Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Curso de Bacharelado em Estatística/ESA

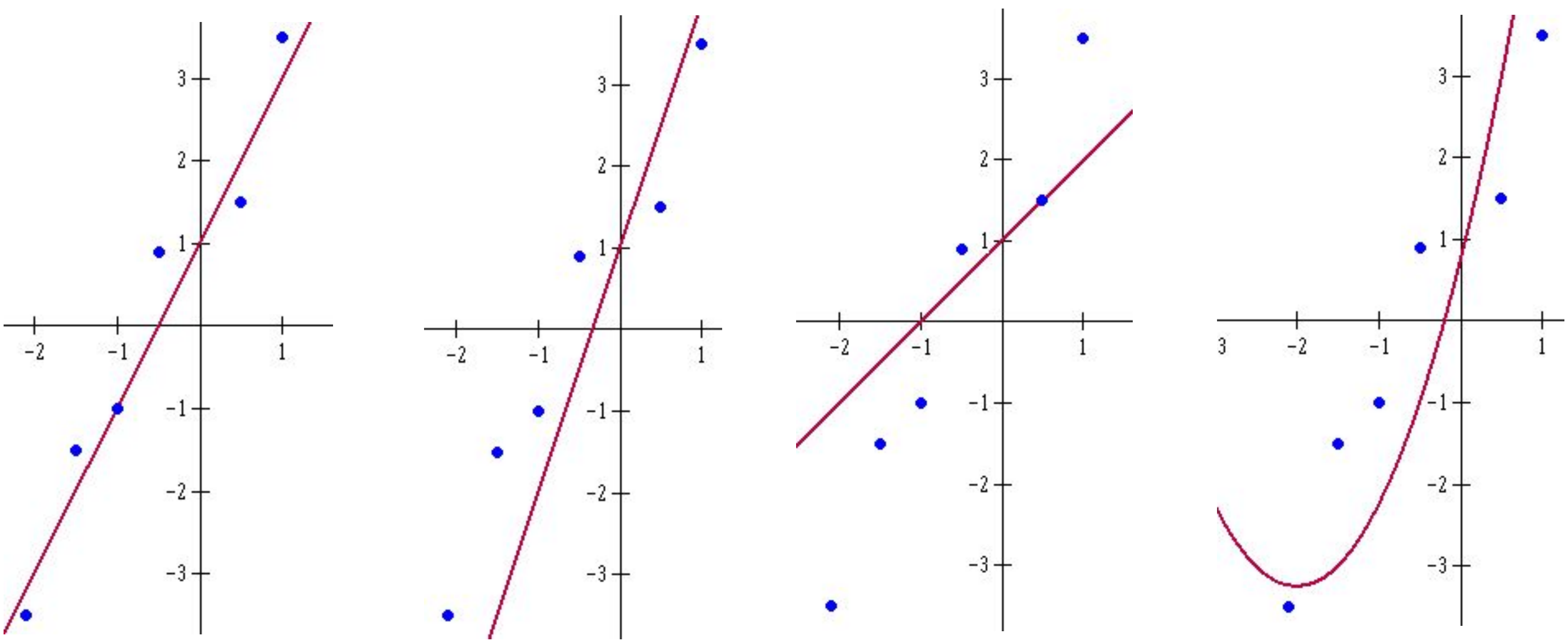
⑨ Métodos Numéricos – Ajuste de Curvas

2020.1

Prof. Antonio Carlos

Introdução

- **Ajuste de Curvas –** **é um processo em que um conjunto de *m* pontos (gerados por uma função desconhecida ou conhecida mas muito complexa) é atravessado por uma curva de perfil conhecido e previamente escolhido (1º., 2º., ..., n-ésimo grau, etc), de modo que tal curva ao passar entre os pontos o faça com o menor erro possível.**



Ajuste de Curvas

• **Erro Total de Ajuste (D) - o critério de minimização do erro comumente usado nas técnicas de ajuste de curvas é o critério dos desvios mínimos quadrados.**

• **Para cada ponto y_i dos m pontos da tabela, o erro gerado em relação à curva de ajuste y é dado por: $d_i = y_i - y(x_i)$.**

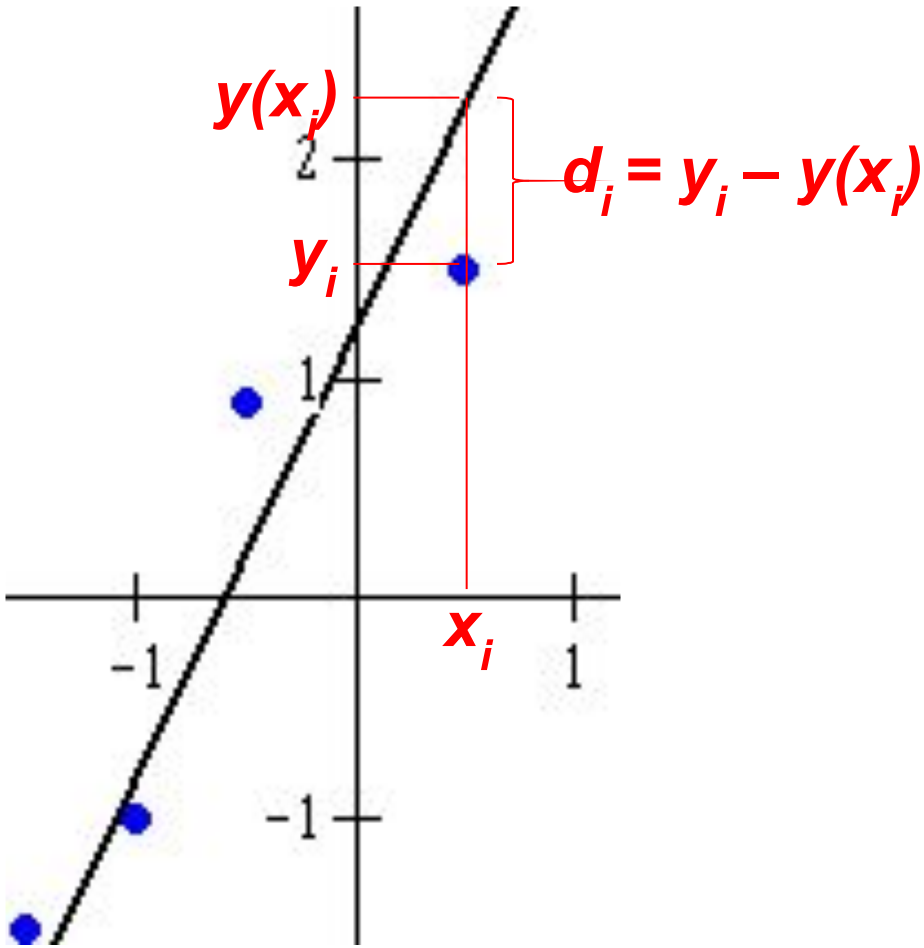
• **Então, o erro total de ajuste é dado pela soma de todas as diferenças acima elevadas ao quadrado:**

$$D = \sum_{i=1}^{m} d_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - y(x_i)\right)^2$$

Cuidado! Não confunda a soma ao quadrado de todas as diferenças com a soma de todas as diferenças ao quadrado.

Ajuste de Curvas

- **Visualização do Erro de Ajuste em Cada Ponto**



Ajuste de Curvas

• **Calculando o Erro Total de Ajuste**

• **Ex.: Suponha que um problema de ajuste de curvas efetuado por uma reta (ajuste linear simples) gerou os seguintes dados. Calcule o erro total de ajuste.**

x_i	-2,1	-1,5	-1,0	-0,5	0,5	1,0
y_i	-3,5	-1,5	-1,0	0,9	1,5	3,5
$y(xi)$	-3,08952	-1,86038	-0,8361	0,18819	2,236761	3,261046
di^2	0,16849	0,129875	0,026865	0,506674	0,542816	0,057099
D	1,431819					

- **Ajuste Polinomial - é o processo de ajustar um conjunto de pontos por meio de uma função polinomial de grau *n*, *n* ≥ *2*.**

$$x \longrightarrow \boxed{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n} \longrightarrow y$$

- **Assim, o polinômio *y* de ajuste é**

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

- **Para o polinômio acima, o erro total do ajuste é dado por:**

$$D = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_n x^n)^2$$

Ajuste Polinomial

- **Aplicando o critério dos desvios mínimos quadrados na determinação dos *n* coeficientes do polinômio de grau *n*, temos como resultado o sistema de equações normais cuja solução determina os valores dos coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.**

$$
\begin{bmatrix}
m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^n \\
\sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\
\sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{n+2} \\
 & & & \ddots & \\
\sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \cdots & \sum x_i^{2n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^n
\end{bmatrix}
$$

Ajuste Polinomial

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{n+2} \\ & & & \vdots & \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \cdots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^n \end{bmatrix}$$

- Se o grau do polinômio de ajuste for *n* deverão ser consideradas *n + 1* linhas/colunas no sistema de equações normais.

Ajuste Polinomial

$$
\begin{bmatrix}
m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^n \\
\sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\
\sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{n+2} \\
 & & & \vdots & \\
\sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \cdots & \sum x_i^{2n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum y \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^n
\end{bmatrix}
$$

- **Os limites em vermelho são para o sistema de equações normais cuja solução determina os coeficientes da função de ajuste linear simples (isto é, 1º. grau). Enquanto o sistema dos limites em azul são para um polinômio de ajuste do 2º. grau. E assim por diante.**

Ajuste Polinomial

- **Ex.: Use a tabela de pontos dada no próximo slide e faça o ajuste com um polinômio do 2º. grau. Trace o gráfico do polinômio de ajuste e calcule o erro total. Comente os resultados.**

- **Solução: como o polinômio de ajuste é de grau 2, o sistema de equações normais terá três linhas/colunas para determinar os coeficientes a_0, a_1 e a_2 do polinômio abaixo:**

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

Use o Excel para calcular os somatórios que irão compor o sistema ao lado.

Ajuste Polinomial

• Esta é a nossa tabela de pontos:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	-2,1	-1,5	-1,0	-0,5	0,5	1,0
y_i	-3,5	-1,5	-1,0	0,9	1,5	3,5

• E os somatórios necessários resolvidos no Excel:

m	Σx_i	Σx_i^2	Σx_i^3	Σx_i^4	Σy_i	$\Sigma y_i x_i$	$\Sigma y_i x_i^2$
6	-3,6	9,2	-12,6	26,6	-0,1	14,4	-15,71

Ajuste Polinomial

• Os somatórios mostrados na tela anterior:

m	Σx_i	Σx_i^2	Σx_i^3	Σx_i^4	Σy_i	$\Sigma y_i x_i$	$\Sigma y_i x_i^2$
6	-3,6	9,2	-12,6	26,6	-0,1	14,4	-15,71

• E o sistema que teremos de resolver para determinar os coeficientes a_2, a_1 e a_0 do polinômio de ajuste do 2º. grau.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3{,}6 & 9{,}2 \\ -3{,}6 & 9{,}2 & -12{,}6 \\ 9{,}2 & -12{,}6 & 26{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 14{,}4 \\ -15{,}71 \end{bmatrix}$$

Ajuste Polinomial

- **Resolvendo o sistema de equações, temos;**

$a_2 = -0{,}21127$ $a_1 = 1{,}82446$ $a_0 = 1{,}40196$

- **O polinômio de ajuste do 2º. grau é:**

$$y = 1{,}40196 + 1{,}82446x - 0{,}21127x^2$$

- **O erro total de ajuste será calculado pelo critério dos mínimos quadrados dado anteriormente, contextualizado para um polinômio do 2º. grau:**

$$D = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2)^2$$

Ajuste Polinomial

• Os parâmetros da tabela a seguir foram avaliados usando o Excel e o cálculo do erro total de ajuste é mostrado a seguir:

x_i	-2,1	-1,5	-1,0	-0,5	0,5	1,0
y_i	-3,5	-1,5	-1,0	0,9	1,5	3,5
$y(x_i)$	-3,36112	-1,81009	-0,63377	0,436912	2,261371	3,015146
d_i^2	0,019289	0,096157	0,134123	0,21445	0,579686	0,235083
D	1,278788					

• Comparando o erro acima com o erro obtido com o ajuste linear simples (1,432767) , observamos que o ajuste com o polinômio do 2º. grau é mais preciso (cerca de 12% mais preciso).

Ajuste Linear Simples

• Ex.: Agora vamos ajustar com uma reta os pontos da tabela do slide 11 para ver se geramos a tabela de desvios do slide 5 a fim de justificar a conclusão na comparação dos erros do slide anterior. Esta é a nossa tabela de pontos:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	-2,1	-1,5	-1,0	-0,5	0,5	1,0
y_i	-3,5	-1,5	-1,0	0,9	1,5	3,5

• Sistema de equações normais para o ajuste linear simples:

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{bmatrix} \Rightarrow \quad y = a_0 + a_1 x$$

Ajuste Linear Simples

- **Tabela de pontos**

i	1	2	3	4	5	6
x_i	-2,1	-1,5	-1,0	-0,5	0,5	1,0
y_i	-3,5	-1,5	-1,0	0,9	1,5	3,5

- **Os somatórios necessários resolvidos no Excel:**

m	Σx_i	Σx_i^2	Σy_i	$\Sigma y_i x_i$
6	-3,6	9,2	-0,1	14,4

- **O sistema de equações com os valores acima:**

$$\begin{bmatrix} 6 & -3,6 \\ -3,6 & 9,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 \\ 14,4 \end{bmatrix}$$

Ajuste Linear Simples

- **Resolvendo o sistema pela regra de Cramer:**

$$\begin{bmatrix} 6 & -3{,}6 \\ -3{,}6 & 9{,}2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 14{,}4 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = \frac{\det\begin{bmatrix} -0{,}1 & -3{,}6 \\ 14{,}4 & 9{,}2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 6 & -3{,}6 \\ -3{,}6 & 9{,}2 \end{bmatrix}} = \frac{50{,}92}{42{,}24} = 1{,}205492$$

$$a_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} 6 & -0{,}1 \\ -3{,}6 & 14{,}4 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 6 & -3{,}6 \\ -3{,}6 & 9{,}2 \end{bmatrix}} = \frac{86{,}04}{42{,}24} = 2{,}036932$$

$$\boxed{y = 1{,}205492 + 2{,}036932x}$$

Ajuste Linear Simples

- **Tabela de desvios calculada pelo Excel comparada com a tabela do slide 5.:**

x_i	-2,1	-1,5	-1,0	-0,5	0,5	1,0
y_i	-3,5	-1,5	-1,0	0,9	1,5	3,5
$y(xi)$	-3,08952	-1,86038	-0,8361	0,18819	2,236761	3,261046
di^2	0,16849	0,129875	0,026865	0,506674	0,542816	0,057099
D	1,431819					

J4 fx Barra de fórmulas

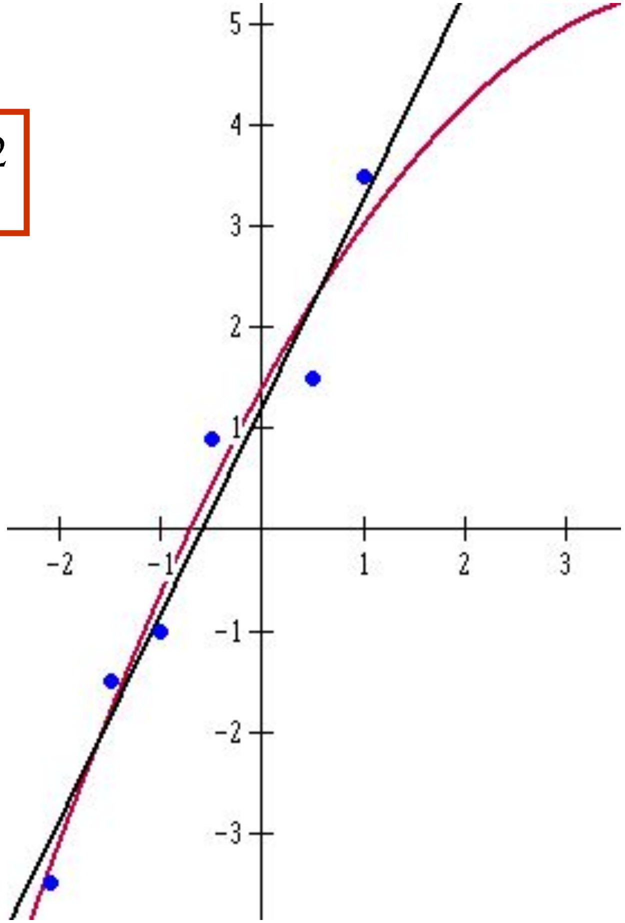
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	i	1	2	3	4	5	6
3	xi	-2,1	-1,5	-1,0	-0,5	0,5	1,0
4	yi	-3,5	-1,5	-1	0,9	1,5	3,5
5	y(xi)	-3,07207	-1,84991	-0,83144	0,187026	2,223958	3,242424
6	(di)^2	0,183128	0,122434	0,028412	0,508332	0,524115	0,066345
7	D	1,432767					
8							

Ajuste de Curvas

• A seguir os dois polinômios de ajustes mostrados entre o mesmo conjunto de pontos.

$$\boxed{y = 1{,}40196 + 1{,}82446x - 0{,}21127x^2}$$

$$\boxed{y = 1{,}205492 + 2{,}036932x}$$



Observação Final

- Por se tratar de uma técnica em que o polinômio de ajuste passa entre os pontos – e não necessariamente sobre cada ponto, como na interpolação – o ajuste de curvas permite que se faça projeções para valores fora do limite da tabela de pontos.
- Em outras palavras, se você pretende fazer projeções para valores menores que o menor x da tabela de pontos ou maior que o maior x, você vai ter que optar pelo ajuste de curvas e não pela interpolação.

Por enquanto é só...

Estão abençoados!