Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental

③ Métodos Numéricos – Princípios

2020.1

Prof. Antonio Carlos

③ Métodos Numéricos - Princípios

- Os princípios utilizados em métodos numéricos têm o objetivo de simplificar a abordagem do problema, pois, às vezes abordar o problema como ele de fato é, torna a resolução de tal problema

1. Impossível, ou
2. Muito difícil, ou mesmo
3. Inadequada (como vimos no tema 1).

- Ou seja, tais princípios têm o objetivo de tornar a resolução do problema mais simples, rápida e digamos, mais “simpática” aos nossos olhos.

Eita! Será que esse “migué de simpatia” colou?

Vamos à matéria!

1. Iteração com aproximação sucessiva

- *Iteração* é a repetição sucessiva de um conjunto de ações. Cada ação possui uma estrutura bem definida, finita e não ambígua.

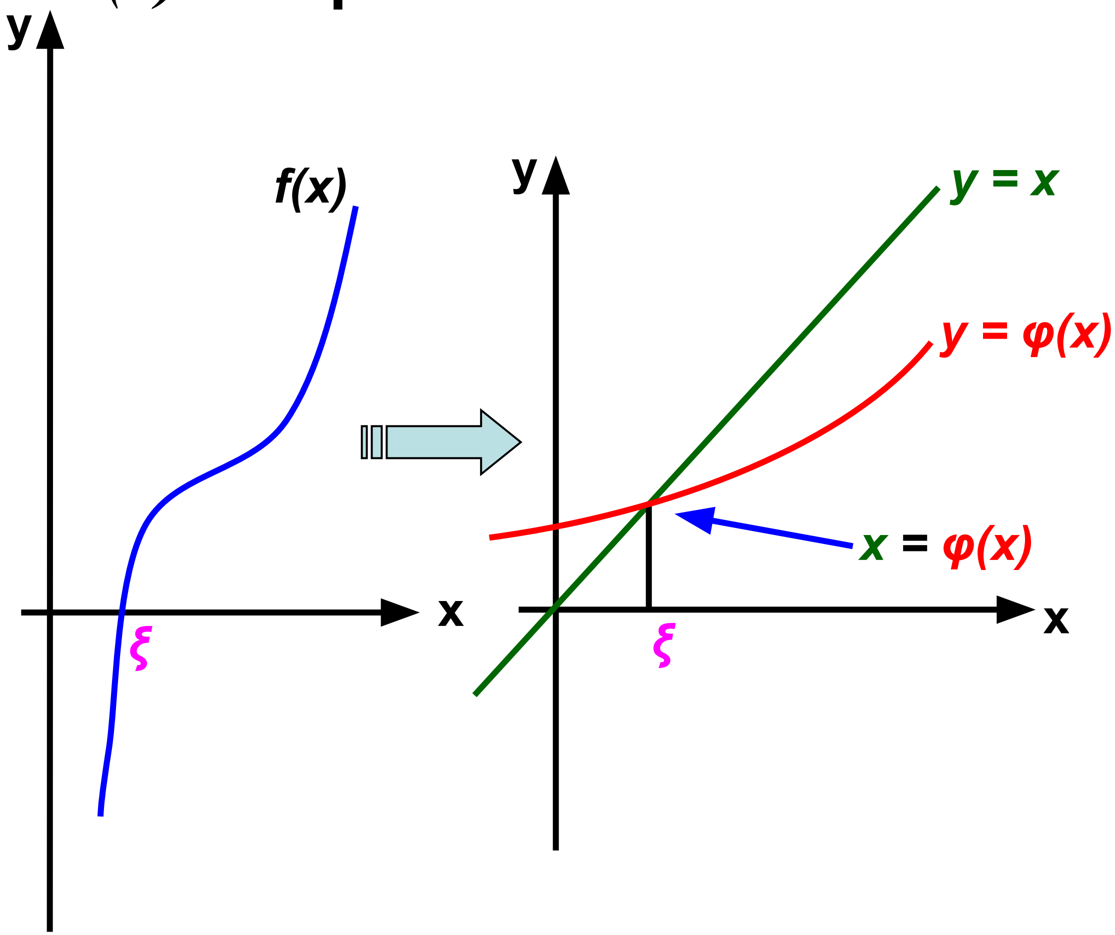
  Idéia: Parte-se de uma solução inicial arbitrada (o famoso "chute") e a cada repetição, a solução encontrada se aproxima cada vez mais da solução real.

- Suponha uma função $f(x)$. Encontre $x = \xi$, tal que $f(x) = 0$.

  Ora, pela natureza do problema sabemos que o valor que torna $f(x) = 0$ é uma raiz dessa equação (vide slide a seguir).

③ Métodos Numéricos - Princípios

<u>**Princípio**</u>**: O problema inicial de achar x tal que $f(x) = 0$ é substituído pelo problema de achar x tal que $x = \varphi(x)$, onde $\varphi(x)$ é a função de iteração que foi obtida a partir de $f(x)$ [$\varphi(x)$ não pode ser criada aleatoriamente].**



Se a função de iteração $\varphi(x)$ tiver a natureza adequada, o problema da figura da esquerda é substituído pelo problema da figura da direita, e o valor $x = \xi$ que "zera" $f(x)$ se encontra na interseção de $y = x$ (*função identidade*) com $y = \varphi(x)$ (*função de iteração*), por isso $x = \varphi(x)$.

- **Qual deve ser a natureza da função de iteração $f(x)$ para que o processo funcione corretamente?**
- **São necessárias duas condições:**

1. $\exists\ \xi$ tal que $f(\xi) = 0$,
2. $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$, $A(\xi) \neq 0$ [note que $\varphi(x)$ é função de $f(x)$].

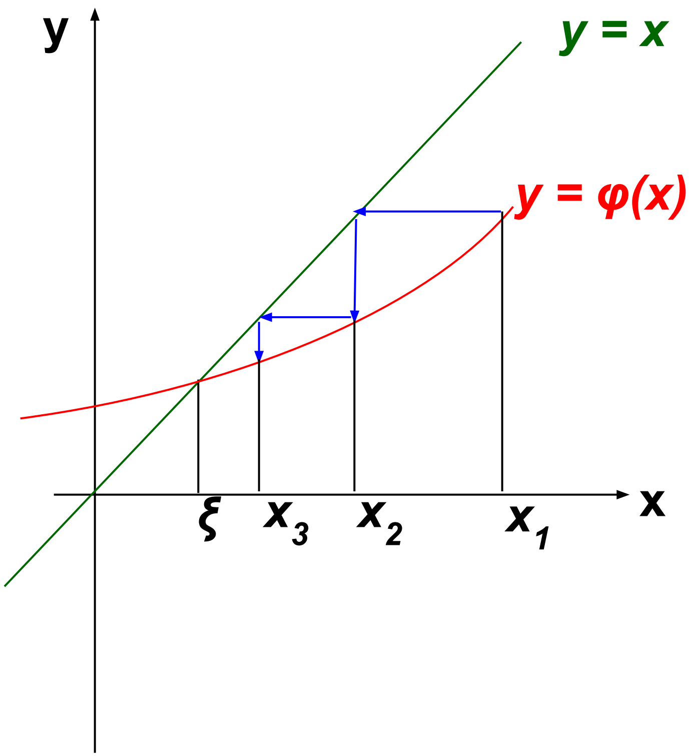
Se essas duas condições ocorrem, então $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\xi) = \xi$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) $\exists\ \xi$ tal que $f(\xi) = 0$. $\varphi(\xi) = \xi + A(\xi)f(\xi)$. Como $f(\xi) = 0$, então $A(\xi)f(\xi) = 0$, daí $\varphi(\xi) = \xi$.

($\Leftarrow$) $\varphi(\xi) = \xi$. $\varphi(\xi) = \xi + A(\xi)f(\xi)$, daí $\xi = \xi + A(\xi)f(\xi)$, assim $A(\xi)f(\xi) = 0$, mas como $A(\xi) \neq 0$, então $f(\xi) = 0$.

- **Mostrando graficamente como o processo funciona**



- x_1, x_2, x_3, ... são aproximações de ξ.
- Observe que o processo inicia com x_1 bastante afastado de ξ, e à medida que o processo avança, os valores x_2, x_3, …, x_k, x_{k+1} se aproximam cada vez mais de ξ, de modo que a diferença em valor absoluto $|x_{k+1} - \xi| < |x_k - \xi|$, ou seja, o valor atual x_{k+1} está cada vez mais próximo da raiz ξ que o valor anterior x_k.

2. Discretização

- *Discretizar* é passar do domínio contínuo para o domínio discreto. Isso se refere a conjuntos em que não há intervalos vazios entre os números (contínuos) e àqueles em que há intervalos vazios (discretos).

- Ou seja, em um conjunto contínuo como os reais, você pode contar 1,0 1,1 1,2 1,35 ...2,01 2,11 2,24 ... 3,0, enquanto que em um conjunto discreto como os inteiros, você só pode contar 1 2 3 porque no intervalo entre um valor inteiro e outro não existem números.

Contínuo

Discreto

2.a. Discretização em integração numérica

• **No cálculo contínuo**, a integral definida de $f(x)$ dá o valor da área abaixo da curva $y = f(x)$ no intervalo $[a,b]$. A fórmula abaixo é a definição clássica de integral.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h_i \to 0} \sum_{i=0}^{\infty} h_i f(x_i), \quad h_i = x_{i+1} - x_i$$

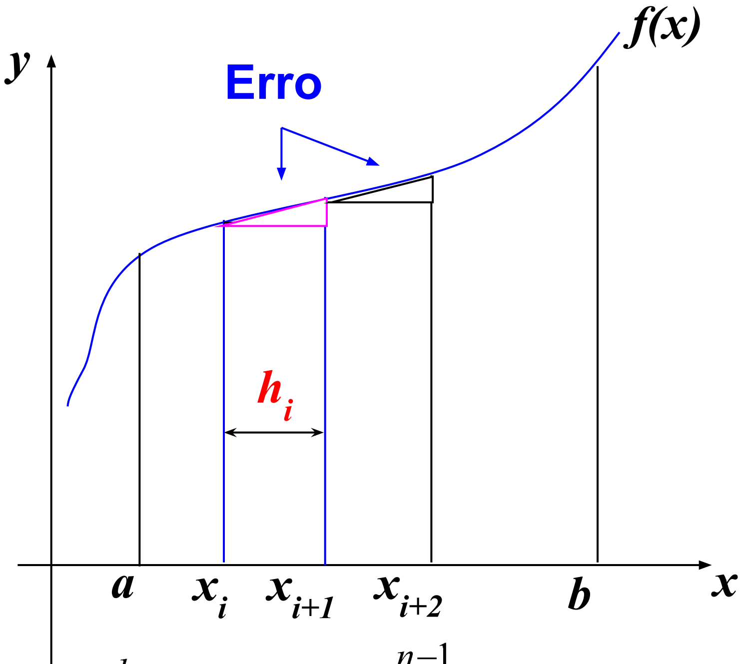
A integral é definida como a soma da infinitos retângulos de largura h_i muito estreita e tendendo a 0.

• **Na discretização**, a idéia é muito parecida com a vista acima. A função $f(x)$ e o intervalo $[a,b]$ são os mesmos, mas agora o número n de intervalos é finito e a largura hi de cada intervalo é bem maior que 0. Nessas condições, é claro, o resultado obtido no cálculo da área vai ter apenas um valor aproximado.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_i)$$

O contínuo, isto é, a integral – no lado esquerdo – foi substituída pelo discreto, isto é, o somatório puro (sem o lim) – lado direito. Isto é discretização. Quando o limite desapareceu perdeu-se precisão. Na discretização a perde-se precisão.

③ Métodos Numéricos - Princípios



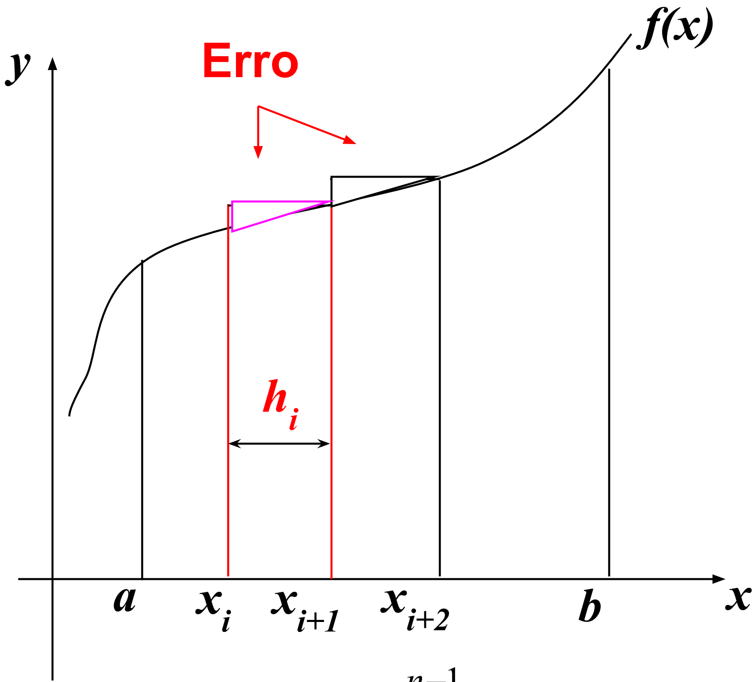
$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_i)$$

- **A área tracejada representa o erro cometido no processo de discretização.**

- **Na figura ao lado o erro é cometido por falta, i.e., a área calculada abaixo da curva é menor que a área real.**

- **Por que ocorreu isso? Porque o lado maior do retângulo é igual a cota x_i do intervalo, ou seja, a cota inferior.**

③ Métodos Numéricos - Princípios



$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_{i+1})$$

- **Na figura ao lado o erro é cometido por excesso, i.e., a área calculada abaixo da curva é maior que a área real.**

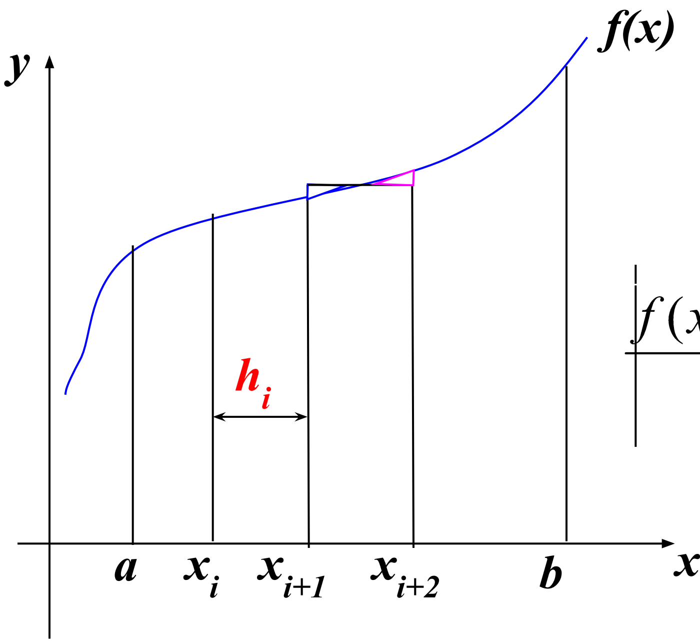
- **Por que ocorreu isso? Porque o lado maior do retângulo é igual a cota x_{i+1} do intervalo, ou seja, a cota superior.**

③ Métodos Numéricos - Princípios

• Uma maneira de diminuir o erro é “mexer” no valor do lado maior do retângulo.

• Existem duas possibilidades:

. O lado maior do retângulo não é nem a cota inferior nem a superior, mas toma-se a média aritmética das cotas.



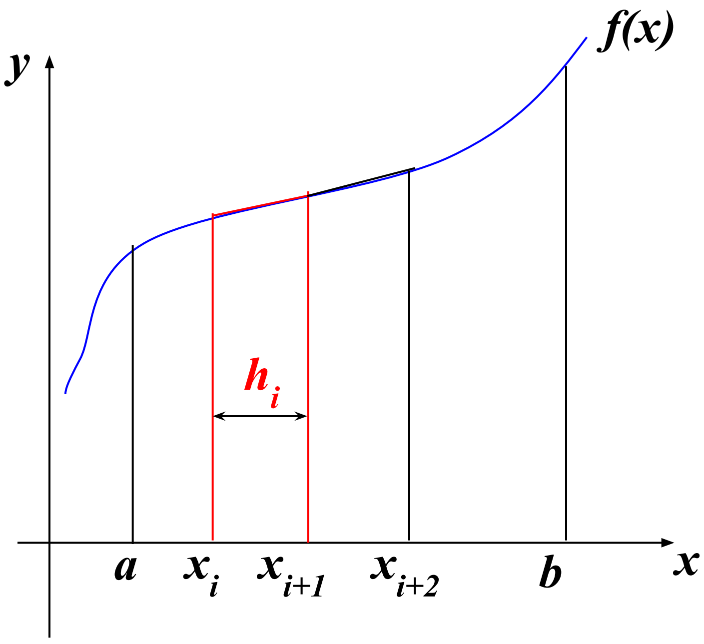
$$\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

• Observe que, com esse arranjo, os erros por **excesso** e por **falta**, praticamente, se anulam.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

. A outra saída é usar **trapézios** no lugar de retângulos para cobrir os intervalos.

• Nessa técnica, o lado inclinado do **trapézio** praticamente se confunde com a curva, ou seja, sempre se pode escolher o **trapézio** mais adequado.

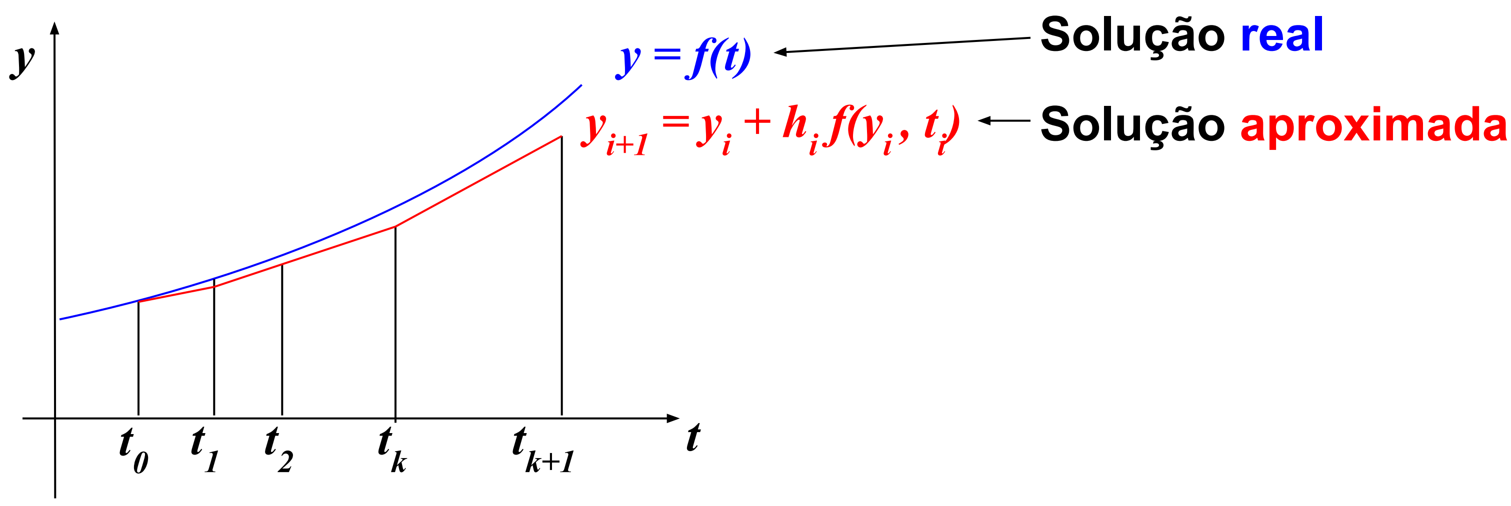


• Observe que, com esse arranjo, no tipo de curva que usamos como exemplo, **não dá nem para o erro ser visto**. Embora o cálculo faça uso da mesma fórmula, nesse arranjo a precisão é maior.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

2.b. Discretização na diferenciação numérica

- **Dada a equação diferencial** $\frac{dy}{dt} = f(y,t)$ **encontrar o valor de** y**.**
- **Substituindo** $\frac{dy}{dt}$ **pela aproximação** $\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ $\begin{cases} \Delta y = y_{i+1} - y_i \\ \Delta t = t_{i+1} - t_i = h_i \end{cases}$
- **Assim,** $\frac{dy}{dt} \cong \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(y_i, t_i) \quad \therefore \quad y_{i+1} = y_i + h_i f(y_i, t_i)$
- **Se temos um valor inicial** $y(t_0)$ **podemos ir calculando o valor** y_k **de acordo com a equação acima e com a precisão que quisermos.**



③ Métodos Numéricos - Princípios

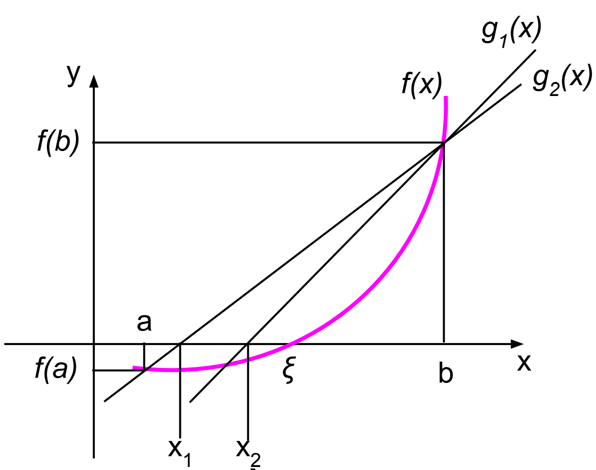
. Aproximação (no sentido de substituição)

• **<u>Objetivos</u>:**

a) Substituir $f(x)$ por $g(x)$ mais fácil de manipular;

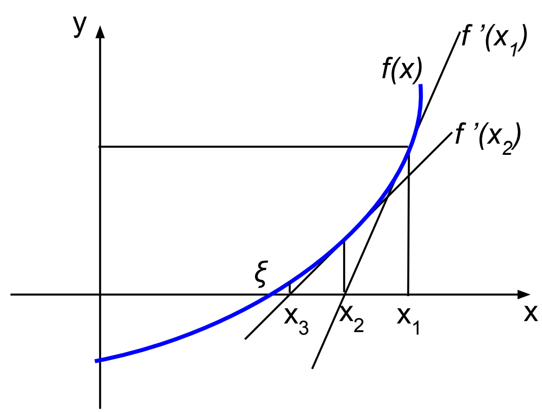
b) Substituir $f(x)$ em x_k pela tangente de $f(x)$ em x_k.

c) Substituir $f(x)$ por um polinômio $p(x)$ que mapeie $f(x)$ em alguns pontos no intervalo $[a,b]$.



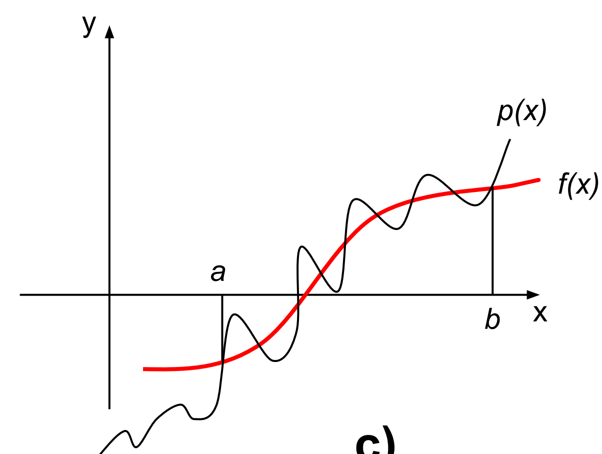
a)

A curva $f(x)$ foi substituída pela reta $g(x)$



b)

$f(x)$ foi substituída pela tangente $f'(x)$ em alguns pontos



c)

O polinômio $p(x)$ substitui $f(x)$ que "bate" com $p(x)$

. Transformação

- **Objetivos**: transformar o problema original em um problema equivalente que seja mais simples.
- Transformar o SEL $Ax = b$ no SEL $A^*x = b^*$, onde $A^*x = b^*$ é equivalente a $Ax = b$ (de modo que é mais fácil resolver o equivalente do que o original)

$Ax = b$ quadrado

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}}$$

$A^* x = b^*$ triangular

$$\begin{cases} a^*_{11}x_1 + a^*_{12}x_2 + \dots a^*_{1n}x_n = b^*_1 \\ \qquad a^*_{21}x_2 + \dots a^*_{2n}x_n = b^*_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a^*_{nn}x_n = b^*_n \end{cases}$$

- $Ax = b$ $\qquad A = LU$
- $Ax = b$ $\qquad \equiv \qquad LUx = b$
- $\qquad Ux = y$ (I)
- $\qquad Ly = b$ (II)
- Usa a equação (II) para achar y, depois substitui y na equação (I) e encontra x.
- U = matriz triangular superior de A
- L = matriz triangular inferior de A

. Divisão e conquista

• **<u>Objetivos</u>: Quebrar o problema em várias partes e resolver as partes de cada vez no lugar de resolver o problema.**

• **Às vezes, o problema é uma seqüência de pequenos problemas onde a solução do primeiro depende da solução do segundo, a do segundo depende do terceiro, etc., a solução do penúltimo depende do último. A estratégia, portanto, é resolver por partes.**

Ex.: Qual a velocidade final v_f de um móvel de massa m, t segundos depois que é aplicada sobre ele um força F? . Desconsidere o atrito e a resistência do ar. Inicialmente o móvel está parado.

• **A velocidade que desejamos é dada pela equação $v_f = v_0 + \alpha t$. Temos v_0 e t, mas não temos a. *Mas podemos achar* a por meio da equação $F = ma$. Uma vez achado o valor de a, *fazemos a substituição na equação* $v_f = v_0 + \alpha t$ para achar o valor de v_f.**

Exercícios Propostos

1. Escolha qualquer um dos princípios - usados no desenvolvimento de técnicas de métodos numéricos - e explique sua fundamentação.

Por enquanto é só...

Estão abençoados!