Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental

⑥ Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz

2020.1

Prof. Antonio Carlos

Determinação de Raízes Reais

2. Métodos de Refinamento:

2.3. Método da Bissecção: consiste em dividir em dois (bisseccionar) o intervalo que contém a raiz; o processo se repete até a raiz atingir uma precisão pré-fixada determinada por um critério de parada adequado.

- **Nesse método, o intervalo que contém a raiz vai se estreitando a cada divisão: metade, depois metade da metade, e assim por diante; é como se você estivesse "imprensando" a raiz em um intervalo cada vez mais estreito; chega um ponto que o intervalo está tão estreito que se confunde com a raiz.**

2.3.1 Só pode ser aplicado no intervalo $[a,b]$ em que $f(a)*f(b) < 0$, ou seja, <u>só se aplica para funções cujo gráfico "cruze" o eixo dos x</u>. (se o gráfico apenas tocar, não serve)

Determinação de Raízes Reais

2. Métodos de Refinamento:

2.3 Método da Bissecção: (leia com atenção o passo b.)

2.3.2 Refinamento da Bissecção:

a. Cálculo da raiz: $$x' = \frac{a+b}{2}$$

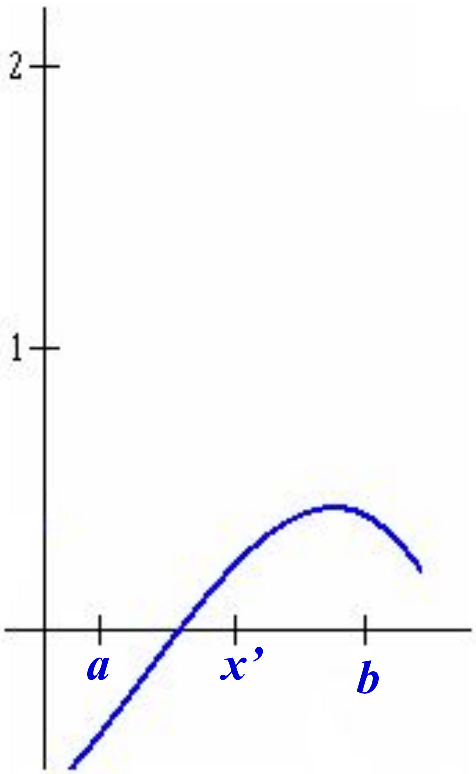
b. Calcular $f(x')$ e comparar com $f(a)$ e $f(b)$; o extremo, a ou b, do intervalo que tiver produzido um valor com sinal igual ao de $f(x')$ deve ser desprezado; ou seja:

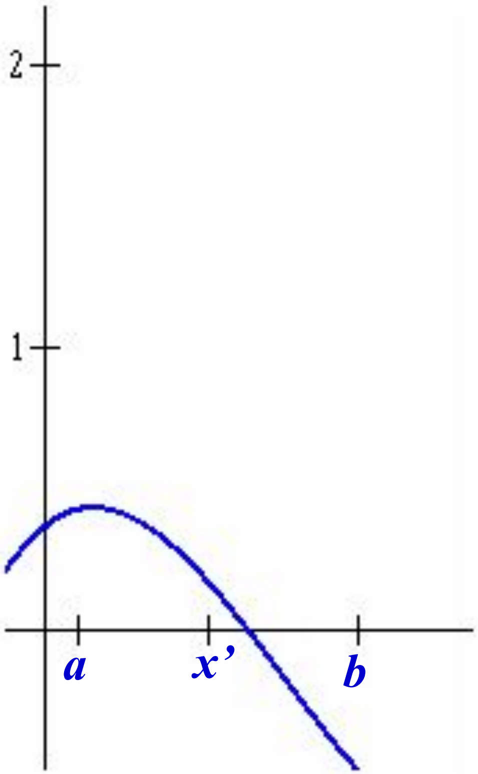
⇒ Se $f(x')*f(a) < 0$, então b deve ser desprezado

⇒ Se $f(x')*f(a) > 0$, então a deve ser desprezado

Determinação de Raízes Reais

• Explicando o passo b:





$f(x')*f(a) < 0$,
então b deve ser desprezado;
a raiz se encontra entre a e x'.

$f(x')*f(a) > 0$,
então a deve ser desprezado;
A raiz se encontra entre x' e b.

Determinação de Raízes Reais

2. Métodos de Refinamento:

2.4 Método de Newton-Raphson: usa-se a razão entre a função e sua derivada de 1ª. ordem como incremento para a aproximação do valor da raiz desejada.

- Nesse método a proximidade da raiz é estabelecida pelo toque da tangente $f'(x)$ no eixo dos x; o ponto onde ocorre o toque no eixo dos x é o ponto de partida para a procura de nova aproximação da raiz.

2.4.1 a. Pode ser aplicado para qualquer função

b. A primeira aproximação x' da raiz pode ser qualquer valor de x dentro do intervalo que contém a raiz;

c. O valor da derivada $f'(x')$ não pode ser zero;

d. Não é recomendado para funções cuja derivada de 1ª. ordem seja complicada e/ou difícil de ser calculada.

Determinação de Raízes Reais

2. Métodos de Refinamento:

2.4 Método de Newton-Raphson:

2.4.2 Refinamento de Newton-Raphson:

a. Cálculo da raiz:

$$x'_{atual} = x'_{antes} - \frac{f(x'_{antes})}{f'(x'_{antes})}$$

- **Por meio dessa fórmula, x_{atual} vai estar mais perto da raiz do que x_{antes}. A taxa de avanço é dada pela razão $f(x)/f'(x)$; quanto maior for essa taxa, mais rapidamente se chega à raiz.**

⑥ Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz

Determinação de Raízes Reais

- Agora vamos achar a raiz de uma função utilizando o método da bissecção.

- Leia o passo-a-passo com atenção; se não entender, pare, volte e leia de novo até entender o que está acontecendo.

- Vá programando com calma a planilha do Excel.

Aplicando o Método da Bissecção – Programando o Excel

- **Quais os parâmetros necessários no método da bissecção?**

- **Intervalo *[a,b]* onde se encontra a raiz;**
- **Cálculo da raiz usando** $x' = \dfrac{a+b}{2}$;
- **Precisão ε pré-fixada;**
- **Critério de parada dentro da precisão pré-estabelecida;**

$$\left| x'_{atual} - x'_{antes} \right| \leq \varepsilon$$

- **Determinação do novo intervalo que contém a raiz**
    - ***Um dos limites do novo intervalo será sempre*** x'_{atual}.
    - ***Descartar a ou b do intervalo [a,b] anterior.***
        - ***Se*** $f(a)*f(x'_{atual}) < 0$***, descarta b; senão, descarta a.***
        - ***(A raiz sempre estará no intervalo [a,b] em que f(a)*f(b) < 0)***

Aplicando o Método da Bissecção – Programando o Excel

- **Calcular a raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$ que está no intervalo $[1,2]$, com precisão de 10^{-4}.**
- **Inicialmente preencha a linha 1 da sua planilha como na figura abaixo. Ela identifica os parâmetros usados no método da bissecção.**

Aplicando o Método da Bissecção – Programando o Excel

- **Programando a linha 2 da planilha, células A2 a G2**

1. **A célula A2 é preenchida com o valor de um dos limites do intervalo onde se encontra a raiz; geralmente preenchemos A2 com o valor de *a* (*limite inferior* do intervalo), neste caso, escrevemos *1* em A2. Se alguém quiser preencher A2 com o valor de *b* (*limite superior*) não tem problema, nesse caso em vez de preencher A2 com *1* seria preenchida com *2*, sem problema;**
2. **A célula B2 é preenchida com o valor do outro limite do intervalo; como A2 está com *1*, preenchemos B2 com *2*;**
3. **A célula C2 vai ser programada para calcular o valor da função $x^2 - x - 1$ com o valor que está em A2, então C2 vai ser preenchida com *= A2^2 - A2 - 1*;**

Aplicando o Método da Bissecção – Programando o Excel

- **Programando a linha 2 da planilha, células A2 a G2**

4. **A célula D2 vai ser programada para calcular o valor da função $x^2 - x - 1$ com o valor que está em B2, então D2 vai ser preenchida com** *= B2^2 - B2 - 1*;
5. **A célula E2 vai ser programada para calcular o valor da raiz** *x'*; **E2 vai ser preenchida com** *= (A2+B2)/2*;
6. **A célula F2 vai ser programada para calcular o valor da função $x^2 - x - 1$ com o valor da raiz que está em E2, então F2 vai ser preenchida com** *= E2^2 - E2 - 1*;
7. **A célula G2 vai ser programada para calcular o critério de parada dentro da precisão estabelecida. G2 vai ser preenchida com** *= abs(B2-A2)*. *abs()* **é a função módulo. Quando esse valor for menor ou igual a precisão, então o processo pára, pois o valor da raiz foi alcançado.**

⑥ Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz

Aplicando o Método da Bissecção – Programando o Excel

- **Programando da linha 3 em diante**

8. **A célula A3 deve ser preenchida com** $= E2$**, ou seja, um dos limites do novo intervalo já é assumido como o valor da raiz obtido na linha anterior;**

9. **Agora devemos programar a célula B3 para descartar** a **ou** b**, isto é, o valor que está em A2 ou em B2. A célula B3 vai ser programada do seguinte modo** *= SE(F2*C2<0;A2;B2);* **essa fórmula significa que se** $f(x')*f(a) < 0$**, então o novo intervalo vai ser** $[x',a]$, ou seja, *[E2, A2]*, **mas se** $f(x')*f(a) > 0$**, então a raiz vai estar no intervalo** $[b,x']$**, ou seja,** *[B2, E2]*; **assim, o outro limite do intervalo seria** b**, B2, e não** a**, A2.**

10. **As outras células da linha 3 permanecem com a mesma programação da linha 2; é só selecionar na linha 2 e colar na linha 3;**

⑥ Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz

Aplicando o Método da Bissecção – Programando o Excel

- **Programando da linha 3 em diante**

1. **Da linha 4 em diante, as células vão ter a mesma programação da linha 3. É só selecionar na linha 3 e colar nas linhas 4 em diante <u>até você checar visualmente</u> na célula da coluna G que a precisão foi alcançada.**

Obs.: se as células da planilha estiverem programadas corretamente, a medida que as iterações vão ocorrendo o valor das células da coluna G vai ficando cada vez menor e se aproximando do valor da precisão pré-estabelecida. Se isso não estiver acontecendo, então pare e reveja a programação das células da linha 2 e das células A3 e B3, alguma coisa não está correta na programação.

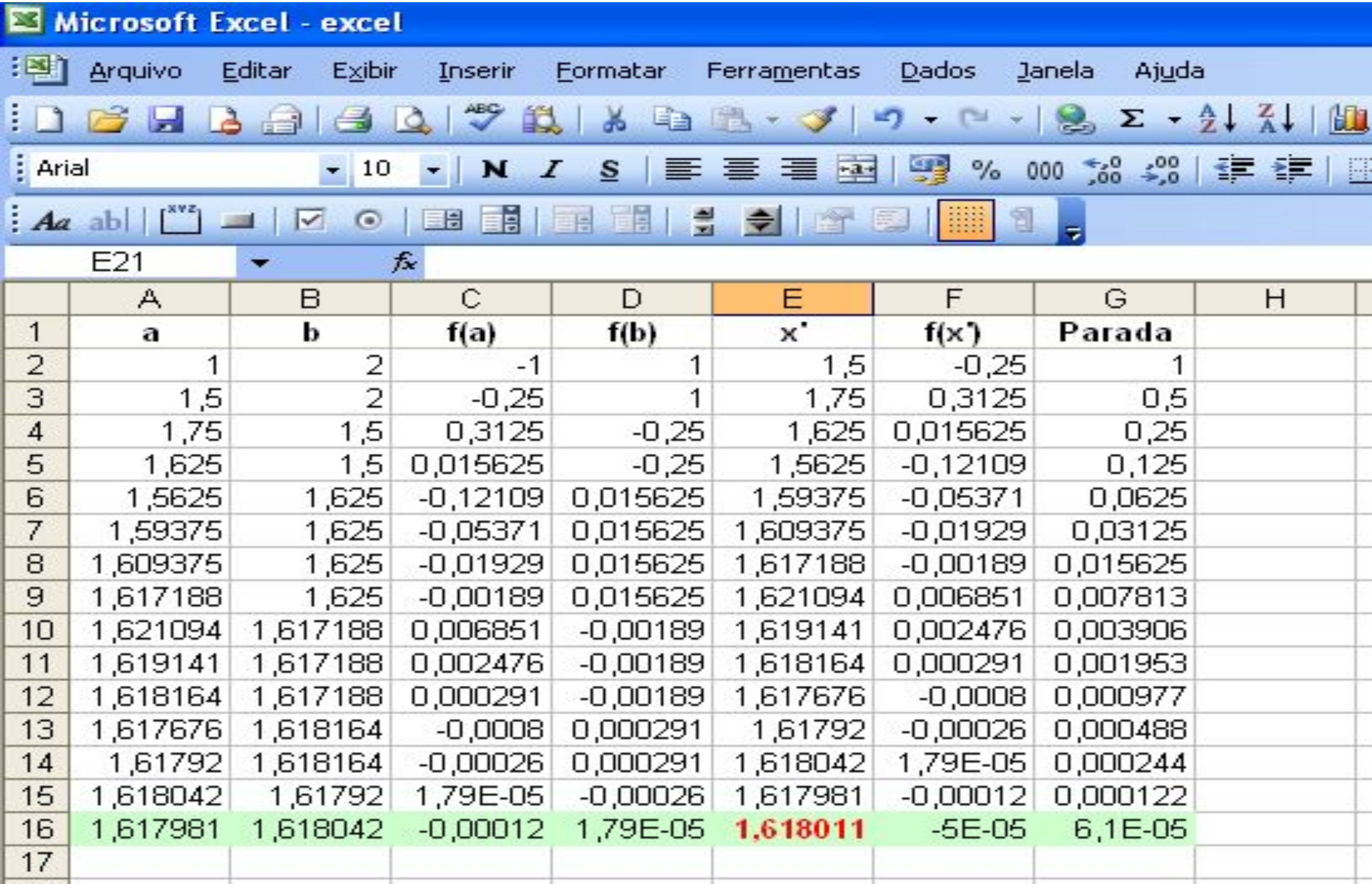
⑥ Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz

Aplicando o Método da Bissecção – Programando o Excel

- **No próximo slide está o resultado do cálculo da raiz com a precisão de 10^{-4} ($0,0001$).**
- **Essa precisão só foi alcançada na linha 16. Até a linha 15 da coluna G (critério de parada) a precisão ainda era maior do que 10^{-4}.**
- **O valor da raiz, dentro da precisão estabelecida, aparece em vermelho na linha 16 da coluna E ($x' = 1,618011$).**
- **O valor teórico da raiz é $1,618034$. Comparando o valor teórico com o encontrado no Excel, temos um erro absoluto de $0,000023$ que é menor do que $0,0001$ (10^{-4}).**

⑥ Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz

Aplicando o Método da Bissecção – Programando o Excel



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	f(a)	f(b)	x'	f(x')	Parada	
2	1	2	-1	1	1,5	-0,25	1	
3	1,5	2	-0,25	1	1,75	0,3125	0,5	
4	1,75	1,5	0,3125	-0,25	1,625	0,015625	0,25	
5	1,625	1,5	0,015625	-0,25	1,5625	-0,12109	0,125	
6	1,5625	1,625	-0,12109	0,015625	1,59375	-0,05371	0,0625	
7	1,59375	1,625	-0,05371	0,015625	1,609375	-0,01929	0,03125	
8	1,609375	1,625	-0,01929	0,015625	1,617188	-0,00189	0,015625	
9	1,617188	1,625	-0,00189	0,015625	1,621094	0,006851	0,007813	
10	1,621094	1,617188	0,006851	-0,00189	1,619141	0,002476	0,003906	
11	1,619141	1,617188	0,002476	-0,00189	1,618164	0,000291	0,001953	
12	1,618164	1,617188	0,000291	-0,00189	1,617676	-0,0008	0,000977	
13	1,617676	1,618164	-0,0008	0,000291	1,61792	-0,00026	0,000488	
14	1,61792	1,618164	-0,00026	0,000291	1,618042	1,79E-05	0,000244	
15	1,618042	1,61792	1,79E-05	-0,00026	1,617981	-0,00012	0,000122	
16	1,617981	1,618042	-0,00012	1,79E-05	**1,618011**	-5E-05	6,1E-05	
17								

⑥ **Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz**

Determinação de Raízes Reais

- **Agora vamos achar a raiz da mesma função utilizando o método de Newton-Raphson.**

- **Leia o passo-a-passo com atenção; se não entender, pare, volte e leia de novo até entender o que está acontecendo.**

- **Vá programando com calma a planilha do Excel.**

Aplicando o Método de Newton – Programando o Excel

- **Quais os parâmetros necessários no método de Newton?**

- **Intervalo *[a,b]* onde se encontra a raiz;**

- **Cálculo da raiz usando** $x'_{atual} = x'_{antes} - \dfrac{f(x'_{antes})}{f'(x'_{antes})}$;

  - **<u>Obs.:</u> olhando a fórmula acima, você precisa dar um primeiro "chute" para o x'_{antes}; pode ser qualquer valor dentro do intervalo *[a,b]* que contém a raiz.**

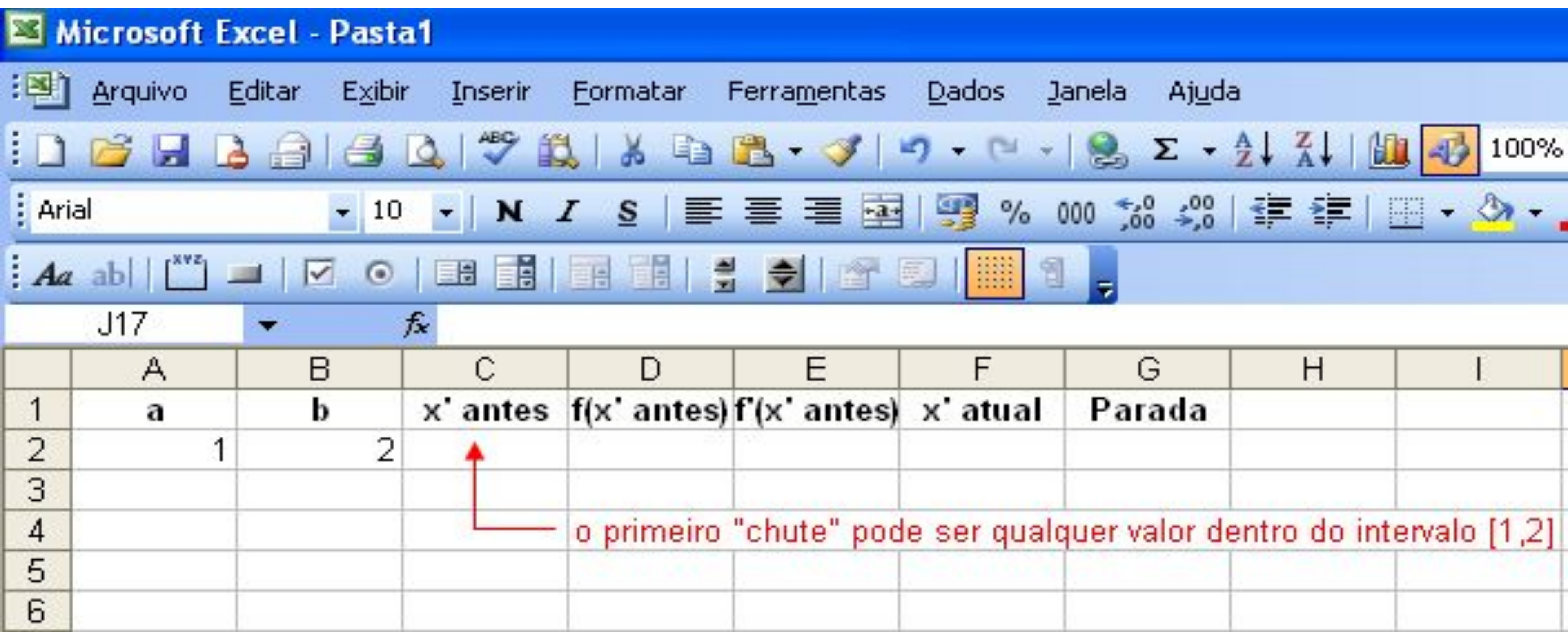
- **Critério de parada dentro da precisão pré-estabelecida;**

- **Determinação da nova aproximação da raiz;**

Aplicando o Método de Newton – Programando o Excel

- Calcular a raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$ que está no intervalo $[1,2]$, com precisão de 10^{-4}.

- Inicialmente preencha a linha 1 da sua planilha como na figura abaixo. Ela identifica os parâmetros usados no método de Newton-Raphson.



Aplicando o Método de Newton – Programando o Excel

- **Programando a linha 2 da planilha, células A2 a G2**

1. **A célula A2 é preenchida com o valor do limite inferior do intervalo onde se encontra a raiz. Preenchemos A2 com *1*;**

2. **A célula B2 é preenchida com o valor do limite superior do intervalo; como A2 está com *1*, preenchemos B2 com *2*;**

3. **A célula C2 vai ser preenchida com o 1º. "chute" para o valor da raiz; pode ser qualquer valor dentro do intervalo *[1,2]* que contém a raiz. Só para efeito de comparação de eficiência entre os dois métodos vamos "chutar" $x'_{antes} = 1,5$ que foi o primeiro valor de x' no método da bissecção. Portanto, vamos preencher C2 com *1,5*.**

4. **A célula D2 vai ser programada para calcular o valor da função com o valor de x'_{antes}; em D2 pomos $= C2\text{^}2 - C2 - 1$;**

Aplicando o Método de Newton – Programando o Excel

- **Programando a linha 2 da planilha, células A2 a G2**

5. **A célula E2 vai ser programada para calcular o valor da 1ª. derivada da função $x^2 - x - 1$ com o valor que está em C2. A 1ª. derivada de $x^2 - x - 1$ é $f'(x) = 2x - 1$. Então E2 vai ser preenchida com** $= 2*C2 - 1$**;**
6. **A célula F2 vai ser programada para calcular o valor da raiz x' usando a fórmula do método de Newton; F2 vai ser preenchida com** $= C2 - (D2/E2)$ **[**$x'_{atual} = x'_{antes} - (f(x'_{antes})/f'(x'_{antes}))$**].**
7. **A célula G2 vai ser programada para calcular o critério de parada dentro da precisão estabelecida. Vai comparar o valor atual da raiz com o valor anterior. G2 vai ser preenchida com** *= abs(F2-C2)*. *abs()* **é a função módulo. Quando esse valor for menor ou igual a precisão, então o processo pára, pois o valor da raiz foi alcançado.**

⑥ Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz

Aplicando o Método de Newton – Programando o Excel

- **Programando da linha 3 em diante**

8. **As células A3 e B3 não precisam ser preenchidas. De agora em diante tudo vai depender do valor anterior da raiz, ou seja, da célula C3. Assim, C3 vai ser preenchida com o último valor calculado para a raiz que se encontra na célula F2. Portanto, C3 vai ser preenchida com = *F2*.**
9. **As outras células da linha 3, isto é, de D3 a G3, permanecem com a mesma programação da linha 2; é só selecionar na linha 2 e colar na linha 3;**

⑥ Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz

Aplicando o Método de Newton – Programando o Excel

- **Programando da linha 3 em diante**

1. **Da linha 4 em diante, as células vão ter a mesma programação da linha 3. É só selecionar na linha 3 e colar nas linhas 4 em diante <u>até você checar visualmente</u> na célula da coluna G que a precisão foi alcançada.**

Obs.: se as células da planilha estiverem programadas corretamente, a medida que as iterações vão ocorrendo o valor das células da coluna G vai ficando cada vez menor e se aproximando do valor da precisão pré-estabelecida. Se isso não estiver acontecendo, então pare e reveja a programação das células da linha 2 e das células A3 e B3, alguma coisa não está correta na programação.

⑥ Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz

Aplicando o Método de Newton – Programando o Excel

- **No próximo slide está o resultado do cálculo da raiz com a precisão de 10^{-4} ($0{,}0001$).**
- **Essa precisão foi alcançada já na linha 4, ou seja, na 3ª. iteração. Até a linha 3 da coluna G (critério de parada) a precisão ainda era maior do que 10^{-4}. Mas, na próxima iteração, isto é a 3ª., o método de Newton-Raphson encontrou a raiz com valor exato, ou seja, com erro zero (vide o slide 13).**
- **É claro que nem sempre o método de Newton vai achar a raiz com erro zero. O que queremos mostrar é que foram necessárias muito menos iterações para o valor da raiz ser obtido.**

⑥ Métodos Numéricos – Refinamento da Raiz

Aplicando o Método de Newton – Programando o Excel

Microsoft Excel - Pasta1

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	x' antes	f(x' antes)	f'(x' antes)	x' atual	Parada
2	1	2	1,5	-0,25	2	1,625	0,125
3			1,625	0,015625	2,25	1,618056	0,006944
4			1,618056	4,82E-05	2,236111	**1,618034**	2,16E-05

Comparação da Eficiência entre os Dois Métodos

- O critério de eficiência usado para comparar os dois métodos é o tempo gasto para se obter a raiz dentro da precisão pré-estabelecida.

- Em outras palavras: quantas iterações cada método realizou até chegar ao valor desejado para a raiz?

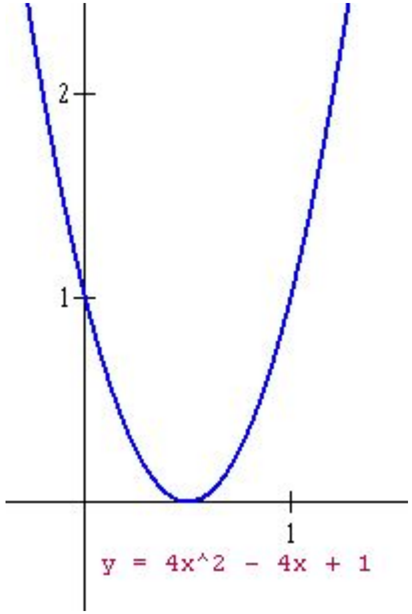
- O método que obteve a resposta realizando menos iterações é o mais eficiente.

- Logo se conclui que o método de Newton-Raphson é mais eficiente que o método da bissecção.

NUNCA ESQUEÇA ISTO!

- No final do slide 2 dissemos que o método da bissecção só pode ser usado para se achar a raiz de funções cujo gráfico <u>cruze</u> o eixo dos x no intervalo que contém a raiz.

- Desse modo, o método da bissecção não serve para achar a raiz, por exemplo de $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, pois o gráfico <u>apenas toca</u> o eixo dos x no lugar da raiz.



- Nesse caso teria que ser usado o método de Newton.

Exercícios Propostos

• **Resolva as questões acima usando bissecção e Newton.**

• **Calcule a raiz de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ no intervalo $[2,3]$ com precisão de 10^{-5}. (Obs.: na bissecção a raiz é encontrada na 18ª. iteração. Por Newton, com o 1º. chute igual a $2,5$, a raiz é encontrada na 4ª. iteração).**

• **Calcule a raiz de $f(x) = 4\ln(x) - \sqrt{x} + 0.5$ no intervalo $[1,2]$ com precisão de 10^{-5}. (Obs.: na bissecção a raiz é encontrada na 18ª. iteração. Por Newton, com o 1º. chute igual a $1,5$, a raiz é encontrada na 4ª. iteração).**

• **Obs.:** $f'(x) = (8 - \sqrt{x})/2x$

Por enquanto é só...

Estão abençoados!