UEPB Universidade Estadual da Paraíba	CCT – Departamento de Matemática
	Cálculo Diferencial e Integral II – Prof.: Joselma
	Aluno(a):

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS (RESUMO DE ALGUMAS DEFINIÇÕES E TEOREMAS)
(Obs.:As soluções de todos os exemplos enunciados, serão feitas em aula)

1. Sequência de números reais (definição e exemplos)

Definição 1: Uma sequência de números reais é uma função f cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Ou seja,

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \to & a_n = f(n) \end{array}$$

Notações: $\{a_n\}$ ou (a_n) ou $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde a_n é o n$^{\text{mo}}$ termo ou termo geral da sequência.

Exemplo 1: Relacione os quatro primeiros termos e o décimo termo de cada sequência

a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$	b) $\left\{(-1)^n \frac{n^2}{3n-1}\right\}$
c) $\{4\}$	d) $\{2+(0{,}1)^n\}$

Para algumas sequências damos o primeiro termo a_1, juntamente com uma regra que permite determinar qualquer termo a_{k+1} a partir do termo precedente a_k, para $k \geq 1$. Isto é o que se constitui uma definição por **recorrência**.

Exemplo 2: Achar os quatro primeiros termos e o n$^{\text{mo}}$ termo da sequência definida por $a_1 = 3$ *e* $a_{k+1} = 2a_k$ para $k \geq 1$.

2. Subsequências

Seja (a_n) uma sequência de números reais e considere o subconjunto infinito $\{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots\}$. A nova sequência $b_k = f(n_k) = a_{n_k}$ é dita uma subsequência de (a_n).

Exemplo 3: Para a sequência $((-1)^n) = (-1,1,-1,1,-1,1,\ldots)$ temos que $((-1)^{2n}) = (1,1,1,\ldots)$ e $((-1)^{2n-1}) = (-1,-1,-1,-1,\ldots)$ são subsequências de $((-1)^n)$.

3. Sequências Monótonas e Sequências Limitadas

Definição 2: Uma sequência (a_n) é dita monótona se os seus termos sucessivos são:

- Crescentes (ou extritamente crescente): $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$,
- ou são decrescentes (ou extritamente decrescente): $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$,
- ou são não-crescentes: $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$,
- ou são não-decrescentes: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$.

Exemplo 4: No exemplo 1, a sequência $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ é crescente, e a sequência $\{2+(0{,}1)^n\}$ é decrescente. Enquanto que a sequência $\{4\}$ é dita constante.

Definição 3: Uma sequência (a_n) é limitada (ou cotada), se existe um número real positivo M tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5:

i) $\left\{\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}}\right\}$ é limitada pois, $\left|\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}}\right| \leq 1$ para todo$n \in \mathbb{N}$.

ii) $\{cos(n)\}$ é limitada, pois $|\cos{(n)}| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii) $\{2n\}$ não é limitada, pois não existe um número real positivo M tal que $|2n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Limite de sequências

Definição 4: Uma sequência $\{a_n\}$ tem por limite o número real L, ou converge para L, quando "para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \mathcal{E}\ sempre\ que\ n > N$."

Notação: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L\ ou\ a_n \to L\ quando\ n \to \infty$.

Observação 1: Se tal número L não existe, a sequência não tem limite, ou diverge.

Definição 5: A notação $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que, para todo número real positivo P, existe um número $N > 0 (N \in \mathbb{N})$ tal que $a_n > P$, sempre que $n > N$.

Observação 2: Tal como estudamos para as funções, dizer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty (ou - \infty)$ não significa dizer que o limite exista, mas sim que o número a_n cresce (ou decresce) sem limites quando n aumenta, e neste caso, dizemos que a sequência diverge.

Teorema 1: Se $a_n \to a$, então toda subsequência (a_{n_k}) de (a_n) também converge para a. $(ou\ seja, se\ a_n \to a\ então, a_{n_k} \to a)$.

Consequência do Teorema 1: "Se uma sequência possui duas subsequências convergindo para limites distintos então, a sequência não converge." Por exemplo, a sequência $((-1)^n)$ não converge, pois as subsequências $((-1)^{2n})$ e $((-1)^{2n-1})$ convergem para limites distintos, $(-1)^{2n} \to 1$ e $(-1)^{2n-1} \to -1$.

Observação: O limite de uma sequência (a_n) quando existe é único.

Teorema 2: Seja $\{a_n\}$ uma sequência, $f(n) = a_n$ e suponhamos que $f(x)$ exista para todo número real $x \geq 1$.

i) **Se** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, então $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$, ou seja, a sequência $\{a_n\}$ converge.

ii) **Se** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty (ou - \infty)$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\ (ou - \infty)$, ou seja $\{a_n\}$ diverge.

5. Operações com Limites de Sequências

Teorema 3: Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências convergentes, então

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n},\ b_n \neq 0\ e\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$;

iv) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k, k \in \mathbb{N}$.

v) Se $a_n = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to\infty} c = c$.

vi) Se $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$.

Teorema 4: Se c é um número real e k é um número racional positivo, então $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0$.

Teorema 5: Seja $r \in \mathbb{R}$,

i) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0, se\ |r| < 1$.

ii) $\lim_{n\to\infty} |r^n| = \infty,\ se\ |r| > 1$.

Teorema 6: Seja $\{a_n\}$ uma sequência. Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0\, então\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 7(Teorema do Sanduíche): Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, e $\{c_n\}$, são sequências e $a_n \leq b_n \leq c_n,$ $para\ todo\ n \in \mathbb{N}\ e\ se\ \lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$, então, $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Exemplo 6: Verifique se as sequências abaixo, converge ou diverge, se convergir calcule o seu limite.

a) $\{1 + 1/\mathrm{n}\}$	b) $\left\{\frac{1}{4}n^2 - 1\right\}$	c) $\{5\}$
d) $\{(-1)^{n-1}\}$	e) $\left\{6\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right\}$	f) $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$
g) $\{(1{,}01)^n\}$	h) $\left\{\frac{2n^2}{5n^2-3}\right\}$	i) $\left\{\frac{2n^2+1}{n^2+n}\right\}$
j) $\left\{\frac{4n^4+1}{2n^2-1}\right\}$	k) $\left\{(-1)^{n+1}.\frac{3n}{n^2+4n+5}\right\}$	l) $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}$

Exemplo 7: Aplique o Teorema 6 para mostrar que a sequência $\left\{\frac{cos^2 n}{3^n}\right\}$ converge ou diverge.

Exemplo 8: Determine, caso exista o limite da sequência $\left\{(-1)^{n+1}.\frac{1}{n}\right\}$.

Exemplo 9: Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$. (Dica: Use o Teorema 2 e a Regra de L'Hospital)

Teorema 8: Toda sequência monótona e limitada é convergente (isto é, tem limite).

Exemplo 10: Mostre que a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \frac{1}{n} + 1$ é monótona e limitada, e portanto é convergente.

6. <u>Limites Especiais</u>

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$	2. $\lim_{n\to\infty} x^n = 0, se\ |x| < 1$	3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Exemplo 11: Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$. Dica: Use o fato de que $\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}}$.

Referências:

CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.

SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica. Volumes 2. Editora McGraw.