Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III

Conteúdo da semana 02 e 03

1 Funções de duas variáveis

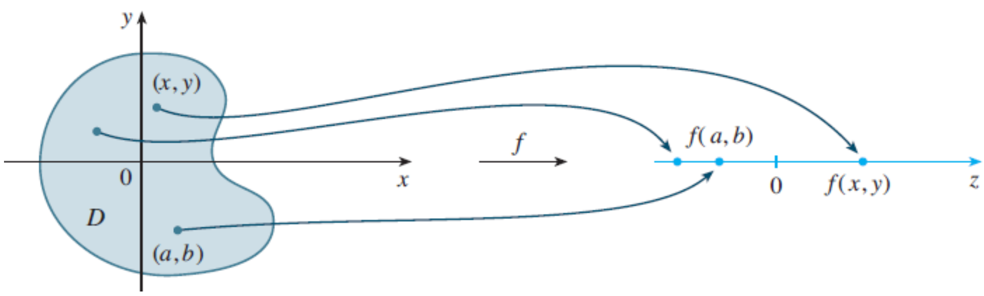
A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto. Podemos pensar em T como uma função de duas variáveis x e y, ou como uma função do par (x, y). Indicamos essa dependência funcional escrevendo $T = f(x, y)$.

O volume V de um cilindro circular depende de seu raio r e de sua altura h. De fato, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Podemos dizer que V é uma função de r e de h, e escrevemos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definição 1. *Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y)/(x, y) \in D\}$.*

Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y). As variáveis x e y são **variáveis independentes** e z é a **variável dependente**.

Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas como mostra a figura a seguir.



Em que o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy e a imagem é um conjunto de números na reta real, mostrado como um eixo z.

Por exemplo, se $f(x, y)$ representa a temperatura em um ponto (x, y) em uma placa de metal com formato de D, podemos pensar que o eixo z é um termômetro exibindo as temperaturas registradas.

Se a função f é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subtendido que o domínio de f é o conjunto de todos os pares os quais a expressão dada fornece um número real bem definido. Ou seja, ao definir funções de mais de uma variável, seguimos a prática habitual de excluir entradas que levem a números complexos ou à divisão por zero.

$$\text{Se} \quad f(x, y) = \sqrt{y - x^2} \text{ (perceba que } y \text{ não pode ser menor do que } x^2\text{).}$$

$$\text{Se} \quad f(x, y) = \frac{1}{xy}, \; xy \quad \text{não pode ser zero.}$$

Consideramos que o domínio de uma função seja o maior conjunto para o qual a regra de definição gera números reais, a menos que esses domínios sejam especificados de outra forma explicitamente. A imagem consiste no conjunto de valores de saída para a variável dependente.

Exemplo 1. *a) Estas são funções de duas variáveis. Observe as restrições que podem ser aplicadas a seus domínios para que seja obtido um valor real para a variável dependente* z.

Tabela 1: Função, domínio e imagem de funções de duas variáveis.

Função	Domínio	Imagem
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$z = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$z = sen(xy)$	Todo o plano	$[-1, 1]$

b) Funções de três variáveis com restrições em alguns de seus domínios.

Tabela 2: Função, domínio e imagem de funções de três variáveis.

Função	Domínio	Imagem
$w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	Todo o espaço	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$	$(x,y,z) \neq (0,0,0)$	$(0, \infty)$
$w = xy\ln(z)$	Semiespaço $z > 0$	$(-\infty, \infty)$

Exemplo 2. *Para cada uma das seguintes funções, calcule $f(3,2)$ e encontre o domínio.*

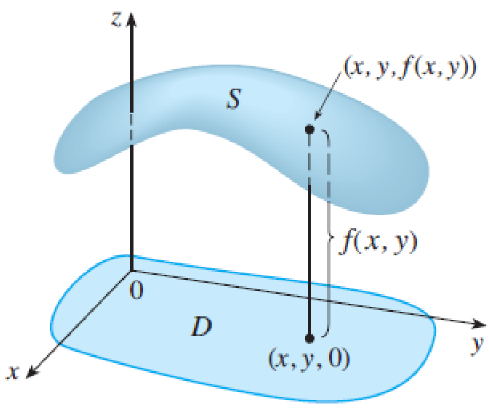
a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

b) $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$

2 Gráficos

Definição 2. *Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) em $\mathbb{R}^3$, tal que $z = f(x,y)$ e (x,y) pertença a D.*

Assim como o gráfico de uma função f de uma única variável é uma curva C com equação $y = f(x)$, o gráfico de uma função f com duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x,y)$. Podemos visualizar o gráfico S de f como estando diretamente acima ou abaixo de seu domínio D no plano xy.



Exemplo 3. *Esboce o gráfico da função $f(x,y) = 6 - 3x - 2y$.*

A função do exemplo anterior é um caso especial da função

$$f(x,y) = ax + by + c$$

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma dessas funções tem a equação

$$z = ax + by + c \text{ ou } ax + by - z + c = 0$$

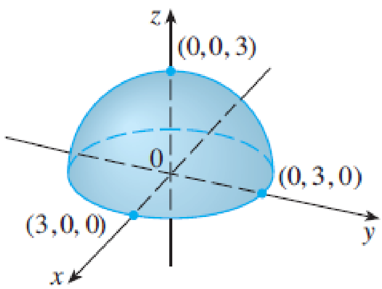
e, portanto, é um plano. Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

Exemplo 4. *Esboce o gráfico da função* $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Solução: *O gráfico tem a equação* $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. *Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos*

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

que reconhecemos como a equação da esfera de centro na origem e raio 3. Mas, como $z \geq 0$, *o gráfico de* g *é somente a metade superior da esfera.*



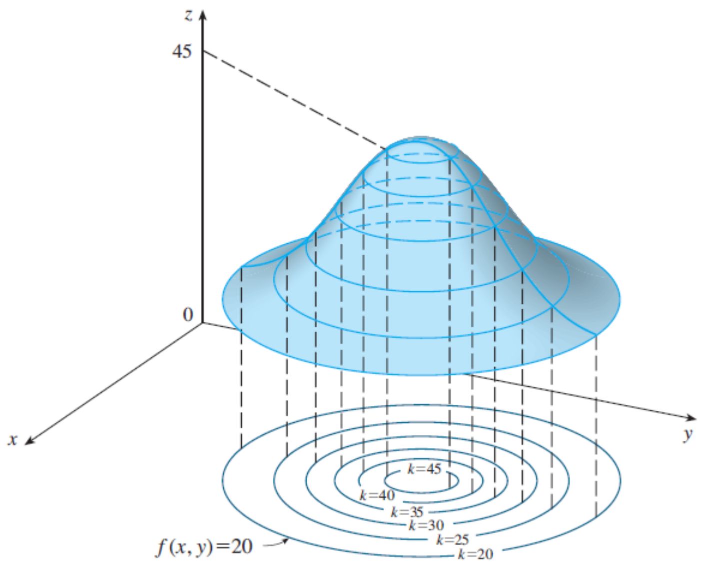
Nota 1: Uma esfera inteira não pode ser representada por uma única função de x e y. O hemisfério superior da esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$ é representado pela função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. O hemisfério inferior é representado pela função $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

3 Curvas de nível

Definição 3. *As* ***curvas de nível*** *de uma função* f *de duas variáveis são aquelas com equação* $f(x, y) = k$, *em que* k *é uma constante.*

Uma curva de nível $f(x, y) = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k. Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k.

Perceba que as curvas de nível $f(x, y) = k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetados sobre o plano xy. Assim se você traçar curvas de nível da função e



visualizá-las elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função colocando as duas informações juntas. A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem próximas umas das outras. Ela será um pouco mais achada onde as curvas de nível estão distantes umas das outras.

Exemplo 5. *Esboce as curvas de nível da função* $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ *para os valores* $k = -6, 0, 6, 12$.

Solução: *As curvas de nível são* $6 - 3x - 2y = k$ *ou ainda* $3x + 2y + (k - 6) = 0$. *Essa é uma família de retas com inclinação* $-3/2$. *Para os valores de* k *pedidos na questão, temos que:*

$$Para \quad k = -6 \Rightarrow 3x + 2y - 12 = 0$$

$$Para \quad k = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

$$Para \quad k = 6 \Rightarrow 3x + 2y = 0$$

$$Para \quad k = 12 \Rightarrow 3x + 2y + 6 = 0$$

Exemplo 6. *Esboce as curvas de nível da função* $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ *para os valores* $k = 0, 1, 2, 3$.

4 Funções de três ou mais variáveis

Definição 4. *Uma **função com três variáveis**, f, é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real, denotado por $f(x, y, z)$.*

Por exemplo, a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude x e da longitude y do ponto e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$.

Exemplo 7. *Encontre o domínio de f se*

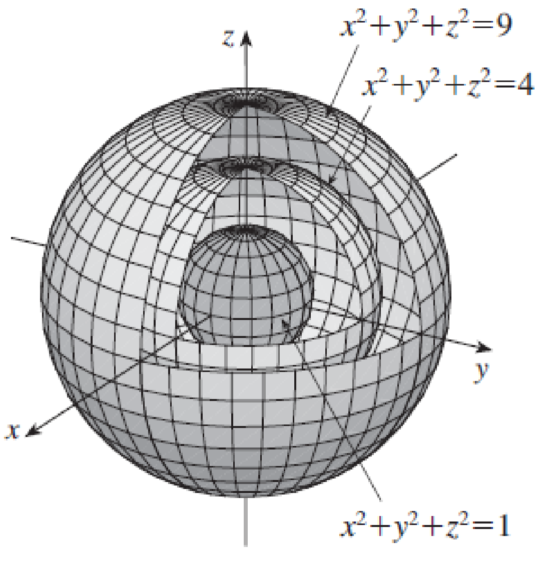
$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xysen(z).$$

É muito difícil visualizar uma função de f de três variáveis por seu gráfico, já que ele estaria em um espaço de **quatro dimensões**. No entanto, obtemos certo conhecimento de f ao examinar suas **superfícies de nível**, que são aquelas com equações $f(x, y, z) = k$, onde k é uma constante. Se o ponto (x, y, z) move-se ao longo de uma superfície de nível, o valor $f(x, y, z)$ permanece fixo.

Exemplo 8. *Encontre as superfícies de nível da função*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Solução: As superfícies de nível são $x^2 + y^2 + z^2 = k$, onde $k \geq 0$. Elas formam uma família de esferas. Elas formam uma família de **esferas concêntricas** com raio $\sqrt{k}$. Assim, enquanto (x, y, z) varia sobre qualquer esfera com centro O, o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo, como vemos na figura abaixo:



5 Função com n variáveis

Funções com qualquer número de variáveis podem ser consideradas. Uma **função com n variáveis** é uma regra que associa um número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas essas n-uplas.

Por exemplo, se uma companhia usa n ingredientes diferentes na fabricação de um produto alimentício, c_i é o custo por unidade o i-ésimo ingrediente e x_i unidades do ingrediente são usadas; então o custo total C dos ingredientes é uma função das n variáveis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$C = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

A função f é uma função a valores reais cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Por vezes, usamos uma notação vetorial para escrever estas funções de forma mais compacta: se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, frequentemente escreveremos $f(\boldsymbol{x})$ no lugar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Com essa notação podemos reescrever a função C como

$$f(x) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x},$$

onde $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n$ e $\boldsymbol{cx})$ denota o produto escalar dos vetores $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{x}$ em V_n.

Tendo em vista a correspondência biunívoca entre os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e os vetores posição em V_n, temos três maneiras diferentes de ver uma função f definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como uma função de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Como uma função de um único ponto n-dimensional $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3. Como uma função de um único vetor n-dimensional $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Veremos que todos os três pontos de vista são úteis.