UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

Semana 01 e 02

1 Funções vetoriais e curvas espaciais

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem. Uma **função vetorial**, ou **função a valores vetoriais**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Considere o caso de funções vetoriais $\boldsymbol{r}$ cujos valores são vetores tridimensionais, ou seja, para todo número t do domínio de $\boldsymbol{r}$ existe um único vetor de V_3 denotado por $\boldsymbol{r}(t)$. Se $f(t), g(t)$ e $h(t)$ são as funções componentes de $\boldsymbol{r}$ e podemos escrever

$$\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}.$$

Denotamos por t a variável independente que representa o tempo na maioria das aplicações de funções vetoriais.

Exemplo 1. *Se $\boldsymbol{r}(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t})$, então as funções componentes são:*

$$f(t) = t^3, \;\; g(t) = \ln(3-t), \;\; h(t) = \sqrt{t}.$$

O domínio de $\boldsymbol{r}$ é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão $\boldsymbol{r}(t)$ está definida. Note que as funções componentes estão definidas quando $3-t>0$ e $t \geq 0$. Portanto, o domínio de $\boldsymbol{r}$ é o intervalo $[0,3)$

1.1 Limite e continuidade

O limite de uma função vetorial $\boldsymbol{r}$ é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como a seguir:

Definição 1. *Se* $\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$*, então*

$$\lim_{t\to a} \boldsymbol{r}(t) = (\lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t))$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Exemplo 2. *Determine* $\lim_{t\to 0} \boldsymbol{r}(t)$*, em que* $\boldsymbol{r}(t) = (1+t^3, te^{-t}, \dfrac{sen(t)}{t})$.

Exemplo 3. *Determine* $\lim_{t\to \pi/4} \boldsymbol{r}(t)$*, em que* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t), sen(t), t)$.

Definição 2. *Uma função vetorial* $\boldsymbol{r}(t)$ *é contínua em um ponto* $t = a$ *no seu domínio se* $\lim_{t\to a} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(a)$*. A função é contínua se for contínua em todos os pontos.*

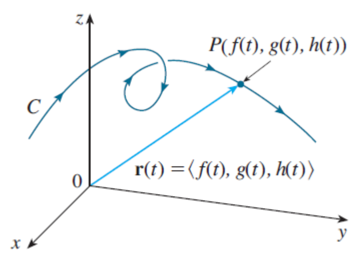
1.2 Curvas no espaço

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que f, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I. Em seguida, o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço, em que

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

e t varia no intervalo I, é chamado curva espacial. As equações acima são denominadas de equações paramétricas de C e t é conhecido como parâmetro.

Podemos pensar em C como tendo sido traçada pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante t é $(f(t), g(t), h(t))$. Se considerarmos agora a função vetorial $\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, então $\boldsymbol{r}(t)$ é o vetor posição do ponto de $P(f(t), g(t), h(t))$ em C, ou seja, C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição $\boldsymbol{r}(t)$.



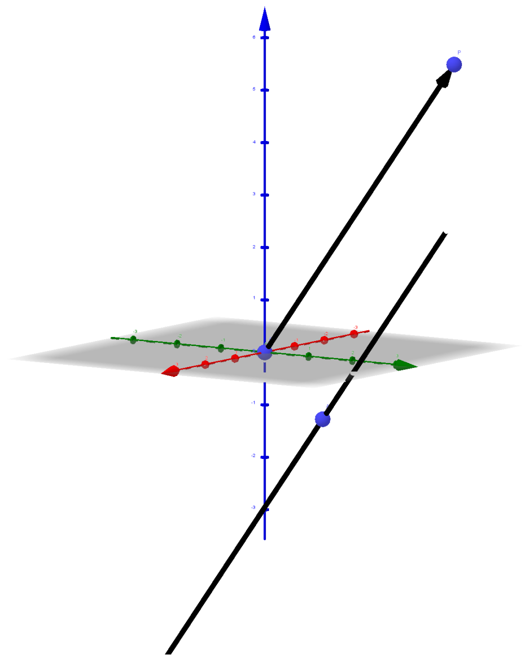
Exemplo 4. *Descreva a curva definida pela função vetorial* $\boldsymbol{r}(t) = (1+t, 2+5t, -1+6t)$.

Solução:

As equações paramétricas correspondentes são:

$$x = 1+t, \quad y = 2+5t, \quad z = -1+6t$$

Note que essa equação paramétrica da reta passa pelo ponto $P(1, 2, -1)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (1, 5, 6)$. Como alternativa, podemos observar que a função pode ser reescrita da seguinte forma: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$. Logo, $\boldsymbol{r}(t) = (1, 2, -1) + t \cdot (1, 5, 6)$.



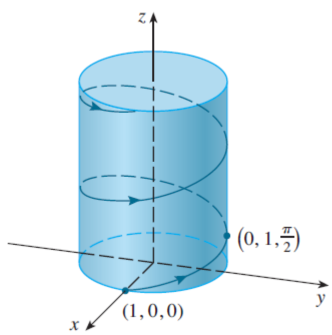
Exemplo 5. *Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t), sen(t), t)$.

Solução:

Note que as equações paramétricas para essa curva são:

$$x = cos(t), \quad y = sen(t) \quad z = t.$$

Pela relação fundamental da trigonometria, segue que $x^2 + y^2 = sen^2(t) + cos^2(t) = 1$, isso implica que para todos os valores de t, a curva deve situar-se no cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. O ponto (x, y, z) está diretamente acima do ponto $(x, y, 0)$, que se move para a esquerda em torno do círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy. Como $z = t$, a curva gira para cima ao redor do cilindro quando t aumenta.



A curva esboçada acima se chama de hélice.

Exemplo 6. *Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P(1,3,-2)$ ao ponto $Q(2,-1,3)$.*

Observação 1 - *Lembre que uma equação vetorial para o segmento de reta que une a extremidade do vetor $\boldsymbol{r}_0$ a extremidade do vetor $\boldsymbol{r}_1$ é dada por:*

$$\boldsymbol{r}(t) = (1-t)\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{r}_1 \quad com \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Dessa forma, tome $\boldsymbol{r}_0 = (1,3,-2)$ e $\boldsymbol{r}_1 = (2,-1,3)$. A equação vetorial obtida será:

$$\boldsymbol{r}(t) = (1-t)(1,3,-2) + t(2,-1,3) = (1+t, 3-4t, -2+5t) \quad com \quad 0 \leq t \leq 1.$$

As equações paramétricas da reta são:

$$x = 1+t; \quad y = 3+4t; \quad z = -2+5t$$

1.3 Derivadas de funções vetoriais

Definição 3. *A derivada $\boldsymbol{r}'$ de uma função vetorial $\boldsymbol{r}$ é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:*

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h}$$

se este limite existir.

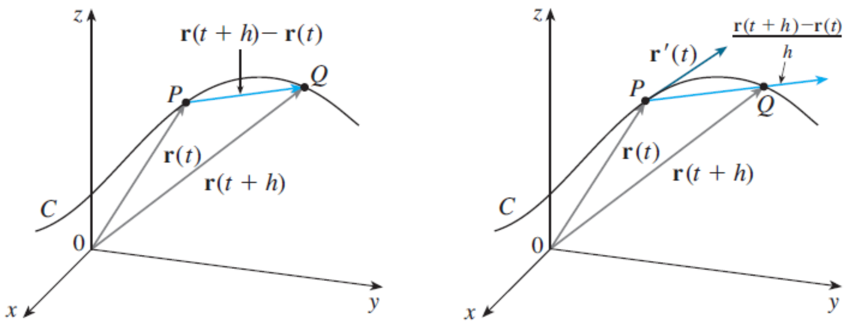
Ideia geométrica - Se os pontos P e Q têm vetores posição $\boldsymbol{r}(t)$ e $\boldsymbol{r}(t+h)$, então $\vec{PQ}$ representa o vetor $\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)$, que pode ser visto como um vetor secante. Se $h > 0$, o múltiplo escalar $(1/h)(\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t))$ tem o mesmo sentido que $\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)$. Quando $h \to 0$, parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão, o vetor $\boldsymbol{r}'(t)$ é chamado o **vetor tangente** à curva definida por $\boldsymbol{r}$ no ponto P, desde que $\boldsymbol{r}'(t)$ exista e $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$. A **reta tangente** a C em P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\boldsymbol{r}'(t)$. Além disso, definimos o **vetor tangente unitário**, dado por

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

O teorema a seguir fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial $\boldsymbol{r}$ por derivação de cada componente de $\boldsymbol{r}$.

Teorema 1. *Se $\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, em que f, g e h são funções diferenciáveis, então*

$$\boldsymbol{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$



(a) O vetor secante (b) O vetor tangente

Exemplo 7.

a) Determine a derivada de $\boldsymbol{r}(t) = (1 + t^3, te^{-t}, sen(2t))$.

b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto em que $t = 0$.

Teorema 2. *(**Regras de Derivação**) Suponha que $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sejam funções vetoriais diferenciáveis, c um escalar e f uma função real. Então,*

a) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}(t)] = (\boldsymbol{u}^{'}(t)) + (\boldsymbol{v}^{'}(t))$.

b) $\dfrac{d}{dt}(c\boldsymbol{u}(t)) = c\boldsymbol{u}^{'}(t)$.

c) $\dfrac{d}{dt}[f(t)\boldsymbol{u}(t)] = f(t)^{'}\boldsymbol{u}(t) + f(t)\boldsymbol{u}^{'}(t)$.

d) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}^{'}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}^{'}(t)$.

e) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}^{'}(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}^{'}(t)$.

f) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(f(t))] = f^{'}(t)\boldsymbol{u}^{'}(f(t))$*(**Regra da cadeia**).*

Exemplo 8. *Mostre que, se $|\boldsymbol{r}(t)| = c$ (uma constante), então $\boldsymbol{r}^{'}(t)$ é ortogonal a $\boldsymbol{r}(t)$ para todo t.*

1.4 Integrais de funções vetoriais

A integral definida de uma função vetorial $\boldsymbol{r}(t)$ pode ser definida da mesma forma que para a função real, exceto que a integral resulta em um vetor. Mas podemos expressar a integral de suas funções componentes f, g e h como segue:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\boldsymbol{k}$$

Podemos estender o Teorema Fundamental o Cálculo para as funções vetoriais contínuas como se segue:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{R}(t)\Big|_a^b = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

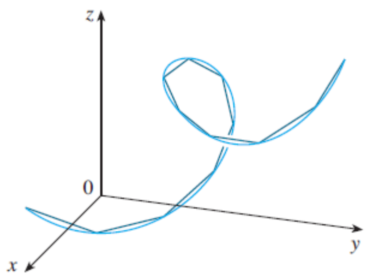
em que $\boldsymbol{R}$ é uma primitiva de $\boldsymbol{r}$, ou seja, $\boldsymbol{R}'(t) = \boldsymbol{r}(t)$. Usaremos a notação $\int \boldsymbol{r}(t)dt$ para as integrais indefinidas (primitivas).

Exemplo 9. *Se* $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos(t)\boldsymbol{i} + sen(t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$, *determine* $\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{r}(t)dt$.

1.5 Comprimento de arco

Definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas $x = f(t), y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, como o limite do comprimento das poligonais inscritas e, para o caso no qual f' e g' são contínuas, chegamos à seguinte fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt. \tag{1}$$



Para o caso de uma curva espacial a definição é equivalente. Suponha que a curva tenha equação vetorial $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $a \leq t \leq b$, ou, o que é equivalente, equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde f', g' e h' são funções contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que t cresce, a partir de a para b, é possível mostrar que

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt. \tag{2}$$

Observe que, o comprimento de arcos de curvas dados pelas fórmulas acima, podem ser escritos de forma mais compacta

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|dt. \tag{3}$$

Exemplo 10. *Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (sent)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ *do ponto* $(1, 0, 0)$ *até o ponto* $(1, 0, 2\pi)$.

Uma única curva C pode ser representada por mais de uma função vetorial. Por exemplo, a cúbica retorcida

$$\boldsymbol{r}_1(t) = (t, t^2, t^3), \quad 1 \leq t \leq 2, \tag{4}$$

poderia ser representada também pela função

$$\boldsymbol{r}_2(t) = (e^u, e^{2u}, e^{3u}), \quad 0 \leq u \leq \ln(2), \tag{5}$$

em que a relação entre os parâmetros t e u é dada por $t = e^u$. Ou seja, a mesma curva C tem essas duas **parametrizações**. Uma pergunta natural agora, seria se o comprimento de arco é independente dessas parametrizações. Em verdade, pode ser mostrado que, quando a equação 3 é usada para calcular o comprimento do arco, a resposta é independente da parametrização que é usada.

1.6 Função comprimento de arco

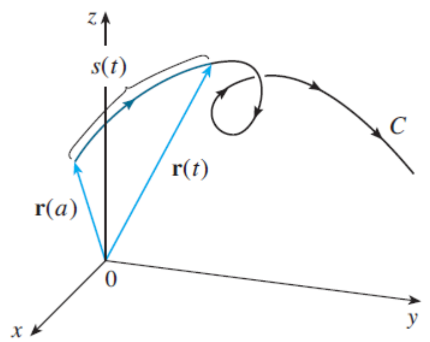
Suponhamos agora que C seja uma curva dada pela função vetorial

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

em que $\boldsymbol{r}'$ é contínua e C é percorrida exatamente uma vez à medida que t aumenta de a para b. Definimos sua **função de comprimento de arco** s por

$$s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(u)| du. \tag{6}$$

Então, $s(t)$ é o comprimento da parte de C entre $\boldsymbol{r}(a)$ e $\boldsymbol{r}(t)$, como vemos na figura a seguir.



É útil **parametrizar uma curva em relação ao comprimento do arco**, pois o comprimento de arco aparece naturalmente a partir da forma da curva e não depende do sistema de coordenadas utilizado. Se uma curva $\boldsymbol{r}(t)$ já está dada em termos de um parâmetro t e $s(t)$ é a função comprimento de arco dada pela equação 6, podemos ser capazes de escrever t como uma função de s: $t = t(s)$. Em seguida, a curva pode ser reparametrizada em termos de s

substituindo por t: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t(s))$. Assim, se $s = 3$, por exemplo, $\boldsymbol{r}(t(3))$ é a posição do ponto que está a três unidades de comprimento do início da curva.

Exemplo 11. *Reparametrize a hélice circular* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t))\boldsymbol{i} + (sen(t))\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ *utilizando o comprimento de arco medido a partir de* $(1, 0, 0)$ *na direção de crescimento de* t.

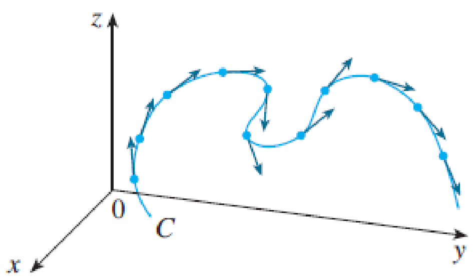
1.7 Curvatura

Uma parametrização $\boldsymbol{r}(t)$ é chamada **suave** em um intervalo I se $\boldsymbol{r}'$ for contínua e $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ em I. Uma curva é chamada de **suave** se tiver uma parametrização suave, ou seja, quando não possui quebras abruptas.

Se C for uma curva suave definida por uma função vetorial $\boldsymbol{r}$, lembre-se de que o vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$ será dado por

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

e indica a direção da curva. Na figura abaixo, podemos ver que $\boldsymbol{T}(t)$ muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta, mas muda de direção mais rapidamente quando a curva C se dobra ou se retorce mais acentuadamente. **Assim, a curvatura de C em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto.**



Definição 4. *A **curvatura** de uma curva é*

$$\kappa = \left| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right|$$

em que $\boldsymbol{T}$ é o vetor tangente unitário.

A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s. Assim, usando a regra da cadeia, escrevemos

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{e} \quad \kappa = \left| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\boldsymbol{T}/dt}{ds/dt} \right|$$

Isso implica que,

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|} \tag{7}$$

Exemplo 12. *Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é* $1/a$.

Solução:

Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos(t)\boldsymbol{i} + asen(t)\boldsymbol{j},$$

Portanto,

$$\boldsymbol{r}^{'}(t) = -asen(t)\boldsymbol{i} + acos(t)\boldsymbol{j} \quad e \quad |\boldsymbol{r}^{'}(t)| = a.$$

Logo,

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}^{'}(t)}{|\boldsymbol{r}^{'}(t)|} = -sen(t)\boldsymbol{i} + cos(t)\boldsymbol{j}.$$

e

$$\boldsymbol{T}^{'}(t) = -cos(t)\boldsymbol{i} - sen(t)\boldsymbol{j}.$$

Isso nos dá $|\boldsymbol{T}^{'}(t)| = 1$, *então usando a fórmula 7, temos*

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{T}^{'}(t)|}{|\boldsymbol{r}^{'}(t)|} = \frac{1}{a}.$$

Teorema 3. *A curvatura de uma curva dada pela função vetorial* $\boldsymbol{r}$ *é*

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}^{'}(t) \times \boldsymbol{r}^{''}(t)|}{|\boldsymbol{r}^{'}(t)|^3} \tag{8}$$

Exemplo 13. *Determine a curvatura da cúbica retorcida* $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ *em um ponto genérico e em* $(0, 0, 0)$.

Para o caso especial de uma curva plana com a equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro e escrevemos $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$. Então, $\mathbf{r}^{'}(x) = \mathbf{i} + f^{'}(x)\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}^{''}(x) = f^{''}(x)\mathbf{j}$. Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, segue que $\mathbf{r}^{'}(x) \times \mathbf{r}^{''}(x) = f^{''}(x)\mathbf{k}$. Além disso, segue que $|\mathbf{r}^{'}(x)| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ e pelo Teorema 3 obtemos:

$$\kappa(x) = \frac{|f^{''}(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}.$$

Referências

[1] ANTON, H., BIVENS, I. e DAVIS, S., **Cálculo**, vol. 2, 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

[2] LEITHOLD, L., **O Cálculo com Geometria Analítica**, vol 2, 3. ed. São Paulo: HARBRA, 2016.

[3] STEWART, J., **Cálculo**, vol. 2, 8. ed. São Paulo: CENGAGE, 2016.

[4] THOMAS, G. B., WEIR, M. D. e HASS,J., **Cálculo**, vol. 2, 12 ed. São Paulo: Pearson, 2012.