Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Cálculo Diferencial e Integral III - 2022.2

1ª Lista de Exercícios

1. Determine o domínio das funções vetoriais:

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = \left(\ln(t+1), \dfrac{t}{\sqrt{9-t^2}}, 2^t\right)$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = \left(\cos(t), \ln(t), \dfrac{1}{\sqrt{t-2}}\right)$

2. Determine os limites a seguir:

   (a) $\lim\limits_{t\to 0} \left(e^{-3t}, \dfrac{t^2}{sen^2(t)}, cos(2t)\right)$

   (b) $\lim\limits_{t\to \infty} \left(\dfrac{t^2+1}{3t^2+2}, \dfrac{1}{t}\right)$

   (c) $\lim\limits_{t\to 2} (t\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k})$

   (d) $\lim\limits_{t\to 1} \left(\dfrac{3}{t^2}, \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}, sen(2t)\right)$

3. Obtenha equações paramétricas da reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{r}(t)$ no ponto em que $t = t_0$.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (2 - \ln(t))\boldsymbol{j}\,; t_0 = 1.$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos(\pi t)\boldsymbol{i} + 2sen(\pi t)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}\,; t_0 = \dfrac{1}{3}.$

4. Obtenha uma equação vetorial da reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{r}(t)$ no ponto P_0 da curva.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (2t-1)\boldsymbol{i} + \sqrt{3t+4}\boldsymbol{j}$; $P_0(-1, 2)$.

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} - \dfrac{1}{t+1}\boldsymbol{j} + (4 - t^2)\boldsymbol{k}$; $P_0(4, 1, 0)$.

5. Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro t cresce.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (sen(t), t)$.

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = (t, 2-t, 2t)$.

   (c) $\boldsymbol{r}(t) = (3, t, 2-t^2)$.

   (d) $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + t^4\boldsymbol{j} + t^6\boldsymbol{k}$.

6. Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga os pontos P e Q.

   (a) $P(0,0,0), Q(1,2,3)$.

   (b) $P(0,-1,1), Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$.

7. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos(t), y = tsen(t), z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

8. Em quais pontos a curva $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (2t - t^2)\boldsymbol{k}$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$?

9. Determine a derivada da função vetorial.

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{t-2}, 3, \frac{1}{t^2})$

   (b) $\boldsymbol{r}(t) = (t^2, \cos(t^2), sen^2(t))$

   (c) $\boldsymbol{r}(t) = (tsen(t), e^t\cos(t), sen(t)\cos(t))$

10. Determine o vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$ no ponto com valor e parâmetro dado t.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t), 3t, 2sen(2t))$ no ponto $t = 0$.

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4)$ no ponto $t = 1$.

11. Se $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, encontre $\boldsymbol{r}^{'}(t), \boldsymbol{T}(1), \boldsymbol{r}^{''}(t)$ e $\boldsymbol{r}^{'}(t) \times \boldsymbol{r}^{''}(t)$.

12. Se $\boldsymbol{r}(t) = (e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t})$, encontre $\boldsymbol{T}(0), \boldsymbol{r}^{''}(0)$ e $\boldsymbol{r}^{'}(t) \cdot \boldsymbol{r}^{''}(t)$.

13. Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

    (a) $x = t^2 + 1, y = 4\sqrt{t}, z = e^{t^2 - t}$; $P(2,4,1)$.

    (b) $x = e^{-t}\cos(t), y = e^{-t}sen(t), z = e^{-t}$; $P(1,0,1)$.

14. Calcule as integrais a seguir.

    (a) $\displaystyle\int_0^1 (6t^2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - 8t^3\boldsymbol{k})dt$

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1}\boldsymbol{i} + \frac{1}{t^2+1}\boldsymbol{j} + \frac{2t}{t^2+1}\boldsymbol{k}\right) dt$

(c) $\displaystyle\int (e^t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + \ln(t)\boldsymbol{k})dt$

15. Determine o comprimento da curva dada.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos(t), \sqrt{5}t, 2sen(t))$, $-2 \leq t \leq 2$

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$, $0 \leq t \leq 1$

    (c) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$, $0 \leq t \leq 1$

16. Encontre a função comprimento de arco da curva medida a partir do ponto P na direção de t crescente e, a seguir, reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco começando de P.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (5-t)\boldsymbol{i} + (4t-3)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}$; $P(4, 1, 3)$

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = e^t sen(t)\boldsymbol{i} + e^t\cos(t)\boldsymbol{j} + \sqrt{2}e^t\boldsymbol{k}$; $P(0, 1, \sqrt{2})$.

17. Determine o vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$ e a curvatura.

    (a) $\boldsymbol{r}(t) = (t, 3\cos(t), 3sen(t))$

    (b) $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$

18. Em que ponto a curva $y = e^x$ tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \to \infty$.

19. Determine a curvatura das funções:

    a) $y = x^3$

    b) $y = cos(x)$

20. Encontre a curvatura de $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ no ponto $(1, 1, 1)$.