Vetores e Geometria Analítica
Aula 14 - O Produto Misto

por

Maxwell Aires da Silva

Universidade Estadual da Paraíba – UEPB

Campina Grande
23 de fevereiro de 2022

Construção
&
Propriedades

Nesta aula, iremos introduzir o conceito de **Produto Misto** entre vetores do espaço, este conceito matemático possui esse nome justamente pela maneira como é calculado conforme definição a seguir:

Definição (Produto Misto)

Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ vetores no espaço. Então, define-se o ***Produto Misto*** *entre $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, como sendo o número real dado por*

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w},$$

o qual é calculado através do seguinte determinante

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Nesta aula, iremos introduzir o conceito de **Produto Misto** entre vetores do espaço, este conceito matemático possui esse nome justamente pela maneira como é calculado conforme definição a seguir:

Definição (Produto Misto)

Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ *e* $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ *vetores no espaço. Então, define-se o* ***Produto Misto*** *entre* $\vec{u}, \vec{v}$ *e* $\vec{w}$, *como sendo o número real dado por*

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w},$$

o qual é calculado através do seguinte determinante

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Vamos apresentar agora algumas propriedades do produto misto

(1) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$;

(2) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$;

(3) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{x}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} + (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{x}$;

(4) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$ se, e somente se, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

Exemplos Práticos

Exemplo

Determine o produto misto entre os vetores $\vec{u} = (2, 5, -4), \vec{v} = (3, -7, 1)$ *e* $\vec{w} = (1, 3, 0)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 5 - 36 - (28 + 0 + 6) \\
&= -31 - 28 - 6 \\
&= -65.
\end{aligned}$$

Exemplo

Determine o produto misto entre os vetores $\vec{u} = (2, 5, -4), \vec{v} = (3, -7, 1)$ *e* $\vec{w} = (1, 3, 0)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 5 - 36 - (28 + 0 + 6) \\
&= -31 - 28 - 6 \\
&= -65.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Determine o produto misto entre os vetores $\vec{u} = (2, 5, -4), \vec{v} = (3, -7, 1)$ *e* $\vec{w} = (1, 3, 0)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 5 - 36 - (28 + 0 + 6) \\
&= -31 - 28 - 6 \\
&= -65.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Determine o produto misto entre os vetores $\vec{u} = (2, 5, -4), \vec{v} = (3, -7, 1)$ *e* $\vec{w} = (1, 3, 0)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 5 - 36 - (28 + 0 + 6) \\
&= -31 - 28 - 6 \\
&= -65.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Determine o produto misto entre os vetores $\vec{u} = (2, 5, -4), \vec{v} = (3, -7, 1)$ *e* $\vec{w} = (1, 3, 0)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 5 - 36 - (28 + 0 + 6) \\
&= -31 - 28 - 6 \\
&= -65.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Determine o produto misto entre os vetores $\vec{u} = (2, 5, -4)$, $\vec{v} = (3, -7, 1)$ *e* $\vec{w} = (1, 3, 0)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 5 - 36 - (28 + 0 + 6) \\
&= -31 - 28 - 6 \\
&= -65.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemplo

Mostre que os vetores $\vec{u} = (3, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 0)$ *e* $\vec{w} = (0, -1, 0)$ *são coplanares.*

Solução: Basta mostrar que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$. De fato, note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemplo

Mostre que os vetores $\vec{u} = (3,1,0)$, $\vec{v} = (1,0,0)$ e $\vec{w} = (0,-1,0)$ são coplanares.

Solução: Basta mostrar que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$. De fato, note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Mostre que os vetores $\vec{u} = (3, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 0)$ *e* $\vec{w} = (0, -1, 0)$ *são coplanares.*

Solução: Basta mostrar que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$. De fato, note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Mostre que os vetores $\vec{u} = (3,1,0)$, $\vec{v} = (1,0,0)$ *e* $\vec{w} = (0,-1,0)$ *são coplanares.*

Solução: Basta mostrar que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$. De fato, note o seguinte:

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Exemplo

Mostre que os vetores $\vec{u} = (3, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 0)$ *e* $\vec{w} = (0, -1, 0)$ *são coplanares.*

Solução: Basta mostrar que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$. De fato, note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemplo

Sejam os vetores $\vec{u} = (2, x, 0)$, $\vec{v} = (1 - x, 1, -1)$ e $\vec{w} = (x, 1, 2)$, em que $x \in \mathbb{R}$. Determine os valores de x para os quais os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não sejam coplanares.

Solução: Para que estes vetores não sejam coplanares, basta que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0$, donde tem-se

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0 \quad & \Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ 1 - x & 1 & -1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \\
& \Rightarrow \quad 4 - x^2 + 0 - (0 + 2x - 2x^2 - 2) \neq 0 \\
& \Rightarrow \quad 4 - x^2 + 0 - 2x + 2x^2 + 2 \neq 0 \\
& \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 6 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Sejam os vetores $\vec{u} = (2, x, 0)$, $\vec{v} = (1 - x, 1, -1)$ *e* $\vec{w} = (x, 1, 2)$, *em que* $x \in \mathbb{R}$. *Determine os valores de* x *para os quais os vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *não sejam coplanares.*

Solução: Para que estes vetores não sejam coplanares, basta que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0$, donde tem-se

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0 \quad & \Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ 1 - x & 1 & -1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \\
& \Rightarrow \quad 4 - x^2 + 0 - (0 + 2x - 2x^2 - 2) \neq 0 \\
& \Rightarrow \quad 4 - x^2 + 0 - 2x + 2x^2 + 2 \neq 0 \\
& \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 6 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Sejam os vetores $\vec{u} = (2, x, 0)$, $\vec{v} = (1 - x, 1, -1)$ e $\vec{w} = (x, 1, 2)$, em que $x \in \mathbb{R}$. Determine os valores de x para os quais os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não sejam coplanares.

Solução: Para que estes vetores não sejam coplanares, basta que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0$, donde tem-se

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ 1 - x & 1 & -1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad 4 - x^2 + 0 - (0 + 2x - 2x^2 - 2) \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad 4 - x^2 + 0 - 2x + 2x^2 + 2 \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 6 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Sejam os vetores $\vec{u} = (2, x, 0)$, $\vec{v} = (1 - x, 1, -1)$ e $\vec{w} = (x, 1, 2)$, em que $x \in \mathbb{R}$. Determine os valores de x para os quais os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não sejam coplanares.

Solução: Para que estes vetores não sejam coplanares, basta que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0$, donde tem-se

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ 1 - x & 1 & -1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad 4 - x^2 + 0 - (0 + 2x - 2x^2 - 2) \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad 4 - x^2 + 0 - 2x + 2x^2 + 2 \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 6 \neq 0.
\end{aligned}$$

Exemplo

Sejam os vetores $\vec{u} = (2, x, 0)$, $\vec{v} = (1 - x, 1, -1)$ e $\vec{w} = (x, 1, 2)$, em que $x \in \mathbb{R}$. Determine os valores de x para os quais os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não sejam coplanares.

Solução: Para que estes vetores não sejam coplanares, basta que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0$, donde tem-se

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0 \quad & \Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ 1 - x & 1 & -1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \\
& \Rightarrow \quad 4 - x^2 + 0 - (0 + 2x - 2x^2 - 2) \neq 0 \\
& \Rightarrow \quad 4 - x^2 + 0 - 2x + 2x^2 + 2 \neq 0 \\
& \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 6 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Agora, note o seguinte

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x + 6 \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + 5 \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad (x-1)^2 + 5 \neq 0,
\end{aligned}
$$

e como $(x-1)^2 \geq 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, segue que $x^2 - 2x + 6 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, qualquer que seja o valor de x, os vetores $\vec{u} = (2, x, 0)$, $\vec{v} = (1-x, 1, -1)$ e $\vec{w} = (x, 1, 2)$ não serão coplanares.

$\square$

Agora, note o seguinte

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x + 6 \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + 5 \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad (x-1)^2 + 5 \neq 0,
\end{aligned}
$$

e como $(x-1)^2 \geq 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, segue que $x^2 - 2x + 6 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, qualquer que seja o valor de x, os vetores $\vec{u} = (2, x, 0)$, $\vec{v} = (1-x, 1, -1)$ e $\vec{w} = (x, 1, 2)$ não serão coplanares. $\square$

Agora, note o seguinte

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 6 \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + 5 \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad (x-1)^2 + 5 \neq 0, \end{aligned}$$

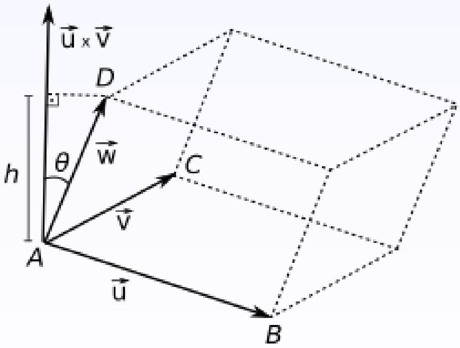
e como $(x-1)^2 \geq 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, segue que $x^2 - 2x + 6 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, qualquer que seja o valor de x, os vetores $\vec{u} = (2, x, 0)$, $\vec{v} = (1-x, 1, -1)$ e $\vec{w} = (x, 1, 2)$ não serão coplanares.

$\square$

Aplicação

A aplicação que iremos apresentar agora é, nada mais que uma generalização de uma das aplicações do produto vetorial. O módulo do produto misto entre os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ é o **volume do paralelepípedo** $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ determinado pelos vetores em questão, conforme mostra a figura a seguir:

Figura: Interpretação Geométrica do Produto Misto



Fonte: http://vectorsandgeometry.wikidot.com/

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 0, 4), \vec{v} = (2, 5, -3)$ *e* $\vec{w} = (5, 9, 0)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= |0 + 0 + 72 - (100 + 0 - 81)| \\
&= |72 - 100 + 81| \\
&= |53| \\
&= 53 \; u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 53 \; u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 0, 4)$, $\vec{v} = (2, 5, -3)$ *e* $\vec{w} = (5, 9, 0)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= |0 + 0 + 72 - (100 + 0 - 81)| \\
&= |72 - 100 + 81| \\
&= |53| \\
&= 53\ u.v.
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 53\ u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 0, 4), \vec{v} = (2, 5, -3)$ *e* $\vec{w} = (5, 9, 0)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= |0 + 0 + 72 - (100 + 0 - 81)| \\
&= |72 - 100 + 81| \\
&= |53| \\
&= 53\ u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 53\ u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 0, 4)$, $\vec{v} = (2, 5, -3)$ *e* $\vec{w} = (5, 9, 0)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= |0 + 0 + 72 - (100 + 0 - 81)| \\
&= |72 - 100 + 81| \\
&= |53| \\
&= 53 \ u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 53 \ u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 0, 4), \vec{v} = (2, 5, -3)$ *e* $\vec{w} = (5, 9, 0)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= |0 + 0 + 72 - (100 + 0 - 81)| \\
&= |72 - 100 + 81| \\
&= |53| \\
&= 53 \; u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 53 \; u.v.$

□

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 0, 4)$, $\vec{v} = (2, 5, -3)$ *e* $\vec{w} = (5, 9, 0)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= |0 + 0 + 72 - (100 + 0 - 81)| \\
&= |72 - 100 + 81| \\
&= |53| \\
&= 53 \ u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 53 \ u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 0, 4)$, $\vec{v} = (2, 5, -3)$ *e* $\vec{w} = (5, 9, 0)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= |0 + 0 + 72 - (100 + 0 - 81)| \\
&= |72 - 100 + 81| \\
&= |53| \\
&= 53 \; u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 53 \; u.v.$

$\square$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (5, 1, 3)$, $\vec{v} = (3, 7, 10)$ *e* $\vec{w} = (1, -4, 9)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix} \right| \\
&= |315 + 10 - 36 - (21 + 27 - 200)| \\
&= |315 + 10 - 36 - 21 - 27 + 200| \\
&= |441| \\
&= 441 \; u.v.
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 441 \; u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (5,1,3)$, $\vec{v} = (3,7,10)$ *e* $\vec{w} = (1,-4,9)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix} \right| \\
&= |315 + 10 - 36 - (21 + 27 - 200)| \\
&= |315 + 10 - 36 - 21 - 27 + 200| \\
&= |441| \\
&= 441 \ u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 441 \ u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (5, 1, 3)$, $\vec{v} = (3, 7, 10)$ *e* $\vec{w} = (1, -4, 9)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix} \right| \\
&= |315 + 10 - 36 - (21 + 27 - 200)| \\
&= |315 + 10 - 36 - 21 - 27 + 200| \\
&= |441| \\
&= 441 \ u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 441 \ u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (5, 1, 3)$, $\vec{v} = (3, 7, 10)$ *e* $\vec{w} = (1, -4, 9)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix} \right| \\
&= |315 + 10 - 36 - (21 + 27 - 200)| \\
&= |315 + 10 - 36 - 21 - 27 + 200| \\
&= |441| \\
&= 441 \ u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 441 \ u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (5, 1, 3), \vec{v} = (3, 7, 10)$ *e* $\vec{w} = (1, -4, 9)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix} \right| \\
&= |315 + 10 - 36 - (21 + 27 - 200)| \\
&= |315 + 10 - 36 - 21 - 27 + 200| \\
&= |441| \\
&= 441 \ u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 441 \ u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (5, 1, 3)$, $\vec{v} = (3, 7, 10)$ *e* $\vec{w} = (1, -4, 9)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix} \right| \\
&= |315 + 10 - 36 - (21 + 27 - 200)| \\
&= |315 + 10 - 36 - 21 - 27 + 200| \\
&= |441| \\
&= 441 \; u.v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 441 \; u.v.$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (5, 1, 3), \vec{v} = (3, 7, 10)$ *e* $\vec{w} = (1, -4, 9)$.

Solução: O Volume $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ do Paralelepípedo $\mathcal{P}$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{P}) &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix} \right| \\
&= |315 + 10 - 36 - (21 + 27 - 200)| \\
&= |315 + 10 - 36 - 21 - 27 + 200| \\
&= |441| \\
&= 441 \ u.v.
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = 441 \ u.v.$

$\square$