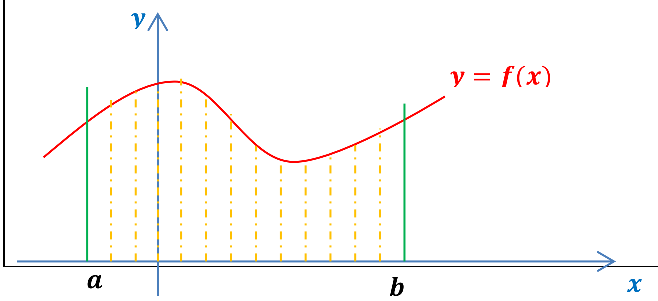
4. ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA (RESUMO)

4.1. Cálculo de Áreas

Conforme vimos ao definir integral definida, o cálculo de áreas de figuras planas pode ser feito por integração. Além disso, vimos que se a função f é contínua e não negativa em $[a, b]$, a definição de integral definida coincide com a definição de área dada nas aulas anteriores. Ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é a área da região sob o gráfico de f de a até b.

Iremos estudar os seguintes casos:

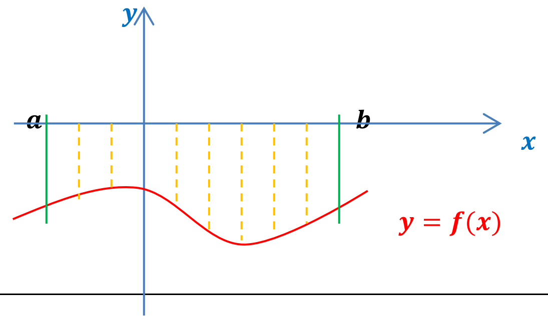
<u>Caso 1:</u> Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.



Neste caso,

$\boldsymbol{A = \int_a^b f(x)dx.}$

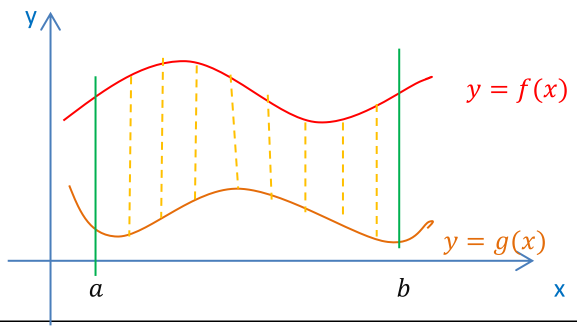
<u>Caso 2:</u> Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$.



Neste caso, basta tomar o módulo da integral $\int_a^b f(x)dx$, ou seja,

$$\boldsymbol{A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|}.$$

<u>Caso 3:</u> Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$.



Neste caso, temos:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx.}$$

Exemplo 5.1: Encontre a área da região limitada pela curva $y = 9 - x^2$ e o eixo dos x.

Solução: Calculando os pontos onde a curva intercepta o eixo dos x (que são os pontos cuja ordenada y é igual a zero), temos:

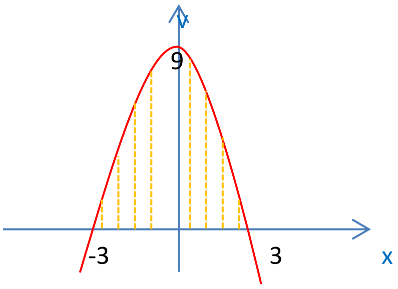
$$\mathbf{9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \; e \; x = -3}.$$

Note que no intervalo $[-3,3]$, temos $y = 9 - x^2 \geq 0$. Logo, a área procurada é a área sob o gráfico de $y = 9 - x^2$ de -3 até 3, ou seja,

$$\boldsymbol{A = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)dx \overset{TFC}{\cong} \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} =}$$

$$\boldsymbol{= (27 - 9) - (-27 + 9) = 18 + 18 = 36 \underbrace{u.a}_{\substack{unidades \\ de\ área}}}.$$

Gráfico:



Exemplo 5.2: Encontre a área limitada pela curva $y = -9 + x^2$ e o eixo dos x.

Exemplo 5.3: Encontre a área da região limitada pelas curvas

a) $y = x^2 - 1$ e $y = 3x + 3$.

b) $y = sen x \; e \; y = -sen x, \;\; x \in [0,2\pi]$.

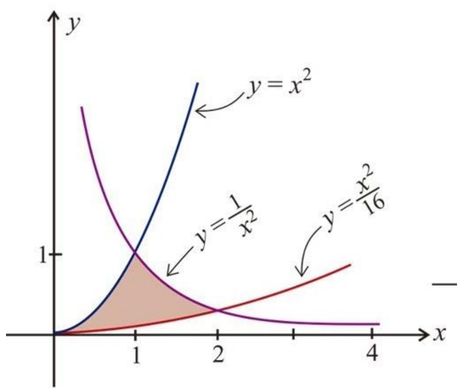
c) b) $x = \frac{1}{2}, \;\; x = \sqrt{y} \;\; e \; y = -x + 2$.

Observação 5.1: Também podemos calcular a área em cada um dos três casos estudados, usando a integral em relação à variável y.

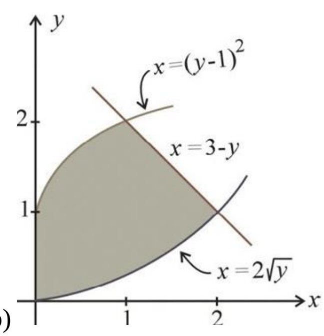
Exemplo 5.4: Encontrar a área da região limitada pelas curvas $x = -y \; e \; x = 2 - y^2$.

Solução: Iremos resolver este problema usando a integral definida com relação a variável y e depois, com relação à variável x, e veremos que a área é exatamente a mesma.

Exemplo 5.5. Encontre a área da região de cada uma das figuras dadas abaixo:



a)

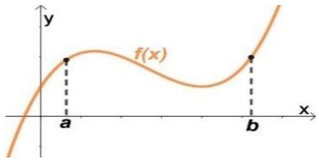


b)

Observação 5.2: quando a região é delimitada por mais de dois gráficos, o cálculo da área que desejamos encontrar é a soma de duas ou mais áreas, sendo cada uma delas compreendida entre os gráficos de duas funções.

4.2. Comprimento de Arco de uma Curva Plana usando a sua Equação Cartesiana

A representação gráfica de uma função contínua $y = f(x)$ num intervalo $[a, b]$, pode ser um segmento de reta ou uma curva qualquer. A porção da curva do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é chamada de arco.



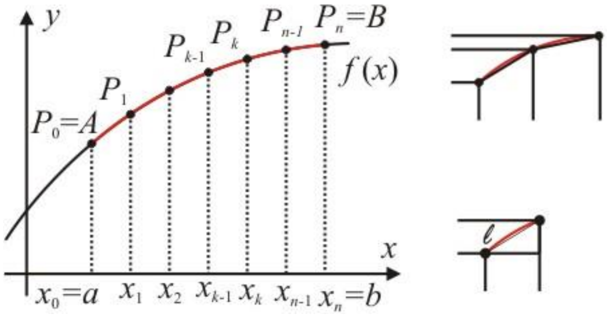
Vejamos agora, como aplicar a integral para determinar um número s, que intuitivamente, entendemos ser o comprimento desse arco.

Seja C a curva gráfico da função $y = f(x)$, onde $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com f' contínua em $[a, b]$. Queremos determinar o comprimento do arco da curva C, de A até B.

Para isto, seja P uma partição de $[a, b]$, dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Sejam $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ os correspondentes pontos sobre a curva C. Unindo os pontos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, obtemos uma poligonal, cujo comprimento nos dá uma aproximação do comprimento do arco da curva C, de A até B.



Assim, o comprimento da poligonal, denotado por I_n, é dado por:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \quad (1)$$

Como f é derivável em $[a, b]$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2, \dots, n$. Ou seja, para cada $i = 1,2, \dots, n$, existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i).(x_i - x_{i-1}). \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \big(f'(c_i).(x_i - x_{i-1})\big)^2}$$

$$\Rightarrow I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2[1 + \big(f'(c_i)\big)^2]}$$

$$\Rightarrow I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \big(f'(c_i)\big)^2}\,.\Delta x_i, \quad (3)$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

A soma que aparece em (3) é uma soma de Riemann da função $g(x) = \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}$.

Podemos observar que a medida que n cresce muito e cada Δx_i, $i = 1,2, \dots, n$, torna-se muito pequeno, I_n se aproxima do que intuitivamente entendemos como o comprimento da curva C, de A até B. A partir daí, temos a seguinte definição.

Definição: Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, onde f é uma função contínua e derivável em $[a, b]$. O comprimento da curva C, do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$, que denotamos por s, é dado por

$$s = \lim_{máx\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2} \, . \, \Delta x_i \qquad (4)$$

se o limite a direita existir.

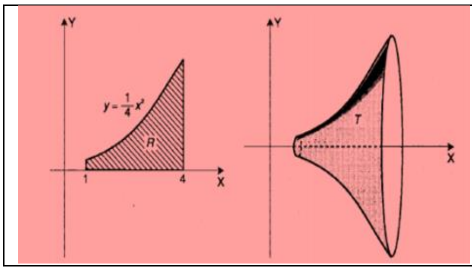
Pode-se provar que se $f'(x)$ é contínua em $[a, b]$, o limite em (4) existe. Logo, pela definição de integral definida, temos que o comprimento do arco é dado por

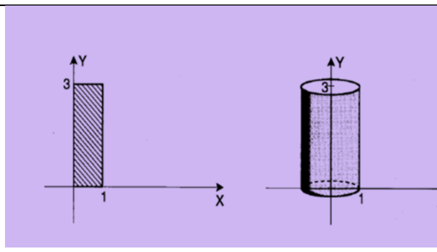
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx. \qquad (5)$$

Exemplo 5.6: Calcular o comprimento do arco da curva dada por $y = x^{3/2} - 4,$ de $A(1, -3)$ até $B(4{,}4)$.

4.3. Volume de um sólido de revolução

Fazendo a região plana girar em torno de uma reta no plano, obtemos um sólido, que é chamado *sólido de revolução*. A reta ao redor da qual a região gira é chamada *eixo de revolução.*





De modo análogo a construção feita para definir a área e o comprimento do arco, temos a seguinte definição:

Definição: Seja $y = f(x)$ uma função contínua não negativa em $[a, b]$. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b. O volume do sólido T, gerado pela revolução de R em torno do eixo dos x, é definido por

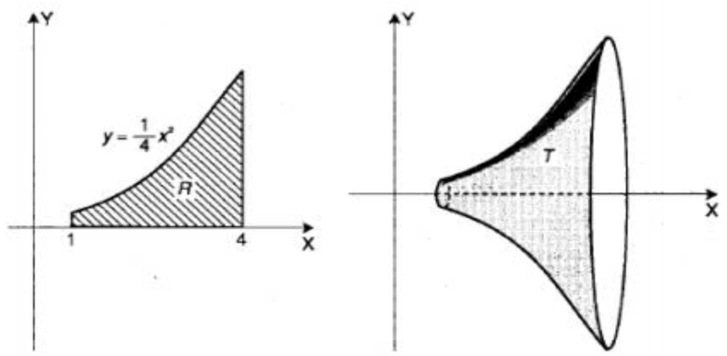
$$V = \lim_{máx\Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \, . \, \Delta x_i . \quad (6)$$

A soma que aparece em (6) é uma soma de Riemann da função $[f(x)]^2$. Como f é contínua em $[a, b]$, o limite em (1) existe. Logo, pela definição de integral definida, temos que o volume é dado por

$$s = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx. \quad (7)$$

Observação: A fórmula (7) pode ser generalizada para outras situações, como a função $f(x)$ negativa em alguns pontos, a região R está entre os gráficos de duas funções, quando o sólido T é gerado pela revolução R em torno do eixo y, ou em torno de uma reta paralela a um dos eixos (x ou y), etc. (conforme veremos mais adiante)

Exemplo 5.7: Nas figuras dadas abaixo, **c**alcule o volume do sólido de revolução T gerado pela rotação da região R em torno do eixo dos x.



Referências:
FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. Cálculo A. Editora McGraw Hill.
CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.