Vetores e Geometria Analítica
Aula 12 - Vetores no Espaço

por

Maxwell Aires da Silva

Universidade Estadual da Paraíba – UEPB

Campina Grande
16 de fevereiro de 2022

Operações

Nesta segunda parte do curso, estudaremos essencialmente o Espaço $\mathbb{R}^3$ também do ponto de vista algébrico e vetorial, e para isso, vamos definir o nosso espaço ambiente.

Definição (O Espaço $\mathbb{R}^3$)

*Define-se o **Espaço** $\mathbb{R}^3$ como sendo o seguinte conjunto:*

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\ ;\ x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Para trabalharmos com este conjunto do ponto de vista vetorial, precisaremos de uma noção de distância entre pontos do espaço, a qual é dada de maneira inteiramente análoga à noção de distância no plano, isto é, dados A, B pontos da reta $\mathcal{R}$, existe um número real c tal que $c = d(A, B) = |b - a|$, em que b é o número real associado ao ponto B da reta e a é o número real associado ao ponto A da reta.

Nesta segunda parte do curso, estudaremos essencialmente o Espaço $\mathbb{R}^3$ também do ponto de vista algébrico e vetorial, e para isso, vamos definir o nosso espaço ambiente.

Definição (O Espaço $\mathbb{R}^3$)

Define-se o ***Espaço*** $\mathbb{R}^3$ *como sendo o seguinte conjunto:*

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \; ; \; x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Para trabalharmos com este conjunto do ponto de vista vetorial, precisaremos de uma noção de distância entre pontos do espaço, a qual é dada de maneira inteiramente análoga à noção de distância no plano, isto é, dados A, B pontos da reta $\mathcal{R}$, existe um número real c tal que $c = d(A, B) = |b - a|$, em que b é o número real associado ao ponto B da reta e a é o número real associado ao ponto A da reta.

Nesta segunda parte do curso, estudaremos essencialmente o Espaço $\mathbb{R}^3$ também do ponto de vista algébrico e vetorial, e para isso, vamos definir o nosso espaço ambiente.

Definição (O Espaço $\mathbb{R}^3$)

Define-se o ***Espaço*** $\mathbb{R}^3$ *como sendo o seguinte conjunto:*

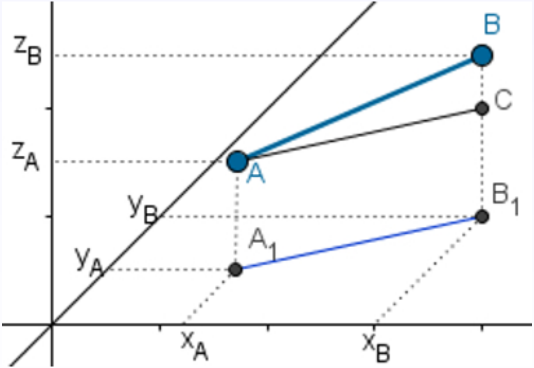
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \; ; \; x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Para trabalharmos com este conjunto do ponto de vista vetorial, precisaremos de uma noção de distância entre pontos do espaço, a qual é dada de maneira inteiramente análoga à noção de distância no plano, isto é, dados A, B pontos da reta $\mathcal{R}$, existe um número real c tal que $c = d(A, B) = |b - a|$, em que b é o número real associado ao ponto B da reta e a é o número real associado ao ponto A da reta.

Considere dois pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$. Sabe-se da Geometria Analítica que

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Figura: Distância entre pontos no Espaço



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/

De maneira análoga à forma como definimos vetores no plano, define-se vetores no espaço, inclusive suas operações, as quais são definidas como segue

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} + \vec{v}. \end{aligned}$$

Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ tem-se

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

A segunda operação é definida como segue:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \vec{u}) &\longmapsto \alpha \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ tem-se

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

De maneira análoga à forma como definimos vetores no plano, define-se vetores no espaço, inclusive suas operações, as quais são definidas como segue

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} + \vec{v}. \end{aligned}$$

Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ tem-se

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

A segunda operação é definida como segue:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \vec{u}) &\longmapsto \alpha \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ tem-se

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

A Norma

Analogamente à forma como se define **Norma** de vetores no plano, faz-se no espaço.

Definição (Norma)

*Define-se a **Norma** de $\vec{u} = (x, y, z)$ da seguinte forma:*

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A norma no espaço goza das mesmas propriedades vistas no plano, as quais vamos apresentar mas não vamos demonstrar, pois o processo é inteiramente análogo ao caso no plano.

Analogamente à forma como se define **Norma** de vetores no plano, faz-se no espaço.

Definição (Norma)

*Define-se a **Norma** de $\vec{u} = (x, y, z)$ da seguinte forma:*

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A norma no espaço goza das mesmas propriedades vistas no plano, as quais vamos apresentar mas não vamos demonstrar, pois o processo é inteiramente análogo ao caso no plano.

Analogamente à forma como se define **Norma** de vetores no plano, faz-se no espaço.

Definição (Norma)

*Define-se a **Norma** de $\vec{u} = (x, y, z)$ da seguinte forma:*

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A norma no espaço goza das mesmas propriedades vistas no plano, as quais vamos apresentar mas não vamos demonstrar, pois o processo é inteiramente análogo ao caso no plano.

(1) $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$;

(2) $||\vec{u}|| > 0, \ \forall \ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$;

(3) $||\alpha \cdot \vec{u}|| = |\alpha| \cdot ||\vec{u}||, \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall \ \vec{u} \in \mathbb{R}^3$;

(4) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||, \ \forall \ \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Para normalizar um vetor não nulo $\vec{u}$ no espaço, o processo é análogo ao visto no plano, isto é,

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}.$$

(1) $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$;

(2) $||\vec{u}|| > 0, \ \forall \ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$;

(3) $||\alpha \cdot \vec{u}|| = |\alpha| \cdot ||\vec{u}||, \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall \ \vec{u} \in \mathbb{R}^3$;

(4) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||, \ \forall \ \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Para normalizar um vetor não nulo $\vec{u}$ no espaço, o processo é análogo ao visto no plano, isto é,

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}.$$

O Produto Escalar

Definição (Produto Escalar)

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores no espaço. Define-se o ***Produto Escalar*** *entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ da seguinte forma:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

O produto escalar possui as mesmas propriedades do produto escalar entre vetores do plano, a saber,

(1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$;

(2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

(3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

(4) $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Definição (Produto Escalar)

*Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores no espaço. Define-se o **Produto Escalar** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ da seguinte forma:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

O produto escalar possui as mesmas propriedades do produto escalar entre vetores do plano, a saber,

(1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$;

(2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

(3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

(4) $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Observação

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz entre vetores no espaço é válida igualmente a vetores no plano, a qual é

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||.$$

Observação

A expressão que determina o ângulo entre vetores também é a mesma que utilizamos para vetores no plando, a saber,

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}.$$

Observação

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz entre vetores no espaço é válida igualmente a vetores no plano, a qual é

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||.$$

Observação

A expressão que determina o ângulo entre vetores também é a mesma que utilizamos para vetores no plando, a saber,

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}.$$

Aplicações

Vamos apresentar algumas aplicações do produto escalar.

Exemplo (A Identidade de Polarização)

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores não nulos no espaço. Mostre que

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2}{4}.$$

Solução: De fato, sabemos que

$$\begin{aligned}||\vec{u}+\vec{v}||^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2.\end{aligned}$$

Vamos apresentar algumas aplicações do produto escalar.

Exemplo (A Identidade de Polarização)

Sejam $\vec{u},\ \vec{v}$ vetores não nulos no espaço. Mostre que

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2}{4}.$$

Solução: De fato, sabemos que

$$\begin{aligned} ||\vec{u}+\vec{v}||^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \\ &= ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2. \end{aligned}$$

Vamos apresentar algumas aplicações do produto escalar.

Exemplo (A Identidade de Polarização)

Sejam $\vec{u},\ \vec{v}$ vetores não nulos no espaço. Mostre que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2}{4}.$$

Solução: De fato, sabemos que

$$\begin{aligned} ||\vec{u}+\vec{v}||^2 &= (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) \\ &= ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} ||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \\ &= ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2. \end{aligned}$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} ||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - ||\vec{v}||^2 \\ &= 4\vec{u}\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

Logo,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2}{4}.$$

$\square$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \\
&= ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2.
\end{aligned}
$$

Daí, tem-se

$$
\begin{aligned}
||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - ||\vec{v}||^2 \\
&= 4\vec{u}\cdot\vec{v}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2}{4}.$$

$\square$

Analogamente,

$$\begin{aligned} ||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \\ &= ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2. \end{aligned}$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} ||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - ||\vec{v}||^2 \\ &= 4\vec{u}\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

Logo,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2}{4}.$$

$\square$

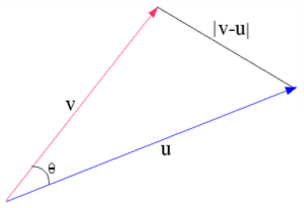
Exemplo (Produto Escalar via Lei dos Cossenos)

Mostre, usando a Lei dos Cossenos, que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta.$$

Solução: De fato, considere a figura a seguir:

Figura: Triângulo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.



Fonte: https://pt.wikibooks.org/

Pela Lei dos Cossenos, vale

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta.$$

Mas, como $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$, obtemos:

$$-2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta,$$

donde segue que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta.$$

□

Pela Lei dos Cossenos, vale

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta.$$

Mas, como $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$, obtemos:

$$-2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta,$$

donde segue que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta.$$

$\square$

Pela Lei dos Cossenos, vale

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot\cos\theta.$$

Mas, como $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$, obtemos:

$$-2\vec{u}\cdot\vec{v} = -2||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot\cos\theta,$$

donde segue que

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot\cos\theta.$$

$\square$

Exemplo

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, mostre que

$$|\sin\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}.$$

Solução: De fato, basta tomar os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Agora, perceba o seguinte:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta + 0 \cdot 0 = \sin\theta + \cos\theta.$$

Exemplo

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, mostre que

$$|\sin\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}.$$

Solução: De fato, basta tomar os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Agora, perceba o seguinte:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta + 0 \cdot 0 = \sin\theta + \cos\theta.$$

Também sabemos que

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2} \ \text{ e } \ ||\vec{v}|| = 1.$$

Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \quad &\Rightarrow \quad |\sin\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2} \cdot 1 \\ &\Rightarrow \quad |\sin\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Também sabemos que

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2} \ \text{ e } \ ||\vec{v}|| = 1.$$

Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \quad &\Rightarrow \quad |\sin\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2} \cdot 1 \\ &\Rightarrow \quad |\sin\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, mostre que

$$\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \leq \frac{1}{2}.$$

Solução: De fato, basta tomar os vetores $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ e $\vec{v} = (\sec\theta, \csc\theta, 0)$. Agora, perceba o seguinte

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\theta \cdot \sec\theta + \sin\theta \cdot \csc\theta + 0 \cdot 0 = 2.$$

Exemplo

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, mostre que

$$\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \leq \frac{1}{2}.$$

Solução: De fato, basta tomar os vetores $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ e $\vec{v} = (\sec\theta, \csc\theta, 0)$. Agora, perceba o seguinte

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\theta \cdot \sec\theta + \sin\theta \cdot \csc\theta + 0 \cdot 0 = 2.$$

Também sabemos que

$$||\vec{u}|| = 1 \;\text{ e }\; ||\vec{v}|| = \frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}|| \quad \Rightarrow \quad 2 \leq 1\cdot\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta\cdot\cos^2\theta \leq \frac{1}{2}.$$

$\square$

Também sabemos que

$$||\vec{u}|| = 1 \;\; \text{e} \;\; ||\vec{v}|| = \frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}|| \quad &\Rightarrow \quad 2 \leq 1\cdot\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \\ &\Rightarrow \quad \sin^2\theta\cdot\cos^2\theta \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

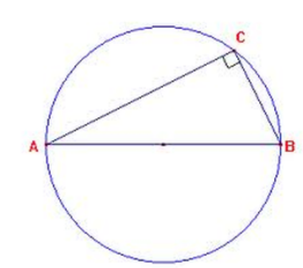
$\square$

Exemplo (Ângulo Inscrito em um Semicírculo)

Mostre, usando vetores, que qualquer ângulo inscrito em semicírculos é reto.

Solução: De fato, observe a figura a seguir:

Figura: Representação



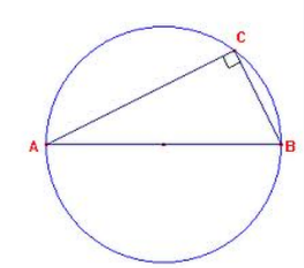
Fonte: http://geometriamatematica6.weebly.com/

Exemplo (Ângulo Inscrito em um Semicírculo)

Mostre, usando vetores, que qualquer ângulo inscrito em semicírculos é reto.

Solução: De fato, observe a figura a seguir:

Figura: Representação



Fonte: http://geometriamatematica6.weebly.com/

Considere O o centro do semicírculo, e daí temos:

- $\vec{AO} = \vec{u} \Rightarrow ||\vec{u}|| = R;$
- $\vec{OB} = \vec{u} \Rightarrow ||\vec{u}|| = R;$
- $\vec{OC} = \vec{v} \Rightarrow ||\vec{v}|| = R;$
- $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v};$
- $\vec{CB} = \vec{u} - \vec{v}.$

Considere O o centro do semicírculo, e daí temos:

- $\vec{AO} = \vec{u} \Rightarrow ||\vec{u}|| = R$;
- $\vec{OB} = \vec{u} \Rightarrow ||\vec{u}|| = R$;
- $\vec{OC} = \vec{v} \Rightarrow ||\vec{v}|| = R$;
- $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$;
- $\vec{CB} = \vec{u} - \vec{v}$.

Daí, temos

$$\begin{aligned}
(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= ||\vec{u}||^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v} - ||\vec{v}||^2 \\
&= R^2 - R^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\vec{u}+\vec{v})\perp(\vec{u}-\vec{v}) &\Rightarrow \cos\theta = 0 \\
&\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Daí, temos

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= ||\vec{u}||^2+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}-||\vec{v}||^2\\ &= R^2-R^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})\perp(\vec{u}-\vec{v}) &\Rightarrow \cos\theta=0\\ &\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$\square$