdot 15 - 3 \cdot 4 \\
&= 12 + 0 - 12 \\
&= 12 - 12 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (-5, 1, 0) \cdot (3, 15, 4) \\
&= (-5) \cdot 3 + 1 \cdot 15 + 0 \cdot 4 \\
&= -15 + 15 + 0 \\
&= -15 + 15 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (4, 0, -3) \cdot (3, 15, 4) \\
&= 4 \cdot 3 + 0 \cdot 15 - 3 \cdot 4 \\
&= 12 + 0 - 12 \\
&= 12 - 12 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (-5, 1, 0) \cdot (3, 15, 4) \\
&= (-5) \cdot 3 + 1 \cdot 15 + 0 \cdot 4 \\
&= -15 + 15 + 0 \\
&= -15 + 15 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - (0\vec{k} + 12\vec{j} + \vec{i}) \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - 0\vec{k} - 12\vec{j} - \vec{i} \\
&= 7\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k} \\
&= (7, -12, 3).
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - (0\vec{k} + 12\vec{j} + \vec{i}) \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - 0\vec{k} - 12\vec{j} - \vec{i} \\
&= 7\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k} \\
&= (7, -12, 3).
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - (0\vec{k} + 12\vec{j} + \vec{i}) \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - 0\vec{k} - 12\vec{j} - \vec{i} \\
&= 7\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k} \\
&= (7, -12, 3).
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - (0\vec{k} + 12\vec{j} + \vec{i}) \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - 0\vec{k} - 12\vec{j} - \vec{i} \\
&= 7\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k} \\
&= (7, -12, 3).
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - (0\vec{k} + 12\vec{j} + \vec{i}) \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - 0\vec{k} - 12\vec{j} - \vec{i} \\
&= 7\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k} \\
&= (7, -12, 3).
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - (0\vec{k} + 12\vec{j} + \vec{i}) \\
&= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - 0\vec{k} - 12\vec{j} - \vec{i} \\
&= 7\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k} \\
&= (7, -12, 3).
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{w} &= (3,2,1)\cdot(7,-12,3)\\
&= 3\cdot 7 - 2\cdot 12 + 1\cdot 3\\
&= 21 - 24 + 3\\
&= 24 - 24\\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{w} &= (0,1,4)\cdot(7,-12,3)\\
&= 0\cdot 7 - 1\cdot 12 + 4\cdot 3\\
&= 0 - 12 + 12\\
&= -12 + 12\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (3, 2, 1) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 12 + 1 \cdot 3 \\
&= 21 - 24 + 3 \\
&= 24 - 24 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (0, 1, 4) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 0 \cdot 7 - 1 \cdot 12 + 4 \cdot 3 \\
&= 0 - 12 + 12 \\
&= -12 + 12 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (3, 2, 1) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 12 + 1 \cdot 3 \\
&= 21 - 24 + 3 \\
&= 24 - 24 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (0, 1, 4) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 0 \cdot 7 - 1 \cdot 12 + 4 \cdot 3 \\
&= 0 - 12 + 12 \\
&= -12 + 12 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (3, 2, 1) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 12 + 1 \cdot 3 \\
&= 21 - 24 + 3 \\
&= 24 - 24 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (0, 1, 4) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 0 \cdot 7 - 1 \cdot 12 + 4 \cdot 3 \\
&= 0 - 12 + 12 \\
&= -12 + 12 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (3, 2, 1) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 12 + 1 \cdot 3 \\
&= 21 - 24 + 3 \\
&= 24 - 24 \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (0, 1, 4) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 0 \cdot 7 - 1 \cdot 12 + 4 \cdot 3 \\
&= 0 - 12 + 12 \\
&= -12 + 12 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (3,2,1) \cdot (7,-12,3) \\
&= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 12 + 1 \cdot 3 \\
&= 21 - 24 + 3 \\
&= 24 - 24 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (0,1,4) \cdot (7,-12,3) \\
&= 0 \cdot 7 - 1 \cdot 12 + 4 \cdot 3 \\
&= 0 - 12 + 12 \\
&= -12 + 12 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{w} &= (3,2,1)\cdot(7,-12,3)\\ &= 3\cdot 7-2\cdot 12+1\cdot 3\\ &= 21-24+3\\ &= 24-24\\ &= 0;\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{w} &= (0,1,4)\cdot(7,-12,3)\\ &= 0\cdot 7-1\cdot 12+4\cdot 3\\ &= 0-12+12\\ &= -12+12\\ &= 0.\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (3, 2, 1) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 12 + 1 \cdot 3 \\
&= 21 - 24 + 3 \\
&= 24 - 24 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (0, 1, 4) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 0 \cdot 7 - 1 \cdot 12 + 4 \cdot 3 \\
&= 0 - 12 + 12 \\
&= -12 + 12 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o vetor encontrado é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= (3, 2, 1) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 12 + 1 \cdot 3 \\
&= 21 - 24 + 3 \\
&= 24 - 24 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (0, 1, 4) \cdot (7, -12, 3) \\
&= 0 \cdot 7 - 1 \cdot 12 + 4 \cdot 3 \\
&= 0 - 12 + 12 \\
&= -12 + 12 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo

Determine um vetor ortogonal ao plano π que contém os pontos $A = (3, 4, 1)$, $B = (2, 5, -4)$ e $C = (5, 2, 1)$.

Solução: Observe que A, B, C são pontos do plano π, e não vetores deste, o que significa que precisamos determinar tais vetores. Podemos, por exemplo, determinar os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (2, 5, -4) - (3, 4, 1) \\ &= (2 - 3, 5 - 4, -4 - 1) \\ &= (-1, 1, -5), \end{aligned}$$

Exemplo

Determine um vetor ortogonal ao plano π que contém os pontos $A = (3, 4, 1)$, $B = (2, 5, -4)$ e $C = (5, 2, 1)$.

Solução: Observe que A, B, C são pontos do plano π, e não vetores deste, o que significa que precisamos determinar tais vetores.

Podemos, por exemplo, determinar os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (2, 5, -4) - (3, 4, 1)\\ &= (2-3, 5-4, -4-1)\\ &= (-1, 1, -5),\end{aligned}$$

Exemplo

Determine um vetor ortogonal ao plano π que contém os pontos $A = (3, 4, 1), B = (2, 5, -4)$ e $C = (5, 2, 1)$.

Solução: Observe que A, B, C são pontos do plano π, e não vetores deste, o que significa que precisamos determinar tais vetores. Podemos, por exemplo, determinar os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (2, 5, -4) - (3, 4, 1)\\ &= (2-3, 5-4, -4-1)\\ &= (-1, 1, -5),\end{aligned}$$

Exemplo

Determine um vetor ortogonal ao plano π que contém os pontos $A = (3, 4, 1), B = (2, 5, -4)$ e $C = (5, 2, 1)$.

Solução: Observe que A, B, C são pontos do plano π, e não vetores deste, o que significa que precisamos determinar tais vetores. Podemos, por exemplo, determinar os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (2, 5, -4) - (3, 4, 1) \\ &= (2 - 3, 5 - 4, -4 - 1) \\ &= (-1, 1, -5), \end{aligned}$$

Exemplo

Determine um vetor ortogonal ao plano π que contém os pontos $A = (3,4,1), B = (2,5,-4)$ e $C = (5,2,1)$.

Solução: Observe que A, B, C são pontos do plano π, e não vetores deste, o que significa que precisamos determinar tais vetores. Podemos, por exemplo, determinar os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (2,5,-4) - (3,4,1) \\ &= (2-3, 5-4, -4-1) \\ &= (-1,1,-5), \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\vec{AC} &= (5,2,1)-(3,4,1)\\
&= (5-3,2-4,1-1)\\
&= (2,-2,0).
\end{aligned}
$$

Assim, os vetores $\vec{AB}=(-1,1,-5)$ e $\vec{AC}=(2,-2,0)$ são paralelos ao plano π. Agora, basta determinar o produto vetorial entre esses vetores e chegaremos ao resultado desejado.

e

$$
\begin{aligned}
\vec{AC} &= (5,2,1) - (3,4,1)\\
&= (5-3, 2-4, 1-1)\\
&= (2,-2,0).
\end{aligned}
$$

Assim, os vetores $\vec{AB} = (-1,1,-5)$ e $\vec{AC} = (2,-2,0)$ são paralelos ao plano π. Agora, basta determinar o produto vetorial entre esses vetores e chegaremos ao resultado desejado.

e

$$
\begin{aligned}
\vec{AC} &= (5,2,1)-(3,4,1)\\
&= (5-3,2-4,1-1)\\
&= (2,-2,0).
\end{aligned}
$$

Assim, os vetores $\vec{AB}=(-1,1,-5)$ e $\vec{AC}=(2,-2,0)$ são paralelos ao plano π. Agora, basta determinar o produto vetorial entre esses vetores e chegaremos ao resultado desejado.

e

$$
\begin{aligned}
\vec{AC} &= (5,2,1)-(3,4,1)\\
&= (5-3,2-4,1-1)\\
&= (2,-2,0).
\end{aligned}
$$

Assim, os vetores $\vec{AB}=(-1,1,-5)$ e $\vec{AC}=(2,-2,0)$ são paralelos ao plano π. Agora, basta determinar o produto vetorial entre esses vetores e chegaremos ao resultado desejado.

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - (2\vec{k} + 0\vec{j} + 10\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - 2\vec{k} - 0\vec{j} - 10\vec{i} \\
&= -10\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k} \\
&= (-10, -10, 0).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - (2\vec{k} + 0\vec{j} + 10\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - 2\vec{k} - 0\vec{j} - 10\vec{i} \\
&= -10\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k} \\
&= (-10, -10, 0).
\end{aligned}
$$

$\square$

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - (2\vec{k} + 0\vec{j} + 10\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - 2\vec{k} - 0\vec{j} - 10\vec{i} \\
&= -10\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k} \\
&= (-10, -10, 0).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - (2\vec{k} + 0\vec{j} + 10\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - 2\vec{k} - 0\vec{j} - 10\vec{i} \\
&= -10\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k} \\
&= (-10, -10, 0).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - (2\vec{k} + 0\vec{j} + 10\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - 2\vec{k} - 0\vec{j} - 10\vec{i} \\
&= -10\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k} \\
&= (-10, -10, 0).
\end{aligned}
$$

$\square$

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - (2\vec{k} + 0\vec{j} + 10\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} - 2\vec{k} - 0\vec{j} - 10\vec{i} \\
&= -10\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k} \\
&= (-10, -10, 0).
\end{aligned}
$$

□

Propriedades do Produto Vetorial

Vamos apresentar algumas propriedades do produto vetorial, as quais podem ser demonstradas com os conceitos de determinante de uma matriz.

(1) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$;

(2) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$;

(3) $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$;

(4) $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$;

(5) $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$.

Proposição

Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta.$$

Demonstração: De fato, pela Propriedade (5) apresentada anteriormente, tem-se

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

Mas, no estudo de produto escalar vimos que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta,$$

donde substituindo em (5) obtemos

Proposição

Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta.$$

Demonstração: De fato, pela Propriedade (5) apresentada anteriormente, tem-se

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

Mas, no estudo de produto escalar vimos que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta,$$

donde substituindo em (5) obtemos

Proposição

Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta.$$

Demonstração: De fato, pela Propriedade (5) apresentada anteriormente, tem-se

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

Mas, no estudo de produto escalar vimos que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta,$$

donde substituindo em (5) obtemos

$$
\begin{aligned}
||\vec{u} \times \vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\
&= ||u||^2 \cdot ||v||^2 - (||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta)^2 \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cos^2\theta \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2\theta \Rightarrow ||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta.$$

$\blacksquare$

$$
\begin{aligned}
||\vec{u}\times\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\\
&= ||u||^2\cdot||v||^2-(||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot\cos\theta)^2\\
&= ||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2\cos^2\theta\\
&= ||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2(1-\cos^2\theta)\\
&= ||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2\cdot\sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$||\vec{u}\times\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2\cdot\sin^2\theta \Rightarrow ||\vec{u}\times\vec{v}||=||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot\sin\theta.$$

$$
\begin{aligned}
||\vec{u} \times \vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\
&= ||u||^2 \cdot ||v||^2 - (||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta)^2 \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cos^2\theta \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2\theta \Rightarrow ||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta.$$

$$
\begin{aligned}
||\vec{u} \times \vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\
&= ||u||^2 \cdot ||v||^2 - (||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta)^2 \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cos^2\theta \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2\theta \Rightarrow ||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta.$$

$$
\begin{aligned}
||\vec{u} \times \vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\
&= ||u||^2 \cdot ||v||^2 - (||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta)^2 \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cos^2\theta \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2\theta \Rightarrow ||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta.$$

$$
\begin{aligned}
||\vec{u} \times \vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\
&= ||u||^2 \cdot ||v||^2 - (||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta)^2 \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cos^2\theta \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2\theta \Rightarrow ||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta.$$

$\blacksquare$

Aplicações

Vamos apresentar algumas aplicações diretas do conceito de produto vetorial.

Sabe-se da Geometria Euclidiana Plana que a área de um paralelogramo $\mathcal{P}$ é dada pelo produto entre sua base e sua altura, isto é,

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = b \cdot h,$$

em que b é a medida da base e h é a medida da altura.

Considere o paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conforme figura a seguir:

Vamos apresentar algumas aplicações diretas do conceito de produto vetorial.

Sabe-se da Geometria Euclidiana Plana que a área de um paralelogramo $\mathcal{P}$ é dada pelo produto entre sua base e sua altura, isto é,

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = b \cdot h,$$

em que b é a medida da base e h é a medida da altura.

Considere o paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conforme figura a seguir:

Vamos apresentar algumas aplicações diretas do conceito de produto vetorial.

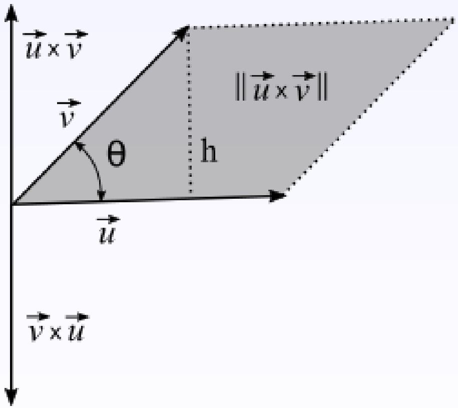
Sabe-se da Geometria Euclidiana Plana que a área de um paralelogramo $\mathcal{P}$ é dada pelo produto entre sua base e sua altura, isto é,

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = b \cdot h,$$

em que b é a medida da base e h é a medida da altura.

Considere o paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conforme figura a seguir:

Figura: Paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Fonte: http://vectorsandgeometry.wikidot.com/

Ora, $b = ||\vec{u}||$, falta-nos determinar sua altura. Por definição de $\sin\theta$ tem-se

$$\sin\theta = \frac{h}{||\vec{v}||} \Rightarrow h = ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta;$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{P}) &= b \cdot h \\ &= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta \\ &= ||\vec{u} \times \vec{v}||. \end{aligned}$$

Ora, $b = ||\vec{u}||$, falta-nos determinar sua altura. Por definição de $\sin\theta$ tem-se

$$\sin\theta = \frac{h}{||\vec{v}||} \Rightarrow h = ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta;$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{P}) &= b \cdot h \\ &= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta \\ &= ||\vec{u} \times \vec{v}||. \end{aligned}$$

Ora, $b = ||\vec{u}||$, falta-nos determinar sua altura. Por definição de $\sin\theta$ tem-se

$$\sin\theta = \frac{h}{||\vec{v}||} \Rightarrow h = ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta;$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{P}) &= b \cdot h \\ &= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\theta \\ &= ||\vec{u} \times \vec{v}||. \end{aligned}$$

A segunda aplicação é decorrida imediatamente da primeira, pois sabemos da Geometria Euclidiana Plana que a área de um triângulo $\mathcal{T}$ qualquer é a metade da área de um quadrilátero, em particular, de um paralelogramo. Assim, tem-se

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2}||\vec{u} \times \vec{v}||.$$

Exemplo

Determine a área do paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 0, 0)$ e $\vec{v} = (5, 3, 0)$.

A segunda aplicação é decorrida imediatamente da primeira, pois sabemos da Geometria Euclidiana Plana que a área de um triângulo $\mathcal{T}$ qualquer é a metade da área de um quadrilátero, em particular, de um paralelogramo. Assim, tem-se

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2}||\vec{u} \times \vec{v}||.$$

Exemplo

Determine a área do paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 0, 0)$ e $\vec{v} = (5, 3, 0)$.

Solução: Determinemos o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} + 0\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k} \\
&= (0, 0, 9).
\end{aligned}$$

Solução: Determinemos o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} + 0\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k} \\
&= (0, 0, 9).
\end{aligned}
$$

Solução: Determinemos o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} + 0\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k} \\
&= (0, 0, 9).
\end{aligned}
$$

Solução: Determinemos o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} + 0\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k} \\
&= (0, 0, 9).
\end{aligned}
$$

Solução: Determinemos o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k} - (0\vec{k} + 0\vec{j} + 0\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k} \\
&= (0, 0, 9).
\end{aligned}
$$

Daí, tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{P}) &= ||\vec{u} \times \vec{v}|| \\
&= ||(0, 0, 9)|| \\
&= \sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} \\
&= \sqrt{0 + 0 + 81} \\
&= \sqrt{81} \\
&= 9 \ u.a.
\end{aligned}
$$

$\square$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{P}) &= ||\vec{u} \times \vec{v}|| \\
&= ||(0,0,9)|| \\
&= \sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} \\
&= \sqrt{0 + 0 + 81} \\
&= \sqrt{81} \\
&= 9 \ u.a.
\end{aligned}$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{P}) &= ||\vec{u} \times \vec{v}|| \\
&= ||(0,0,9)|| \\
&= \sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} \\
&= \sqrt{0 + 0 + 81} \\
&= \sqrt{81} \\
&= 9 \; u.a.
\end{aligned}$$

$\square$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{P}) &= ||\vec{u} \times \vec{v}|| \\
&= ||(0,0,9)|| \\
&= \sqrt{0^2+0^2+9^2} \\
&= \sqrt{0+0+81} \\
&= \sqrt{81} \\
&= 9\ u.a.
\end{aligned}$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{P}) &= ||\vec{u} \times \vec{v}|| \\
&= ||(0,0,9)|| \\
&= \sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} \\
&= \sqrt{0 + 0 + 81} \\
&= \sqrt{81} \\
&= 9 \; u.a.
\end{aligned}$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{P}) &= ||\vec{u} \times \vec{v}|| \\
&= ||(0,0,9)|| \\
&= \sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} \\
&= \sqrt{0 + 0 + 81} \\
&= \sqrt{81} \\
&= 9 \; u.a.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo

Determine a área do triângulo $\mathcal{T}$ determinado pelos pontos $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$ *e* $C = (1,1,1)$.

Solução: Através desses pontos, pode-se determinar vetores no espaço. Então, tem-se

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (1-0, 0-0, 0-0)\\ &= (1,0,0),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= (1-0, 1-0, 1-0)\\ &= (1,1,1).\end{aligned}$$

Exemplo

Determine a área do triângulo $\mathcal{T}$ determinado pelos pontos $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$ e $C = (1,1,1)$.

Solução: Através desses pontos, pode-se determinar vetores no espaço. Então, tem-se

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (1-0, 0-0, 0-0) \\ &= (1,0,0), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= (1-0, 1-0, 1-0) \\ &= (1,1,1). \end{aligned}$$

Exemplo

Determine a área do triângulo $\mathcal{T}$ determinado pelos pontos $A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0)$ *e* $C = (1, 1, 1)$.

Solução: Através desses pontos, pode-se determinar vetores no espaço. Então, tem-se

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (1-0, 0-0, 0-0) \\ &= (1, 0, 0), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= (1-0, 1-0, 1-0) \\ &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Exemplo

Determine a área do triângulo $\mathcal{T}$ determinado pelos pontos $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$ e $C = (1,1,1)$.

Solução: Através desses pontos, pode-se determinar vetores no espaço. Então, tem-se

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (1-0, 0-0, 0-0) \\ &= (1,0,0), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= (1-0, 1-0, 1-0) \\ &= (1,1,1). \end{aligned}$$

Agora, podemos calcular a área em questão pela expressão obtida anteriormente.

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} - (0\vec{k} + \vec{j} + 0\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\
&= (0, -1, 1).
\end{aligned}
$$

Agora, podemos calcular a área em questão pela expressão obtida anteriormente.

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} - (0\vec{k} + \vec{j} + 0\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\
&= (0, -1, 1).
\end{aligned}
$$

Agora, podemos calcular a área em questão pela expressão obtida anteriormente.

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} - (0\vec{k} + \vec{j} + 0\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\
&= (0, -1, 1).
\end{aligned}
$$

Agora, podemos calcular a área em questão pela expressão obtida anteriormente.

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} - (0\vec{k} + \vec{j} + 0\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\
&= (0, -1, 1).
\end{aligned}
$$

Agora, podemos calcular a área em questão pela expressão obtida anteriormente.

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} \times \vec{AC} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} - (0\vec{k} + \vec{j} + 0\vec{i}) \\
&= 0\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\
&= (0, -1, 1).
\end{aligned}
$$

Daí, segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{T}) &= \frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}|| \\
&= \frac{1}{2}||(0,-1,1)|| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0+1+1} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}u.a.
\end{aligned}$$

□

Daí, segue

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{T}) &= \frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}|| \\
&= \frac{1}{2}||(0,-1,1)|| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0+1+1} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} u.a.
\end{aligned}
$$

Daí, segue

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{T}) &= \frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}|| \\
&= \frac{1}{2}||(0,-1,1)|| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0+1+1} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} u.a.
\end{aligned}
$$

Daí, segue

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{T}) &= \frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}|| \\
&= \frac{1}{2}||(0,-1,1)|| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0+1+1} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}u.a.
\end{aligned}
$$

□

Daí, segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{T}) &= \frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}|| \\
&= \frac{1}{2}||(0,-1,1)|| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0+1+1} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}u.a.
\end{aligned}$$

□

Daí, segue

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{T}) &= \frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}|| \\
&= \frac{1}{2}||(0, -1, 1)|| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0 + 1 + 1} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} u.a.
\end{aligned}
$$

$\square$