# Subespaços Vetoriais.

Definição: Seja V um Espaço Vetorial sobre o corpo K. Um Subespaço Vetorial S de V é um subconjunto de V, que por si só também é um espaço vetorial, definido sobre o mesmo corpo que V e com as mesmas operações definidas em V.

Teorema: Um subconjunto não vazio S de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, satisfaz as condições:

I- O elemento neutro de V está em S.

II- A operação de adição definida em V é fechada em S, ou seja, $u+v \in S$, $\forall u, v \in S$.

III- A operação de multiplicação por escalar de V é fechada em S, ou seja, $\alpha u \in S$, $\forall u \in S$ e $\forall \alpha \in K$.

Prova: ($\Rightarrow$) Se S é espaço vetorial, então satisfaz todas as condições de espaço vetorial, em particular, satisfaz os fechamentos e a existência do elemento neutro.

($\Leftarrow$) Para S ser um espaço vetorial basta verificar as condições de espaço vetorial. As condições I, II e III do teorema equivalem as condições (A3), (A) e (M) de espaços vetoriais, respectivamente.

As condições (A1), (A2), (M1), (M2), (M3), (M4) valem em S, pois são válidos para quaisquer elementos de V.

Pela condição III, temos que $\alpha u \in S$, $\forall \alpha \in K$, assim, tome $\alpha = -1_K$, teremos $-1_K u = -u \in S$, logo vale a propriedade (A4). Assim, todas as propriedades são satisfeitas, logo S é um subespaço vetorial.

Exemplo 1- $U = \{u \in \mathbb{R}^2 / u = \alpha(1,1), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial. Ou seja, qualquer reta passando pela origem é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Vamos verificar que valem as condições I, II e III.

I- O elemento neutro do $\mathbb{R}^2$ é a origem $(0,0)$. Para $\alpha = 0$, $\alpha(1,1) = 0(1,1) = (0,0)$, logo, o elemento neutro pertence a U.

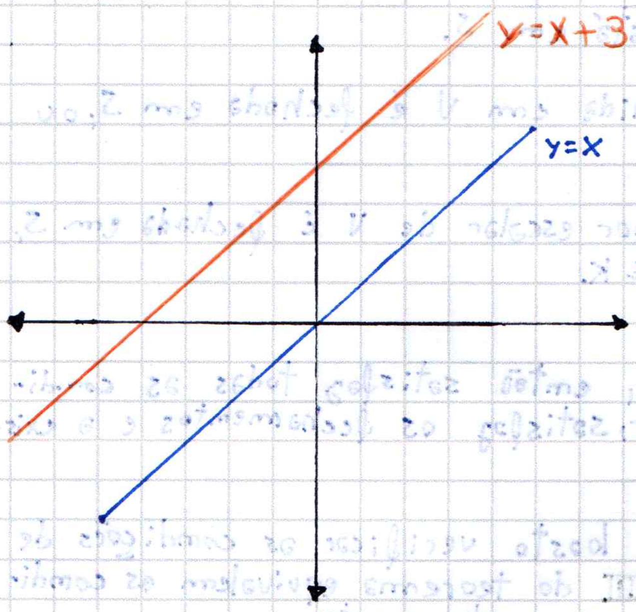
II- Tome $u, v \in U$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Temos $u+v = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,1) \Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2).(1,1)$. Assim, $u+v \in U$, uma vez que $\alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{R}$

III. Tome $v \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Temos $\beta v = \beta(\alpha(1,1)) = \beta\alpha(1,1)$. Assim, $\beta v \in U$, uma vez que $\beta\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo, $U$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2: Qualque reta que não passe pela origem NÃO é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

De fato, se a reta não passa pela origem, ela não contem o elemento neutro $(0,0)$ do $\mathbb{R}^2$. Logo não pode ser subespaço vetorial.




A reta $y = x+3$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, enquanto a reta $y=x$ é $\mathbb{R}^2$.