Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental

⓪ Métodos Numéricos – Apresentação

2020.1

Prof. Antonio Carlos

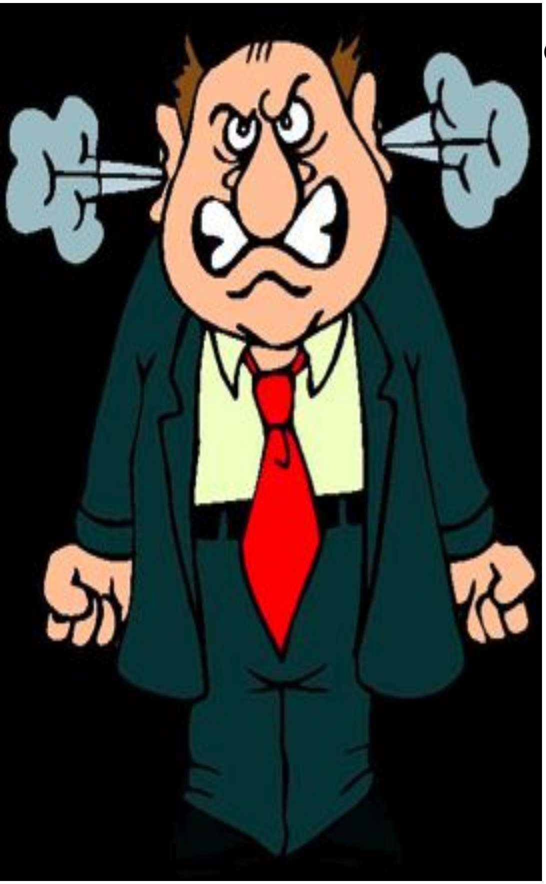
Olá, galera forte de ESA

Meu nome é Antonio Carlos

Sejam bem vindos a MN!

Você pode estar se perguntando...

- **... com toda razão:**



- **Pra quê esse tal de Métodos Numéricos se eu já paguei matemática pra lá da conta:**

- Cálculo I, II e III;

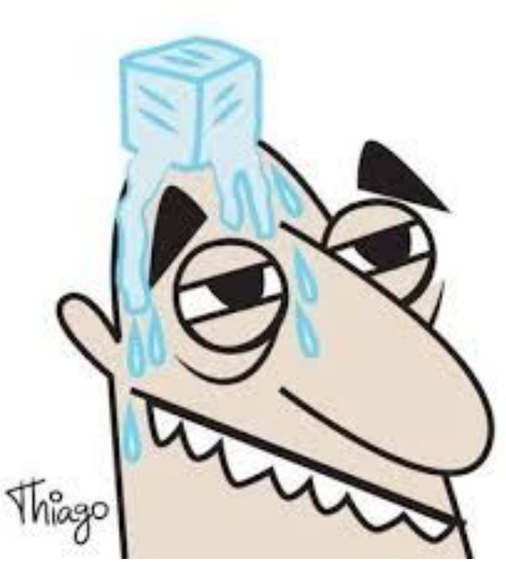
- EDO;

- Álgebra Linear;

- Álgebra Vetorial;

- Etc., etc....

?



- Esfria a cabeça que vamos tentar explicar o porquê de você ter de pagar mais essa matemática...
- Vamos mostrar agora pra você uma série de problemas na Matemática que as matemáticas que você viu até aqui não conseguem resolver...
- Alguns desses problemas, pra azar dos engenheiros, podem aparecer na prática do dia-a-dia...

Tá brincando!

⓪ MN – Apresentação

- Enquanto a gente é aluno, quando surge um “abacaxi” a gente recorre a um colega, a um professor, etc.;
- Mas quando a gente é contratado numa empresa, seja pública ou privada, quando surge uma “batata quente” a gente tem que se virar “nos 30”... “É nós”, e “sozin”...
- Na empresa pública ainda pode haver uma “boquinha”, mas na empresa privada a solução é sempre pra ontem...

Eita. “Torô na inmenda”!

Por favor, leia com bastante calma e atenção o que vem a seguir.

O que você não entender, envie uma mensagem para o ambiente virtual dizendo sua dúvida e qual o slide.

Um Pouco sobre Problema e Solução...

- A matemática pura investiga a existência e a unicidade da solução para um problema;
- Uma vez resolvida a questão acima, o próximo passo é obter essa solução; e isso pode ser um problemão “daqueles”... Pior que o anterior;
- Porque, às vezes, não se conhece uma técnica ou um método para se achar a solução do problema;
- E, nem sempre, se pode obter a solução de um problema com os métodos da matemática pura (que é a mesma coisa que o Cálculo Analítico).

Exemplos de Resultados Obtidos pela Matemática Pura:

1. Toda equação do 2º. grau tem solução e a solução é única.

- Como se chega a solução de uma equação do 2º. grau?

⇒ Pela análise do Δ e aplicação da fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Moral: resolve todos os casos.

Exemplos de Resultados Obtidos pela Matemática Pura:

2. Todo Sistema de Equações Lineares (SEL) cujo determinante da matriz principal é diferente de zero, possui solução e a solução é única.

- **Quem garante isso? Resp.: a Regra de Cramer**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \equiv \quad Ax = b$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$$

- **Agora experimente resolver um SEL com 10 equações e 10 incógnitas usando a Regra de Cramer!**

- **Moral: Regra de Cramer resolve, mas, na prática, tem limitações.**

Exemplos de Resultados Obtidos pela Matemática Pura:

3. Toda equação do 5º. grau tem solução única...

- **... Porém... E aqui tem um "porém" do "tanmãe" do mundo...**

⇒ Não existe método direto no Cálculo Analítico que calcule as raízes desse tipo de equação.

⇒ Em outras palavras: embora a matemática pura garanta que a solução existe e é única, ela não oferece qualquer método para se achar a solução (e isso é provado matematicamente)!

- **Moral: E agora José?**

José

Carlos Drummond de Andrade

E agora, José?
A festa acabou,
a luz apagou,
o povo sumiu,
a noite esfriou,
e agora, José?
e agora, você?
...

É meu amigo... Em algumas situações, se você tiver apenas o Cálculo Analítico, você vai ser só o Zé aí do poema de Drummond!

- Agora vamos mostrar pra vocês, mais claramente, o que significa a limitação da Matemática Pura (ou Cálculo Analítico) no dia-a-dia da engenharia.
- O objetivo aqui é mostrar que toda a matemática que você viu até aqui não resolve um problema corriqueiro da engenharia.
- O problema é o seguinte: resolver um SEL de 50 equações/50 incógnitas usando a Regra de Cramer.
- Por que um SEL 50x50?
- Porque esse pode ser um problema da engenharia civil ou mecânica para se calcular as tensões e esforços numa ponte do tipo treliça.
- Na prática, tais projetos geram SELs muito maiores!

- **Vamos estudar primeiro um SEL 2x2 (vide slide no. 8)**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

- **Aqui o SEL original**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \equiv \quad Ax = b$$

- **Aqui o SEL em forma matricial ≡ vetorial**

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$$

- **Quem são as matrizes A_1 e A_2?**
- **A_k – substitui a coluna k pelo vetor b**

As equações acima só valem para $\det A \neq 0$.

- **Agora, tomando por base o *det A* ...**

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Para a solução do SEL 2x2 vamos ter 3 determinantes, de A, A_1 e A_2;**

- **Cada determinante possui 2 termos: $a_{11}a_{22}$ e $a_{12}a_{21}$;**

- **Em cada termo temos 1 operação de multiplicação;**

- **Em cada determinante temos 1 operação de subtração;**

- **As regras acima para um SEL 2x2 são um caso particular das regras para qualquer SEL nxn. Vide próximo slide...**

- As regras gerais para se resolver um SEL nxn pela Regra de Cramer são as seguintes:

- Número de determinantes: n + 1

- Número de termos em cada determinante: n!

- Número de multiplicações em cada termo: n - 1

- Número de adições/subtrações em cada determinante: n! - 1

- Assim, o número total de operações de multiplicação e adição/subtração na solução de um SEL nxn é dado por:

$$TOT_{oper\,\times} = (n+1)n!(n-1)$$

$$TOT_{oper\,\pm} = (n+1)(n!-1)$$

⓪ MN – Apresentação

$$TOT_{oper\times} = (n+1)n!(n-1)$$

$$TOT_{oper\pm} = (n+1)(n!-1)$$

- **Pelas expressões acima, para n = 50, o número de multiplicações e adições/subtrações efetuadas é:**

$$TOT_{oper\times} = (50-1)(50+1)! \quad = \quad 7{,}6\times 10^{67}$$

$$TOT_{oper\pm} = (50+1)(50!-1) \quad = \quad 1{,}55\times 10^{66}$$

- **Isso aí acima é uma quantidade tão descomunal de operações que nem se pode imaginar um problema desses para se resolver na “munheca”... O jeito é pedir ajuda!**

Vamos "inventar" agora um "baita" de um computador para resolver o nosso SEL 50x50

- **Clock de 50 GHz** (Vai sonhando, jogador!)
- **1 ciclo de instrução = 1 ciclo de máquina** (Não existe computador com essa característica, pois um ciclo de instrução é igual a 1, 2, 3, 4 ou mais ciclos de máquina)
- **20 multiplicações por ciclo de instrução** (Cê tá trolando! Atualmente, um computador realiza, 1 multiplicação por ciclo de instrução, no máximo!)
- **Memória RAM suficiente para evitar swap** (Que danado é swap? **Resp** – tudo que o computador executa está na memória RAM; se ele precisa de RAM e ela está ocupada, ele joga parte do que está na RAM no HD e copia o que ele precisa do HD para a RAM, esse vai e vem é chamado de swap, e isso gera atraso na execução de programas).

Agora vamos ver o que esse "baita" computador (que nem existe no mundo real) pode fazer por nós na resolução desse SEL 50x50...

- 1 ciclo de instrução = 1/ 50 GHz = 2×10^{-11} segundos
- Tempo gasto nas multiplicações: $7{,}6 \times 10^{67} \times 2 \times 10^{-11} / 20 =$

  $7{,}6 \times 10^{55}$ segundos
- Tempo gasto nas adições/subtrações (como uma adição/subtração é bem mais rápida que uma multiplicação, vamos supor que nosso "baita" computador faz 100 adições por ciclo de instrução que, diga-se, é um verdadeiro delírio!):

$$1{,}55 \times 10^{66} \times 2 \times 10^{-11} / 100 =$$

$$0{,}031 \times 10^{55} \text{ segundos}$$

- Tempo total nas operações = $7{,}631 \times 10^{55}$ segundos

- Considerando que (pela tabela de conversão a seguir):

- 1 min = 60 seg
- 1 h = 60 min
- 1 dia = 24 h
- 1 ano = 365 dias
- 1 séc = 100 anos
- 1 idade do Universo = 13×10^9 anos

- O tempo gasto pelo "baita" computador para resolver o SEL 50x50 é de...

⓪ MN – Apresentação

O tempo gasto pelo “baita” computador para resolver o SEL 50x50...

- $7{,}631 \times 10^{55}$ segundos é igual a
  - ≅ 9×10^{50} dias
  - ≅ 3×10^{49} meses
  - ≅ $2{,}5 \times 10^{48}$ anos
  - ≅ $2{,}5 \times 10^{46}$ séculos!
  - ≅ $2{,}5 \times 10^{39}$ bilhões de anos!!!
  - ≅ 2×10^{38} idades do universo
- Tem muita matemática que é boa para muitos casos, mas que, em alguns casos, não funciona!
- <u>Conclusão:</u> todas as estrelas do universo esfriarão e o SEL não poderá ser resolvido pela Regra de Cramer!!!
- ¿Y ahora José?

Exemplos de Problemas sem Solução pelo Cálculo:

- $\int e^{-x^2} dx$; não possui primitiva simples e^{-x^2}
- $y' = y^2 + t^2$; esta EDO não se resolve analiticamente
- Equações diferenciais parciais não lineares só em casos particulares têm solução analítica $\frac{\partial f}{\partial x}$
- Equações polinomiais de grau ≥ 5 não podem ser resolvidas por meio do uso de fórmulas contendo a operação de radiciação (tá lembrado da fórmula de Bhaskara?) $\sqrt{}$
- And now Joseph?

Mais funções sem primitiva elementar que não podem ser integradas pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$1.\ \sqrt{1-x^4}$

$2.\ \dfrac{1}{\ln x}$

$3.\ e^{e^x}$

$4.\ sen(x^2)$

$5.\ \ln(\ln x)$

$6.\ \dfrac{e^x}{x}$

$7.\ e^{-x^2}$

$8.\ \cos(x^2)$

Und jetzt Joseph?

⓪ MN – Apresentação

E agora José?

¿Y ahora José?

And now Joseph?

Und jetzt Josef?

E adesso Jose?

Og nå Josif?

Ve şimdi Josif?

А теперь Иосиф?

والآن "جوزيف"؟

او اوس جوسيف؟

ועכשיו ג'וזיף?

और अब जोसिफ?

:

:

Em qualquer lugar do mundo que você estiver, não adianta perguntar "E agora José?"

Se você não souber Métodos Numéricos, não vai resolver o problema...

Portanto, vamos à matéria!

OBJETIVOS da Disciplina de Métodos Numéricos:

- **Apresentar os conceitos básicos dos métodos numéricos e os seus principais algoritmos;**

- **Analisar comparativamente a eficiência dos algoritmos;**

- **Mostrar o uso de Métodos Numéricos na engenharia;**

- **Mostrar que alguns problemas de engenharia só são resolvidos por Métodos Numéricos.**

UNIDADE TEMÁTICA 0

0. Relembrando conceitos do EXCEL
0.1 A célula
0.2 Fixando a célula
0.3 Aritmética no EXCEL
0.4 Executando funções no EXCEL
0.5 Precisão na célula

UNIDADE TEMÁTICA 1

1. Computação Numérica

1.1. O que é Cálculo Numérico (Métodos Numéricos)?

1.2. Por quê Cálculo Numérico?

2. Sistemas de Numeração Posicional

2.1. Bases e algarismos

2.2. Mudança de Base – Inteiros e fracionários

3. Alguns princípios usados em Cálculo Numérico

3.1. Iteração com aproximação sucessiva

3.2. Discretização

3.3. Aproximação

3.4. Transformação

3.5. Divisão e conquista

⓪ MN – Apresentação

UNIDADE TEMÁTICA 1

<u>4.</u> <u>Erro</u>

4.1. Definição

4.2. Modelagem e erro

4.3. Erro de origem (*de truncamento, de arredondamento, inerente, de conversão)*

4.4. Erro com relação à contaminação (*absoluto, relativo, relativo percentual*)

4.5. Propagação de erros

<u>5.</u> <u>Equações Não-lineares</u>

5.1. Localização e isolamento da raiz

5.2. Refinamento

5.3. Precisão e critério de parada

UNIDADE TEMÁTICA 1

6. Métodos Iterativos para refinamento da raiz

6.1. Método da Bissecção

6.2. Método de Newton-Raphson

6.3. Análise comparativa da eficiência dos métodos

UNIDADE TEMÁTICA 2

7. Sistemas de Equações Lineares (SEL)

7.1. SELs equivalentes

7.2. Métodos diretos - *Eliminação de Gauss*

7.3. Métodos iterativos – Gauss-Seidel

7.3.1. Garantia de convergência – Critério de Sassenfeld

8. Interpolação

8.1. O grau do polinômio interpolador – unicidade e eficiência

8.2. Interpolação de Lagrange

8.3. Interpolação de Newton

8.4. Interpolação de Gregory-Newton

8.5. Erro de truncamento na interpolação

UNIDADE TEMÁTICA 2

9. Ajuste de Curvas

9.1. Modelos matemáticos de ajustamento
9.5. Ajuste linear simples
9.6. Ajuste polinomial

10. Integração Numérica

10.1. Quadraturas de Newton-Cotes
10.2. Regra dos trapézios simples
10.3. Regra dos trapézios composta
10.4. 1ª regra de Simpson
10.5. 2ª regra de Simpson
10.6. Quadratura gaussiana

UNIDADE TEMÁTICA 2

6. Diferenciação Numérica
6.1. Algumas aplicações de equações diferenciais ordinárias (EDOs)
6.2. Problemas de valor inicial (PVI) e condições de contorno
6.3. Solução numérica de um PVI de 1ª ordem
6.4. Método de Euler
6.5. Propagação de erro no Método de Euler
6.6. Método das derivadas – Expansão pela fórmula de Taylor

AVALIAÇÕES

- As avaliações serão por meio de provas “escritas” no ambiente virtual;

- As avaliações serão individuais com duração de 2 horas; após esse tempo cada aluno terá até 10 minutos para enviar a prova resolvida para o professor;

- Será feita uma avaliação de cada assunto dado (o objetivo é não acumular assunto para cada avaliação);

- Cada prova terá peso 10,0 (dez).

Por enquanto é só...

Estão abençoados!