Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental

⑦ Métodos Numéricos – Sistemas de Equações Lineares

2020.1

Prof. Antonio Carlos

- **Equação linear:**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

- **Sistema de equações lineares (SEL):**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- **Notação matricial: Ax = b**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- **Métodos Numéricos para Resolução de SELs:**
- **Dois Grupos de Métodos:**

1. **Métodos Diretos – oriundos da Álgebra Linear**

- **Ex.: Método de Eliminação de Gauss**

2. **Métodos Iterativos – técnica de aproximação sucessiva**

- **Ex.: Método de Gauss-Seidel**

  Método de Gauss-Jacobi

- **Métodos diretos:**
- **Consistem na manipulação algébrica do sistema para transformar o sistema quadrado em um sistema triangular mais simples de resolver.**
- **Ex.: Método de Eliminação de Gauss (Álgebra Linear)**

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
\equiv
\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^* \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{bmatrix}
$$

- **O sistema * triangular é resolvido de baixo para cima. Desse modo em cada linha só é preciso encontrar uma incógnita, porque a incógnita da linha de baixo é substituída na linha de cima. E assim, sucessivamente.**

- **Método de Eliminação de Gauss**
- **Para se triangularizar o SEL, eliminam-se todos os coeficientes abaixo da diagonal principal da linha *2* até a linha n.**
- **k é a etapa atual e varia de *1* a n; L_i é a linha do SEL; o SEL original está na *etapa 0*; a 1ª. eliminação de coeficientes é feita na *etapa 1*; m_{ik} é o multiplicador da linha que vai sofrer eliminação de coeficientes, e é calculado usando dados da etapa anterior.**

$$Para\ k = 1 \ldots n$$

$$Para\ i = 1 \ldots n$$

$$m_{ik}^{k-1} = \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{ii}^{k-1}} \qquad , i > k;$$

$$L_i^k = L_i^{k-1} \qquad , i \le k;$$

$$L_i^k = L_i^{k-1} - m_{ik}^{k-1} L_k^{k-1} \ , i > k.$$

- **Ex.: Encontre a solução do SEL a seguir pelo método de Eliminação de Gauss.**

- **Sistema original: etapa 0**

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -14 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -4 \\ 8x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 16 \end{cases}$$

- **Etapa 1: calcular os multiplicadores da 2ª. linha (m_{21}) e 3ª. linha (m_{31}):**

- $m_{21} = a_{21} / a_{11} = 4/2 = 2$ $\qquad$ $m_{31} = a_{31} / a_{11} = 8/2 = 4$

- **Sistema Resultante na etapa 1:**

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -14 \\ 3x_2 - 6x_3 = 24 \\ 18x_2 - 12x_3 = 72 \end{cases}$$

- **Etapa 2: calcular o multiplicador da 3ª. linha (m_{32}):**
- $m_{32} = a_{32}/a_{22} = 18/3 = 6$
- **Sistema resultante na etapa 2:**

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -14 \\ 3x_2 - 6x_3 = 24 \\ 24x_3 = -72 \end{cases}$$

- **As etapas de eliminação de coeficientes estão concluídas.**
- **Resolvendo:** x_3 **na linha 3:** $x_3 = -72/24 = -3$

  x_2 **na linha 2:** $x_2 = (24 + 6*-3)/3 = 2$

  x_1 **na linha 1:** $x_1 = (-14 - 2*-3 + 3*2)/2 = -1$

- **Ex.: Encontre a solução do SEL a seguir pelo método de Eliminação de Gauss.**

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + x_3 = -19 \\ 10x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 19 \\ 4x_1 + 10x_2 - 9x_3 = -8 \end{cases}$$

- **Sistema original: etapa 0**
- **Etapa 1: calcule m_{21} e m_{31}**
- **Etapa 2: calcule m_{32} e resolva x_1, x_2 e x_3.**

- **Ex.: Encontre a solução do SEL a seguir pelo método de Eliminação de Gauss.**

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -8 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

- **Sistema original: etapa 0**
- **Etapa 1: calcule m_{21} e m_{31}**
- **Etapa 2: calcule m_{32} e resolva x_1, x_2 e x_3.**

- Ex.: Encontre a solução do SEL a seguir pelo método de Eliminação de Gauss.

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -8 \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

- Sistema original: etapa 0
- Etapa 1: calcule m_{21} e m_{31}
- Etapa 2: calcule m_{32} e resolva x_1, x_2 e x_3.

- **Métodos iterativos:**
- **O sistema permanece quadrado. Uma vez garantida a convergência para a solução, arbitra-se uma solução inicial e, a partir dela, gera-se uma seqüência de soluções aproximadas que acabará convergindo para a solução ideal dentro de uma precisão ε previamente estabelecida.**
- **Ex.: 1. Método de Gauss-Seidel (mais eficiente)**

  2. Método de Gauss-Jacobi
- **Passo iterativo para o Método de Gauss-Seidel**

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k-1}\right]$$

$$k = n - \textit{ésimo passo da seqüência de aproximações}$$

- **Critério de Convergência para o Método de Gauss-Seidel:**
- **Critério de Sassenfeld**
- **Para cada linha do sistema calcula-se S_i**

$$S_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left[\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|S_j + \sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\right]$$

- **Se $max(S_i) < 1$, então a seqüência de aproximações converge para a solução.**

- **Às vezes, o sistema do modo como é apresentado, não tem convergência garantida. Nesses casos uma saída possível é permutar as linhas do sistema para que na diagonal principal da matriz A fiquem os coeficientes a_{ii} de maior valor absoluto (ou maior peso).**

- **Critério de Parada para o Método de Gauss-Seidel:**
- **Em cada etapa k, calcula-se o desvio d_i^k para cada incógnita x_i**

$$d_i^k = \left| x_i^k - x_i^{k-1} \right|$$

- **O desvio de cada etapa k, d^k, é o máximo dos desvios d_i^k de cada incógnita:**

$$d^k = max\ d_i^k$$

Se $d^k \leq \varepsilon$, então pare. A solução foi alcançada.

- **Programando o Excel para o Método de Gauss-Seidel:**
- **Parâmetros necessários:**

1. **Critério de Sassenfeld (convergência) –** $S = max\ S_i$
2. **Passo iterativo para o cálculo de cada incógnita** x_i
3. **Critério de Parada –** $d \leq \varepsilon$
4. **O controle do critério de parada será feito no olho (da mesma maneira que fizemos no caso de raízes de equações)**

- **Programando o Excel para o Método de Gauss-Seidel:**
- **Ex.: Encontre a solução do SEL a seguir pelo método de Gauss-Seidel com uma precisão de 10^{-5}.**

$$\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -4 \\ 7x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

- **Primeiro vamos escrever o SEL na forma matricial: Ax = b**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -9 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}}_{b}$$

- **Programando o Excel para o Método de Gauss-Seidel:**
- **Agora, vamos levar o SEL para o Excel e programar nossa planilha para resolvê-lo.**
- **No Excel basta a gente preencher as células da planilha com a matriz A de coeficientes e a matriz b de termos independentes.**
- **Vamos deixar nossa planilha bem organizada para nos ajudar a entender o que o Excel está fazendo.**
- **Vamos escrever as matrizes do SEL nas células que quisermos e, logo abaixo do SEL vamos programar as células para calcular o critério de Sassenfeld e, logo abaixo, as células que vão calcular a solução x_1, x_2 e x_3. e abaixo de tudo, vamos programar as células para calcular o critério de parada d.**

- **Programando o Excel para os Métodos de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi:**
- **Vide planilha do Excel SEL_Métodos.xlsx já enviada para o ambiente do Classroom.**

- **Métodos iterativos:**
- **2. Método de Gauss-Jacobi**
- **Passo iterativo para o Método de Gauss-Jacobi**

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k-1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k-1} \right]$$

$$k = n - \textit{ésimo passo da seqüência de aproximações}$$

- **A diferença da fórmula de Gauss-Jacobi para a de Gauss-Seidel está na etapa de x_j no 1º. somatório; o restante é tudo igual.**

- **Critério de Convergência para o Método de Gauss-Jacobi:**
- **Critério de Máximo das Linhas**
- **Para cada linha do sistema calcula-se α_i**

$$\alpha_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\right]$$

- **Se $max(\alpha_i) < 1$, então a seqüência de aproximações converge para a solução.**

- **Às vezes, o sistema do modo como é apresentado, não tem convergência garantida. Nesses casos uma saída possível é permutar as linhas do sistema para que na diagonal principal da matriz A fiquem os coeficientes a_{ii} de maior valor absoluto (ou maior peso).**

- **Critério de Parada para o Método de Gauss-Jacobi:**
- **Em cada etapa k, calcula-se o desvio d_i^k para cada incógnita x_i**

$$d_i^k = \left| x_i^k - x_i^{k-1} \right|$$

- **O desvio de cada etapa k, d^k, é o máximo dos desvios d_i^k de cada incógnita:**

$$d^k = max\, d_i^k$$

Se $d^k \leq \varepsilon$, então pare. A solução foi alcançada.

- **Programando o Excel para o Método de Gauss-Jacobi:**
- **Parâmetros necessários:**

1. **Critério Máximo das Linhas (convergência) –** $\alpha = max\ \alpha_i$
2. **Passo iterativo para o cálculo de cada incógnita** x_i
3. **Critério de Parada –** $d \leq \varepsilon$
4. **O controle do critério de parada será feito no olho (da mesma maneira que fizemos no caso de raízes de equações e no Método de Gauss-Seidel)**

- **Programando o Excel para o Método de Gauss-Jacobi:**
- **Agora, vamos levar o SEL para o Excel e programar nossa planilha para resolvê-lo.**
- **No Excel basta a gente preencher as células da planilha com a matriz A de coeficientes e a matriz b de termos independentes.**
- **Vamos deixar nossa planilha bem organizada para nos ajudar a entender o que o Excel está fazendo.**
- **Vamos escrever as matrizes do SEL nas células que quisermos e, logo abaixo do SEL vamos programar as células para calcular o critério de Sassenfeld e, logo abaixo, as células que vão calcular a solução x_1, x_2 e x_3. e abaixo de tudo, vamos programar as células para calcular o critério de parada d.**

Por enquanto é só...

Estão abençoados!