UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

Semana 01 e 02

1 Funções vetoriais e curvas espaciais

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem. Uma **função vetorial**, ou **função a valores vetoriais**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Considere o caso de funções vetoriais $\boldsymbol{r}$ cujos valores são vetores tridimensionais, ou seja, para todo número t do domínio de $\boldsymbol{r}$ existe um único vetor de V_3 denotado por $\boldsymbol{r}(t)$. Se $f(t), g(t)$ e $h(t)$ são as funções componentes de $\boldsymbol{r}$ e podemos escrever

$$\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}.$$

Denotamos por t a variável independente que representa o tempo na maioria das aplicações de funções vetoriais.

Exemplo 1. *Se $\boldsymbol{r}(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t})$, então as funções componentes são:*

$$f(t) = t^3, \; g(t) = \ln(3-t), \; h(t) = \sqrt{t}.$$

O domínio de $\boldsymbol{r}$ é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão $\boldsymbol{r}(t)$ está definida. Note que as funções componentes estão definidas quando $3-t>0$ e $t \geq 0$. Portanto, o domínio de $\boldsymbol{r}$ é o intervalo $[0,3)$

1.1 Limite e continuidade

O limite de uma função vetorial $\boldsymbol{r}$ é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como a seguir:

Definição 1. *Se* $\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, *então*

$$\lim_{t\to a} \boldsymbol{r}(t) = (\lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t))$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Exemplo 2. *Determine* $\lim_{t\to 0} \boldsymbol{r}(t)$, *em que* $\boldsymbol{r}(t) = (1 + t^3, te^{-t}, \frac{sen(t)}{t})$.

Exemplo 3. *Determine* $\lim_{t\to \pi/4} \boldsymbol{r}(t)$, *em que* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t), sen(t), t)$.

Definição 2. *Uma função vetorial* $\boldsymbol{r}(t)$ *é contínua em um ponto* $t = a$ *no seu domínio se* $\lim_{t\to a} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(a)$. *A função é contínua se for contínua em todos os pontos.*

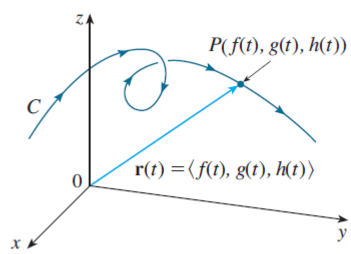
1.2 Curvas no espaço

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que f, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I. Em seguida, o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço, em que

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

e t varia no intervalo I, é chamado curva espacial. As equações acima são denominadas de equações paramétricas de C e t é conhecido como parâmetro.

Podemos pensar em C como tendo sido traçada pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante t é $(f(t), g(t), h(t))$. Se considerarmos agora a função vetorial $\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, então $\boldsymbol{r}(t)$ é o vetor posição do ponto de $P(f(t), g(t), h(t))$ em C, ou seja, C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição $\boldsymbol{r}(t)$.



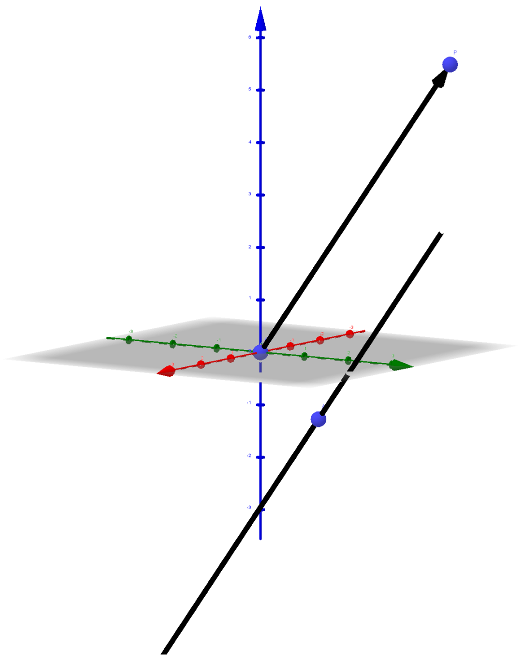
Exemplo 4. *Descreva a curva definida pela função vetorial* $\boldsymbol{r}(t) = (1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t)$.

Solução:

As equações paramétricas correspondentes são:

$$x = 1 + t, \quad y = 2 + 5t, \quad z = -1 + 6t$$

Note que essa equação paramétrica da reta passa pelo ponto $P(1, 2, -1)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (1, 5, 6)$. Como alternativa, podemos observar que a função pode ser reescrita da seguinte forma: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$. Logo, $\boldsymbol{r}(t) = (1, 2, -1) + t \cdot (1, 5, 6)$.



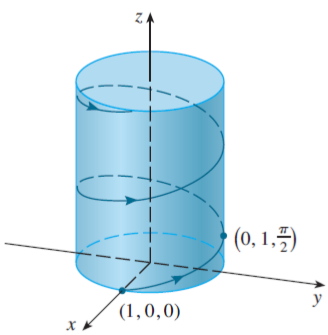
Exemplo 5. *Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t), sen(t), t)$.

Solução:

Note que as equações paramétricas para essa curva são:

$$x = cos(t), \quad y = sen(t) \quad z = t.$$

Pela relação fundamental da trigonometria, segue que $x^2 + y^2 = sen^2(t) + cos^2(t) = 1$, isso implica que para todos os valores de t, a curva deve situar-se no cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. O ponto (x, y, z) está diretamente acima do ponto $(x, y, 0)$, que se move para a esquerda em torno do círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy. Como $z = t$, a curva gira para cima ao redor do cilindro quando t aumenta.



A curva esboçada acima se chama de hélice.

Exemplo 6. *Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P(1,3,-2)$ ao ponto $Q(2,-1,3)$.*

Observação 1 - *Lembre que uma equação vetorial para o segmento de reta que une a extremidade do vetor $\boldsymbol{r}_0$ a extremidade do vetor $\boldsymbol{r}_1$ é dada por:*

$$\boldsymbol{r}(t) = (1-t)\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{r}_1 \quad com \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Dessa forma, tome $\boldsymbol{r}_0 = (1,3,-2)$ e $\boldsymbol{r}_1 = (2,-1,3)$. A equação vetorial obtida será:

$$\boldsymbol{r}(t) = (1-t)(1,3,-2) + t(2,-1,3) = (1+t, 3-4t, -2+5t) \quad com \quad 0 \leq t \leq 1.$$

As equações paramétricas da reta são:

$$x = 1+t; \quad y = 3+4t; \quad z = -2+5t$$

1.3 Derivadas de funções vetoriais

Definição 3. *A derivada $\boldsymbol{r}^{'}$ de uma função vetorial $\boldsymbol{r}$ é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:*

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}^{'}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h}$$

se este limite existir.

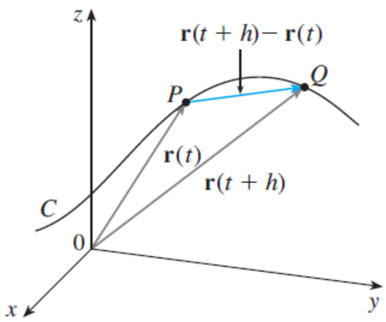
Ideia geométrica - Se os pontos P e Q têm vetores posição $\boldsymbol{r}(t)$ e $\boldsymbol{r}(t+h)$, então $\vec{PQ}$ representa o vetor $\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)$, que pode ser visto como um vetor secante. Se $h > 0$, o múltiplo escalar $(1/h)(\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t))$ tem o mesmo sentido que $\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)$. Quando $h \to 0$, parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão, o vetor $\boldsymbol{r}^{'}(t)$ é chamado o **vetor tangente** à curva definida por $\boldsymbol{r}$ no ponto P, desde que $\boldsymbol{r}^{'}(t)$ exista e $\boldsymbol{r}^{'}(t) \neq \mathbf{0}$. A **reta tangente** a C em P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\boldsymbol{r}^{'}(t)$. Além disso, definimos o **vetor tangente unitário**, dado por

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}^{'}(t)}{|\boldsymbol{r}^{'}(t)|}.$$

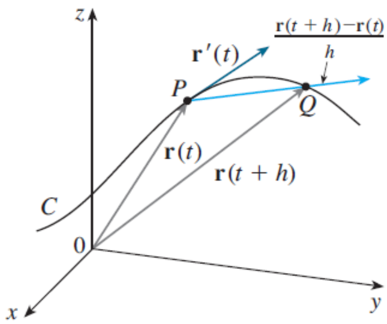
O teorema a seguir fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial $\boldsymbol{r}$ por derivação de cada componente de $\boldsymbol{r}$.

Teorema 1. *Se $\boldsymbol{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, em que f, g e h são funções diferenciáveis, então*

$$\boldsymbol{r}^{'}(t) = (f^{'}(t), g^{'}(t), h^{'}(t))$$



(a) O vetor secante



(b) O vetor tangente

Exemplo 7.

a) Determine a derivada de $\boldsymbol{r}(t) = (1 + t^3, te^{-t}, sen(2t))$.

b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto em que $t = 0$.

Teorema 2. *(**Regras de Derivação**) Suponha que* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *sejam funções vetoriais diferenciáveis,* c *um escalar e* f *uma função real. Então,*

a) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}(t)] = (\boldsymbol{u}^{'}(t)) + (\boldsymbol{v}^{'}(t))$.

b) $\dfrac{d}{dt}(c\boldsymbol{u}(t)) = c\boldsymbol{u}^{'}(t)$.

c) $\dfrac{d}{dt}[f(t)\boldsymbol{u}(t)] = f(t)^{'}\boldsymbol{u}(t) + f(t)\boldsymbol{u}^{'}(t)$.

d) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}^{'}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}^{'}(t)$.

e) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}^{'}(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}^{'}(t)$.

f) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(f(t))] = f^{'}(t)\boldsymbol{u}^{'}(f(t))$*(**Regra da cadeia**).*

Exemplo 8. *Mostre que, se* $|\boldsymbol{r}(t)| = c$ *(uma constante), então* $\boldsymbol{r}^{'}(t)$ *é ortogonal a* $\boldsymbol{r}(t)$ *para todo* t.

1.4 Integrais de funções vetoriais

A integral definida de uma função vetorial $\boldsymbol{r}(t)$ pode ser definida da mesma forma que para a função real, exceto que a integral resulta em um vetor. Mas podemos expressar a integral de suas funções componentes f, g e h como segue:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\boldsymbol{k}$$

Podemos estender o Teorema Fundamental o Cálculo para as funções vetoriais contínuas como se segue:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{R}(t)\Big|_a^b = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

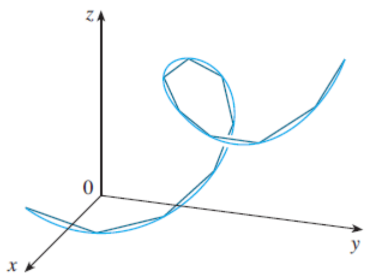
em que $\boldsymbol{R}$ é uma primitiva de $\boldsymbol{r}$, ou seja, $\boldsymbol{R}'(t) = \boldsymbol{r}(t)$. Usaremos a notação $\int \boldsymbol{r}(t)dt$ para as integrais indefinidas (primitivas).

Exemplo 9. *Se* $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos(t)\boldsymbol{i} + sen(t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$, *determine* $\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{r}(t)dt$.

1.5 Comprimento de arco

Definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas $x = f(t), y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, como o limite do comprimento das poligonais inscritas e, para o caso no qual f' e g' são contínuas, chegamos à seguinte fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt. \tag{1}$$



Para o caso de uma curva espacial a definição é equivalente. Suponha que a curva tenha equação vetorial $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $a \leq t \leq b$, ou, o que é equivalente, equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde f', g' e h' são funções contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que t cresce, a partir de a para b, é possível mostrar que

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt. \tag{2}$$

Observe que, o comprimento de arcos de curvas dados pelas fórmulas acima, podem ser escritos de forma mais compacta

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|dt. \tag{3}$$

Exemplo 10. *Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (sent)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ *do ponto* $(1, 0, 0)$ *até o ponto* $(1, 0, 2\pi)$.

Uma única curva C pode ser representada por mais de uma função vetorial. Por exemplo, a cúbica retorcida

$$\boldsymbol{r}_1(t) = (t, t^2, t^3), \quad 1 \leq t \leq 2, \tag{4}$$

poderia ser representada também pela função

$$\boldsymbol{r}_2(t) = (e^u, e^{2u}, e^{3u}), \quad 0 \leq u \leq \ln(2), \tag{5}$$

em que a relação entre os parâmetros t e u é dada por $t = e^u$. Ou seja, a mesma curva C tem essas duas **parametrizações**. Uma pergunta natural agora, seria se o comprimento de arco é independente dessas parametrizações. Em verdade, pode ser mostrado que, quando a equação 3 é usada para calcular o comprimento do arco, a resposta é independente da parametrização que é usada.

1.6 Função comprimento de arco

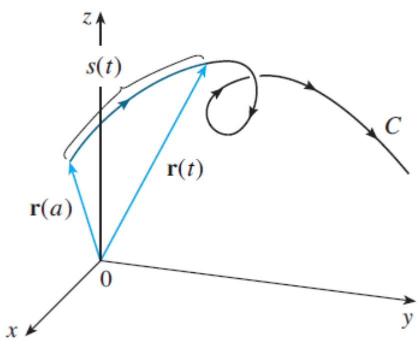
Suponhamos agora que C seja uma curva dada pela função vetorial

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

em que $\boldsymbol{r}'$ é contínua e C é percorrida exatamente uma vez à medida que t aumenta de a para b. Definimos sua **função de comprimento de arco** s por

$$s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(u)| du. \tag{6}$$

Então, $s(t)$ é o comprimento da parte de C entre $\boldsymbol{r}(a)$ e $\boldsymbol{r}(t)$, como vemos na figura a seguir.



É útil **parametrizar uma curva em relação ao comprimento do arco**, pois o comprimento de arco aparece naturalmente a partir da forma da curva e não depende do sistema de coordenadas utilizado. Se uma curva $\boldsymbol{r}(t)$ já está dada em termos de um parâmetro t e $s(t)$ é a função comprimento de arco dada pela equação 6, podemos ser capazes de escrever t como uma função de s: $t = t(s)$. Em seguida, a curva pode ser reparametrizada em termos de s

substituindo por t: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t(s))$. Assim, se $s = 3$, por exemplo, $\boldsymbol{r}(t(3))$ é a posição do ponto que está a três unidades de comprimento do início da curva.

Exemplo 11. *Reparametrize a hélice circular* $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t))\boldsymbol{i} + (sen(t))\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ *utilizando o comprimento de arco medido a partir de* $(1, 0, 0)$ *na direção de crescimento de* t.

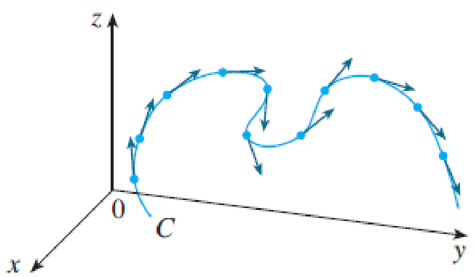
1.7 Curvatura

Uma parametrização $\boldsymbol{r}(t)$ é chamada **suave** em um intervalo I se $\boldsymbol{r}'$ for contínua e $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ em I. Uma curva é chamada de **suave** se tiver uma parametrização suave, ou seja, quando não possui quebras abruptas.

Se C for uma curva suave definida por uma função vetorial $\boldsymbol{r}$, lembre-se de que o vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$ será dado por

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

e indica a direção da curva. Na figura abaixo, podemos ver que $\boldsymbol{T}(t)$ muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta, mas muda de direção mais rapidamente quando a curva C se dobra ou se retorce mais acentuadamente. **Assim, a curvatura de C em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto.**



Definição 4. *A **curvatura** de uma curva é*

$$\kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right|$$

em que $\boldsymbol{T}$ é o vetor tangente unitário.

A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s. Assim, usando a regra da cadeia, escrevemos

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{e} \quad \kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{T}/dt}{ds/dt}\right|$$

Isso implica que,

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|} \tag{7}$$

Exemplo 12. *Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é* $1/a$.

Solução:

Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos(t)\boldsymbol{i} + asen(t)\boldsymbol{j},$$

Portanto,

$$\boldsymbol{r}'(t) = -asen(t)\boldsymbol{i} + acos(t)\boldsymbol{j} \quad e \quad |\boldsymbol{r}'(t)| = a.$$

Logo,

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|} = -sen(t)\boldsymbol{i} + cos(t)\boldsymbol{j}.$$

e

$$\boldsymbol{T}'(t) = -cos(t)\boldsymbol{i} - sen(t)\boldsymbol{j}.$$

Isso nos dá $|\boldsymbol{T}'(t)| = 1$, *então usando a fórmula 7, temos*

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|} = \frac{1}{a}.$$

Teorema 3. *A curvatura de uma curva dada pela função vetorial* $\boldsymbol{r}$ *é*

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} \tag{8}$$

Exemplo 13. *Determine a curvatura da cúbica retorcida* $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ *em um ponto genérico e em* $(0,0,0)$.

Para o caso especial de uma curva plana com a equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro e escrevemos $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$. Então, $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{j}$. Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, segue que $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{k}$. Além disso, segue que $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ e pelo Teorema 3 obtemos:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}.$$

Referências

[1] ANTON, H., BIVENS, I. e DAVIS, S., **Cálculo**, vol. 2, 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

[2] LEITHOLD, L., **O Cálculo com Geometria Analítica**, vol 2, 3. ed. São Paulo: HARBRA, 2016.

[3] STEWART, J., **Cálculo**, vol. 2, 8. ed. São Paulo: CENGAGE, 2016.

[4] THOMAS, G. B., WEIR, M. D. e HASS,J., **Cálculo**, vol. 2, 12 ed. São Paulo: Pearson, 2012.

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III

Conteúdo da semana 02 e 03

1 Funções de duas variáveis

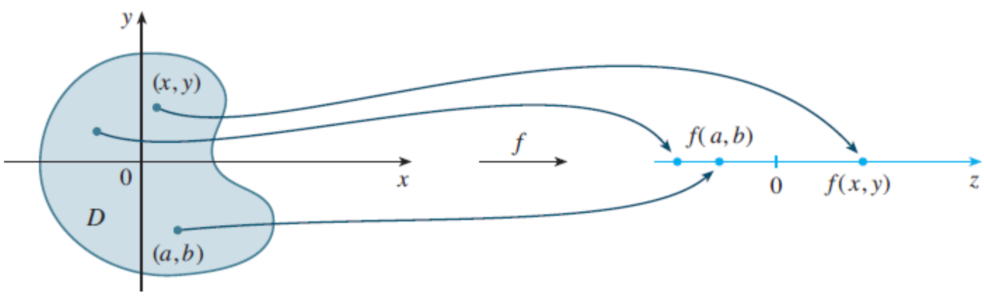
A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto. Podemos pensar em T como uma função de duas variáveis x e y, ou como uma função do par (x, y). Indicamos essa dependência funcional escrevendo $T = f(x, y)$.

O volume V de um cilindro circular depende de seu raio r e de sua altura h. De fato, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Podemos dizer que V é uma função de r e de h, e escrevemos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definição 1. *Uma* ***função f de duas variáveis*** *é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o* ***domínio*** *de f e sua* ***imagem*** *é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y)/(x, y) \in D\}$.*

Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y). As variáveis x e y são **variáveis independentes** e z é a **variável dependente**.

Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas como mostra a figura a seguir.



Em que o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy e a imagem é um conjunto de números na reta real, mostrado como um eixo z.

Por exemplo, se $f(x, y)$ representa a temperatura em um ponto (x, y) em uma placa de metal com formato de D, podemos pensar que o eixo z é um termômetro exibindo as temperaturas registradas.

Se a função f é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subtendido que o domínio de f é o conjunto de todos os pares os quais a expressão dada fornece um número real bem definido. Ou seja, ao definir funções de mais de uma variável, seguimos a prática habitual de excluir entradas que levem a números complexos ou à divisão por zero.

$$\text{Se} \quad f(x,y) = \sqrt{y - x^2} \text{ (perceba que } y \text{ não pode ser menor do que } x^2).$$

$$\text{Se} \quad f(x,y) = \frac{1}{xy}, \; xy \quad \text{não pode ser zero.}$$

Consideramos que o domínio de uma função seja o maior conjunto para o qual a regra de definição gera números reais, a menos que esses domínios sejam especificados de outra forma explicitamente. A imagem consiste no conjunto de valores de saída para a variável dependente.

Exemplo 1. *a) Estas são funções de duas variáveis. Observe as restrições que podem ser aplicadas a seus domínios para que seja obtido um valor real para a variável dependente z.*

Tabela 1: Função, domínio e imagem de funções de duas variáveis.

Função	Domínio	Imagem
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$z = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$z = sen(xy)$	Todo o plano	$[-1, 1]$

b) Funções de três variáveis com restrições em alguns de seus domínios.

Tabela 2: Função, domínio e imagem de funções de três variáveis.

Função	Domínio	Imagem
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Todo o espaço	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln(z)$	Semiespaço $z > 0$	$(-\infty, \infty)$

Exemplo 2. *Para cada uma das seguintes funções, calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.*

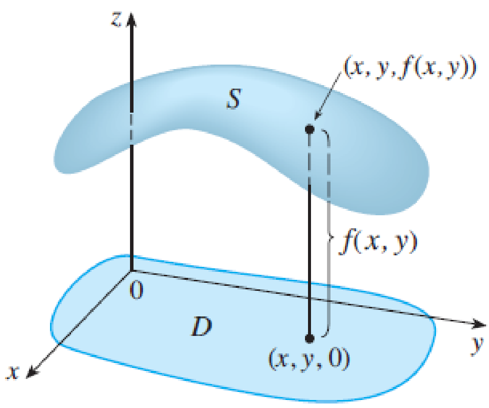
a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

2 Gráficos

Definição 2. *Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$, tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D.*

Assim como o gráfico de uma função f de uma única variável é uma curva C com equação $y = f(x)$, o gráfico de uma função f com duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x, y)$. Podemos visualizar o gráfico S de f como estando diretamente acima ou abaixo de seu domínio D no plano xy.



Exemplo 3. *Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.*

A função do exemplo anterior é um caso especial da função

$$f(x, y) = ax + by + c$$

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma dessas funções tem a equação

$$z = ax + by + c \text{ ou } ax + by - z + c = 0$$

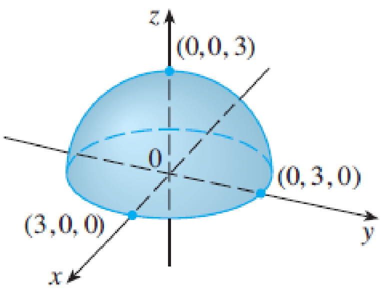
e, portanto, é um plano. Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

Exemplo 4. *Esboce o gráfico da função* $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Solução: *O gráfico tem a equação* $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. *Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos*

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

que reconhecemos como a equação da esfera de centro na origem e raio 3. Mas, como $z \geq 0$, *o gráfico de* g *é somente a metade superior da esfera.*



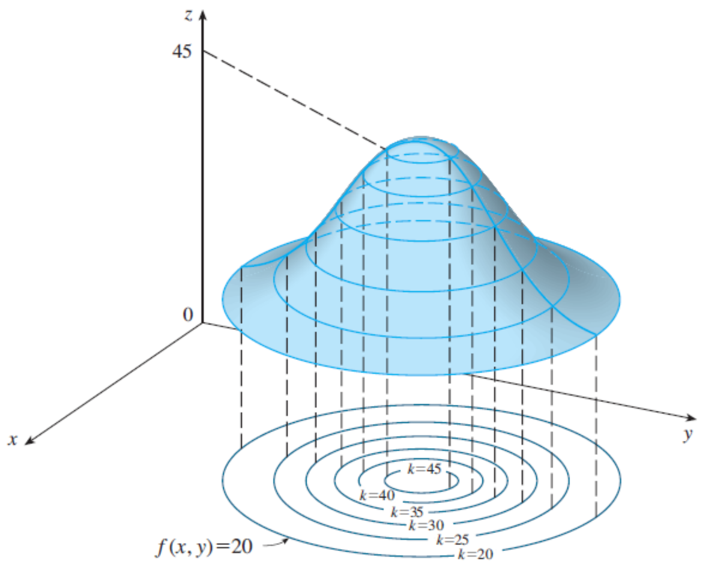
Nota 1: Uma esfera inteira não pode ser representada por uma única função de x e y. O hemisfério superior da esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$ é representado pela função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. O hemisfério inferior é representado pela função $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

3 Curvas de nível

Definição 3. *As* ***curvas de nível*** *de uma função* f *de duas variáveis são aquelas com equação* $f(x, y) = k$, *em que* k *é uma constante.*

Uma curva de nível $f(x, y) = k$ **é o conjunto de todos os pontos do domínio de** f **nos quais o valor de** f **é** k**.** Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k.

Perceba que as curvas de nível $f(x, y) = k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetados sobre o plano xy. Assim se você traçar curvas de nível da função e



visualizá-las elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função colocando as duas informações juntas. A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem próximas umas das outras. Ela será um pouco mais achada onde as curvas de nível estão distantes umas das outras.

Exemplo 5. *Esboce as curvas de nível da função* $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ *para os valores* $k = -6, 0, 6, 12$.

Solução: *As curvas de nível são* $6 - 3x - 2y = k$ *ou ainda* $3x + 2y + (k - 6) = 0$. *Essa é uma família de retas com inclinação* $-3/2$. *Para os valores de* k *pedidos na questão, temos que:*

$$Para \quad k = -6 \Rightarrow 3x + 2y - 12 = 0$$

$$Para \quad k = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

$$Para \quad k = 6 \Rightarrow 3x + 2y = 0$$

$$Para \quad k = 12 \Rightarrow 3x + 2y + 6 = 0$$

Exemplo 6. *Esboce as curvas de nível da função* $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ *para os valores* $k = 0, 1, 2, 3$.

4 Funções de três ou mais variáveis

Definição 4. *Uma **função com três variáveis**, f, é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real, denotado por $f(x, y, z)$.*

Por exemplo, a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude x e da longitude y do ponto e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$.

Exemplo 7. *Encontre o domínio de f se*

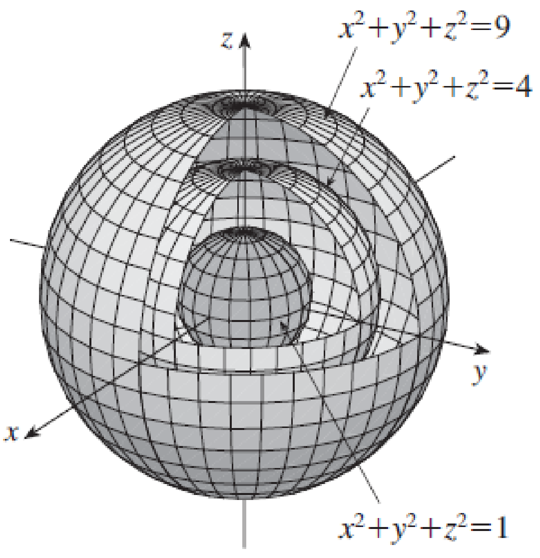
$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xysen(z).$$

É muito difícil visualizar uma função de f de três variáveis por seu gráfico, já que ele estaria em um espaço de **quatro dimensões**. No entanto, obtemos certo conhecimento de f ao examinar suas **superfícies de nível**, que são aquelas com equações $f(x, y, z) = k$, onde k é uma constante. Se o ponto (x, y, z) move-se ao longo de uma superfície de nível, o valor $f(x, y, z)$ permanece fixo.

Exemplo 8. *Encontre as superfícies de nível da função*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Solução: As superfícies de nível são $x^2 + y^2 + z^2 = k$, onde $k \geq 0$. Elas formam uma família de esferas. Elas formam uma família de **esferas concêntricas** com raio $\sqrt{k}$. Assim, enquanto (x, y, z) varia sobre qualquer esfera com centro O, o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo, como vemos na figura abaixo:



5 Função com n variáveis

Funções com qualquer número de variáveis podem ser consideradas. Uma **função com n variáveis** é uma regra que associa um número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas essas n-uplas.

Por exemplo, se uma companhia usa n ingredientes diferentes na fabricação de um produto alimentício, c_i é o custo por unidade o i-ésimo ingrediente e x_i unidades do ingrediente são usadas; então o custo total C dos ingredientes é uma função das n variáveis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$C = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

A função f é uma função a valores reais cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Por vezes, usamos uma notação vetorial para escrever estas funções de forma mais compacta: se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, frequentemente escreveremos $f(\boldsymbol{x})$ no lugar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Com essa notação podemos reescrever a função C como

$$f(x) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x},$$

onde $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n$ e $\boldsymbol{cx})$ denota o produto escalar dos vetores $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{x}$ em V_n.

Tendo em vista a correspondência biunívoca entre os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e os vetores posição em V_n, temos três maneiras diferentes de ver uma função f definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como uma função de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Como uma função de um único ponto n-dimensional $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3. Como uma função de um único vetor n-dimensional $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Veremos que todos os três pontos de vista são úteis.

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III - 2022.2

1ª Lista de Exercícios

1. Determine o domínio das funções vetoriais:

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = \left(\ln(t+1), \dfrac{t}{\sqrt{9-t^2}}, 2^t\right)$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = \left(\cos(t), \ln(t), \dfrac{1}{\sqrt{t-2}}\right)$

2. Determine os limites a seguir:

   (a) $\lim\limits_{t\to 0} \left(e^{-3t}, \dfrac{t^2}{sen^2(t)}, cos(2t)\right)$

   (b) $\lim\limits_{t\to\infty} \left(\dfrac{t^2+1}{3t^2+2}, \dfrac{1}{t}\right)$

   (c) $\lim\limits_{t\to 2}(t\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k})$

   (d) $\lim\limits_{t\to 1} \left(\dfrac{3}{t^2}, \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}, sen(2t)\right)$

3. Obtenha equações paramétricas da reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{r}(t)$ no ponto em que $t = t_0$.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (2 - \ln(t))\boldsymbol{j}\,; t_0 = 1.$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos(\pi t)\boldsymbol{i} + 2sen(\pi t)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}\,; t_0 = \dfrac{1}{3}.$

4. Obtenha uma equação vetorial da reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{r}(t)$ no ponto P_0 da curva.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (2t-1)\boldsymbol{i} + \sqrt{3t+4}\boldsymbol{j};\ P_0(-1, 2).$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} - \dfrac{1}{t+1}\boldsymbol{j} + (4-t^2)\boldsymbol{k};\ P_0(4, 1, 0).$

5. Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro t cresce.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (sen(t), t).$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = (t, 2-t, 2t).$

   (c) $\boldsymbol{r}(t) = (3, t, 2-t^2).$

   (d) $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + t^4\boldsymbol{j} + t^6\boldsymbol{k}.$

6. Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga os pontos P e Q.

   (a) $P(0,0,0), Q(1,2,3)$.

   (b) $P(0,-1,1), Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$.

7. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos(t), y = tsen(t), z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

8. Em quais pontos a curva $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (2t - t^2)\boldsymbol{k}$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$?

9. Determine a derivada da função vetorial.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{t-2}, 3, \frac{1}{t^2})$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = (t^2, \cos(t^2), sen^2(t))$

   (c) $\boldsymbol{r}(t) = (tsen(t), e^t\cos(t), sen(t)\cos(t))$

10. Determine o vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$ no ponto com valor e parâmetro dado t.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t), 3t, 2sen(2t))$ no ponto $t = 0$.

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4)$ no ponto $t = 1$.

11. Se $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, encontre $\boldsymbol{r}^{'}(t), \boldsymbol{T}(1), \boldsymbol{r}^{''}(t)$ e $\boldsymbol{r}^{'}(t) \times \boldsymbol{r}^{''}(t)$.

12. Se $\boldsymbol{r}(t) = (e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t})$, encontre $\boldsymbol{T}(0), \boldsymbol{r}^{''}(0)$ e $\boldsymbol{r}^{'}(t) \cdot \boldsymbol{r}^{''}(t)$.

13. Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

    (a) $x = t^2 + 1, y = 4\sqrt{t}, z = e^{t^2 - t}$; $P(2,4,1)$.

    (b) $x = e^{-t}\cos(t), y = e^{-t}sen(t), z = e^{-t}$; $P(1,0,1)$.

14. Calcule as integrais a seguir.

    (a) $\displaystyle\int_0^1 (6t^2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - 8t^3\boldsymbol{k})dt$

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1}\boldsymbol{i} + \frac{1}{t^2+1}\boldsymbol{j} + \frac{2t}{t^2+1}\boldsymbol{k}\right) dt$

(c) $\displaystyle\int (e^t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + \ln(t)\boldsymbol{k})dt$

15. Determine o comprimento da curva dada.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos(t), \sqrt{5}t, 2sen(t))$, $-2 \leq t \leq 2$

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$, $0 \leq t \leq 1$

    (c) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$, $0 \leq t \leq 1$

16. Encontre a função comprimento de arco da curva medida a partir do ponto P na direção de t crescente e, a seguir, reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco começando de P.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (5-t)\boldsymbol{i} + (4t-3)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}$; $P(4,1,3)$

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = e^t sen(t)\boldsymbol{i} + e^t\cos(t)\boldsymbol{j} + \sqrt{2}e^t\boldsymbol{k}$; $P(0,1,\sqrt{2})$.

17. Determine o vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$ e a curvatura.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (t, 3\cos(t), 3sen(t))$

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$

18. Em que ponto a curva $y = e^x$ tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \to \infty$.

19. Determine a curvatura das funções:

    a) $y = x^3$

    b) $y = cos(x)$

20. Encontre a curvatura de $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ no ponto $(1,1,1)$.

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III - 2022.1

2ª Lista de exercícios

1. Determine o domínio da função.

   a) $f(x,y) = \sqrt{x-2} + \sqrt{y-1}$

   b) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

   c) $g(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

   d) $h(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

   e) $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{9-y^2} + \sqrt{1-z^2}$

2. Esboce o gráfico das funções:

   a) $f(x,y) = y$

   b) $g(x,y) = 10 - 4x - 5y$

   c) $h(x,y) = x^2 + 4y^2 + 1$

3. Determine o limite, se existir, ou mostre que não existe.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} (x^2y^3 - 4y^2)$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi/2)} ysen(x-y)$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos(y)}{3x^2 + y^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2\cos(y)}{x^2 + y^4}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2} tg(xz)$

4. Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

   a) $f(x,y) = (y - 2x)^2$

   b) $g(x,y) = \sqrt[3]{y^2 + x^2}$

5. Descreva as superfícies de nível da função:

a) $f(x,y,z) = x + 3y + 5z$

b) $f(x,y,z) = y^2 + z^2$

6. Determine $h(x,y) = g(f(x,y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

   (a) $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x,y) = 2x + 3y - 6$

   (b) $g(t) = t + \ln(t), \quad f(x,y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

7. Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

   (a) $F(x,y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$

   (b) $F(x,y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$

8. Se $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$ e interprete esses números como inclinações.

9. Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

   (a) $f(x,y) = y^4 + 5xy^3$

   (b) $f(x,t) = t^2e^{-x}$

   (c) $z = \ln(x + t^2)$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

   (e) $z = (2x + 3y)^{10}$

   (f) $w = ln(x + 2y + 3z)$

   (g) $u = xysen^{-1}(yz)$

   (h) $f(x,y,z) = x^3yz^2 + 2yz$

10. Use derivação implícita para encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

    (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

    (b) $e^x = xyz$

    (c) $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

11. Verifique se a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$,

    (a) $u = x^4y^3 - y^4$

    (b) $u = \cos(x^2y)$

Afirmação 1. *As derivadas parciais ocorrem em equações diferenciais parciais que exprimem certas leis físicas. Por exemplo, a equação diferencial parcial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada equação de Laplace. As soluções dessa equação são chamadas funções harmônicas e são muito importantes no estudo do calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

12. Mostre que a função $u(x, y) = e^x sen(y)$ é solução da equação de Laplace.

Afirmação 2. *A equação da onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante.

13. Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda.

    (a) $u = sen(kx)sen(akt)$

    (b) $u = \dfrac{t}{a^2t^2 - x^2}$

14. Use a definição de diferenciabilidade para provar que

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

15. Use a regra da cadeia para achar $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dfrac{dw}{dt}$.

    (a) $z = xy^3 - x^2y, \quad x = t^2 + 1, y = t^2 - 1.$

    (b) $z = sen(x)\cos(y), \quad x = \sqrt{t}, y = 1/t.$

    (c) $w = xe^{y/z}, x = t^2, y = 1 - t, z = 1 + 2t.$

16. Use a regra da cadeia para achar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ ou $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

    (a) $z = (x - y)^5, x = s^2t, y = st^2.$

    (b) $z = \ln(3x + 2y), x = ssen(t), y = t\cos(s).$

17. A pressão de 1 mol de um gás ideal está aumentando em uma taxa de $0,05$k Pa/s e a temperatura está aumentando em uma taxa de $0,15$K/s. Use a equação $PV = 8,31T$ para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for 20 kPa e a temperatura for 320K.

18. O comprimento l, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em um determinado momento, as dimensões são $l = 1m$ e $w = h = 2m$, l e w estão aumentando em uma taxa de $2m/s$ enquanto h está decrescendo em uma taxa de $3m/s$. Nesse instante, encontre as taxas em que as seguintes quantidades estão variando.

    (a) O volume.

    (b) A área da superfície.

19. Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

    (a) $f(x, y) = xy^3 - x^2, \quad (1, 2), \quad \theta = \pi/3.$

    (b) $f(x, y) = y\cos(xy), \quad (0, 1), \quad \theta = \pi/4.$

20. Determine o gradiente de f, depois calcule o gradiente no ponto P. Encontre também a taxa de variação de f em P na direção do vetor u.

    (a) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}, \quad P(2, 1), \quad \mathbf{u} = (3/5, 4/5).$

    (b) $f(x, y, z) = xe^{2yz}, \quad P(3, 0, 2), \quad \mathbf{u} = (2/3, -2/3, 1/3)$

21. Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

    (a) $f(x, y) = e^x sen(y), \quad P(0, \pi/3), \quad \mathbf{v} = (-6, 8).$

    (b) $g(s, t) = s\sqrt{t}, \quad P(2, 4), \quad \mathbf{v} = (2, -1)$

    (c) $f(x, y, z) = x^2y + y^2z, \quad P(1, 2, 3), \quad \mathbf{v} = (2, -1, 2)$

22. Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

    (a) $f(x, y) = 4y\sqrt{x}, \ (4, 1).$

    (b) $f(x, y) = sen(xy), \ (1, 0).$

23. Encontre uma equação (a) do plano tangente e (b) da reta normal à superfície dada no ponto especificado.

    (a) $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10, \ (3, 3, 5).$

    (b) $xy^2z^3 = 8, \ (2, 2, 1).$

24. Se $f(x, y) = xy$, encontre o vetor gradiente $\nabla f(3, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 6$ no ponto $(3, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.