Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III - 2022.1

2ª Lista de exercícios

1. Determine o domínio da função.

   a) $f(x, y) = \sqrt{x-2} + \sqrt{y-1}$

   b) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

   c) $g(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

   d) $h(x, y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

   e) $f(x, y, z) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{9-y^2} + \sqrt{1-z^2}$

2. Esboce o gráfico das funções:

   a) $f(x, y) = y$

   b) $g(x, y) = 10 - 4x - 5y$

   c) $h(x, y) = x^2 + 4y^2 + 1$

3. Determine o limite, se existir, ou mostre que não existe.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} (x^2y^3 - 4y^2)$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi/2)} ysen(x-y)$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos(y)}{3x^2 + y^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2\cos(y)}{x^2 + y^4}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2} tg(xz)$

4. Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

   a) $f(x, y) = (y - 2x)^2$

   b) $g(x, y) = \sqrt[3]{y^2 + x^2}$

5. Descreva as superfícies de nível da função:

a) $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

b) $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

6. Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

   (a) $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$

   (b) $g(t) = t + \ln(t), \quad f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

7. Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

   (a) $F(x, y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$

   (b) $F(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$

8. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações.

9. Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

   (a) $f(x, y) = y^4 + 5xy^3$

   (b) $f(x, t) = t^2e^{-x}$

   (c) $z = \ln(x + t^2)$

   (d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

   (e) $z = (2x + 3y)^{10}$

   (f) $w = ln(x + 2y + 3z)$

   (g) $u = xysen^{-1}(yz)$

   (h) $f(x, y, z) = x^3yz^2 + 2yz$

10. Use derivação implícita para encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

    (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

    (b) $e^x = xyz$

    (c) $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

11. Verifique se a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$,

    (a) $u = x^4y^3 - y^4$

    (b) $u = \cos(x^2y)$

Afirmação 1. *As derivadas parciais ocorrem em equações diferenciais parciais que exprimem certas leis físicas. Por exemplo, a equação diferencial parcial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada equação de Laplace. As soluções dessa equação são chamadas funções harmônicas e são muito importantes no estudo do calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

12. Mostre que a função $u(x, y) = e^x sen(y)$ é solução da equação de Laplace.

Afirmação 2. *A equação da onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante.

13. Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda.

    (a) $u = sen(kx)sen(akt)$

    (b) $u = \dfrac{t}{a^2t^2 - x^2}$

14. Use a definição de diferenciabilidade para provar que

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

15. Use a regra da cadeia para achar $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dfrac{dw}{dt}$.

    (a) $z = xy^3 - x^2y, \quad x = t^2 + 1, y = t^2 - 1.$

    (b) $z = sen(x)\cos(y), \quad x = \sqrt{t}, y = 1/t.$

    (c) $w = xe^{y/z}, x = t^2, y = 1 - t, z = 1 + 2t.$

16. Use a regra da cadeia para achar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ ou $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

    (a) $z = (x - y)^5, x = s^2t, y = st^2.$

    (b) $z = \ln(3x + 2y), x = ssen(t), y = t\cos(s).$

17. A pressão de 1 mol de um gás ideal está aumentando em uma taxa de $0,05$k Pa/s e a temperatura está aumentando em uma taxa de $0,15$K/s. Use a equação $PV = 8,31T$ para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for 20 kPa e a temperatura for 320K.

18. O comprimento l, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em um determinado momento, as dimensões são $l = 1m$ e $w = h = 2m$, l e w estão aumentando em uma taxa de $2m/s$ enquanto h está decrescendo em uma taxa de $3m/s$. Nesse instante, encontre as taxas em que as seguintes quantidades estão variando.

    (a) O volume.

    (b) A área da superfície.

19. Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

    (a) $f(x, y) = xy^3 - x^2, \quad (1, 2), \quad \theta = \pi/3.$

    (b) $f(x, y) = y\cos(xy), \quad (0, 1), \quad \theta = \pi/4.$

20. Determine o gradiente de f, depois calcule o gradiente no ponto P. Encontre também a taxa de variação de f em P na direção do vetor u.

    (a) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}, \quad P(2, 1), \quad \mathbf{u} = (3/5, 4/5).$

    (b) $f(x, y, z) = xe^{2yz}, \quad P(3, 0, 2), \quad \mathbf{u} = (2/3, -2/3, 1/3)$

21. Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

    (a) $f(x, y) = e^x sen(y), \quad P(0, \pi/3), \quad \mathbf{v} = (-6, 8).$

    (b) $g(s, t) = s\sqrt{t}, \quad P(2, 4), \quad \mathbf{v} = (2, -1)$

    (c) $f(x, y, z) = x^2y + y^2z, \quad P(1, 2, 3), \quad \mathbf{v} = (2, -1, 2)$

22. Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

    (a) $f(x, y) = 4y\sqrt{x}, \ (4, 1).$

    (b) $f(x, y) = sen(xy), \ (1, 0).$

23. Encontre uma equação (a) do plano tangente e (b) da reta normal à superfície dada no ponto especificado.

    (a) $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10, \ (3, 3, 5).$

    (b) $xy^2z^3 = 8, \ (2, 2, 1).$

24. Se $f(x,y) = xy$, encontre o vetor gradiente $\nabla f(3,2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $f(x,y) = 6$ no ponto $(3,2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.