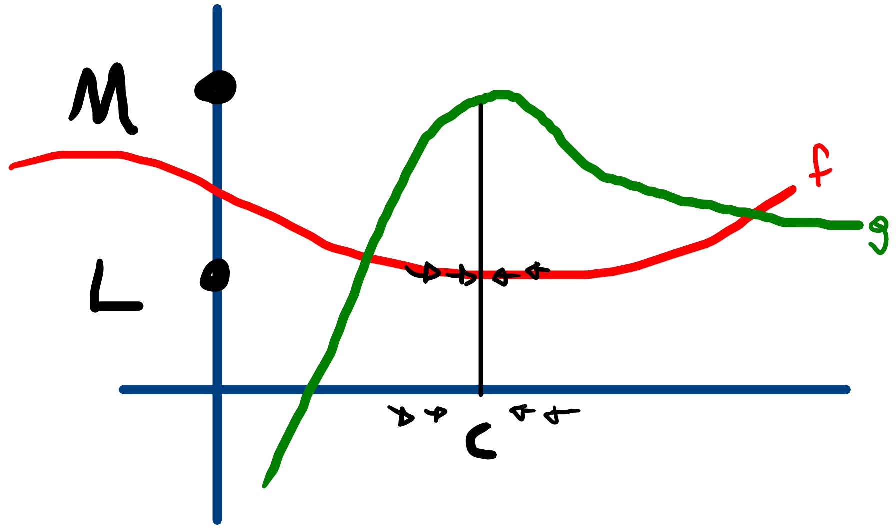
TEOREMA 1 — Leis do limite Se L, M, c e k são números reais e

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = M, \quad \text{então}$$

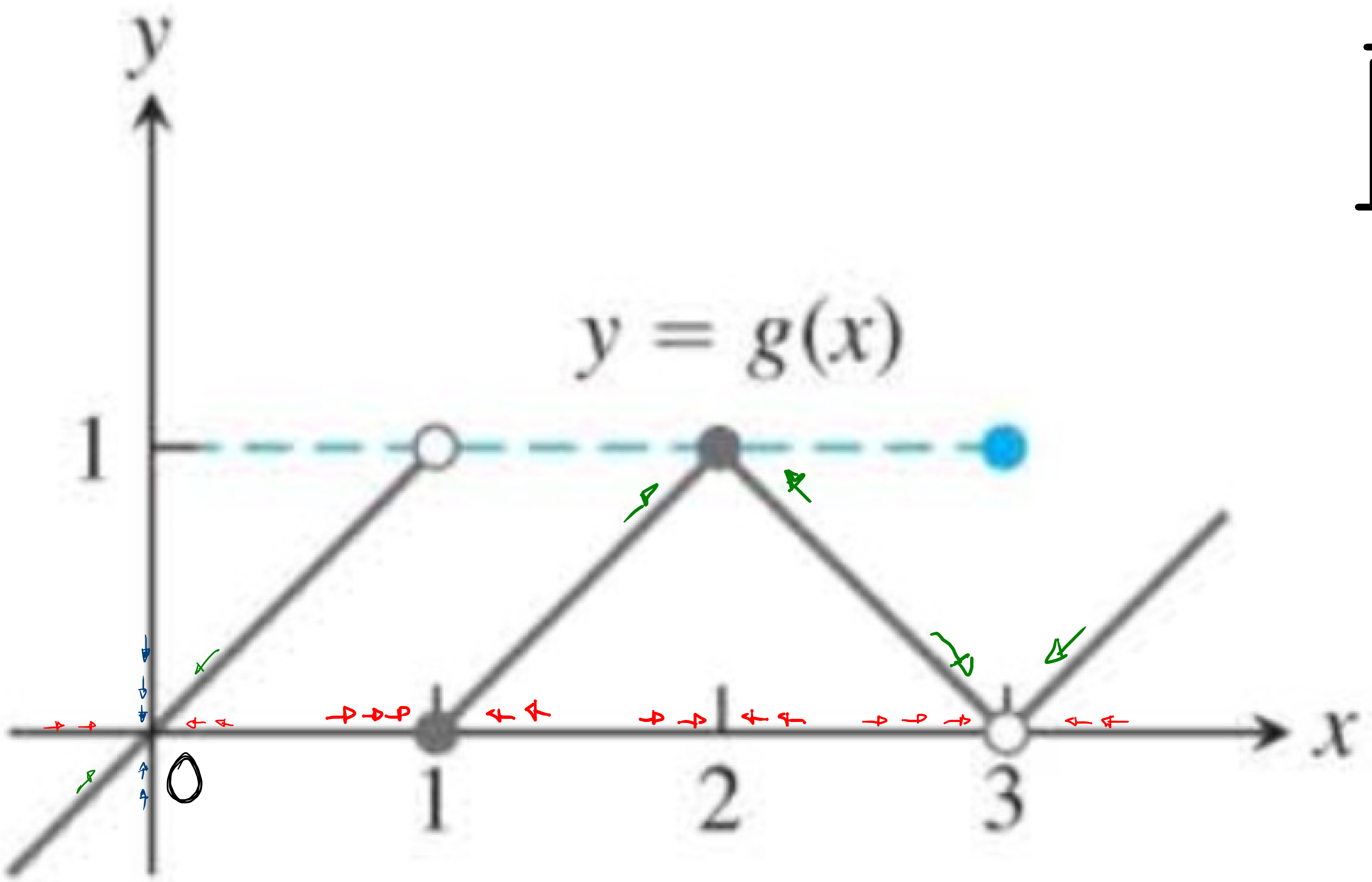


1. *Regra da soma:* $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Regra da diferença:* $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Regra da multiplicação por constante:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
4. *Regra do produto:* $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
5. *Regra do quociente:* $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Regra da potenciação:* $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$, n é um número inteiro positivo
7. *Regra da raiz:* $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n é um número inteiro positivo

(Se n for um número par, suporemos que $\lim_{x \to c} f(x) = L > 0$.)

Intuitivamente, em quais pontos podemos calcular limite?

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$g(0) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = 0$

$\boxed{g(1) = 0 \qquad \text{não existe } \lim_{x \to 1} g(x)}$

$g(2) = 1 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 1$

$g(3) = 1 \qquad \lim_{x \to 3} g(x) = 0$

EXEMPLO

$$\lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3 =$$

$$= \left(\lim_{x\to c} x\right)^3 + 4\left(\lim_{x\to c} x\right)^2 - 3 =$$

$$= c^3 + 4c^2 - 3$$

TEOREMA 2 — Limites de polinômios Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, então

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

$$\lim_{x \to \pi} x^2 - 3x + 8 = \pi^2 - 3\pi + 8$$

$$\lim_{x\to c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \frac{\lim\limits_{x\to c} x^4 + x^2 - 1}{\lim\limits_{x\to c} x^2 + 5} = \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$$

$$\lim_{x\to c} x^2 + 5 = c^2 + 5 \geq 0 + 5 = 5 \neq 0$$

$$c^2 \geq 0$$

TEOREMA 3 — Limites das funções racionais

Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$, então

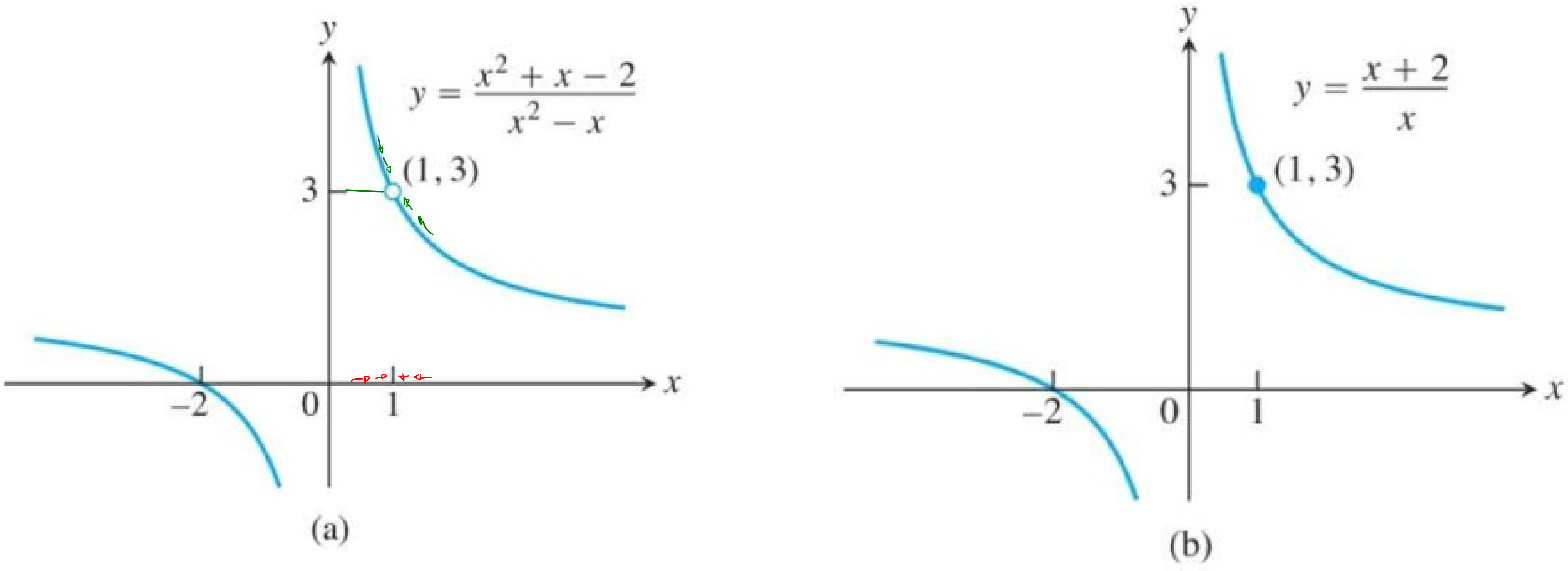
$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

A condição problemática da Regra do Quociente

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h}{h} \cancel{=} \frac{\lim_{h \to 0} h^2 - 2h}{\lim_{h \to 0} h}$$

falso

Funções diferentes, Limites Iguais



$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= (x-a)(x-b) \\ &= x^2 - (a+b)x + ab \end{aligned}}$$

$$(x-a)(x-b) = x^2 + x - 2$$

Se $x = a$ $\quad x^2 + x - 2 = 0 \quad$ $x = a$ é raiz

Se $x = b$ $\quad x^2 + x - 2 = 0 \quad$ $x = b$ é raiz

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 - (-2) = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left.\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}\right\} \text{raízes}$$

- Cancelamento entre fatores comuns
- Cancelamento algébrico
- Cancelar o fator (polinômial) que zera o denominador

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t-2}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\,P(x)}{(t-1)(t+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)}(t+2)}{\cancel{(t-1)}(t+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{t+2}{t+1}$$

$$= \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t^2+t-2=0 \\ \Delta = 9 \quad \text{raízes} \quad x=1 \ \text{e} \ x=-2 \\ \text{fatores} \quad (x-\text{raiz})(x-\text{raiz}) \end{array}}$$

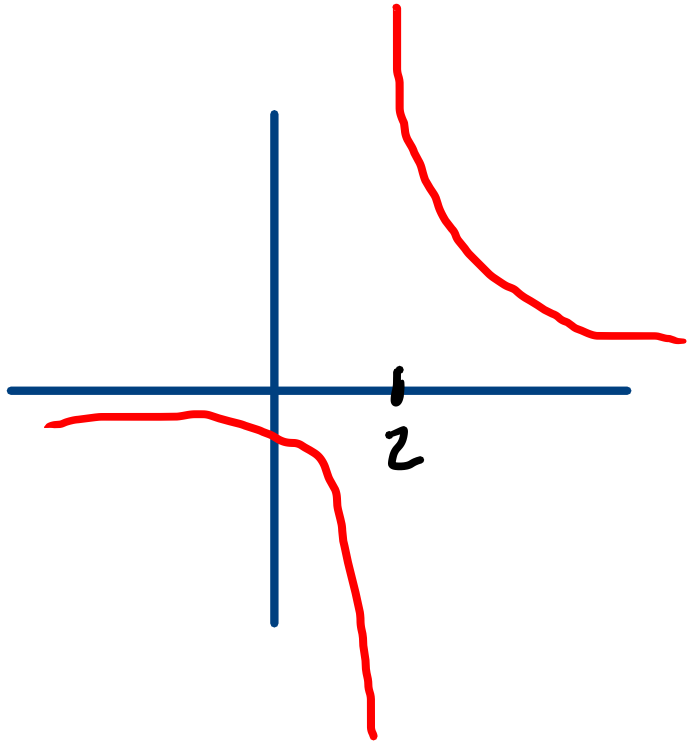
$$6 = 2\cdot\left(\frac{6}{2}\right) \quad \rightarrow \quad t^2+t-2 = (t-1)\underbrace{\left(\frac{t^2+t-2}{t-1}\right)}_{P(x)}$$

$$\begin{array}{r|l} t^2+t-2 & t-1 \\ \hline -\;t^2-t & t+2 \\ \hline 2t-2 & \\ -\;2t-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

P(x)

Divisão de polinômios

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \rightarrow$$



$\rightarrow$ não existe

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \qquad \frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1000$$

$$\frac{1}{-1} = -1 \qquad \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4 \qquad \frac{1}{-\frac{1}{1000}} = -1000$$

$$\lim_{t \to -1} \frac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2}$$

$$\lim_{x \to -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$$

Cuidado que nem todo limite tem que ser complicado...

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5}$$

TEOREMA 4 — Teorema do confronto Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo c, exceto, possivelmente, no próprio $x = c$. Suponha também que

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L.$$

Então, $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

TEOREMA 5 Se $f(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente em $x = c$, e os limites de f e g existirem quando x se aproxima de c, então

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

O que fazer com as funções trigonométricas?

O teorema do confronto nos ajuda a estabelecer importantes regras de limite:

(a) $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$ **(b)** $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$

(c) Para qualquer função f, $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$ implica $\lim_{x \to c} f(x) = 0$.