UEPB
Universidade
Estadual da Paraíba

Calculo II

Resumos professora: Joselma Soares dos Santos

Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Departamento de Matemática

Componente Curricular: Cálculo Diferencial e Integral II

Professora: Joselma

EMENTA

- Integral Definida.
- Teorema Fundamental do Cálculo.
- Técnicas de Integração.
- Aplicações da Integral;
- Integrais Impróprias.
- Sequências e Séries.
- Séries de Potências;
- Série de Taylor e Série de Maclaurin.

Bibliografia:

FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. Cálculo A. Editora McGraw Hill.

SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica. Volumes 1 e 2. Editora McGraw.

THOMAS, G. B. Cálculo Volumes1 e 2. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.

Cronograma com as datas das avaliações:

	Unidade I	**Unidade II**
1ª Avaliação	**17/05/2022**	**30/06/2022**
2ª Avaliação	**07/06/2022**	**19/07/2022**
Reposição	**09/06/2022**	**21/07/2022**
Final	**26/07/2022**	

RESUMO DO CONTEÚDO A SER ESTUDADO.

1. REVISÃO DE INTEGRAL INDEFINIDA

1.1 Definição de Integral Indefinida

Relembremos um pouco de derivadas, determinando uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para cada uma das funções $f(x)$ dadas na 1ª coluna da tabela abaixo:

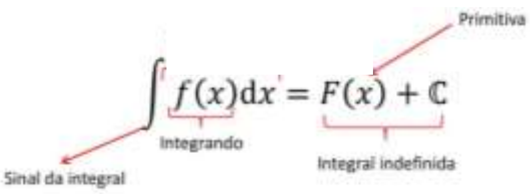
Função dada	Função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$	Cálculos
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}.2x = x = f(x)$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$F'(x) = \left(\frac{x^6}{6}\right)' = \frac{1}{6}.6x^5 = x^5 = f(x)$
$f(x) = x^{-3}$	$F(x) = -\frac{x^{-2}}{2}$	$F'(x) = \left(-\frac{x^{-2}}{2}\right)' = -\frac{1}{2}.(-2x^{-3}) = x^{-3} = f(x)$
$f(x) = x^{-1}$	$F(x) = lnx$	$F'(x) = (lnx)' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x} = x^{-1} = f(x)$
$f(x) = senx$	$F(x) = -cosx$	$F'(x) = (-cosx)' = -(-senx) = senx = f(x)$
$f(x) = cosx$	$F(x) = senx$	$F'(x) = (senx)' = cosx = f(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$F'(x) = (e^x)' = e^x = f(x)$

- A função $F(x)$ que satisfaz $F'(x) = f(x)$ é chamada primitiva da função $f(x)$. Além disso, em Cálculo I vimos que se $F(x)$ é uma primitiva (ou anti-derivada) de $f(x)$, então $F(x) + C$, com C uma constante qualquer, também é uma primitiva de $f(x)$.

Definição 1.1: Se $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$, a expressão $F(x) + C$ é chamada integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

onde C representa uma constante qualquer.



Exemplo 1.1: Por definição, $\int senxdx = -cosx + C$, pois $F(x) = -cosx + C$ é uma primitiva de $f(x) = senx$. De fato,

$$F'(x) = (-cox + C)' = -(-senx) + 0 = senx = f(x).$$

Observação 1.1: Da definição de integral indefinida, decorre que

i) $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$, assim, $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$.

ii) $\int f(x)dx$ representa uma família de funções (a família de todas as primitivas da função integrando).

IMPORTANTE: Não esqueça da constante de integração $\boldsymbol{C}$. (Pois ao calcularmos a Integral Indefinida $\int f(x)dx$ obtemos uma família de funções, sem a constante está errado!).

1.2. Propriedades da Integral Indefinida

Proposição 1.1: Sejam $f, g: I \to \mathbb{R}$ e K uma constante. Então:

i) $\int K.f\,(x)dx = K.\int f(x)dx$.

ii) $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

(Como f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x)), do item (ii) temos $\int \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.)

Exemplo 1.2: Encontre as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int (\boldsymbol{x - 5x^2 + 4x^3 + \frac{3}{x} - 2})\boldsymbol{dx} = \int xdx - \int 5x^2\,dx + \int 4x^3dx + \int \frac{3}{x}dx - \int 2dx =$

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 - 5\int x^2dx + 4\int x^3dx + 3\int \frac{1}{x}dx - 2\int dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 - \frac{5x^3}{3} + C_2 + 4\frac{x^4}{4} + C_3 + 3\ln|x| + C_4 - 2x + C_5 =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} + x^4 + 3\ln|x| - 2x + C,$$

onde $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$.

Observação: Como a soma de constantes é igual a uma nova constante, podemos colocar uma única constante para representar esta soma, como faremos no exemplo a seguir.

b) $\int (\boldsymbol{cost - \frac{3}{4}e^t + 5t^{-3}})\boldsymbol{dt} = \int costdt - \frac{3}{4}\int e^t dt + 5\int t^{-3}\,dt =$

$$= sent - \frac{3}{4}e^t + \frac{5t^{-2}}{-2} + C = sent - \frac{3}{4}e^t - \frac{5}{2}t^{-2} + C.$$

c) $\int (\boldsymbol{5 - e^t + 3sent + sec^2 t})\boldsymbol{dt} =$

d) $\int \left(\boldsymbol{4cosx + \frac{2}{x} - \sqrt{x^3}}\right)\boldsymbol{dx} =$

1.3. Tabela das Integrais Indefinidas

TABELA: Derivadas, Integrais e Identidades Trigonométricas

• *Derivadas*

Sejam u e v funções deriváveis de x e n constante.

1. $y = u^n \Rightarrow y' = n\,u^{n-1}u'$.
2. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$.
3. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
4. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u(\ln a)\,u',\ (a > 0,\ a \neq 1)$.
5. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$.
6. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}\log_a e$.
7. $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u}u'$.
8. $y = u^v \Rightarrow y' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v(\ln u)\,v'$.
9. $y = \text{sen}\ u \Rightarrow y' = u'\cos\ u$.
10. $y = \cos\ u \Rightarrow y' = -u'\text{sen}\ u$.
11. $y = \text{tg}\ u \Rightarrow y' = u'\sec^2 u$.
12. $y = \text{cotg}\ u \Rightarrow y' = -u'\text{cosec}^2 u$.
13. $y = \sec\ u \Rightarrow y' = u'\sec\ u\ \text{tg}\ u$.
14. $y = \text{cosec}\ u \Rightarrow y' = -u'\text{cosec}\ u\ \text{cotg}\ u$.
15. $y = arc\ \text{sen}\ u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $y = arc\ \cos\ u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $y = arc\ \text{tg}\ u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$.
18. $y = arc\ \cot g\ u \Rightarrow \frac{-u'}{1+u^2}$.
19. $y = arc\ \sec\ u,\ |u| \geqslant 1$
    $\Rightarrow y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}},\ |u| > 1$.
20. $y = arc\ \text{cosec}\ u,\ |u| \geqslant 1$
    $\Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}},\ |u| > 1$.

• *Identidades Trigonométricas*

1. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
2. $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$.
3. $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$.
4. $\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos\ 2x}{2}$.
5. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos\ 2x}{2}$.
6. $\text{sen}\ 2x = 2\ \text{sen}\ x\ \cos\ x$.
7. $2\ \text{sen}\ x\ \cos\ y = \text{sen}\,(x-y) + sen\,(x+y)$.
8. $2\ \text{sen}\ x\ \text{sen}\ y = \cos\,(x-y) - \cos\,(x+y)$.
9. $2\ \cos\ x\ \cos\ y = \cos\,(x-y) + \cos\,(x+y)$.
10. $1 \pm \text{sen}\ x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

• *Integrais*

1. $\int du = u + c$.
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$.
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$.
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln\ a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1$.
5. $\int e^u du = e^u + c$.
6. $\int \text{sen}\ u\ du = -\cos\ u + c$.
7. $\int \cos\ u\ du = \text{sen}\ u + c$.
8. $\int \text{tg}\ u\ du = \ln|\sec\ u| + c$.
9. $\int \text{cotg}\ u\ du = \ln|\text{sen}\ u| + c$.
10. $\int \sec\ u\ du = \ln|\sec\ u + \text{tg}\ u| + c$.
11. $\int \text{cosec}\ u\ du = \ln|\text{cosec}\ u - \text{cotg}\ u| + c$.
12. $\int \sec\ u\ \text{tg}\ u\ du = \sec\ u + c$.
13. $\int \text{cosec}\ u\ \text{cotg}\ u\ du = -\text{cosec}\ u + c$.
14. $\int \sec^2 u\ du = \text{tg}\ u + c$.
15. $\int \text{cosec}^2 u\ du = -\text{cotg}\ u + c$.
16. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arc\ \text{tg}\frac{u}{a} + c$.
17. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c,\ u^2 > a^2$.
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + c$.
19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c$.
20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\ \text{sen}\frac{u}{a} + c,\ u^2 < a^2$.
21. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc\ \sec\left|\frac{u}{a}\right| + c$.

• *Fórmulas de Recorrência*

1. $\int sen^n au\ du = -\frac{sen^{n-1}au\ \cos\ au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int sen^{n-2}au\ du.$
2. $\int \cos^n au\ du = \frac{sen\ au\ \cos^{n-1}au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int \cos^{n-2}au\ du.$
3. $\int tg^n au\ du = \frac{tg^{n-1}au}{a(n-1)} - \int tg^{n-2}au\ du.$
4. $\int cotg^n au\ du = -\frac{cotg^{n-1}au}{a(n-1)} - \int cotg^{n-2}au\ du$
5. $\int \sec^n au\ du = \frac{\sec^{n-2}au\ tg\ au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int \sec^{n-2}au\ du$
6. $\int cosec^n au\ du = -\frac{cosec^{n-2}au\ cotg\ au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int cosec^{n-2}au\ du.$

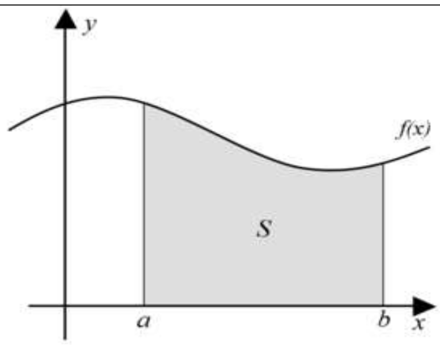
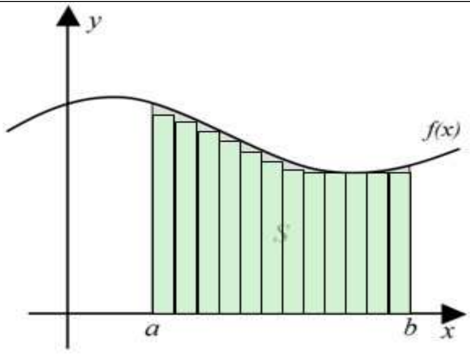
(imagem retirada do site: edisciplinas.usp.br)

2. INTEGRAL DEFINIDA

2.1. Definição de Integral Definida

O conceito de integral definida nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas. Sabemos que desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. Antes de surgir a definição de integral definida, o procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar uma figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Comecemos então falando um pouco desses problemas para em seguida formalizar a definição de integral definida.

1º) Consideremos o problema de definir a área de uma região plana S, delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa f, pelo eixo dos x e por duas retas $x = a$ e $x = b$. (Conforme figura 1).	Para isso, fazemos uma partição do intervalo $[a, b]$, isto é, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. (Conforme figura 2)
 **Figura 1**	 **Figura 2**

Escolhendo os pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

temos:

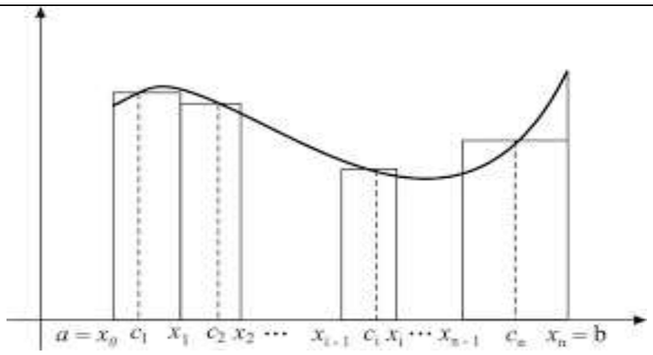


Figura 3

Assim, temos uma partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$, $i = 1,2, \dots, n$, cujo comprimento iremos denotar por Δx_i, assim, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Agora, se em cada um destes intervalos $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$, escolhermos um ponto qualquer c_i. E, para cada i $(i = 1,2, \dots, n)$ construirmos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$, teremos n retângulos cuja área é $\Delta x_i . f(c_i)$.

Logo, a soma das áreas dos n retângulos, que representamos por S_n, é dada por:

$$\boldsymbol{S_n} = \underbrace{\boldsymbol{\Delta x_1 . f(c_1)}.}_{\text{área do 1º retângulo}} + \underbrace{\boldsymbol{\Delta x_2 . f(c_2)}}_{\text{área do 2º retângulo}} + \cdots + \underbrace{\boldsymbol{\Delta x_n . f(c_n)}}_{\substack{\text{área do } n-\text{ésimo} \\ \text{retângulo}}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\Delta x_i . f(c_i)}.$$

Esta soma é chamada de soma de Riemann da função $f(x)$.

Note que a medida que n cresce muito, cada Δx_i $(i = 1,2, \dots, n)$ torna-se muito pequeno (ou seja, quanto mais n cresce Δx_i se aproxima de zero), e a soma das áreas retangulares aproxima-se do que intuitivamente entendemos como área de S. Daí, temos a seguinte definição.

Definição 2.1: Seja $y = f(x)$ uma função contínua, não negativa em $[a, b]$. A área sob a curva $y = f(x)$, de a até b, é definida por

$$\boldsymbol{A} = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\Delta x_i . f(c_i)},$$

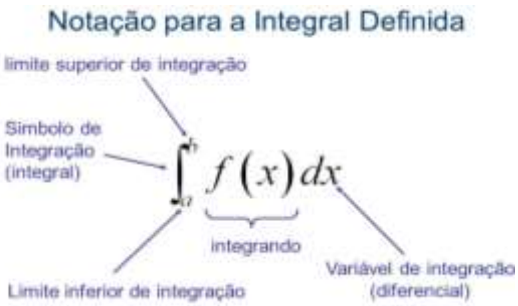
onde para cada $i = 1,2, \dots, n$, c_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$. (É possível provar que este limite existe e é um número não negativo)

A partir deste limite, temos a definição de integral definida dada a seguir.

Definição 2.2: Seja f uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$ com $a < b$, e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. A integral definida de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(t)dt$, é dada por

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(t)dt} = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\Delta x_i . f(c_i)},$$

desde que o limite do 2º membro exista.



Observação 2.1:

i. Se $\int_a^b f(t)dt$ existe, dizemos que f é integrável em $[a,b]$.

ii. Quando a função $y = f(x)$ é contínua e não negativa em $[a,b]$, a integral definida de f de a até b coincide com a área sob a curva $y = f(x)$, limitadas pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo dos x. ($A = \int_a^b f(t)dt$)

iii. Na notação $\int_a^b f(t)dt$, os números a e b são chamados limites de integração (a limite inferior e b limite superior).

iv. Se f é integrável em $[a,b]$, então $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(s)ds}$, isto é, podemos usar qualquer letra para representar a variável independente.

v. Se $a > b$, então $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt}$.

vi. Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então $\boldsymbol{\int_a^a f(t)dt = 0}$.

É importante saber quais funções são integráveis. Uma ampla classe de funções usadas no cálculo, são as funções contínuas.

Teorema 2.1: Se f é contínua sobre $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

Demonstração:

2.2. Propriedades da Integral Definida

Proposição 2.1: Se f é integrável em $[a,b]$ e k é um número real arbitrário, então $k.f$ é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b k.f(t)dt = k.\int_a^b f(t)dt$.

Demonstração: Como f é integrável em $[a,b]$, por definição:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{máx\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . f(c_i),,$$

ou seja, o limite do 2º membro existe, assim podemos escrever

$$\int_a^b k.f(t)dt = \underbrace{\lim_{máx\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . kf(c_i)}_{\substack{Def.\, de\, Integral \\ definida\, de\, k.f}} \underbrace{=}_{\substack{Prop. \\ de \\ limites}} k.\underbrace{\lim_{máx\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . f(c_i),}_{\substack{Def.\, de\, Integral \\ definida\, de\, f}} = k.\int_a^b f(t)dt.$$

■

Proposição 2.2: Se f e g são funções integráveis em $[a,b]$, então $f + g$ é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

Demonstração:

Observação 2.2: No caso de termos a diferença de funções:

$$\int_a^b [f(t) - g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt.$$

Proposição 3: Se $a < c < b$ e f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstração:

Proposição 2.4: Se f é integrável em $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Demonstração: Como $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, temos que $f(c_i) \geq 0$ para todo x em $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$, daí

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{máx\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . f(c_i) \geq 0.$$

■

Proposição 2.5: Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

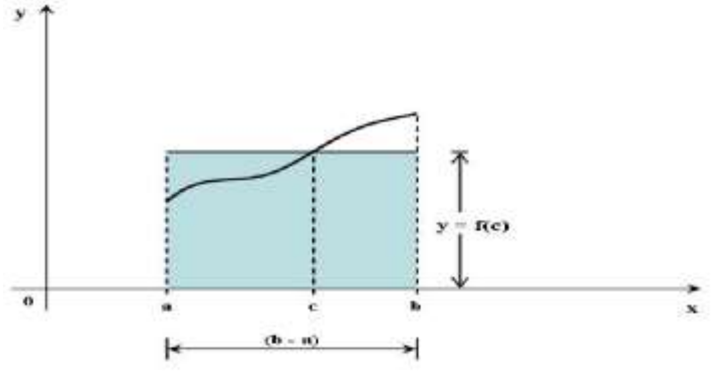
Demonstração:

Proposição 2.6: Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Demonstração:

Proposição 2.7 (Teorema do Valor Médio para Integrais): Se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe um ponto c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c).$$

	Geometricamente, este teorema nos diz que a área da região abaixo da curva $y = f(x)$, entre a e b, é igual a área do retângulo de base $b - a$ e altura $f(c)$.

Demonstração:

Proposição 2.8: Seja f é contínua sobre o intervalo $[a,b]$. Então a função $G:[a,b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

tem derivada em todos os pontos x $\in [a,b]$ que é dada por $G'(x) = f(x)$, ou seja,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Demonstração:

2.3. O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

O Teorema Fundamental do Cálculo nos permite relacionar as operações de derivação e integração. Ele nos diz que, conhecendo uma primitiva F de uma função contínua $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, podemos calcular a sua integral definida $\int_a^b f(t)dt$. Com isso, obtemos uma maneira rápida e simples de resolver inúmeros problemas que envolvem o cálculo da integral definida sem utilizar diretamente o cálculo de limites.

Teorema Fundamental do Cálculo: Se f é contínua sobre o intervalo $[a,b]$ e se F é uma primitiva de f neste intervalo, então

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(t)dt} = \boldsymbol{F(b)} - \boldsymbol{F(a)}.$$

Demonstração: Seja $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, pela **Proposição 2.8** temos que $G'(x) = f(x)$, ou seja, G é uma primitiva de f nesse intervalo.

Assim, se $F(x)$ é uma primitiva qualquer de f sobre $[a,b]$, vimos que:

$$F(x) = G(x) + C,\ \forall x \in [a,b],$$

onde C é uma constante qualquer.

Logo,

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C]$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a). \quad (I)$$

Como por hipótese $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, temos $G(b) = \int_a^b f(t)dt\ e\ G(a) = \int_a^a f(t)dt.\ (II)$

Consequentemente, de (I) e (II), obtemos

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{=0}$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

$\blacksquare$

Observação 2.3:

i) A diferença $F(b) - F(a)$ usualmente é denotada por $\boldsymbol{F(t)}\Big|_{a}^{b}$. Daí,

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(Ao calcular $F(t)\Big|_a^b$ não é necessário escrever a constante de integração em $F(t)$, pois ao fazermos a diferença $F(b) - F(a)$ elas se anularão, conforme podemos observar na demonstração do Teorema).

ii) Como $F(t)$ é uma primitiva de $f(t)$, por definição $\int f(t)dt = F(t) + C$, ou seja para determinar a integral definida, primeiro temos que encontrar a integral indefinida (e com isso a primitiva) e depois aplicamos os limites de integração a e b, e calculamos a diferença entre os valores numéricos de $F(b) e\ F(a)$.

Exemplo 2.1. Calcular as integrais definidas dadas abaixo:

a) $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$

<u>**Solução 1:**</u>

PASSO 1: Resolver a integral indefinida $\int x^3 dx$, e assim encontrar uma primitiva F de $f(x) = x^3$. Para isto, usaremos as propriedades da integral indefinida e a tabela. Temos,

$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, ou seja, uma primitiva é $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$.

PASSO 2: Calcular a integral definida $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$\int_{-1}^{2} x^3\, dx = F(2) - F(-1)$, onde $F(2) = \frac{2^4}{4} + C = 4 + C$ e $F(-1) = \frac{(-1)^4}{4} + C = \frac{1}{4} + C$,

Daí, $$\int_{-1}^{2} x^2\, dx = 4 + C - \left(\frac{1}{4} + C\right) \Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{2} x^2\, dx = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}}.$$

Podemos resolver esta integral de forma mais imediata.

<u>**Solução 2:**</u>

I) Resolvendo a integral indefinida $\int x^3 dx$, temos pela tabela,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

II) Resolvendo a integral definida $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\int_{-1}^{2} \boldsymbol{x}^3\,\boldsymbol{dx} = \left(\frac{\boldsymbol{x}^4}{\boldsymbol{4}}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{\boldsymbol{2}^4}{\boldsymbol{4}}\right) - \left(\frac{(-\boldsymbol{1})^4}{\boldsymbol{4}}\right) = \frac{\boldsymbol{16}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}} = \frac{\boldsymbol{15}}{\boldsymbol{4}}.$$

Observação: Como esta integral indefinida calculada no item (a) é imediata (resolvida apenas com a aplicação da tabela e propriedades), a solução podia ser ainda mais simplificada ainda, poderíamos colocar apenas o item II, como faremos no item (b) a seguir.

b) $\boldsymbol{\int_0^{\pi} sent\,dt}$

Solução:

$$\int_0^{\pi} sent\,dt = (-cost)\Big|_0^{\pi} = -cos\pi - (-cos0) = -(-1) + 1 = 2.$$

c) $\boldsymbol{\int_1^2 \left(3e^x + \frac{1}{4x} - \sqrt[3]{x^2}\right) dx}$

d) $\boldsymbol{\int_0^{\pi} (cosx - secx.tgx)\,dx}$

e) $\boldsymbol{\int_0^1 \left(5^t - \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\right) dt}$

3. TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

3.1. Método da Substituição ou Mudança de Variável para Integração

Algumas integrais não podem ser resolvidas diretamente pela tabela estudada, neste caso, algumas vezes depois de ser feita uma mudança de variável, a fim de encontrarmos uma integral mais simples onde possamos aplicar uma das fórmulas básicas estudadas.

Exemplo 3.1: Calcular as integrais indefinidas usando o método da substituição.

a) $\boldsymbol{\int senx.cos^2x\,dx =}$

Solução: Escolhendo $u = cosx$, temos

$$\frac{du}{dx} = -senx \Rightarrow -senxdx = du \Rightarrow senxdx = -du \Rightarrow dx = -\frac{du}{senx}.$$

Substituindo na integral dada,

$$\int senx.cos^2x\,dx = \int cos^2x.senxdx = \int u^2.senx\left(-\frac{du}{senx}\right) = -\int u^2du = -\frac{u^3}{3} + C.$$

Voltando à variável x, temos:

$$\int senx.cos^2x\,dx = -\frac{cos^3x}{3} + C.$$

b) $\int \boldsymbol{sen(3x-7)dx}$ **=I**

Solução: Fazendo $u = 3x - 7$, temos $\frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow 3dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$.

Substituindo na integral dada, obtemos:

$$I = \int senu\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int senudu = \frac{1}{3}(-cosu) + C = -\frac{1}{3}cosu + C = -\frac{1}{3}\cos\,(3x-7) + C.$$

c) $\int (\boldsymbol{t}^3.\boldsymbol{cost^4})\boldsymbol{dt} =$

Solução: Escolhendo $u = t^4$, temos $\frac{du}{dt} = 4t^3 \Rightarrow 4t^3dt = du \Rightarrow dt = \frac{du}{4t^3}$.

Substituindo na integral dada, obtemos:

$$\int (t^3.cost^4)dt = \int t^3.cosu.\frac{du}{4t^3} = \frac{1}{4}\int cosu\,du = \frac{1}{4}senu + C = \frac{1}{4}sent^4 + C.$$

Exemplo 3.2: Calcular as integrais definidas usando o método da substituição.

a) $\int_{-1}^{2}\left(\frac{x}{2+x^2}\right)\boldsymbol{dx} =$

Solução:

1º) Calculando a integral indefinida $\int \left(\frac{x}{2+x^2}\right)dx$ pelo método da substituição.

Fazendo $u = 2 + x^2$, temos $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$.

Substituindo na integral dada, obtemos:

$$\int \left(\frac{x}{2+x^2}\right)dx = \int \frac{x}{u}.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{du}{u}}_{tabela} = \frac{1}{2}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2+x^2| + C = \frac{1}{2}\ln(2+x^2) + C.$$

2º) Calculando a integral definida pelo TFC, temos:

$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{x}{2+x^2}\right)dx = \left(\frac{1}{2}\ln(2+x^2)\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}ln\,(2+2^2) - \frac{1}{2}ln(2+(-1)^2) = \frac{1}{2}ln6 - \frac{1}{2}ln3.$$

b) $\int_0^2 \frac{\boldsymbol{2e^t}}{\boldsymbol{e^t+4}}\boldsymbol{dt} = \boldsymbol{I}$

Solução:

1º) Calculando a integral indefinida $\int \frac{\boldsymbol{2e^t}}{\boldsymbol{e^t+4}}\boldsymbol{dt}$ pelo método da substituição.

Fazendo $u = e^t + 4$, temos $\frac{du}{dt} = e^t \Rightarrow e^t dt = du \Rightarrow dt = \frac{du}{e^t}$.

Substituindo na integral dada, obtemos:

$$\int \frac{2e^t}{e^t+4}dt = \int \frac{2e^t}{u}.\frac{du}{e^t} = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln\ |e^t+4| + C.$$

2º) Calculando a integral definida pelo TFC, temos

$$I = (2\ln\ |e^t+4|)\Bigg|_0^2 = 2\ln|e^2+4| - 2\ln|e^0+4| = 2\ln(e^2+4) - 2ln5.$$

IMPORTANTE: Podemos resolver a integral definida levando em consideração a substituição efetuada nos limites de integração, sem precisar calcular primeiro a integral definida. Vejamos como fica a solução do exemplo 3.2.

a) $\int_{-1}^{2} \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2+x^2}}\boldsymbol{dx} =$

Solução: Pelo Método da Substituição, fazendo $u = 2 + x^2$, temos $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$.

Note que, se $x = -1$ temos $u = 2 + (-1)^2 = 3$ e se $x = 2$ temos $u = 2 + 2^2 = 6$.

Substituindo na integral dada, obtemos:

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{2+x^2}dx = \int_3^6 \frac{x}{u}.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_3^6 \frac{du}{u} = \left(\frac{1}{2}\ln|u|\right)\Bigg|_3^6 = \frac{1}{2}ln\ |6| - \frac{1}{2}\ln\ |3| = \frac{1}{2}ln6 - \frac{1}{2}ln3.$$

b) $\int_0^2 \frac{\boldsymbol{2e^t}}{\boldsymbol{e^t+4}}\boldsymbol{dt} =$

3.2. Método de Integração por Partes

Sejam f e g funções deriváveis com derivadas f' e g' contínuas, temos:

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$\Rightarrow f(x).g'(x) = [f(x).g(x)]' - f'(x).g(x).$$

Integrando ambos os membros dessa última equação e usando as propriedades de integral indefinida já estudadas, obtemos:

$$\int f(x).g'(x)dx = \int \{[f(x).g(x)]' - f'(x).g(x)\}dx$$

$$\Rightarrow \int f(x).g'(x)dx = \underbrace{\int [f(x).g(x)]'dx}_{=f(x).g(x)} - \int f'(x).g(x)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int g(x).f'(x)dx}.(*)$$

Esta última igualdade é chamada **Fórmula de Integração por Partes.**

Neste caso, ainda não escrevemos a constante de integração, pois no decorrer do desenvolvimento de $(*)$ aparecerão outras constantes, assim, representaremos todas as constantes por uma única constante “C” que será introduzida no final do processo.

Na prática no método de Integração por Partes, costumamos fazer a seguinte mudança de variável:

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, e derivando u e v em relação à x, obtemos:

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow du = f'(x)dx \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dx} = g'(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx.$$

Agora, substituindo $u,\ v,\ du$ e dv em $(*)$, obtemos

$$\boxed{\int udv = u.v - \int vdu,}$$

que é a fórmula de integração por partes, dada em (*).

Observação 3.1: Para integrais definidas temos uma fórmula análoga:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x).g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

RESUMO: Para usar este método, temos que:

1) escolher u e dv para que a integral dada fique na forma $\int udv$ (que aparece na fórmula de Integração por partes);
2) Derivar u para determinar du;
3) Integrar dv para determinar v, pois $\int dv = v + C$;
4) Tendo $u,\ v,\ du$ e dv é só aplicar a fórmula de Integração por partes e calcular a integral.

Observação 3.2: Ao aplicar a fórmula chegamos em uma integral que em alguns casos: pode ser resolvida diretamente pela tabela, ou pelo método da substituição, ou pelo método de integração por partes novamente.

Exemplo 3.3: Calcular as integrais indefinidas usando o método de integração por partes.

a) $\int \boldsymbol{x.e^{-5x}dx} =$

<table>
<tr>
<td>

Solução: Escolhendo $u = x$ e $dv = e^{-5x}dx$. Temos:

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow \boxed{du = dx}$$

e $\quad \int dv = \int e^{-5x}dx \Rightarrow \boxed{v = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C.}$

Substituindo u e dv na integral dada, e usando a fórmula de integral por partes, obtemos:

$$\int x.e^{-5x}dx = \underbrace{\int u\,dv = u.v - \int v\,du}_{fórmula\ de\ integ.\ por\ partes}$$

$$\Rightarrow \int x.e^{-5x}dx = x.\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) - \int -\frac{1}{5}e^{-5x}dx$$

$$\Rightarrow \int x.e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}x.e^{-5x} + \frac{1}{5}\underbrace{\int e^{-5x}dx}_{Cálc.\ Auxiliar\ 1}$$

$$\Rightarrow \int x.e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}x.e^{-5x} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int x.e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}x.e^{-5x} - \frac{1}{25}e^{-5x} + C.}$$

</td>
<td>

Cálculo Auxiliar 1: $\int e^{-5x}dx$

Usaremos o Método da Substituição:

Fazendo $u = -5x$, temos

$\frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow -5dx = du \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$.

Substituindo na integral:

$\int e^{-5x}dx = \int e^{u}\left(-\frac{du}{5}\right) = -\frac{1}{5}e^{u} + C_1 = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C_1$

Observação: Ao aplicar a fórmula não usaremos a constante de integração obtida no cálculo de v, deixaremos para introduzi-la no final do processo.

</td>
</tr>
</table>

b) $\int lnx\ dx =$

<table>
<tr>
<td>

Solução: Escolhendo $u = lnx$ e $dv = dx$, temos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow x.du = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$e \qquad \int dv = \int dx \Rightarrow v = x + C_1.$

Substituindo u e dv na integral dada, e usando fórmula de integral por partes, obtemos

$$\int lnx\,dx = \underbrace{\int u\,dv = u.v - \int v\,du}_{fórmula\ de\ integ.\ por\ partes}$$

$$\Rightarrow \int lnx\,dx = lnx.\ x - \int x\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int lnx\,dx = x.lnx - x + C.}$$

</td>
<td>

Cálculo Auxiliar:

Lembre-se:

$$u = lnx$$

$$du = \frac{dx}{x}$$

$$v = x$$

$$dv = dx$$

</td>
</tr>
</table>

c) $\int x^2.e^{x}dx =$

d) $\int e^{3x} cos4x\, dx =$

Solução: Escolhendo $u = e^{3x}$ $e\ dv = cos4x\, dx$. Temos:

OBS.:Alguns cálculos estão efetuados num cálculo auxiliar dado no final da solução.

$$\frac{du}{dx} = 3.e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x}dx.$$

e

$$\int dv = \int cos4x\, dx \Rightarrow v = \frac{1}{4}sen4x + C.$$

Substituindo u e dv na integral dada e aplicando a fórmula de integração por partes, obtemos:

$$\int e^{3x} cos4x\, dx = \underbrace{\int u\, dv = u.v - \int v\, du}_{fórmula\ de\ integ.\ por\ partes} = e^{3x}.\frac{1}{4}sen4x - \int \frac{1}{4}sen4x\, .3e^{3x}dx$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} cos4x\, dx = \frac{1}{4}e^{3x}.sen4x - \frac{3}{4}\underbrace{\int e^{3x}\, sen4x\, dx}_{\substack{integral\ por\ partes\\ (resolvido\ separadamente\\ no\ cálculo\ auxiliar\ ao\ lado)}}. \qquad \text{(I)}$$

Com o cálculo auxiliar (item iv) obtemos

$$\int e^{3x} sen4x\, dx = -\frac{1}{4}e^{3x}cos4x + \frac{3}{4}\underbrace{\int e^{3x}\, cos4x\, dx.}_{voltamos\ a\ integral\ inicial} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos

$$\int e^{3x} cos4x\, dx = \frac{1}{4}e^{3x}.\, sen4x\ sen4x - \frac{3}{4}\underbrace{\left[-\frac{1}{4}e^{3x}cos4x + \frac{3}{4}\int e^{3x}.\, cos4x\, dx\right]}$$

$$\Rightarrow \underline{\int e^{3x} cos4x\, dx} = \frac{1}{4}e^{3x}.\, sen4x + \frac{3}{16}e^{3x}cos4x \underline{- \frac{9}{16}\int e^{3x}\, cos4x\, dx}$$

$$\Rightarrow \underline{\int e^{3x} cos4x\, dx + \frac{9}{16}\int e^{3x}\, cos4x\, dx} = \frac{1}{4}e^{3x}.\, sen4x + \frac{3}{16}e^{3x}cos4x + C$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{25}{16}\int e^{3x} cos4x\, dx} = \frac{1}{4}e^{3x}.\, sen4x + \frac{3}{16}e^{3x}cos4x + C$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} cos4x\, dx = \frac{16}{25}\left[\frac{1}{4}e^{3x}.\, sen4x + \frac{3}{16}\, e^{3x}cos4x + C\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\int e^{3x} cos4x\, dx = \frac{4}{25}e^{3x}.\, sen4x + \frac{3}{25}e^{3x}cos4x + C.}$$

Cálculo Auxiliar item d):

i) Se $u = e^{3x}$, temos $\frac{du}{dx} = e^{3x}.(3x)' \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^{3x}.3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3.e^{3x}$.

(usamos a Regra da Cadeia)

ii) $Se\ v = \frac{1}{4}sen4x,$ temos $\frac{dv}{dx} = cos4x\ (4x)' \Rightarrow \frac{dv}{dx} = cos4x\ .4 \Rightarrow dv = cos4x\ dx.$

iii) $\int cos4x\ dx$ (Método da Substituição)

Escolhendo $u = 4x$, temos:

$$\frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow 4dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{4}.$$

Substituindo na integral dada:

$$\int cos4x\ dx = \int cosu \frac{du}{4} =.$$

$=\frac{1}{4}\int cosu\ du = \frac{1}{4}senu + C =$

$$= \frac{1}{4}sen4x + C$$

iv) $\int e^{3x}\ sen4x\ dx$

1º) Escolhendo $u = e^{3x}\ e\ dv = sen4x\ dx$. Temos:

$$\frac{du}{dx} = e^{3x}.3 \Rightarrow du = 3e^{3x}dx.$$

e

$$\int dv = \int sen4x\ dx \Rightarrow v = -\frac{1}{4}cos4x.$$

2º) Substituindo u e dv na integral dada e aplicando a fórmula de integração por partes, temos:

$$\int e^{3x}cos4x\ dx = \underbrace{\int u\ dv = u.v\ -\ \int v\ du}_{fórmula\ de\ integ.\ por\ partes} =$$

$$= e^{3x}.\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) - \int \left(-\frac{1}{4}cos4x\right) 3e^{3x}dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int e^{3x}cos4x\ dx = -\frac{1}{4}e^{3x}cos4x + \frac{3}{4}\underbrace{\int e^{3x}\ cos4x\ dx}_{voltamos\ a\ integral\ inicial}}$$

e) $\int cos^3x\, dx =$

Solução 1: Primeiramente, note que

$\int cos^3x\, dx = \int cos^2x.\ cosx\, dx.$

Escolhendo $u = cos^2x$ e $dv = cosx\, dx$, temos:

$$\frac{du}{dx} = -2cosx.senx \Rightarrow du = -2cosx.senx\, dx$$

e

$$\int dv = \int cosx\, dx \Rightarrow v = senx.$$

Substituindo u e dv na integral dada e aplicando a fórmula de integração por partes, temos:

$$\int cos^3x\, dx = \underbrace{\int u\, dv = u.v - \int v\, du}_{fórmula\ de\ integ.\ por\ partes}$$
$$= cos^2x.senx - \int senx.(-2cosx.senx)\, dx$$
$$= cos^2x.senx + 2\underbrace{\int sen^2x.\ cosx\, dx}_{Cálculo\ Auxiliar}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int cos^3x\, dx = cos^2x.senx + 2.\frac{sen^3x}{3} + \mathrm{C}\,.}\ (I)$$

Cálculo Auxiliar (item e)):

$\int sen^2x.\ cosx\, dx$ (Método da Substituição)

Fazendo $u = senx$, temos:

$$\frac{du}{dx} = cosx \Rightarrow cosx\, dx = du.$$

Substituindo na integral, obtemos

$$\int sen^2x.\ cosx\, dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{sen^3x}{3} + C$$

Solução 2: Resolvendo a integral sem utilizar integração por partes.

Primeiramente, note que

$\int cos^3x\, dx = \int cos^2x.\ cosx\, dx = \int (1 - sen^2x).\ cosx\, dx$

$$\Rightarrow \int cos^3x\,dx = \int cosx\,dx - \int \underbrace{sen^2x.\,cosx\,dx}_{\substack{integral\ resolvida\ pelo\\ método\ da\ substituição\ (feito\\ no\ cálculo\ auxiliar\ da\ solução 1)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int cos^3x\,dx = senx - \frac{sen^3x}{3} + C}.\,(II)$$

Observação: Os resultados (I) e (II) obtidos nas soluções 1 e 2 do item e) são equivalentes.

Exemplo 3.4: Calcular as integrais definidas dadas a seguir.

a) $\int_0^1 x.e^{-5x}dx =$

Solução:

> Obs.: Não foi efetuado o cálculo desta integral, pois a mesma já foi resolvida, do contrário, deve deixar o cálculo.

1º) Calculando a integral indefinida $\int x.e^{-5x}dx$.

Vimos no item a) do exemplo 3.3 que

$$\int x.e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}x.e^{-5x} - \frac{1}{25}e^{-5x} + C.$$

2º) Calculando a integral definida pelo TFC, obtemos:

$$\int_0^1 x.e^{-5x}dx = \left(-\frac{1}{5}x.e^{-5x} - \frac{1}{25}e^{-5x}\right)\Big|_0^1$$
$$= \left(-\frac{1}{5}.1.e^{-5.1} - \frac{1}{25}e^{-5.1}\right) - \left(-\frac{1}{5}.0.e^{-5.0} - \frac{1}{25}e^{-5.0}\right) = -\frac{6}{25}e^{-5} + \frac{1}{25}.$$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} cos^3x\,dx =$

3.3. Método de Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Antes de apresentarmos o método, lembremos que uma função racional é uma função $f(x)$ definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$.

Algumas integrais de funções racionais são facilmente resolvidas, como por exemplo:

i) $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + C.$ (Tabela)

ii) $\int \frac{3x^2+2}{3x^3+6x}dx = \frac{1}{3}\ln|3x^3+6x| + C.$ (Método da Substituição)

Caso isto não aconteça, apresentaremos um procedimento sistemático para calcular a integral de qualquer função racional, onde escrevemos a função racional dada como uma soma de funções mais simples de serem integradas. Para isto, usaremos o seguinte resultado de Álgebra (que não será demonstrado).

Proposição 1: Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais, $p(x)$ pode ser expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos, todos com coeficientes reais.

Exemplo:

a) $p(x) = x^2 - 3x + 2 \iff p(x) = (x-2)(x-1)$.

b) $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1 \iff p(x) = \underbrace{(x^2+1)}_{\substack{\text{fator do 2º grau} \\ \text{irredutível, pois este} \\ \text{polinômio não possui} \\ \text{raízes reais.}}} . \quad (x-1)$.

A decomposição da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples, depende do modo de como o denominador $q(x)$ se decompõe nos fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis. Vamos considerar os vários casos separadamente. As formas das respectivas frações parciais que iremos ver são provadas por resultados de Álgebra e não serão demonstradas.

Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e se o grau de $p(x)$ é inferior ao grau de $q(x)$, então pode-se provar que $\frac{p(x)}{q(x)} = F_1 + F_2 + \ldots + F_r$, de tal forma que cada termo F_i $(i = 1,2,\ldots,r)$ da soma é uma fração e tem uma das formas

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad ou \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

para A e B reais e n inteiro não negativo, onde $ax^2 + bx + c$ é irredutível.

A soma $F_1 + F_2 + \ldots + F_r$, é a *decomposição em frações parciais* de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ e cada F_r é uma *fração parcial*.

Lembre-se que: $ax^2 + bx + c$ é irredutível se este polinômio quadrático não têm zeros reais (ou seja, $ax^2 + bx + c$ não pode expressar-se como o produto de dois polinômios do primeiro grau com coeficientes reais).

Observação 3.3:

I. Neste método, vamos considerar que o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$. Caso isto não ocorra, devemos primeiro efetuar a divisão de $p(x)$ por $q(x)$.

II. É necessário que vocês revisem: Fatoração de Polinômios; Igualdade de Polinômios; Divisão de Polinômios; Sistemas de equações lineares.

Iremos estudar inicialmente dois casos envolvendo fatores lineares, e em seguida veremos mais dois casos envolvendo fatores quadráticos:

Fatores Lineares

1º Caso: Os fatores de $q(x)$ (denominador) são lineares (1º grau) e distintos.

Neste caso, temos:

$$q(x) = (x - a_1).(x - a_2).\ \ldots\ .(x - a_n),$$

onde os a_i, $i = 1,2, \ldots, n$ são distintos dois a dois (isto é, $a_i \neq a_j$, $se\ i \neq j$). E,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n},$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são constantes que devem ser determinadas.

2º Caso: Os fatores de $q(x)$ são lineares sendo que alguns deles se repetem.

Neste caso, se um fator linear $(x - a_i)$ de $q(x)$ tem multiplicidade r (ou seja, se na decomposição de $q(x)$ aparecer o fator $(x - a_i)^r$) a esse fator corresponderá a soma de r frações parciais:

$$\frac{B_1}{(x - a_i)^r} + \frac{B_2}{(x - a_i)^{r-1}} + \frac{B_r}{(x - a_i)^{r-2}} \ldots + \frac{B_r}{(x - a_i)^2} + \frac{B_r}{(x - a_i)},$$

onde $B_1, B_2, \ldots, B_r$ são constantes que devem ser determinadas.

Observação:

- Se tivermos $(x - a_i)^2$em $q(x)$, teremos duas frações parciais referentes a este fator;
- Se tivermos $(x - a_i)^3$em $q(x)$, teremos três frações parciais referentes a este fator; e assim sucessivamente.

Fatores Quadráticos

1º Caso: Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem.

Neste caso, a cada fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$, corresponderá uma fração parcial da forma:

$$\frac{Cx + D}{x^2 + bx + c},$$

onde $C\ e\ D$ são constantes que devem ser determinadas.

Observação: Neste caso, para os fatores lineares de $q(x)$ usamos o 1º e o 2º caso onde o numerador das frações parciais é uma constante. Já para os fatores quadráticos irredutíveis o numerador será do tipo $Cx + D$, com $C\ e\ D$ constantes.

2º Caso: Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos se repetem.

Neste caso, se um fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$ tem multiplicidade r, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma:

$$\frac{C_1 x + D_1}{(x^2 + bx + c)} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{C_r x + D_r}{(x^2 + bx + c)^r},$$

onde $C_1,\ C_2, \ldots,\ C_r,\ D_1,\ D_2, \ldots,\ D_r$ são constantes que devem ser determinadas.

Observação:

- Se tivermos $(x^2 + bx + c)^2$ em $q(x)$ teremos duas frações parciais referentes a este fator;
- Se tivermos $(x^2 + bx + c)^3$em $q(x)$, teremos três frações parciais referentes a este fator; e assim sucessivamente.

EM QUALQUER UM DOS CASOS APRESENTADOS, PARA DECOMPOR UMA FUNÇÃO RACIONAL EM FRAÇÕES PARCIAIS, SEGUIMOS SEMPRE OS PASSOS DADOS ABAIXO:

1º PASSO: Fatorar o denominador do integrando em fatores do 1º e/ou 2º grau irredutíveis (Caso o mesmo não seja dado na forma fatorada);

2º PASSO: Fazer a decomposição em frações parciais, ou seja, escrever a fração do integrando como uma soma de frações mais simples de serem integradas;

3º PASSO: Encontrar os valores das constantes A, B.... usadas nas frações do 2º passo;

4º PASSO: Substituir os valores das constantes A,B.... na soma de frações encontradas no passo (2) e finalmente integrar usando as regras e métodos já estudados.

Exemplo 3.5: Calcular as integrais dadas a seguir usando o método de integração por frações parciais.

a) $\int \frac{5x}{x^2-3x+2} dx =$

Solução: Usando o método de integração por frações parciais

1º) Fatorar o denominador $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. (produto de fatores lineares distintos)

2º) Decompor em frações parciais.

$$(*) \quad \frac{5x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}, com\ A\ e\ B\ constantes\ a\ determinar.$$

3º) Encontrar os valores das constantes $A\ e\ B$

$$\frac{5x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} \underbrace{=}_{mmc} \frac{A(x - 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}$$

$$\Longrightarrow 5x = A(x - 2) + B(x - 1) \quad \Longrightarrow \quad 5x = Ax - 2A + Bx - B$$

$$\Longrightarrow 5x = (A + B)x - 2A - B$$

$$\overset{iguald.de\ polinômios}{\Longrightarrow} \begin{cases} A + B = 5 \\ -2A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -5 e\ B = 10.$$

4º) Substituir $A = -5$ e $B = 10$ em $(*)$ e integrar

$$\frac{5x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-5}{x - 1} + \frac{10}{x - 2}$$

$$\int \frac{5x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{-5}{x - 1} dx + \int \frac{10}{x - 2} dx = -5 \ln|x - 1| + 10 \ln|x - 2| + C.$$

Observação: No caso de uma integral definida com integrando desta forma, além dos cálculos já efetuados, teríamos que aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Por exemplo, se tivéssemos

$$\int_3^4 \frac{5x}{x^2 - 3x + 2} dx = \left(-5 \ln|x - 1| + 10 \ln|x - 2|\right)\Big|_3^4 = \cdots .$$

$$(concluir\ os\ cálculos!)$$

b) $\int \frac{\mathbf{3x+1}}{(\mathbf{x-1})^2(\mathbf{x+3})} \boldsymbol{dx} =$

Solução:

1º) O denominador já está na forma fatorada: $(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^2(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})$**.** (Fatores lineares, onde o fator $(x - 1)$ se repete 2 vezes).

2º) Decompondo em frações parciais temos:

$$(*) \frac{3x + 1}{(x - 1)^2(x + 3)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 3}, com\ A, B, C\ constantes.$$

3º) Encontrando os valores das constantes $A, B\ e\ C$.

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)^2(x + 3)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 3} \underset{mmc}{=} \frac{A(x - 1)(x + 3) + B(x + 3) + C(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x + 3)}$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = A(x - 1)(x + 3) + B(x + 3) + C(x - 1)^2$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = \underbrace{Ax^2 + 2Ax - 3A} + \underbrace{Bx + 3B} + \underbrace{Cx^2 - 2Cx + C}$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = (A + C)x^2 + (2A + B - 2C)x + (-3A + 3B + C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B - 2C = 3 \\ -3A + 3B + C = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = 1\ e\ C = -\frac{1}{2}.$$

4º) Substituindo $A = \frac{1}{2}, B = 1\ e\ C = -\frac{1}{2}$ em $(*)$ e integrando

$$\int \frac{3x + 1}{(x - 1)^2(x + 3)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x - 1)} dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 3} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \left(-\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln|x+3| + C.$$

(Este resultado não está na forma simplificada)

c) $\int \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x^3+x^2-4x-4}}\boldsymbol{dx} =$

Observação: Os casos em que aparecem fatores quadráticos irredutíveis na decomposição do denominador, serão estudados mais adiante.

1ª Lista de Exercícios

1- Determinar a função $f(x)$ tal que $\int f(x)dx = x^2 + \frac{1}{2}cos2x + c$.

2- Encontrar uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$, que se anule no ponto $x = 2$.

3- Sabendo que a função $f(x)$ satisfaz a igualdade

$$\int f(x)dx = senx - x.cosx - \frac{1}{2}x^2 + c, \text{ determinar } f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

4- Calcule as integrais definidas:

a) $\int_{-1}^{2} x^2(1+x^2)dx$	b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos\theta d\theta$
c) $\int_{-3}^{0}(x^2-4x+7)dx$	d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sec^2\theta d\theta$
e) $\int_{2}^{1} \frac{dx}{x^6}$	f) $\int_{1}^{3}\left(3e^x + \frac{1}{4x} - \sqrt[5]{x^3}\right)dx$
g) $\int_{-3}^{-2}(z - \frac{1}{z})^2 dz$	h) $\int_{0}^{2} \sqrt{2x}(\sqrt{x}+\sqrt{5})\,dx$
i) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{cos\theta}{sen^2\theta} d\theta$	j) $\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+t^2} dt$
k) $\int_{-2}^{5} \|2t-4\| dt$	l) $\int_{3}^{3}\left(3e^x + \frac{1}{4x} - \sqrt[5]{x^3}\right)dx$

5- Calcular as integrais usando o método da substituição:

a) $\int(2x^2+2x-3)^{10}(2x+1)dx =$	b) $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}}dx =$
c) $\int 5x.\sqrt{4-3x^2}dx =$	d) $\int(e^{2t}+2)^{\frac{1}{3}}dt$
e) $\int \frac{e^t}{e^t+4}dt =$	f) $\int e^x \cos(2e^x)\, dx =$
g) $\int \sqrt[3]{sen\theta}\, cos\theta\, d\theta =$	h) $\int \frac{1}{t\, lnt}dt =$
i) $\int sen(3x-\pi)dx =$	j) $\int x^4.e^{-x^5}dx =$
k) $\int \frac{x}{2}.cosx^2dx =$	l) $\int(e^{2x}+2)^5e^{2x} =$
m) $\int x.e^{3x^2}dx =$	n) $\int(1+e^{-at})^{\frac{3}{2}}e^{-at}dt,\ a>0$
o) $\int \frac{sen\ x}{cos^5x}dx =$	p) $\int \frac{dy}{y^2-4y+4} =$
q) $\int sec^2(5x+3)dx =$	r) $\int 8x\sqrt{1-2x^2}dx =$
s) $\int \frac{cox}{3-senx}dx =$	t) $\int(x^3-2)^{\frac{1}{7}}.x^2\, dx =$
u) $\int \frac{x}{2}\cos x^2\, dx =$	v) $\int \frac{4t\, dt}{\sqrt{4t^2+5}} =$
w) $\int\ (2x-1)^3\, dx$	x) $\int\ \frac{v^2}{(v^3-2)^2}dv$
y) $\int\ e^{2x-1}dx$	z) $\int\ \frac{lnx}{x}\ dx$

6 - Calcule as integrais por partes:

a) $\int\ te^{4t}dt$	b) $\int\ (x-1)e^{-x}\, dx$
c) $\int\ cos^3x\, dx$	d) $\int\ xsen(5x)\, dx$
e) $\int\ e^xcosx\, dx$	f) $\int\ lnx\, dx$
g) $\int\ x^2cosx\, dx$	h)

7 - Calcular as integrais abaixo utilizando o método da substituição simples. (Na solução resolva a integral indefinida associada pelo método da substituição e depois use o TFC para resolver a integral definida)

a) $\int_{-1}^{1}(2x-1)^3\, dx$	b) $\int_0^1 5x\sqrt{4-3x^2}\, dx$
c) $\int_{-1}^{0}(2x^2+2x-3)^{10}(2x+1)dx$	d) $\int_0^{\pi} sen(3x-\pi)dx$
e) $\int_{\pi/4}^{\pi} senx\, cosx\, dx$	f) $\int_{-2}^{0} \frac{v^2}{(v^3-2)^2}dv$
g) $\int_0^{\pi/2} \frac{cosx}{(1+senx)^5}dx$	h) $\int_{\pi/2}^{\pi} sen^4x\, cosx\, dx$
i) $\int_1^2 \frac{lnx}{x}\, dx$	j) $\int_{-2}^{2} e^{2x-1}dx$
k) $\int_0^1 x^4e^{-x^5}dx$	

8 – Calcule as integrais seguintes pelo método de integração por partes. (Na solução resolva a integral indefinida associada pelo método de integração por partes e depois use o TFC para resolver a integral definida)

a) $\int_0^1 te^{4t}dt$	b) $\int_{-1}^0 (x-1)e^{-x}\,dx$
c) $\int_{\pi/2}^{\pi} cos^3x\,dx$	d) $\int\ xsen(5x)\,dx$
e) $\int\ e^x cosx\,dx$	f) $\int_1^3 lnx\,dx$
g) $\int_0^{2\pi} x^2 cosx\,dx$	

9 – Calcule as integrais abaixo, utilizando o método de frações parciais:

a) $\int \frac{1}{(x-3)(x+3)}dx$	b) $\int \frac{x}{(x-3)^2}dx$
c) $\int \frac{2x^3}{x^2+x}dx$	d) $\int \frac{2x+1}{2x^2+3x-2}dx$
e) $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4}dx$	f) $\int \frac{x-1}{(x-1)^2(x-3)^2}dx$
g) $\int \frac{2x^2-25x-33}{(x+1)^2(x-5)}dx$	h) $\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}dx$

10 – Calcule as integrais dadas abaixo, e indique o método que foi utilizado:

a) $\int_1^2 \left(\frac{5x^3+7x^2-5x+2}{x^2}\right)dx$	b) $\int_0^2 x\,e^{-x^2}dx$
c) $\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$	d) $\int\ x\sqrt{2x+1}\,dx$
e) $\int \frac{5}{x^3+4x}dx$	f) $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{3y+1}}$
g) $\int_1^2 \frac{2x^3}{x^2+x}dx$	

11 – Determinar as seguintes derivadas:

a) $\frac{d}{dx}\int_2^x \sqrt{t^2+4}\,dt$	b) $\frac{d}{dt}\int_{-1}^t \frac{2x}{x^2+5}dt$

12 – Seja $F(x) = \int_2^x \sqrt{3t^2+1}\,dt$. Calcule: $F'(x),\ F'(2)\ \ e\ \ F''(2)$.

13 – Em cada um dos itens abaixo, calcular a integral da função no intervalo dado. Em seguida, esboçar o gráfico de f.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & -1 \le x < 0 \\ 5, & 0 \le x \le 1 \end{cases}; em\ [-1,1]$	b) $f(x) = 2\lvert x\rvert;\ \ em\ [-1,1]$

Gabarito (Como as questões e o gabarito foram digitadas, podem ter alguns erros de digitação tanto no enunciado, quanto no gabarito)

1) $2x - sen2x$ 3) $\frac{\pi(\sqrt{2}-2)}{8}$		
5) a) $\frac{1}{22}(2x^2 + 2x - 3)^{11} + c$ b) $\frac{5}{8}(x^2 - 1)^{\frac{4}{5}} + c$ c) $-\frac{5}{9}(4 - 3x^2)^{\frac{3}{2}} + c$		
d) $\frac{3}{8}(e^{2t} + 2)^{4/3} + c$ e) $\ln(e^t + 4) + c$ f) $\frac{1}{2}sen(2e^x) + c$ g) $\frac{3}{4}sen^{4/3}\theta + c$		
h) $\ln\|lnt\| + c$ i) $-\frac{1}{3}\cos(3x - \pi) + c$ j) $-\frac{1}{5}e^{-x^5} + c$ k) $\frac{1}{4}senx^2 + c$		
l) $\frac{1}{12}(e^{2x} + 2)^6 + c$ m) $\frac{1}{6}e^{3x^2} + c$ n) $-\frac{2}{5a}(1 + e^{-at})^{\frac{5}{2}} + c$		
o) $\frac{1}{4}sec^4x + c$ p) $\frac{1}{2-y} + c$ q) $\frac{1}{5}tg(5x + 3) + c$ r) $-\frac{4}{3}(1 - 2x^2)^{\frac{3}{2}} + c$		
s) $-\ln\|3 - senx\| + c$ t) $\frac{7}{24}(x^3 - 2)^{\frac{8}{7}} + c$ u) $\frac{1}{4}senx^2 + c$ v) $\sqrt{4t^2 + 5} + c$		
6) Falta o gabarito		
7) a) 0 b) $\frac{35}{9}$ c) 0 d) $-\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{4}$ h) $-\frac{1}{5}$ k) $\frac{e-1}{5e}$		
8) a) $\frac{3e^4+1}{16}$ b) $-e$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $-\frac{x}{5}\cos(5x) + \frac{1}{25}sen(5x) + c$ f) $3ln3 - 2$ g) 4π		
9) a) $\frac{1}{6}\ln\|x - 3\| - \frac{1}{6}\ln\|x + 3\| + c$ c) $-1 + 2ln2$ d) $\frac{2}{5}\ ln\left\|x - \frac{1}{2}\right\| + \frac{3}{5}\ln\|x + 2\| + c$ e) $\frac{1}{12}\ln\|x - 2\| + \frac{2}{3}\ln\|x + 1\| - \frac{3}{4}\ln\|x + 2\| + c$ f) $3\ln\frac{1}{2} - 3\ln\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$		
10) a) $\frac{31}{2} - 5ln2$ b) $-\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ c) $-\frac{1}{6}$ e) $\frac{5}{4}\left[\ln\|x\| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + c\right]$ f) $\frac{2}{3}$		
12) $F'(2) = \sqrt{13}$ e $F''(2) = \frac{6\sqrt{13}}{13}$	13) a) 9 b) 2	

Referência Bibliográfica: Cálculo A: funções, limite, derivação, integração - Diva Marília Flemming.

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO (Continuação)

3.4. Integração de algumas Funções envolvendo Funções Trigonométricas

Iremos estudar agora as integrais

$$\int sen^n u du,\ \int cos^n u du, \int sec^n u du, \int cosec^n u du,\ \int tg^n u du \text{ e } \int cotg^n u du,$$

onde n é um número inteiro positivo.

Nestas integrais podemos usar artifícios de cálculo com o auxílio das identidades trigonométricas, dadas abaixo, com o objetivo de preparar o integrando para a aplicação do Método da substituição estudado anteriormente.

$$sen^2 u + cos^2 u = 1 (\ sen^2 u = 1 - cos^2 u\ e\ cos^2 u = 1 - sen^2 u);$$

$$sen^2 u = \frac{1 - cos2u}{2}; \qquad cos^2 u = \frac{1 + cos2u}{2};$$

$$tg^2 u = sec^2 u - 1 \quad e \quad cotg^2 u = cosec^2 u - 1$$

Já vimos anteriormente como calcular, por exemplo, algumas das integrais abaixo, onde inicialmente preparamos o integrando utilizando as identidades trigonométricas, para aplicação do método da substituição. Estes exemplos ilustram os dois possíveis casos: n é ímpar ou n é par.

Exemplo 3.6: Calcular as integrais indefinidas:

a) $\int sen^3 x dx$

Solução: Usando as identidades trigonométricas, temos

$sen^3 x = sen^2 x. senx = (1 - cos^2 x). senx = senx - cos^2 x. senx.$

Daí,

$$\int sen^3 x dx = \int (senx - cos^2 x. senx) dx = \int senx dx - \underbrace{\int cos^2 x. senx\, dx}_{Cálc.\ Auxiliar}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^3 x dx = -cosx - \left(-\frac{cos^3 x}{3}\right) + C = -cosx + \frac{cos^3 x}{3} + C.}$$

▶ Cálculo Auxiliar item a): $\int cos^2 x. senx\, dx$. Pelo método da Substituição.

Fazendo $u = cosx$, temos $\frac{du}{dx} = -senx \Rightarrow senxdx = -du.$ Substituindo na integral dada,

$$\int cos^2 x. senx\, dx = \int u^2. (-du) = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{cos^3 x}{3} + C.$$

b) $\int sen^5 x dx$

Solução: Usando as identidades trigonométricas, temos

$sen^5x = (sen^2x)^2.senx = (1 - cos^2x)^2.senx = senx - 2cos^2x.senx + cos^4x.senx.$

Daí,

$$\int sen^5xdx = \int (senx - 2cos^2x.senx + cos^4x.senx)dx$$
$$= \int senxdx - \underbrace{2\int cos^2x.senx\,dx + \int cos^4x.senxdx}_{Cálc.\,Auxiliar}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^3xdx = -cosx - \left(-\frac{cos^3x}{3}\right) + C = -cosx + \frac{cos^3x}{3} + C.}$$

- **Cálculo Auxiliar item b):** $\int cos^2x.senx\,dx$ e $\int cos^4x.senxdx.$ Pelo método da Substituição.

Fazendo $u = cosx$, temos $\frac{du}{dx} = -senx \Rightarrow senxdx = -du.$ Substituindo na integral dada,

- $\int cos^2x.senx\,dx = \int u^2.(-du) = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{cos^3x}{3} + C.$
- $\int cos^4x.senxdx = \int u^4.(-du) = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{cos^5x}{5} + C.$

c) $\int sen^4xdx$

Solução: Usando as identidades trigonométricas, temos

$$sen^4x = (sen^2x)^2 = \left(\frac{1 - cos\,2x}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2cos2x + cos^22x}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2cos2x + \frac{1 + cos2.2x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow sen^4x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}cos4x \Rightarrow \boxed{sen^4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{8}cos4x}.$$

Daí,

$$\int sen^4xdx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{8}cos4x\right)dx = \int \frac{3}{8}dx - \int \frac{1}{2}cos2xdx + \int \frac{1}{8}cos4x\;dx$$

$$\Rightarrow \int sen^4xdx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}sen2x + \frac{1}{8}.\frac{1}{4}sen4x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^4xdx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + C.}$$

d) $\int cotg^33x\,dx$

Solução: Usando as identidades trigonométricas, temos

$cotg^3 3x = cotg^2 3x . cotg3x = (cosec^2 3x - 1). cotg3x = cosec^2 3x \,. cotg3x - cotg3x.$

Daí,

$$I = \int cotg^3 3xdx = \int (cosec^2 3x \,. cotg3x - cotg3x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int cosec^2 3x \,. cotg3xdx - \int cotg3x\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^3 xdx = -\frac{1}{6} cotg^2 3x - \frac{1}{3} ln|sen3x| + C.}$$

▶ **Cálculo Auxiliar item d):** $\int cosec^2 3x \,. cotg3xdx$.Pelo método da substituição. Fazendo $u = cotg\ 3x$ temos $\frac{du}{dx} = -cosec^2 3x.\ (3x)' \Rightarrow cosec^2 3xdx = -\frac{du}{3}$. Daí, substituindo na integral

$$\int cosec^2 3x \,. cotg3xdx = \int u.\left(-\frac{du}{3}\right) = -\frac{1}{3}.\frac{u^2}{2} + C = -\frac{1}{6} cotg^2 3x + C.$$

e) $\int tg^4 x\, dx$

Solução: Usando as identidades trigonométricas, temos

$tg^4 x = tg^2 x. tg^2 x = (sec^2 x - 1). tg^2 x = sec^2 x \,. tg^2 x - tg^2 x =$

$$= sec^2 x \,. tg^2 x - (sec^2 x - 1) = sec^2 x \,. tg^2 x - sec^2 x + 1.$$

Daí,

$$\int sen^3 xdx = \int (sec^2 x \,. tg^2 x - sec^2 x + 1)dx = \int sec^2 x \,. tg^2 xdx - \int sec^2 x\, dx + \int dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^3 xdx = \frac{1}{3} tg^3 x - tgx + x + C.}$$

Cálculo Auxiliar item e)

- $\int sec^2 x \,. tg^2 xdx$. Pelo Método da substituição fazendo $u = tgx$, temos $\frac{du}{dx} = sec^2 x \Rightarrow sec^2 x. dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{sec^2 x}$. Substituindo na integral

$$\int sec^2 x \,. tg^2 xdx. = \int sec^2 x \,. u^2.\frac{du}{sec^2 x} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3} tg^3 x + C.$$

- $\int cosec^2 3x \,. cotg3xdx$. Pelo Método da substituição fazendo $u = cotg3x$. (Concluir!)

FÓRMULAS DE REDUÇÃO OU RECORRÊNCIA: O método de integração por partes pode ser usado para obtermos as chamadas Fórmulas de Redução ou Recorrência, que servem para resolver estas integrais que acabamos de estudar. A ideia é reduzir uma integral em outra mais simples do mesmo tipo. A aplicação repetida dessas fórmulas nos levará ao cálculo da integral dada. As mais usadas são:

- (1) $\int sen^n u\, du = -\frac{1}{n} sen^{n-1} u \,.\, cosu + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2} udu$;
- (2) $\int cos^n u\, du = \frac{1}{n} cos^{n-1} u \,.\, senu + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2} udu$;
- (3) $\int sec^n u\, du = \frac{1}{n-1} sec^{n-2} u \,.\, tgu + \frac{n-2}{n-1}\int sec^{n-2} udu$;
- (4) $\int cosec^n u\, du = -\frac{1}{n-1} cosec^{n-2} u \,.\, cotgu + \frac{n-2}{n-1}\int cosec^{n-2} udu$;
- (5) $\int tg^n u\, du = \frac{1}{n-1} tg^{n-1} u - \int tg^{n-2} udu$;
- (6) $\int cotg^n u\, du = -\frac{1}{n-1} cotg^{n-1} u - \int cotg^{n-2} udu.$

Exemplo 3.7: Resolva as integrais abaixo, usando as fórmulas de recorrência:

a) $\int sen^4 xdx =$

Solução: Usando a fórmula de recorrência, temos:

$\int sen^4 xdx = -\frac{1}{4} sen^3 xcosx + \frac{3}{4}\int sen^2 xdx$

$$\Rightarrow \int sen^4 xdx = -\frac{1}{4} sen^3 xcosx + \frac{3}{4}\int \frac{1 - cos2x}{2} dx$$

$$\Rightarrow \int sen^4 xdx = -\frac{1}{4} sen^3 xcosx + \frac{3}{8}\left(\int dx - \int cos2x\, dx\right)$$

$$\Rightarrow \int sen^4 xdx = -\frac{1}{4} sen^3 xcosx + \frac{3}{8}\left(x - \frac{1}{2} sen2x\right) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int sen^4 xdx = -\frac{1}{4} sen^3 xcosx + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16} sen2x + C.}$$

Observação: Ao resolvermos esta integral no exemplo1, sem usar a fórmula de recorrência, encontramos:

$$\boxed{\int sen^4 xdx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} sen2x + \frac{1}{32} sen4x + C.}$$

No entanto, estes dois resultados são equivalentes. De fato,

$$-\frac{1}{4} sen^3 xcosx + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16} sen2x + C = -\frac{1}{4}\underbrace{sen^2 x}\,.\,\underbrace{senx.cosx} + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16} sen2x + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1-cos2x}{2}\right).\frac{sen2x}{2} + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}sen2x + C =$$

$$= -\frac{1}{16}sen2x + \frac{1}{16}\underbrace{cos2x.sen2x} + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}sen2x + C =$$

$$= -\frac{1}{16}sen2x + \frac{1}{16}.\frac{sen4x}{2} + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}sen2x + C =$$

$$= -\frac{4}{16}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + \frac{3}{8}x + C = \ \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + C.$$

Ou seja, a solução pelos dois métodos nos dá resultados equivalentes (iguais).

b) $\int cotg^3 3x\, dx$

Solução: Antes de usarmos a fórmula de recorrência, como o arco é $3x$, usaremos primeiro o método da substituição. Fazendo $u = 3x$, temos $\frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$. Daí, substituindo temos:

$$\int cotg^3 3x\, dx = \int cotg^3 u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\underbrace{\int cotg^3 u\, du}_{\substack{fórm.\ de \\ Resorrência}}$$

$$\Rightarrow \int cotg^3 3x\, dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}cotg^2 u - \int cotgudu\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}cotg^2 u - ln|senu|\right) + C$$

$$\Rightarrow \int cotg^3 3x\, dx = -\frac{1}{6}cotg^2 u - \frac{1}{3}ln\ |senu| + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int cotg^3 3x\, dx = -\frac{1}{6}cotg^2 3x - \frac{1}{3}ln|sen3x| + C}.$$

Observação: Nesta integral quando resolvemos sem usar as fórmulas, no exemplo1, chegamos exatamente no mesmo resultado.

c) $\int cos^5(2x+1)dx$

Solução: Antes de usarmos a fórmula de recorrência, como o arco é $2x+1$, usaremos primeiro o método da substituição. Fazendo $u = 2x+1$, temos $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$. Daí, substituindo temos:

$$\int cos^5(2x+1)dx = \int cos^5 u\,.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \underbrace{cos^5 u}_{fórm.\,de\,Recorrência} du$$

$$\Rightarrow \int cos^5(2x+1)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}cos^4 u\,.senu + \frac{4}{5}\int cos^3 udu\right)$$

$$\Rightarrow \int cos^5(2x+1)dx = \frac{1}{10}cos^4 u\,.senu + \frac{2}{5}\underbrace{\int cos^3 udu}_{fórm.\,de\,recorrência}$$

$$\Rightarrow \int cos^5(2x+1)dx = \frac{1}{10}cos^4u\,.senu + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}cos^2u.senu + \frac{2}{3}\int cosudu\right)$$

$$\Rightarrow \int cos^5(2x+1)dx = \frac{1}{10}cos^4u\,.senu + \frac{2}{15}cos^2u.senu + \frac{4}{15}senu + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered}\int cos^5(2x+1)dx = \frac{1}{10}cos^4(2x+1)\,.sen(2x+1) + \frac{2}{15}cos^2(2x+1)\,sen(2x+1) + \\ + \frac{4}{15}sen(2x+1) + C.\end{gathered}}$$

Observação: Usando as identidades trigonométricas, existem outras formas equivalentes de escrever este resultado.

Exercício: Usando as fórmulas de recorrência calcular a integral indefinida:

$$\int cos^6\,3x\,dx =$$

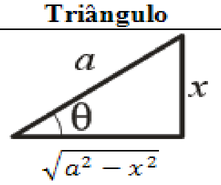
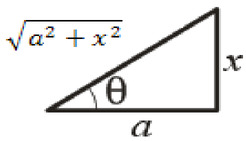
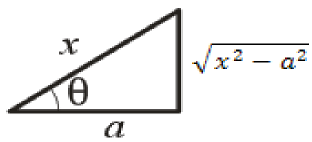
3.5. Integração por Substituição Trigonométrica

Muitas vezes, substituições trigonométricas convenientes nos levam à solução de uma integral. Se o integrando contém funções envolvendo as expressões:

$$\sqrt{a^2-x^2},\ \sqrt{x^2-a^2}\ \ ou\ \ \sqrt{a^2+x^2}\left(=\sqrt{x^2+a^2}\right),\ onde\ a>0,$$

é possível fazermos uma substituição trigonométrica adequada, a fim de resolvermos a integral.

As figuras dos triângulos retângulos abaixo nos sugerem tal substituição:

Para	Usamos	Para obter	Triângulo
Caso I $\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\,\mathrm{sen}(\theta)$	$a\cos(\theta)$	
Caso II $\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\,\mathrm{tg}(\theta)$	$a\sec(\theta)$	
Caso III $\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec(\theta)$	$a\,\mathrm{tg}(\theta)$	
http://obaricentrodamente.blogspot.com			

Vejamos:

<u>**Caso I:**</u> A função integrando envolve $\sqrt{a^2-x^2}$.

Neste caso, usamos $x = a\,sen\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a.cos\theta \Rightarrow dx = a\,cos\theta\,d\theta$. Daí, supondo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2sen^2\theta} = \sqrt{a^2\underbrace{(1 - sen^2\theta)}_{=cos^2\theta}} = \sqrt{\underbrace{a^2cos^2\theta}_{a>0\ e\ cos\theta>0}} = a.cos\theta.$$

Caso II: A função integrando envolve $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Neste caso, usamos $x = a\,sec\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a.sec\theta.tg\theta \Rightarrow dx = a\,sec\theta\,tg\theta\,d\theta$. Daí, supondo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ ou\ \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2\underbrace{(sec^2\theta - 1)}_{=tg^2\theta}} = \sqrt{\underbrace{a^2tg^2\theta}_{a>0\ e\ tg\theta>0}} = a.tg\theta.$$

Caso III: A função integrando envolve $\sqrt{x^2 + a^2}$.

Neste caso, usamos $x = a\,tg\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a.sec^2\theta \Rightarrow dx = a\,sec^2\theta\,d\theta$. Daí, supondo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2tg^2\theta + a^2} = \sqrt{a^2\underbrace{(tg^2\theta + 1)}_{=sec^2\theta}} = \sqrt{\underbrace{a^2sec^2\theta}_{a>0\ e\ sec\theta>0}} = a.sec\theta.$$

Observações:

- Ao fazermos esta substituição, o resultado da integral será dado na variável θ, então temos que escrever o resultado em termos da variável x. (Devemos ter atenção para quais valores a função está definida).
- Esta técnica é útil para eliminar radicais de certos tipos de integrando, pois como vimos, iremos transformar o integrando numa expressão trigonométrica sem radicais.

Exemplo 3.8: Calcular as seguintes integrais:

a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx = I$

Solução: Como o integrando contém $\sqrt{16 - x^2}$, que é da forma $\sqrt{a^2 - x^2},\ com\ a = 4$, fazemos

$$x = 4.sen\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 4cos\theta \Rightarrow dx = 4cos\theta d\theta.$$

Daí, para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16sen^2\theta} = \sqrt{16(1 - sen^2\theta)} = \sqrt{16cos^2\theta} = 4cos\theta$$

e

$$x^2\sqrt{16 - x^2} = (4.sen\theta)^2.\ 4cos\theta = 16sen^2\theta.4cos\theta.$$

Substituindo na integral dada, temos:

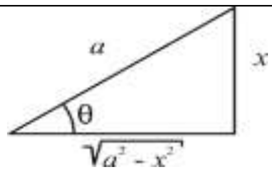
$$I = \int \frac{1}{16sen^2\theta . 4cos\theta} . 4cos\theta . d\theta = \frac{1}{16}\int cosec^2\theta d\theta = -\frac{1}{16}cotg\theta + C. \ \mathbf{(1)}$$

Devemos agora voltar a variável de integração original x. Como $x = 4sen\theta$, temos $sen\theta = \frac{x}{4}$, de onde segue que $cotg\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$. Logo, substituindo em (1), obtemos

$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C.$$

<table>
<tr><td colspan="3">Cálculo Auxiliar item a): Como $sen\theta = \frac{x}{4}$, usando a identidade trigonométrica $cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$,temos:

$$cos^2\theta = 1 - \frac{x^2}{16} \Rightarrow cos^2\theta = \frac{16-x^2}{16} \Rightarrow cos\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}.$$
$(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, logo cos θ é positivo)

Daí, $cotg\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta} = \frac{\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}}{\frac{x}{4}} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$.</td></tr>
<tr><td>Para encontrar $cotg\theta$, poderíamos apenas observar a figura ao lado e usar os conceitos de trigonometria.</td><td></td><td>$cotg\theta = \frac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$</td></tr>
</table>

Observação: Alguns livros ao voltarmos para a variável inicial x, usamos apenas as definições de funções trigonométricas inversas. Assim, neste exemplo, como $x = 4sen\theta$, temos $sen\theta = \frac{x}{4} \Rightarrow \theta = arc\ sen\left(\frac{x}{a}\right)$. Logo,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx = -\frac{1}{16}cotg\left(arc\ sen\left(\frac{x}{4}\right)\right) + C.$$

b) $\int x^3\sqrt{x^2+3}dx$

Solução: Como o integrando contém $\sqrt{x^2+3}$, que é da forma $\sqrt{x^2+a^2}$, $com\ a = \sqrt{3}$, fazemos

$$x = \sqrt{3}.tg\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{3}sec^2\theta \ \Rightarrow dx = \sqrt{3}\ sec^2\theta d\theta. \qquad (*1)$$

Daí, para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos:

$$x^3.\sqrt{x^2+3} = (\sqrt{3}.tg\theta)^3.\sqrt{(\sqrt{3}.tg\theta)^2+3} = 3\sqrt{3}.tg^3\theta.\sqrt{3tg^2\theta+3} =$$

$$= 3\sqrt{3}.tg^3\theta\sqrt{3(tg^2\theta+1)} = 3\sqrt{3}.tg^3\theta.\sqrt{3sec^2\theta} = 3\sqrt{3}.tg^3\theta.\sqrt{3}sec\theta =$$

$$= 9.tg^3\theta.sec\theta. \qquad (*2)$$

Substituindo (*1) e (*2) na integral dada, temos:

$$\int x^{3\sqrt{x^2+3}}dx = 9.\int tg^3\theta.sec\theta\sqrt{3}sec^2\theta d\theta =$$

$$= 9\sqrt{3}\int (sec^2\theta - 1).tg\theta.sec\theta.sec^2\theta\, d\theta =$$

$$= 9\sqrt{3}\int tg\theta.sec\theta.sec^4\theta\, d\theta - 9\sqrt{3}\int tg\theta.sec\theta sec^2\theta d\theta =$$

$$= 9\sqrt{3}.\frac{sec^5\theta}{5} - 9\sqrt{3}.\frac{sec^3\theta}{3} + C = \frac{9\sqrt{3}}{5}.sec^5\theta - 3\sqrt{3}.sec^3\theta + C.$$

Voltando a variável de integração original x. Como $x = \sqrt{3}.tg\theta \Rightarrow tg\theta = \frac{x}{\sqrt{3}}$, temos

$$sec^2\theta = 1 + \frac{x^2}{3} \Rightarrow sec^2\theta = \frac{3+x^2}{3} \Rightarrow sec\theta = \sqrt{\frac{x^2+3}{3}}.$$

$(sec\theta > 0\ em\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$. Logo,

$$\int x^3\sqrt{x^2+3}dx = \frac{9\sqrt{3}}{5}.\left(\sqrt{\frac{x^2+3}{3}}\right)^5 - 3\sqrt{3}.\left(\sqrt{\frac{x^2+3}{3}}\right)^3 + C$$
$$= \frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2+3}\right)^5 - \left(\sqrt{x^2+3}\right)^3 + C.$$

Observação: No item (b) para voltar a variável x, também poderíamos ter usado o triangulo retângulo, como no exemplo anterior. Além disso, se usarmos a função inversa, como $x = \sqrt{3}.tg\theta$ temos

$tg\theta = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right).$

Logo,

$$\int x^3\sqrt{x^2+3}dx = \frac{9\sqrt{3}}{5}.sec^5\left(arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right) - 3\sqrt{3}.sec^3\left(arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$$

Cálculo Auxiliar item b):

i) $\int sec^2\theta.tg\theta.sec\theta\, d\theta$. Pelo método da substituição, fazendo $u = sec\theta$, temos:

$\frac{du}{d\theta} = sec\theta.tg\theta \Rightarrow sec\theta.tg\theta\, d\theta = du$. Daí,

$$\int sec^2\theta.tg\theta.sec\theta\, d\theta = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{sec^3\theta}{3} + C.$$

ii) $\int tg\theta.sec\theta\, d\theta = \int \frac{sen\theta}{cos^2\theta} d\theta$. Pelo método da substituição, fazendo $u = cos\theta$, temos: $\frac{du}{d\theta} = -sen\theta \Rightarrow sen\theta\, d\theta = -du$. Daí,

$$\int tg\theta.sec\theta\, d\theta = \int -\frac{du}{u^2} = -\int u^{-2}\, du = -\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + C = \frac{1}{cos\theta} + C = sec\theta + C.$$

c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}}$

Solução: Como o integrando contém $\sqrt{x^2-5}$, que é da forma $\sqrt{x^2-a^2}$, $com\ a = \sqrt{5}$, fazemos

$$x = \sqrt{5}.sec\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{5}sec\theta.tg\theta \Rightarrow dx = \sqrt{5}\, sec\theta.tg\theta d\theta.$$

Daí, para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$x^2\sqrt{x^2-5} = (\sqrt{5}.sec\theta)^2\sqrt{(\sqrt{5}.sec\theta)^2 - 5} = 5.sec^2\theta\sqrt{5(sec^2\theta - 1)}$$
$$= 5.sec^2\theta.\sqrt{5\, tg^2\theta} = 5sec^2\theta.\sqrt{5}.tg\theta.$$

Substituindo na integral dada, temos:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{\sqrt{5}\, sec\theta.tg\theta d\theta}{5sec^2\theta.\sqrt{5}.tg\theta} = \int \frac{d\theta}{5sec\theta} = \frac{1}{5}\int cos\theta d\theta = \frac{1}{5}sen\theta + C.$$

Voltando à variável x. Como $x = \sqrt{5}.sec\theta$, temos:

$$sec\theta = \frac{x}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{5}} \Rightarrow cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{x}.$$

Daí, como $sen^2\theta = 1 - cos^2\theta \Rightarrow sen^2\theta = 1 - \frac{5}{x^2} \Rightarrow sen^2\theta = \frac{x^2-5}{x^2} \Rightarrow sen\theta = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}$.

Logo,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}} = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2-5}}{x} + C.$$

Observação: Ao voltarmos para a variável x, podemos apenas fazer:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}} = \frac{1}{5} sen\left(arcsec\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right) + C.$$

3.6. Integração de Funções Envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes.

Na resolução deste tipo de integral geralmente utilizamos as identidades trigonométricas:

$$sena.cosb = \frac{1}{2}[sen(a+b) + sen(a-b)];$$

$$sena.senb = \frac{1}{2}[cos(a-b) - cos(a+b)];$$

$$cosa.cosb = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b);$$

onde a e b são dois inteiros quaisquer.

Exemplo 3.9: Resolva as seguintes integrais

a) $\int_{-\pi}^{\pi} sen2x\, cos5x\, dx$

Solução: Temos:

$$sen2x\, cos5x = \frac{1}{2}[sen(2x+5x) + sen(2x-5x)]$$

$$\Rightarrow sen2x\, cos5x = \frac{1}{2}[sen(7x) + sen(-3x)].$$

Resolvendo a integral indefinida

$$\int sen2x\, cos5x\, dx = \int \frac{1}{2}[sen(7x) + sen(-3x)]dx$$

$$\Rightarrow \int sen2x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int sen7xdx + \int \underbrace{sen(-3x)}_{\substack{função \\ ímpar}} dx\right]$$

$$\Rightarrow \int sen2x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int sen7xdx - \int \underbrace{sen(3x)}_{\substack{função \\ ímpar}} dx\right]$$

$$\Rightarrow \int sen2x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7x) - \left(-\frac{1}{3}cos(3x)\right)\right] + \mathrm{C}$$

$$\Rightarrow \int sen2x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7x) + \frac{1}{3}cos(3x)\right] + C.$$

Resolvendo a integral definida pelo TFC:

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen2x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7x) + \frac{1}{3}cos(3x)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7\pi) + \frac{1}{3}cos(3\pi)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos\big(7(-\pi)\big) + \frac{1}{3}\underbrace{cos\big(3(-\pi)\big)}_{função\ par}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7\pi) + \frac{1}{3}cos(3\pi)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}cos(7\pi) + \frac{1}{3}cos(3\pi)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}\times(-1) + \frac{1}{3}\times(-1)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}\times(-1) + \frac{1}{3}\times(-1)\right] =$$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right]$-$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right] = 0.$

a) b)$\int_{-\pi}^{\pi} cos2x\, cos3x\, dx$

Solução: Temos:

$$cos2x.cos3x = \frac{1}{2}[cos(2x+3x) + cos(2x-3x)]$$

$$\Rightarrow cos2x.cos3x = \frac{1}{2}[cos(5x) + cos(-x)].$$

Resolvendo a integral indefinida $\int cos2xcos3x\, dx = I$, temos

$$I = \int \frac{1}{2}[cos(5x) + cos(-x)]\, dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[\int cos(5x)\, dx + \int cos(-x)dx\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}sen(5x) + [-sen(-x)]\right\} + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}sen(5x) - sen(-x)\right\} + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{10}sen(5x) - \frac{1}{2}sen(-x) + C.$$

Usando o TFC, temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos2x\, cos3x\, dx = = \left[\frac{1}{10}sen(5x) - \frac{1}{2}sen(-x)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{1}{10}\underbrace{sen(5\pi)}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{sen(-\pi)}_{=0}\right] - \left[\frac{1}{10}\underbrace{sen(-5\pi)}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{sen(\pi)}_{=0}\right] = 0$$

2ª Lista de Exercícios (Unidade I)

1 – Calcular as integrais indefinidas:

a) $\int sen5x\ cos3x\ dx$	b) $\int 15sen^2x.cos^3xdx$
c) $\int sen^3 2\theta\ cos^4 2\theta\ d\theta$	d) $\int tg^2(5x)dx$
e) $\int sen(\omega t)sen(\omega t+\theta)dt$	f) $\int cosec^4(3-2x)dx$
g) $\int 2xsen^4(x^2-1)dx$	h) $\int cos^5(3-3x)dx$
i) $\int \cos(5x)\cos(8x)\,dx$	j) $\int tg^3x\ cos^4x\ dx$
k) $\int sen^3(2x+1)dx$	l) $\int sen^{19}(t-1)\cos(t-1)\,dt$
m) $\int sec^3(1-4x)dx$	n) $\int 15sen^5xdx$
o) $\int \frac{x^3dx}{(x^2+2)^2}$	p) $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$

2 – Calcular as integrais por substituição trigonométrica:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx$	b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}}$
c) $\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx$	d) $\int \sqrt{4-x^2}dx$
e) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}dx$	f) $\int \sqrt{4+x^2}dx$

3 – Calcular as integrais definidas:

a) $\int_1^2 \frac{dt}{t^4\sqrt{4+t^2}}$	b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$

GABARITO

Q 1) a) $-\frac{1}{14}cos7x-\frac{1}{4}cos2x+C$	b) $5sen^3x-3sen^5x+C$		
c)$-\frac{1}{10}cos^5 2\theta+\frac{1}{14}cos^7 2\theta+C$	d) $\frac{1}{5}tg5x-x+C$		
e) $\frac{1}{2}tcos\theta-\frac{1}{4w}sen(2wt+\theta)+C$	f) $\frac{1}{2}cotg(3-2x)+\frac{1}{6}cotg^3(3-2x)+C$		
g) $-\frac{1}{4}sen3(x^2-1)\cos(x^2-1)-\frac{3}{8}sen(x^2-1)\cos(x^2-1)+\frac{3}{8}(x^2-1)+C$			
h)$-\frac{1}{3}sen(3-3x)+\frac{2}{9}sen^3(3-3x)-\frac{1}{15}sen^{15}(3-3x)+C$	i)$\frac{1}{26}sen13x+\frac{1}{6}sen3x+C$		
j) $\frac{1}{4}sen^4x+C$	k)$-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}cos^3(2x+1)+C$	l)$\frac{1}{20}sen^{20}(t-1)+C$	
m)$-\frac{1}{8}\sec(1-4x)tg(1-4x)-\frac{1}{8}\ln\lvert\sec(1-4x)+tg(1-4x)\rvert+C$			
n) $-15cosx+10cos3x-3cos^5x+C$			
o) $\frac{1}{2}\ln(x2+2)+\frac{1}{x^2+2}+C$	p) $\frac{-x-2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}arc\ tg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$		
Q 2) a)$ln\left\lvert\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{x}{2}\right\rvert+C$	b)$\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}+C$	c)$\frac{1}{2}ln\left\lvert\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right\rvert+C$	d) $2arcsen\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C$
e) $\left(\frac{1}{3}x^2+6\right)\sqrt{x^2-9}+C$	f) $\frac{x\sqrt{4+x^2}}{2}+2\ln\left\lvert\sqrt{4+x^2}+x\right\rvert+C$		
Q3)a)$\frac{1}{48}(\sqrt{2}+2\sqrt{5})$	b)$\frac{1}{\sqrt{3}}ln\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$		

Observação: As questões retiradas do livro Cálculo A.

Agora que já estudamos as integrais por substituição trigonométricas, podemos voltar as integrais por frações parciais nas quais os fatores lineares do denominador são fatores quadráticos irredutíveis, e resolver exemplos.

- Exemplo: (Frações parciais) Calcular a integral $\int \frac{2x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}dx$.

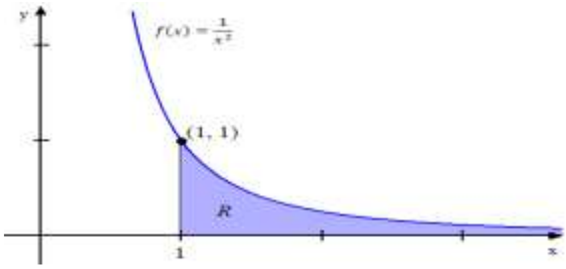
4. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS (RESUMO)

Até agora, estudamos a integral definida de uma função contínua em um determinado intervalo fechado $[a, b]$. Ou seja, foi preciso que nossas integrais definidas tivessem duas propriedades:

- 1ª) que o domínio da integração de a a b, fosse finito;
- 2ª) que a imagem do integrando fosse finita nesse domínio.

Entretanto, na prática nós frequentemente encontramos problemas que fazem com que não se cumpram uma ou as duas condições. Nestes casos, temos o que chamamos de integrais impróprias.

Em diversas aplicações, especialmente em estatística, é necessário por exemplo, considerar a área de uma região que se estende indefinidamente para a direita ou para a esquerda ao longo do eixo x.



4.1. Integrais Impróprias com limites de integração infinitos

Definição 4.1: Integrais com limites infinitos de integração são integrais impróprias. Assim,

1) Se f é contínua para todo $x \geq a$, ou seja, se f é contínua em $[a, +\infty)$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.1)$$

2) Se f é contínua para todo $x \leq b$, ou seja, se f é contínua em $(-\infty, b]$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.2)$$

3) Se f é contínua para todo x, ou seja, se f é contínua em $(-\infty, +\infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \qquad (4.3)$$

onde c é um número real qualquer.

Observação:

i. Em (4.1) e (4.2) se o limite existe e é finito, a integral imprópria converge e o limite é o valor da integral imprópria. Caso contrário, dizemos que a integral imprópria diverge.
ii. Em (4.3), a integral do lado esquerdo converge se as duas integrais do lado direito também forem convergentes. Se isso não ocorre a integral diverge e não tem valor.

iii. Em (4.3) tomando $c = 0$ e usando (4.1) e (4.2), temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx} = \lim_{\boldsymbol{a}\to-\infty} \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{0}} \boldsymbol{f(x)dx} + \lim_{\boldsymbol{b}\to+\infty} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx}.$$

Logo, podemos escrever o item 3) da definição 4.1 dada acima, da seguinte forma:

"Se f é contínua para todo x, ou seja, se f é contínua em $(-\infty, +\infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx} = \lim_{\boldsymbol{a}\to-\infty} \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{0}} \boldsymbol{f(x)dx} + \lim_{\boldsymbol{b}\to+\infty} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx}."$$

Exemplo 4.1: Verifique se as integrais impróprias abaixo convergem ou divergem.

a) $\boldsymbol{I = \int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}}$**.**

Solução: Por definição $I = \lim_{a\to-\infty} \int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$.

- Calculando a integral indefinida $\int \frac{dx}{(4-x)^2}$.

Pelo Método da substituição, fazendo $u = 4 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$. Daí,

$$\int \boldsymbol{\frac{dx}{(4-x)^2}} = \int -\boldsymbol{\frac{du}{u^2}} = -\int \boldsymbol{u^{-2}du} = -\boldsymbol{\frac{u^{-1}}{(-1)}} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{\frac{1}{4-x}} + \boldsymbol{C}.$$

- Calculando a integral definida $\int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$, pelo TFC:

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{\frac{dx}{(4-x)^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4-x}}\bigg]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\frac{1}{4-a}}.$$

- Calculando a integral imprópria:

$$\boldsymbol{I} = \lim_{\boldsymbol{a}\to-\infty} \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{\frac{dx}{(4-x)^2}} = \lim_{\boldsymbol{a}\to-\infty} \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\frac{1}{4-a}}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}.$$

Logo, a integral imprópria converge.

b) I $= \boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3}}$**.**

Solução: Por definição $I = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+3} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+3}$.

- Calculando a integral indefinida $\int \frac{dx}{x^2+3}$. Pela tabela das integrais:

$$\int \boldsymbol{\frac{dx}{x^2+3}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}} + \boldsymbol{C}.$$

- Calculando as integrais definidas pelo TFC:

$$\int_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}\bigg]_{a}^{0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \underbrace{arctg\ 0}_{=0} - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{a}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

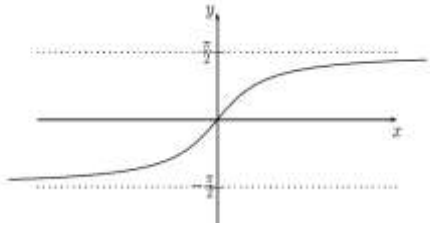
e

$$\int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}\bigg]_{0}^{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{b}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \underbrace{arctg 0}_{=0} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

- Calculando a integral imprópria:

$$I = \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Logo, a integral imprópria converge.



c) $\mathbf{I} = \int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{senxdx}.$

Solução: Por definição $I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b senx\ dx$.

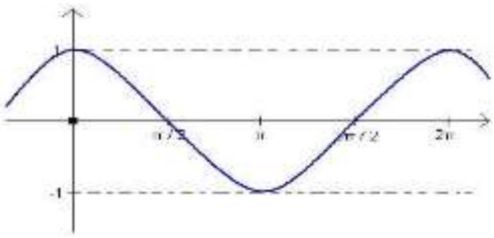
- Calculando a integral definida $\int_0^b senx\ dx$, pelo TFC:

$$\int_{0}^{b} senx\ dx = -cosx]_{0}^{b} = -cosb - (-\cos 0) = -\cos b + 1.$$

- Calculando a integral imprópria:

$I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b senx\ dx = \lim_{b\to+\infty} (-\cos b + 1)$, e este limite não existe, pois quando $b \to +\infty$, $\cos b$ oscila entre -1 e 1.

Logo, a integral imprópria diverge.



Exemplo 4.2: Para quais valores de p a integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge? Quando a integral converge, qual é o seu valor?(Exercício)

Teorema 4.1: Sejam f e g funções contínuas em $[a,+\infty)$ tais que $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,+\infty)$

i) Se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ também converge.

ii) Se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge, então $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ também diverge.

Exemplo 4.3. Mostre que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$ converge.

Exemplo 4.4. Mostre que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}dx$ diverge.

4.2. Integrais impróprias com integrandos infinitos

Definição4.2: Integrais de funções que se tornam infinitas em um ponto dentro do intervalo de integração são integrais impróprias.

1) Se f é contínua em $(a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to a^+} \int_r^b f(x)dx. \qquad (4.4)$$

2) Se f é contínua em $[a,b)$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s\to b^-} \int_a^s f(x)dx. \qquad (4.5)$$

3) Se f é contínua em $[a,c) \cup (c,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (4.6)$$

Observação:

i. Em (4.4) e (4.5) se o limite é finito, a integral imprópria converge e o limite é o valor da integral imprópria. Caso contrário, a integral imprópria diverge.
ii. Em (4.6), a integral do lado esquerdo converge se as duas integrais do lado direito também forem convergentes. Se isso não ocorre a integral diverge e não tem valor.
iii. Usando (4.4) e (4.5), podemos escrever a equação (4.6) da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s\to c^-} \int_a^s f(x)dx + \lim_{r\to c^+} \int_r^b f(x)dx.$$

Exemplo 4.5: Verifique a convergência das integrais abaixo.

a) $\int_1^2 \frac{1}{2-x}dx$

Solução: O integrando $f(x) = \frac{1}{2-x}$ é contínuo em $[1,2)$, mais se torna infinito quando $x \to 2$. Daí,

$$\int_1^2 \frac{1}{2-x}\,dx = \overbrace{\lim_{s\to 2^-}\int_1^s \frac{1}{2-x}\,dx}^{Cálc\ Auxiliar} = \lim_{s\to 2^-}(-\ln\ |2-x|)]_1^s$$
$$= \lim_{s\to 2^-}(-\ln|2-s| + \ln|2-1|) = \lim_{s\to 2^-}(-\ln|2-s| + 0) = \infty.$$

Portanto, a integral diverge.

b)$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}$

Solução: O integrando $f(x) = \frac{1}{(x-2)^{2/3}}$ é contínuo em $[0,2) \cup (2,3]$, mais se torna infinito quando $x \to 2$. Daí,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}.$$

Onde:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{s\to 2^-}\int_0^s \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{s\to 2^-}\left[3.(x-2)^{1/3}\right]\Big|_0^s$$
$$= \lim_{s\to 2^-}\left[3.(s-2)^{1/3} - 3.(0-2)^{1/3}\right] = -3.(-2)^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{2}.$$

e

$$\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{r\to 2^+}\int_r^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}(x)dx = \lim_{r\to 2^+}\left[3.(x-2)^{1/3}\right]\Big|_r^3$$
$$= \lim_{r\to 2^+}\left[3.(3-2)^{1/3} - 3.(r-2)^{1/3}\right] = 3.$$

Daí,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 3\sqrt[3]{2} + 3.$$

Logo, a integral converge.

Cálculo auxiliar:

Item a) $\int \frac{1}{2-x}\,dx$. Pelo Método da substituição, fazendo $u = 2-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$. Daí,

$$\int \frac{1}{u}(-du) = -\int \frac{du}{u} = -\ln|2-x| + C.$$

Item b) $\int \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}$. Pelo Método da substituição, fazendo $u = x-2 \Rightarrow du = dx$. Daí,

$$\int \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \int \frac{du}{u^{2/3}} = \int u^{-2/3}du = \frac{u^{1/3}}{1/3} + C = 3.(x-2)^{1/3} + C.$$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

d) $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}$

e) $\int_0^\infty e^x dx$

f) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

Teorema 4.2: Sejam f e g funções contínuas em $(a,b]$ tais que $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in (a,b]$.

i) Se $\int_a^b g(x)dx$ converge, então $\int_a^b f(x)dx$ também converge.

ii) Se $\int_a^b f(x)dx$ diverge, então $\int_a^b g(x)dx$ também diverge.

Exemplo 4.6. Mostre que a integral imprópria $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ converge.

Exemplo 4.7. Mostre que a integral imprópria $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ diverge.

4.4 Aplicando as integrais impróprias no cálculo de áreas

Exemplo 4.6: Encontrar a área sob o gráfico da curva $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \ para\ x \geq 1$. Represente-a graficamente.

Exemplo 4.8: É possível encontrar um número finito que represente a área da região abaixo da curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, no intervalo (0,16].

1ª Lista de Exercícios – Unidade II

1. Investigar as integrais impróprias seguintes: (Verificar se converge ou diverge)

a) $\int_{-\infty}^0 e^{2x+1}dx$	b) $\int_{-\infty}^0 x.e^{-x^2}dx$	c) $\int_7^{+\infty} \frac{1}{(x-5)^2}dx$
d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$	e) $\int_e^\infty \frac{dx}{xln^3x}dx$	f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^3}{(x^4+3)^2}dx$
g) $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{3-2e^x}dx$	h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$	i) $\int_1^{+\infty} re^{-rx}dx, \quad r > 0$

2. Encontrar a área sob o gráfico da curva $y = \frac{2}{\sqrt{x}}, \ para\ x \geq 1$. Represente-a graficamente.
3. Seja $a > 0$. Mostre que a integral imprópria $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Gabarito

Q1) a)$\frac{1}{2}$;conv	b)$-\frac{1}{2}$; converge	c) $\frac{1}{7}$; converg	d) $diverge$	e) $\frac{1}{2}$; converge	$g)\frac{log3}{2}$;converg	h)-2 converg e	i) diverg e

Referências:
FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. Cálculo A. Editora McGraw Hill.
CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.

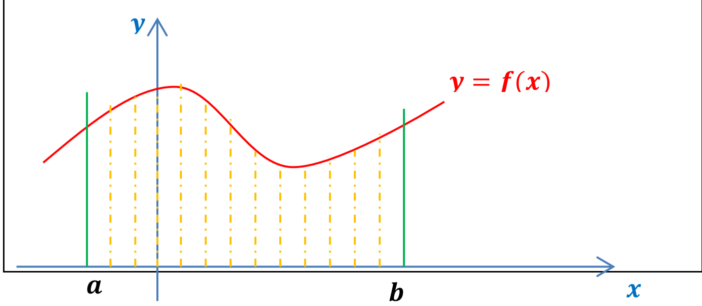
4. ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA (RESUMO)

4.1. Cálculo de Áreas

Conforme vimos ao definir integral definida, o cálculo de áreas de figuras planas pode ser feito por integração. Além disso, vimos que se a função f é contínua e não negativa em $[a, b]$, a definição de integral definida coincide com a definição de área dada nas aulas anteriores. Ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é a área da região sob o gráfico de f de a até b.

Iremos estudar os seguintes casos:

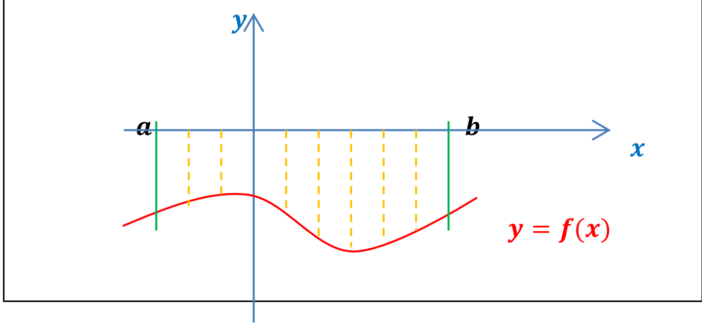
<u>Caso 1:</u> Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.



Neste caso,

$\boldsymbol{A = \int_a^b f(x)dx}$.

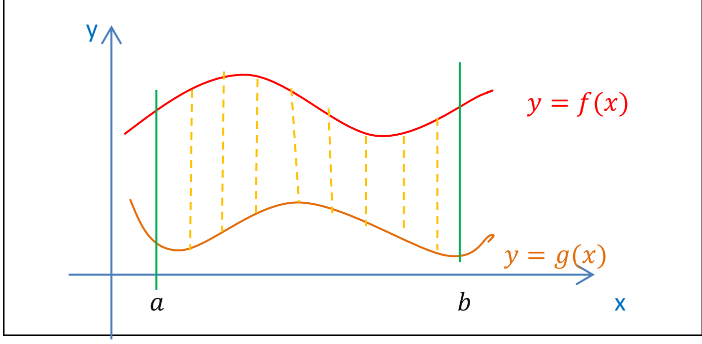
<u>Caso 2:</u> Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$.



Neste caso, basta tomar o módulo da integral $\int_a^b f(x)dx$, ou seja,

$$\boldsymbol{A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|}.$$

<u>Caso 3:</u> Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$.



Neste caso, temos:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx}.$$

Exemplo 5.1: Encontre a área da região limitada pela curva $y = 9 - x^2$ e o eixo dos x.

Solução: Calculando os pontos onde a curva intercepta o eixo dos x (que são os pontos cuja ordenada y é igual a zero), temos:

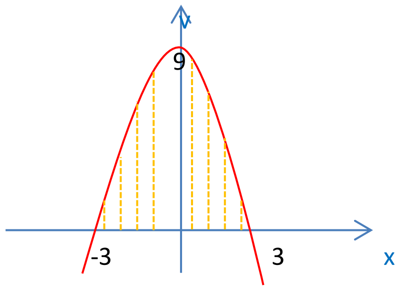
$$\boldsymbol{9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 3\ e\ x = -3}.$$

Note que no intervalo $[-3,3]$, temos $y = 9 - x^2 \geq 0$. Logo, a área procurada é a área sob o gráfico de $y = 9 - x^2$ de -3 até 3, ou seja,

$$\boldsymbol{A = \int_{-3}^{3}(9 - x^2)dx \overset{TFC}{\triangleq} \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3}} =$$

$$= \boldsymbol{(27 - 9) - (-27 + 9) = 18 + 18 = 36\ \underbrace{u.a}_{\substack{unidades \\ de\ área}}}\ .$$

Gráfico:



Exemplo 5.2: Encontre a área limitada pela curva $y = -9 + x^2$ e o eixo dos x.

Exemplo 5.3: Encontre a área da região limitada pelas curvas

a) $y = x^2 - 1$ e $y = 3x + 3$.

b) $y = sen x\ e\ y = -sen x,\ \ x \in [0,2\pi]$.

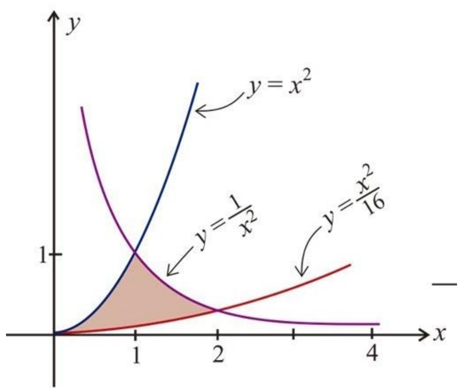
c) b) $x = \frac{1}{2},\ \ x = \sqrt{y}\ \ e\ y = -x + 2$.

Observação 5.1: Também podemos calcular a área em cada um dos três casos estudados, usando a integral em relação à variável y.

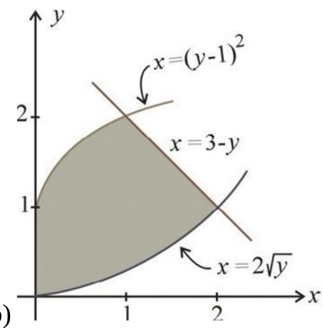
Exemplo 5.4: Encontrar a área da região limitada pelas curvas $x = -y\ e\ x = 2 - y^2$.

Solução: Iremos resolver este problema usando a integral definida com relação a variável y e depois, com relação à variável x, e veremos que a área é exatamente a mesma.

Exemplo 5.5. Encontre a área da região de cada uma das figuras dadas abaixo:



a)

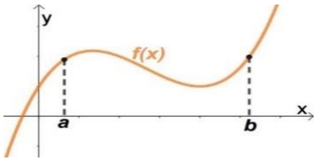


b)

Observação 5.2: quando a região é delimitada por mais de dois gráficos, o cálculo da área que desejamos encontrar é a soma de duas ou mais áreas, sendo cada uma delas compreendida entre os gráficos de duas funções.

4.2. Comprimento de Arco de uma Curva Plana usando a sua Equação Cartesiana

A representação gráfica de uma função contínua $y = f(x)$ num intervalo $[a, b]$, pode ser um segmento de reta ou uma curva qualquer. A porção da curva do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é chamada de arco.



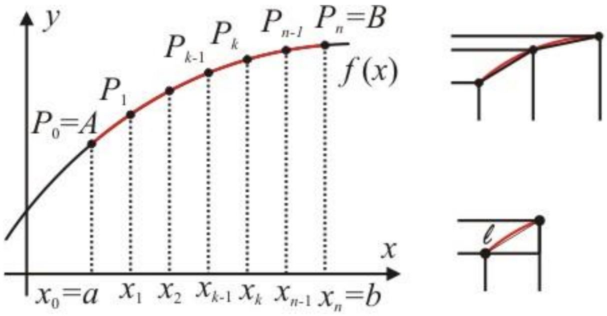
Vejamos agora, como aplicar a integral para determinar um número s, que intuitivamente, entendemos ser o comprimento desse arco.

Seja C a curva gráfico da função $y = f(x)$, onde $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com f' contínua em $[a, b]$. Queremos determinar o comprimento do arco da curva C, de A até B.

Para isto, seja P uma partição de $[a, b]$, dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Sejam $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ os correspondentes pontos sobre a curva C. Unindo os pontos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$, obtemos uma poligonal, cujo comprimento nos dá uma aproximação do comprimento do arco da curva C, de A até B.



Assim, o comprimento da poligonal, denotado por I_n, é dado por:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \quad (1)$$

Como f é derivável em $[a, b]$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2, \ldots, n$. Ou seja, para cada $i = 1,2, \ldots, n$, existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i).(x_i - x_{i-1}). \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f'(c_i).(x_i - x_{i-1})\right)^2}$$

$$\Rightarrow I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left[1 + \left(f'(c_i)\right)^2\right]}$$

$$\Rightarrow I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}\,.\Delta x_i, \quad (3)$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

A soma que aparece em (3) é uma soma de Riemann da função $g(x) = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$.

Podemos observar que a medida que n cresce muito e cada Δx_i, $i = 1,2, \ldots, n$, torna-se muito pequeno, I_n se aproxima do que intuitivamente entendemos como o comprimento da curva C, de A até B. A partir daí, temos a seguinte definição.

Definição: Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, onde f é uma função contínua e derivável em $[a, b]$. O comprimento da curva C, do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$, que denotamos por s, é dado por

$$s = \lim_{máx\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2} \,.\, \Delta x_i \qquad (4)$$

se o limite a direita existir.

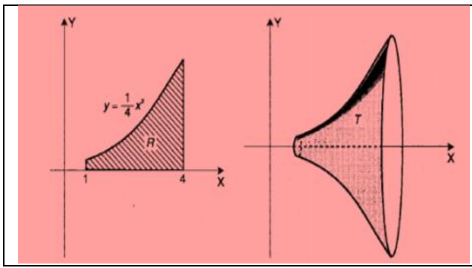
Pode-se provar que se $f\,'(x)$ é contínua em $[a, b]$, o limite em (4) existe. Logo, pela definição de integral definida, temos que o comprimento do arco é dado por

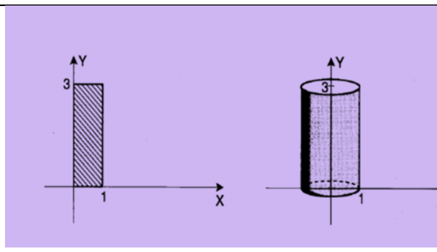
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx. \qquad (5)$$

Exemplo 5.6: Calcular o comprimento do arco da curva dada por $y = x^{3/2} - 4$, de $A(1, -3)$ até $B(4{,}4)$.

4.3. Volume de um sólido de revolução

Fazendo a região plana girar em torno de uma reta no plano, obtemos um sólido, que é chamado *sólido de revolução*. A reta ao redor da qual a região gira é chamada *eixo de revolução.*





De modo análogo a construção feita para definir a área e o comprimento do arco, temos a seguinte definição:

Definição: Seja $y = f(x)$ uma função contínua não negativa em $[a, b]$. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b. O volume do sólido T, gerado pela revolução de R em torno do eixo dos x, é definido por

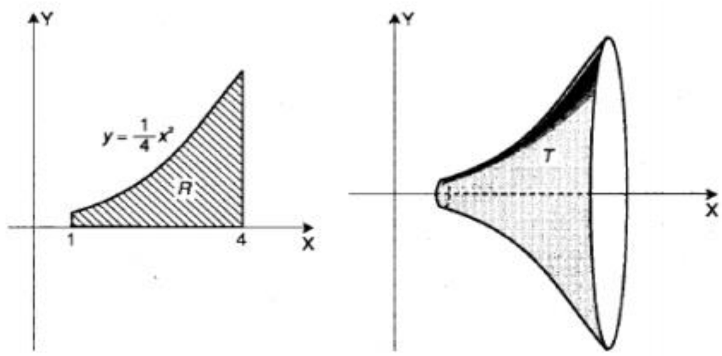
$$V = \lim_{máx\Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \,.\, \Delta x_i. \quad (6)$$

A soma que aparece em (6) é uma soma de Riemann da função $[f(x)]^2$. Como f é contínua em $[a, b]$, o limite em (1) existe. Logo, pela definição de integral definida, temos que o volume é dado por

$$s = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx. \quad (7)$$

Observação: A fórmula (7) pode ser generalizada para outras situações, como a função $f(x)$ negativa em alguns pontos, a região R está entre os gráficos de duas funções, quando o sólido T é gerado pela revolução R em torno do eixo y, ou em torno de uma reta paralela a um dos eixos (x ou y), etc. (conforme veremos mais adiante)

Exemplo 5.7: Nas figuras dadas abaixo, **c**alcule o volume do sólido de revolução T gerado pela rotação da região R em torno do eixo dos x.



Referências:
FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. Cálculo A. Editora McGraw Hill.
CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.

UEPB Universidade Estadual da Paraíba	CCT – Departamento de Matemática
	Cálculo Diferencial e Integral II – Prof.: Joselma
	Aluno(a):

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS (RESUMO DE ALGUMAS DEFINIÇÕES E TEOREMAS) (Obs.:As soluções de todos os exemplos enunciados, serão feitas em aula)

1. Sequência de números reais (definição e exemplos)

Definição 1: Uma sequência de números reais é uma função f cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Ou seja,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \to & a_n = f(n) \end{array}$$

Notações: $\{a_n\}$ ou (a_n) ou $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{\ n\in\mathbb{N}}$, onde a_n é o n$^{\underline{mo}}$ termo ou termo geral da sequência.

Exemplo 1: Relacione os quatro primeiros termos e o décimo termo de cada sequência

a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$	b) $\left\{(-1)^n \frac{n^2}{3n-1}\right\}$
c) $\{4\}$	d) $\{2+(0{,}1)^n\}$

Para algumas sequências damos o primeiro termo a_1, juntamente com uma regra que permite determinar qualquer termo a_{k+1} a partir do termo precedente a_k, para $k \geq 1$. Isto é o que se constitui uma definição por **recorrência**.

Exemplo 2: Achar os quatro primeiros termos e o n$^{\underline{mo}}$ termo da sequência definida por $a_1 = 3$ *e* $a_{k+1} = 2a_k$ para $k \geq 1$.

2. Subsequências

Seja (a_n) uma sequência de números reais e considere o subconjunto infinito $\{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots\}$. A nova sequência $b_k = f(n_k) = a_{n_k}$ é dita uma subsequência de (a_n).

Exemplo 3: Para a sequência $((-1)^n) = (-1,1,-1,1,-1,1,\ldots)$ temos que $((-1)^{2n}) = (1,1,1,\ldots)$ e $((-1)^{2n-1}) = (-1,-1,-1,-1,\ldots)$ são subsequências de $((-1)^n)$.

3. Sequências Monótonas e Sequências Limitadas

Definição 2: Uma sequência (a_n) é dita monótona se os seus termos sucessivos são:

- Crescentes (ou extritamente crescente): $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$,
- ou são decrescentes (ou extritamente decrescente): $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$,
- ou são não-crescentes: $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$,
- ou são não-decrescentes: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$.

Exemplo 4: No exemplo 1, a sequência $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ é crescente, e a sequência $\{2+(0{,}1)^n\}$ é decrescente. Enquanto que a sequência $\{4\}$ é dita constante.

Definição 3: Uma sequência (a_n) é limitada (ou cotada), se existe um número real positivo M tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5:

i) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ é limitada pois, $\left|\frac{n}{n+1}\right| \leq 1$ para todo$n \in \mathbb{N}$.

ii) $\{cos(n)\}$ é limitada, pois $|\cos(n)| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii) $\{2n\}$ não é limitada, pois não existe um número real positivo M tal que $|2n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Limite de sequências

Definição 4: Uma sequência $\{a_n\}$ tem por limite o número real L, ou converge para L, quando "para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \mathcal{E}$ *sempre que* $n > N$."

Notação: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \text{ ou } a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$.

Observação 1: Se tal número L não existe, a sequência não tem limite, ou diverge.

Definição 5: A notação $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que, para todo número real positivo P, existe um número $N > 0 (N \in \mathbb{N})$ tal que $a_n > P$, sempre que $n > N$.

Observação 2: Tal como estudamos para as funções, dizer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty (ou - \infty)$ não significa dizer que o limite exista, mas sim que o número a_n cresce (ou decresce) sem limites quando n aumenta, e neste caso, dizemos que a sequência diverge.

Teorema 1: Se $a_n \to a$, então toda subsequência (a_{n_k}) de (a_n) também converge para a. $(ou\ seja, se\ a_n \to a\ então, a_{n_k} \to a)$.

Consequência do Teorema 1: "Se uma sequência possui duas subsequências convergindo para limites distintos então, a sequência não converge." Por exemplo, a sequência $((-1)^n)$ não converge, pois as subsequências $((-1)^{2n})$ e $((-1)^{2n-1})$ convergem para limites distintos, $(-1)^{2n} \to 1$ e $(-1)^{2n-1} \to -1$.

Observação: O limite de uma sequência (a_n) quando existe é único.

Teorema 2: Seja $\{a_n\}$ uma sequência, $f(n) = a_n$ e suponhamos que $f(x)$ exista para todo número real $x \geq 1$.

i) **Se** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, então $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$, ou seja, a sequência $\{a_n\}$ converge.

ii) **Se** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty (ou - \infty)$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\ (ou - \infty)$, ou seja $\{a_n\}$ diverge.

5. Operações com Limites de Sequências

Teorema 3: Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências convergentes, então

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n},\ b_n \neq 0\ e\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$;

iv) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k, k \in \mathbb{N}$.

v) Se $a_n = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to\infty} c = c$.

vi) Se $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$.

Teorema 4: Se c é um número real e k é um número racional positivo, então $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0$.

Teorema 5: Seja $r \in \mathbb{R}$,

i) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0, se\ |r| < 1$.

ii) $\lim_{n\to\infty} |r^n| = \infty,\ se\ |r| > 1$.

Teorema 6: Seja $\{a_n\}$ uma sequência. Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0\ então\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 7(Teorema do Sanduíche): Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, e $\{c_n\}$, são sequências e $a_n \leq b_n \leq c_n$, $para\ todo\ n \in \mathbb{N}\ e\ se\ \lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$, então, $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Exemplo 6: Verifique se as sequências abaixo, converge ou diverge, se convergir calcule o seu limite.

a) $\{1 + 1/n\}$	b) $\left\{\frac{1}{4}n^2 - 1\right\}$	c) $\{5\}$
d) $\{(-1)^{n-1}\}$	e) $\left\{6\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right\}$	f) $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$
g) $\{(1{,}01)^n\}$	h) $\left\{\frac{2n^2}{5n^2-3}\right\}$	i) $\left\{\frac{2n^2+1}{n^2+n}\right\}$
j) $\left\{\frac{4n^4+1}{2n^2-1}\right\}$	k) $\left\{(-1)^{n+1}.\frac{3n}{n^2+4n+5}\right\}$	l) $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}$

Exemplo 7: Aplique o Teorema 6 para mostrar que a sequência $\left\{\frac{cos^2 n}{3^n}\right\}$ converge ou diverge.

Exemplo 8: Determine, caso exista o limite da sequência $\left\{(-1)^{n+1}.\frac{1}{n}\right\}$.

Exemplo 9: Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$. (Dica: Use o Teorema 2 e a Regra de L'Hospital)

Teorema 8: Toda sequência monótona e limitada é convergente (isto é, tem limite).

Exemplo 10: Mostre que a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \frac{1}{n} + 1$ é monótona e limitada, e portanto é convergente.

6. <u>Limites Especiais</u>

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.	2. $\lim_{n\to\infty} x^n = 0, se\ |x| < 1$	3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Exemplo 11: Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$. Dica: Use o fato de que $\left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}}$.

Referências:

CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.

SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica. Volumes 2. Editora McGraw.

UEPB	CCT – Departamento de Matemática Componente Curricular: Cálculo Diferencial e Integral II Profª: Joselma

Séries (Resumo de algumas definições e resultados – Parte I)

(Obs.: Os exemplos enunciados serão resolvidos em aula)

1. Série de Números Reais

Definição 1.1: Uma série de números reais é uma soma infinita da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$ é dito o termo geral ou n$^{\underline{mo}}$ Termo da série.

Exemplo 1.1: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Exemplo 1.2: $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

Observação 1: Para representar a série dada na definição 1, podemos usar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $\sum a_n$.

2. Séries Convergentes ou Divergentes

Definição 2.1: Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, considere a sequência (S_n), da por

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,,$$
$$\vdots$$

A sequência (S_n) é chamada sequência das somas parciais da série.

- Se $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, ou seja, se a sequência $\{S_n\}$ tem um limite S, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, converge e sua soma é S.
  Escreve-se: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$.
- Se $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe ou é $\pm\infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. (Uma série divergente não tem soma).

Observação 2.1: Na maioria dos casos é muito difícil achar uma fórmula para S_n. Mais adiante, veremos que é possível estabelecer a convergência ou divergência de uma série empregando outros métodos.

Exemplo 2.1: Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

a) Ache S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5.	b) Ache S_n.
c) Mostre que a série é convergente e ache sua soma.	

Solução:

Exemplo 2.2: A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ é divergente.

Solução: Temos

$S_1 = -1;\ S_2 = -1 + 1 = 0;\ S_3 = -1 + 1 - 1 = -1;\ \ S_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0; \ldots,$.

Ou seja, $S_n = \begin{cases} -1, se\ n\ é\ impar \\ 0, se\ n\ é\ par \end{cases}$, logo a sequência (S_n) diverge e consequentemente a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverge.

Exemplo 2.3: Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

Definição 2.2: Chamamos de série harmônica, a série divergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Definição 2.3: Chamamos de série geométrica, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} a.r^{n}$, onde a e r são números reais com $a \neq 0$.

Teorema 2.1: Seja $a \neq 0$. A série geométrica

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}.$$

(i) Converge e tem por soma $S=\frac{a}{1-r}$, se $|r|<1$.

(ii) Diverge se $|r| \geq 1$.

Exemplo 2.4: Determine para cada uma das séries geométricas abaixo, se ela converge ou diverge; se convergir, determine sua soma.

a) $0,6+0,06+0,006+\cdots+\frac{6}{10^n}+\cdots$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}.3^{n-1}$
c) $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^n+\cdots$	d) $\sum_{n=1}^{\infty} 3.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
e) $3+\frac{3}{(-4)}+\frac{3}{16}+\frac{3}{(-64)}+\cdots+\frac{3}{(-4)^{n-1}}+\cdots$	f) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}\ldots+\frac{2}{3^{n-1}}+\cdots$

Definição 2.4: Uma série-p, ou série hiperarmônica, é uma série da forma

$$\sum\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

onde p é um número real positivo.

Observação 2.2: Se $p=1$, obtemos uma série harmônica.

Teorema 2.2: A série-p $\sum\frac{1}{n^p}$

i) Converge se $p>1$

ii) Diverge se $p \leq 1$.

Exemplo 2.5: Verifique se as séries convergem ou divergem:

a) $\sum\frac{1}{n^2}$	b) $\sum\frac{2}{\sqrt{n}}$	c) $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$	d) $\sum\frac{1}{3\sqrt{n}}$

Teorema 2.3: Se uma série $\sum a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

Observação 2.3: A recíproca deste Teorema é falsa, isto é, se $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, não decorre necessariamente que a série seja convergente, como exemplo disto temos a série harmônica.

3. Operações com Séries Convergentes

Teorema 3.1: Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem e $c \in \mathbb{R}$, então:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = c.\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Observação 3.1:

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge e $c \in \mathbb{R}. c \neq 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n$ também diverge.
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

Exemplo 3.1: Verifique se a série converge ou diverge. Se convergir, ache sua soma.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5^n}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \frac{2}{3^{n-1}}\right]$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n}\right]$

4. Alguns Testes de Convergência de Séries

Vejamos agora, alguns testes que nos permitem saber se algumas séries convergem ou divergem.

4.1. Teste do nmo. Termo

i) Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum a_n$ é divergente.

ii) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então é necessária uma investigação adicional para determinar se a série $\sum a_n$ é convergente ou divergente.

Exemplo 4.1: Aplique o Teste do nmo. Termo, para as seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$	e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n-1}$	f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)}$

4.2. Teste da Integral

Seja $\sum a_n$ uma série, $f(n) = a_n$ e f a função obtida substituindo-se n por x. Se f é positiva, contínua e decrescente para todo real $x \geq 1$, então:

i. A série $\sum a_n$ converge se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

ii. A série $\sum a_n$ diverge se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge.

Exemplo 4.2: Use o Teste da integral para verificar se a série converge ou diverge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-n^2}$

Cuidado: O valor encontrado na integral imprópria não é a soma da série. Este valor serve apenas para verificar se este tipo de série converge ou diverge.

4.3. Teste da Comparação:

Sejam $\sum \boldsymbol{a_n}$ *e* $\sum \boldsymbol{b_n}$ séries de termos positivos, isto é, $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) Se $\sum \boldsymbol{b_n}$ converge, então $\sum \boldsymbol{a_n}$ converge.

ii) Se $\sum \boldsymbol{a_n}$ diverge, então $\sum \boldsymbol{b_n}$ diverge.

Exemplo 4.3: Determine se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}$ e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$ convergem ou divergem, usando o Teste da Comparação.

4.4. Teste para séries alternadas

Costuma-se representar as séries alternadas como $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ *ou* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n > 0$ para todo n. A série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ é convergente se são verificadas as duas condições seguintes: $a_k \geq a_{k+1} > 0$ para todo k e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplo 4.4: Determine se a série alternada converge ou diverge:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n-3}$

4.5. Teste da Razão

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos, e suponhamos $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$

i) Se L<1, a série é absolutamente convergente.

ii) Se L>1 ou $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$, a série é divergente.

iii) Se L=1, nada se pode afirmar; deve-se então aplicar outro teste.

4.6. Teste da Raiz

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos, e suponhamos $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$

i) Se L<1, a série é convergente.

ii) Se L>1 ou $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty$, a série é divergente.

iii) Se L=1, devemos aplicar outro teste, pois a série pode ser convergente ou divergente.

Exemplo 4.5: Determine a convergência ou divergência das séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{n^n}$	d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

5. Séries Absolutamente Convergentes

Definição 5.1: Uma série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum|a_n|=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|+\cdots$ é convergente. Quando $\sum a_n$, mas $\sum|a_n|$ não converge, dizemos que $\sum a_n$ é condicionalmente convergente.

Observação 5.1: Note que se $\sum a_n$ é uma série de termos positivos, então $|a_n|=a_n$, e neste caso convergência absoluta e convergência coincidem.

Proposição 5.1: Se a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n$ é convergente. (Em outras palavras: se $\sum|a_n|$ converge, então $\sum a_n$ converge.

Exemplo 5.1: Verifique se as séries abaixo convergem ou divergem

$a)\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^7}+\cdots$	$b)sen1+\frac{sen2}{2^2}+\frac{sen3}{3^2}+\cdots+\frac{sen\,n}{n^2}+\cdots$

5.1. Teste da Razão para convergência absoluta

Seja $\sum a_n$ uma série de termos não-nulos, e suponhamos $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$

i) Se L<1, a série é absolutamente convergente.

ii) Se L>1 ou $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$, a série é divergente.

iii) Se L=1, devemos aplicar outro teste, pois a série pode ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

Exemplo 5.2: Determine se a série abaixo é absolutamente convergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+4}{2^n}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$	d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^n}$

Referências:

FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. Cálculo A. Editora McGraw Hill.

CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.

UEPB	CCT – Departamento de Matemática
	Componente Curricular: Cálculo Diferencial e Integral II Profª: Joselma
	Aluno(a):

Lista de Exercícios (Unidade II)
Algumas Aplicações da Integral Definida

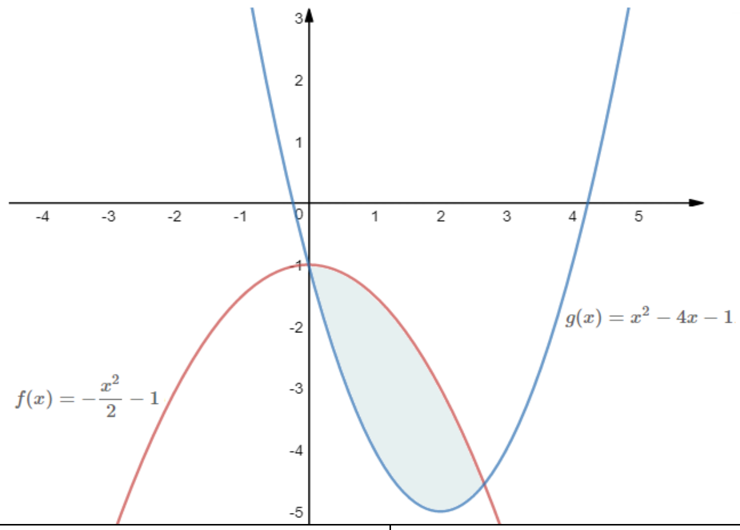
1 – Encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas:

a) $y = 5 - x^2 e\ y = x + 3$	b) $y = e^x, x = 0, x = 1\ \ e\ y = 0$
c) $x = y^3\ \ e\ \ x = y$	d) $y = senx\ \ e\ y = -senx,\ \ x \in [0,2\pi]$
e) $y = 4 - x^2\quad e\quad y = x^2 - 14$	f) $y = 2^x,\ \ y = 2^{-x},\ \ y = 4$

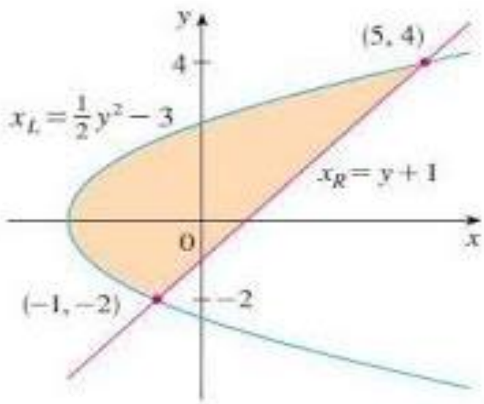
2 - Se em 1970, foram utilizados 20,3 bilhões de barris de petróleo no mundo todo e se a demanda mundial de petróleo cresce exponencialmente a uma taxa de 9% ao ano, então a demanda anual $A(t)$ de petróleo no tempo t é $A(t) = 20{,}3.e^{0{,}09t}$ ($t = 0$ em 1970). Se a demanda continua crescendo a uma taxa de 9% ao ano, qual será a quantidade de petróleo consumida entre os anos de 1970 e 2022?

3 – Encontrar a área das regiões entre as curvas dadas nos gráficos abaixo

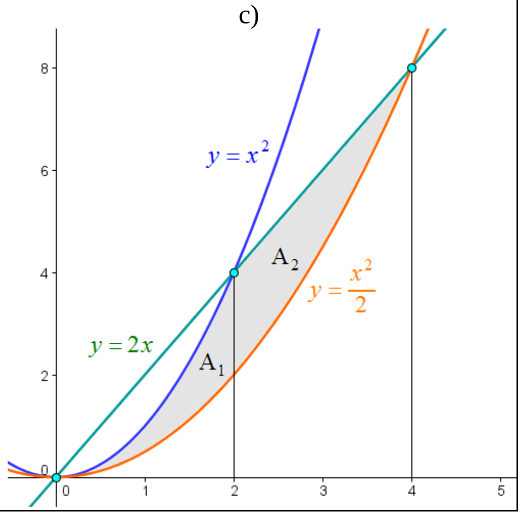
a)



b)



c)



4 – Determinar o volume do sólido de revolução gerado pelas regiões indicadas, ao redor dos eixos dados:

a) $y = x + 1,\ \ x = 0,\ \ x = 2\ \ \ e\ y = 0,\ ao\ redor\ do\ eixo\ x.$
b) $y = cosx,\ \ y = senx,\ \ x = 0\ \ \ e\ x = \frac{\pi}{4},\ \ ao\ redor\ do\ eixo\ x.$
c) $y = x^3, x = -1,\ x = 1\ \ \ e\ y = 0,\ \ ao\ redor\ do\ eixo\ x.$
d) $x = y + 1,\ \ x = \frac{1}{2},\ \ y = -2\ \ \ e\ \ \ y = 2,\ \ ao\ redor\ do\ eixo\ y.$
e) $y^2 = 2x,\ \ x = 0,\ \ y = 0\ \ \ e\ \ y = 2,\ \ ao\ redor\ do\ eixo\ y.$
f) $y = 2x^2,\ \ x = 1,\ \ x = 2\ \ \ e\ y = 2,\ \ ao\ redor\ da\ reta\ y = 2.$
g) $y = 1 - x^2,\ \ x = -2,\ \ x = 2\ \ \ e\ \ y = 2,\ \ ao\ redor\ da\ reta\ y = 2.$

5 – Encontrar o comprimento de arco da curva dada

a) $y = x^{\frac{2}{3}} - 1,\quad 1 \le x \le 2$
b) $y = 4\sqrt{x^3} + 2,\quad de\ A(0,2)\ \ até\ \ B(1,6)$
c) $x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y},\quad 1 \le y \le 3$

GABARITO

1)a)$\frac{9}{2}u.a.$	b)$e - 1u.a.$	c)$\frac{1}{2}u.a.$	d) $8u.a$	e) $72u.a.$	f) $2\left[8 - \frac{3}{ln2}\right]u.a.$	
2) 24.083,06						
4)a)$\frac{26\pi}{3}u.v.$	b) $\frac{2\pi}{7}u.v.$	c) $\frac{\pi}{2}u.v.$	d) $\frac{397\pi}{15}u.v.$	e) $\frac{8\pi}{5}u.v.$	f) $\frac{152\pi}{15}u.v.$	g) $\frac{412\pi}{15}u.v.$
5a)$\frac{1}{27}(9.2^{\frac{2}{3}} + 4)^{3/2} - 13\sqrt{3}\,u.c.$	b) $\frac{1}{54}\left(37\sqrt{37} - 1\right)u.c.$	c)$\frac{53}{6}u.c.$				

Referências:

FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. Cálculo A. Editora McGraw Hill.

CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.

UEPB	CCT – Departamento de Matemática
	Componente Curricular: Cálculo Diferencial e Integral II Profª: Joselma
	Aluno(a):

Lista de Exercícios – Sequências e Séries (Unidade II)

1 – Para cada uma das sequências $\{a_n\}$ dadas abaixo, ache os quatro primeiros termos e calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, se existir.

a) $\left\{\frac{n}{3n+2}\right\}$	b) $\left\{\frac{7-4n^2}{3+2n^2}\right\}$	c) $\{-5\}$
d) $\left\{\frac{2}{\sqrt{n^2+9}}\right\}$	e) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{3n}{n^2+4n+5}\right\}$	f) $\{1+(-1)^{n+1}\}$

2 – Verifique se a sequência converge ou diverge; se convergir, ache o limite.

a) $\left\{6\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right\}$	b) $\{1000-n\}$	c) $\left\{(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right\}$
d) $\left\{\frac{4n^4+1}{2n^2-1}\right\}$	e) $\left\{\frac{e^n}{n^4}\right\}$	f) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$
g) $\{2^{-n} sen\, n\}$	h) $\left\{\frac{n^2}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}\right\}$	i) $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$
j) $\{\cos \pi n\}$	k) $\left\{\frac{n^{-10}}{\sec n}\right\}$	l) $\{e^{-n}\ln n\}$

3 – Calcule os limites das seguintes sequências:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7-4n^2}{3+2n^2}$	b) $\lim\limits_{n\to\infty}[1+(0{,}1)^n]$	c) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$
d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n$	e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$	f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}cosn$

4 - Achar os cinco primeiros termos e o n<u>mo</u> termo, a_n, da sequência definida abaixo e em seguida calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_1 = 3\ e\ a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k$ para $k \geq 1$.	b) $a_1 = 2\ e\ a_{k+1} = a_k + 3$ para $k \geq 1$

5 – Os termos da sequência definida pela recorrência $a_1 = 5\ e\ a_{k+1} = \sqrt{a_k}$ (para $k \geq 1$) podem ser gerados digitando o 5 na calculadora e pressionando repetidas vezes a tecla $\sqrt{x}$.

a) Descreva o que acontece com os termos da sequência quando k aumenta.

b) Ache os quatro primeiros termos e o n<u>mo</u> termo, a_n, desta sequência. Em seguida, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) A sequência $\{a_n\}$ é monótona? Justifique.

GABARITO

1)a) $\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{3}{11},\frac{2}{7}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$	b) $\frac{3}{5},-\frac{9}{11},-\frac{29}{21},-\frac{57}{35}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$
c) -5,-5,-5,-5; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -5$	d) $\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{18}},\frac{2}{5}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
e) $\frac{3}{10},-\frac{6}{17},\frac{9}{26},-\frac{12}{37}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	f) 2,0,2,0; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $não\ existe$

2)a) $C: 0$	b) D	c) $C: 0$	d) D	e) D	f) $C: e$	g) $C: 0$	h) $C: \frac{1}{2}$	i) $C: 0$	j) D

4)a) 2,5,8,9, 12; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	b) $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{8},\frac{3}{16}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
5)a)A sequência parece convergir para 1	c) Sim, pois $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$, isto é, $a_n > a_{n+1}, para\ todo\ n \in \mathbb{N}$.