Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Curso de Bacharelado em Estatística/ESA

⑧ Métodos Numéricos – Interpolação

2020.1

Prof. Antonio Carlos

Introdução

- O dicionário reza que "interpolar" significa intercalar, introduzir, preencher, etc.
- Em Métodos Numéricos "interpolar" significa colocar sobre um conjunto de pontos uma função em lugar de outra que deveria estar ali, mas você não sabe qual é.
- Interpolação de um conjunto de m pontos é um processo em que uma função "inventada" passa exatamente por cada um dos m pontos gerados pela função "original".
- O conjunto de pontos pode ter sido gerado por uma função desconhecida ou, sendo conhecida, é muito complicada para se trabalhar com ela.

- **Se $g^*(x)$ é a função que interpola os m pontos (x_i, y_i) do conjunto de pontos, então a condição de interpolação para erro zero sobre cada um dos pontos é estabelecida como segue:**

$$g^*(x_i) = y_i,\ 1 \leq i \leq m.$$

- **Note que no parágrafo acima nada é dito sobre os arredores dos pontos.**

- **Ou seja, na técnica de interpolação o que interessa é que o gráfico da função "inventada" passe em cima de cada um dos pontos que se tem em mãos e que, muitas vezes, não se sabe qual a função que está por trás da geração desses pontos.**

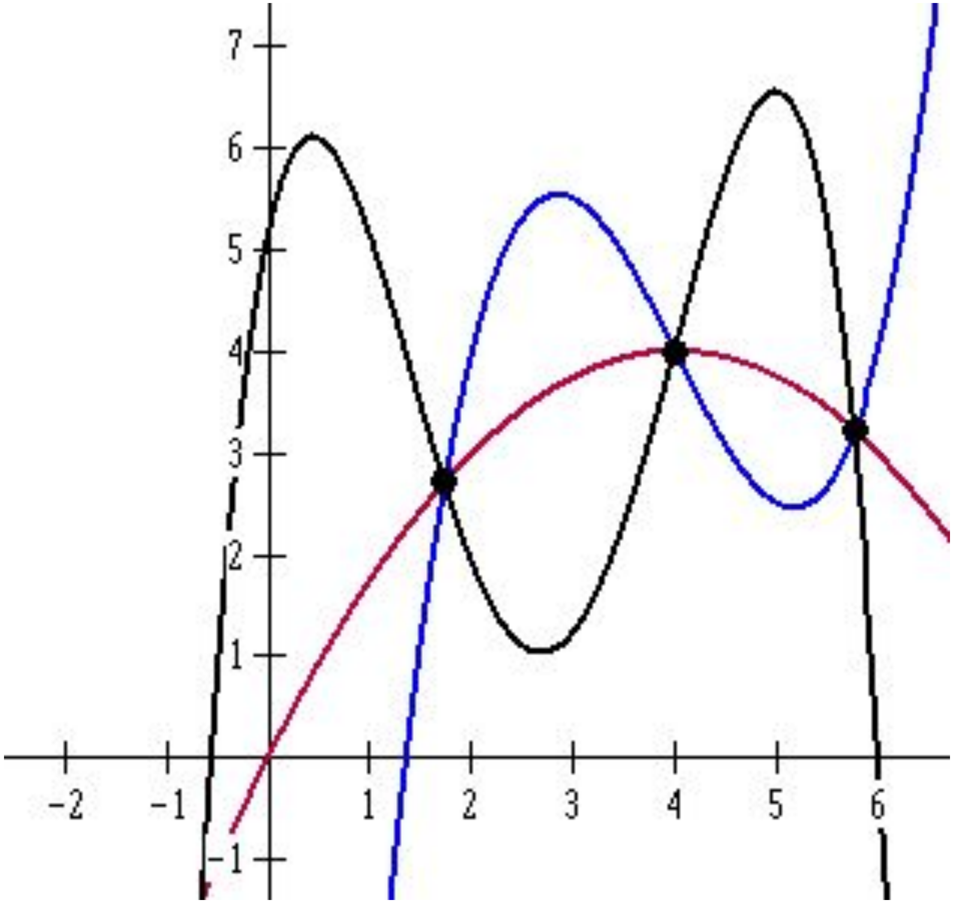
Interpolação Polinomial

- **Interpolação Polinomial – ocorre quando a interpolação é feita por uma função polinomial.**
- **A escolha da classe de funções polinomiais se deve ao fato de que toda operação (adição, subtração, multiplicação, divisão, diferenciação, integração, etc.) que se faz sobre um polinômio resulta em polinômio.**
- **Chamaremos de P_n ao conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n.**
- **Se a função interpoladora $g^*(x) \in P_n$, então $g^*(x)$ tem a forma**

$$g^*(x) = p_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Interpolação Polinomial

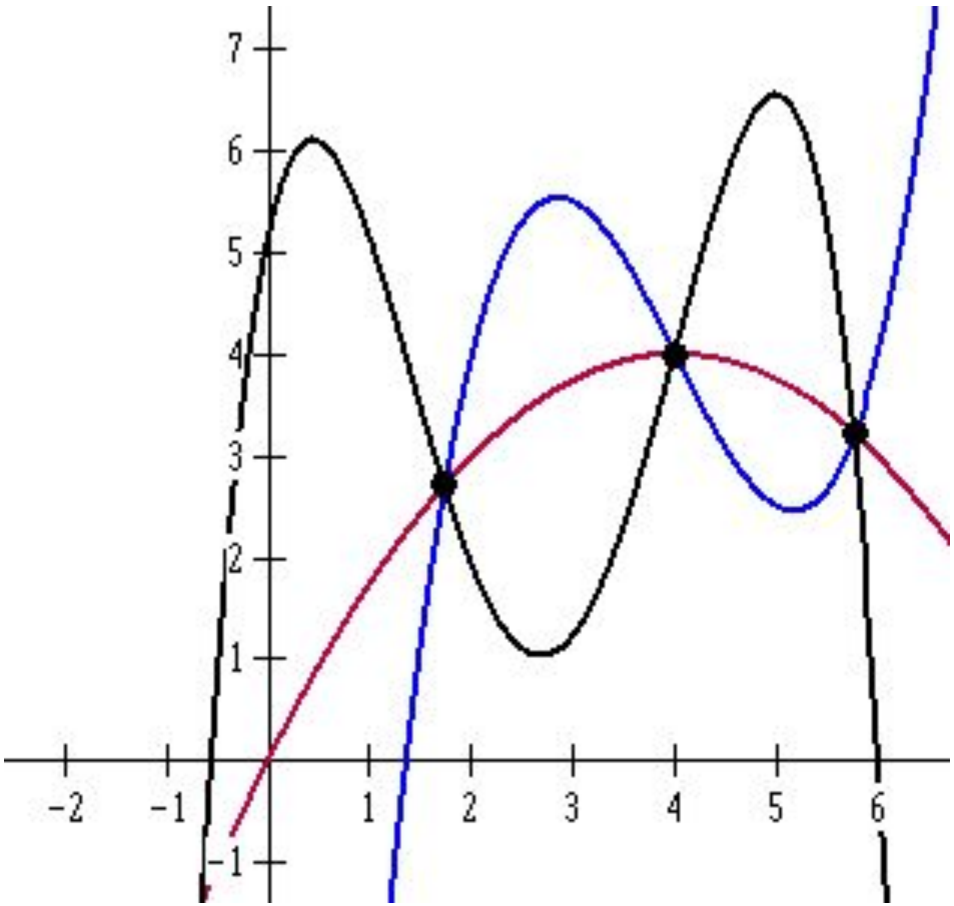
- **Qual a importância do grau n do polinômio interpolador p_n?**



- **O gráfico ao lado mostra três polinômios que interpolam três pontos: um de 2º. grau, um de 3º. grau, e outro de 4º. grau.**
- **Pelo gráfico, um polinômio do 2º. grau é suficiente para interpolar os três pontos.**

Interpolação Polinomial

• **Qual a importância do grau n do polinômio interpolador p_n?**



• **Se n é a quantidade de pontos a serem interpolados, é garantido matematicamente que <u>o polinômio interpolador mais fácil de ser obtido</u> é aquele de grau $n-1$, e ainda melhor, <u>tal polinômio é único</u>. (Teorema de Stone-Weiertrass).**

• **Em outras, palavras: só existe um único polinômio interpolador de grau $n-1$ que interpola n pontos.**

Interpolação Polinomial

- **Método de Newton**

- **O Método de Newton usa uma aproximação das derivadas da função interpoladora em função dos parâmetros dos pontos a serem interpolados. Estas aproximações são chamadas de “diferenças divididas”.**

- **O conceito de derivada de 1ª. ordem no ponto *x_0*, formalmente definido no Cálculo Infinitesimal, é dado por**

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interpolação Polinomial – Método de Newton

- **A diferença dividida de ordem 1 é a aproximação da derivada de 1ª. ordem, ou seja**

$$[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \Delta$$

- **Fazendo $x = x_1$, a diferença dividida de ordem 1 com relação a x_1 e x_0, é**

$$[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = [x_0, x_1] = \Delta y_0$$

- **Assim, podemos definir uma série de diferenças divididas com relação aos parâmetros do ponto considerado. As de ordem imediatamente seguinte sempre são definidas em função das de ordem imediatamente anterior:**

Interpolação Polinomial – Método de Newton

- A diferença dividida de ordem 0 é dada por

$$\Delta^0 y_i = [x_i] = f(x_i) = y_i$$

(é igual à função no ponto)

- Assim, a de ordem 1 em função da de ordem 0, é

$$\Delta y_0 = \frac{[x_1] - [x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta^0 y_1 - \Delta^0 y_0}{x_1 - x_0}$$

- Então, generalizando para a 1ª. ordem em qualquer ponto, temos

$$\Delta y_i = \frac{\Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i}{x_{i+1} - x_i} = [x_i, x_{i+1}]$$

Interpolação Polinomial – Método de Newton

- E, finalmente, generalizando para qualquer ordem em qualquer ponto

$$\Delta^n y_i = \frac{\Delta^{n-1} y_{i+n} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i} = \left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}, x_{i+n}\right] =$$

$$= \frac{\left[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n}\right] - \left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}\right]}{x_{i+n} - x_i}$$

Interpolação Polinomial – Método de Newton

- **Tabela Prática para a Determinação de Diferenças Divididas**

x_i	y_i	Δ^0	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	y_0	$[x_0]$			
			$[x_0, x_1]$		
x_1	y_1	$[x_1]$		$[x_0, x_1, x_2]$	
			$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	y_2	$[x_2]$		$[x_1, x_2, x_3]$	
			$[x_2, x_3]$		
x_3	y_3	$[x_3]$			

Interpolação Polinomial – Método de Newton

- Ex.: Dada a tabela de pontos a seguir, determine todas as diferenças divididas possíveis

i	x_i	y_i
0	0,3	3,09
1	1,5	17,25
2	2,1	25,41
3	3,1	36,92

Interpolação Polinomial – Método de Newton

- **Todas as Diferenças Divididas para a Tabela anterior**

x_i	y_i	Δ^0	Δ	Δ^2	Δ^3
0,3	3,09	3,09			
			$\frac{17{,}25-3{,}09}{1{,}5-0{,}3}=$ 11,80		
1,5	17,25	17,25		$\frac{13{,}6-11{,}80}{2{,}1-0{,}3}=$ 1,00	
			$\frac{25{,}41-17{,}25}{2{,}1-1{,}5}=$ 13,60		$\frac{-1{,}31-1{,}00}{3{,}1-0{,}3}=$ -0,82
2,1	25,41	25,41		$\frac{11{,}51-13{,}60}{3{,}1-1{,}5}=$ -1,31	
			$\frac{36{,}92-25{,}41}{3{,}1-2{,}1}=$ 11,51		
3,1	36,92	36,92			

Interpolação Polinomial – Método de Newton

- **O polinômio interpolador de Newton é dado por**

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

x_i	y_i	Δ^0	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	y_0	$[x_0]$			
			$[x_0, x_1]$		
x_1	y_1	$[x_1]$		$[x_0, x_1, x_2]$	
			$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	y_2	$[x_2]$		$[x_1, x_2, x_3]$	
			$[x_2, x_3]$		
x_3	y_3	$[x_3]$			

Interpolação Polinomial – Método de Newton

- **Ex.: Com o resultado das diferenças divididas para a última tabela de pontos, pede-se:**

a) O grau do polinômio interpolador de Newton;

b) A tabela de todas as diferenças divididas possíveis;

c) O polinômio interpolador;

d) Use o Winplot para traçar os pontos da referida tabela e verificar a validade do polinômio interpolador;

e) Encontre $P_n(0,9)$.

Interpolação Polinomial – Método de Newton

- **Respostas:**

a) O grau do polinômio é a quantidade de pontos menos um:

$$4 - 1 = 3 \Rightarrow P_3(x)$$

b) A tabela de todas as diferenças divididas possíveis; (*slide 13*)

c) O polinômio interpolador;

$$P_3(x) = 3{,}09 + \sum_{i=1}^{3} \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - xj)$$

Interpolação Polinomial – Método de Newton

- **Respostas:**

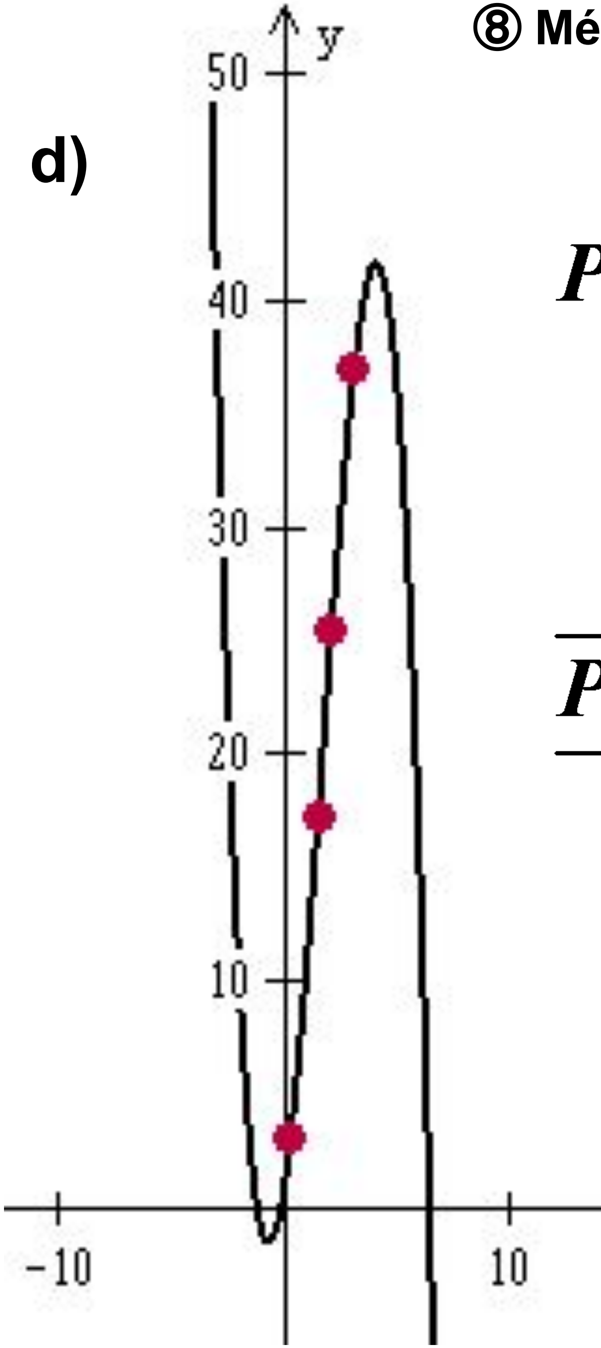
c) O polinômio interpolador;

$$P_3(x) = 3{,}09 + 11{,}8 \times (x - 0{,}3) + 1{,}0 \times (x - 0{,}3)(x - 1{,}5)$$
$$- 0{,}82 \times (x - 0{,}3)(x - 1{,}5)(x - 2{,}1) \quad \therefore$$

$$P_3(x) = 3{,}09 + 11{,}8x - 3{,}54 + x^2 - 1{,}8x + 0{,}45$$
$$- 0{,}82x^3 + 3{,}198x^2 - 3{,}4686x + 0{,}7749 \quad \therefore$$

$$\underline{\overline{P_3(x) = 0{,}7749 + 6{,}5314x + 4{,}198x^2 - 0{,}82x^3}}$$

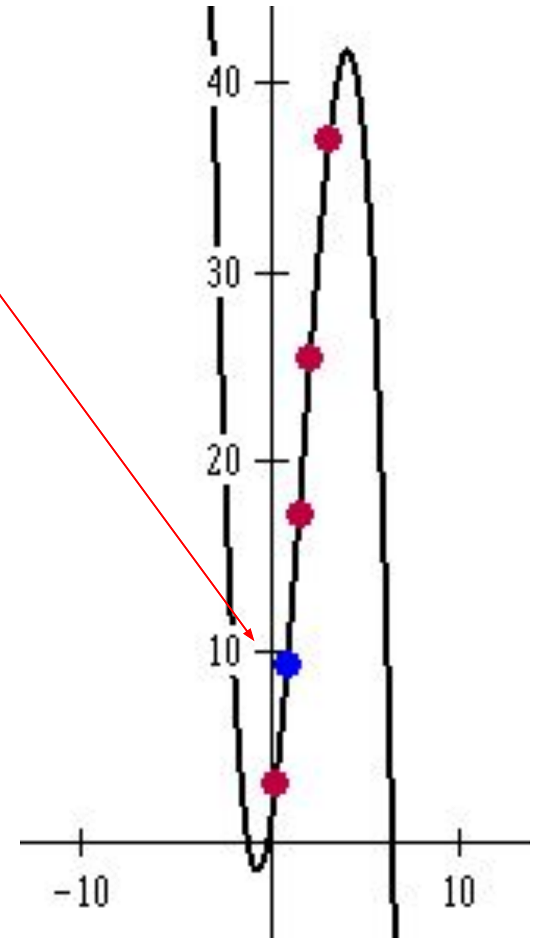
d)



e) *$P_3(0,9) = ?$*

$$P_3(0,9) = 0,7749 + 6,5314 \times 0,9 + 4,198 \times (0,9)^2 - 0,82 \times (0,9)^3$$

$$\boxed{P_3(0,9) = 9,4558}$$



Interpolação Polinomial – Método de Newton

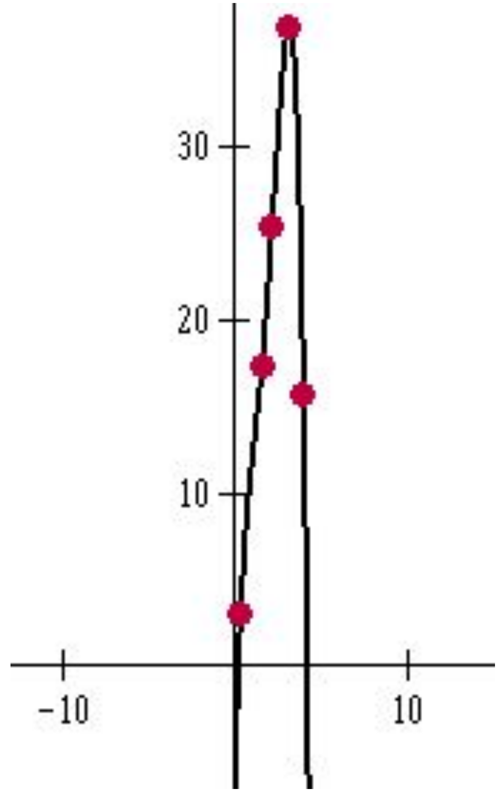
f) Acrescente o ponto *(3,9, 15,7)* à tabela e encontre o novo polinômio interpolador de Newton.

- **Como agora temos 5 pontos, então o grau do polinômio interpolador será 4, e as diferenças divididas irão até a 4ª. ordem.**

- **Mas a grande vantagem desse método é que todas as diferenças divididas até a 3ª. ordem no ponto x_0 serão reaproveitadas, não sendo necessário recalcular tudo novamente, mas só a partir do ponto que foi acrescentado.**

Interpolação Polinomial – Método de Newton

x_i	y_i	Δ^0	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0,3	3,09	3,09				
			11,8			
1,5	17,25	17,25		1,0		
			13,6		-0,82	
2,1	25,41	25,41		-1,31		-2,07
			11,51		-8,26	
3,1	36,92	36,92		-21,1		
			-26,53			
3,9	15,7	15,7				

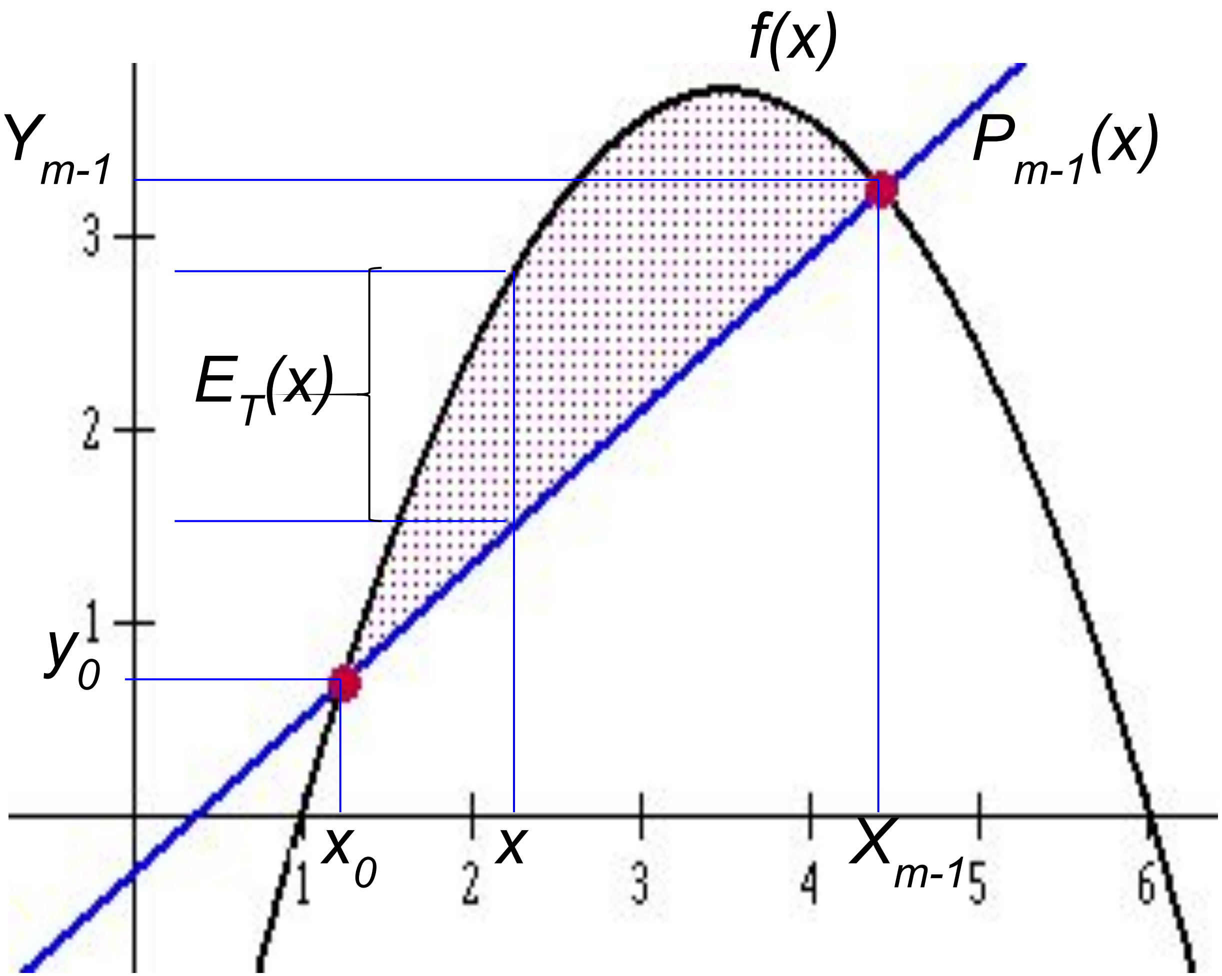


$$P3(x) = 3{,}09+11{,}8(x-0{,}3)+(x-0{,}3)(x-1{,}5)$$
$$-0{,}82(x-0{,}3)(x-1{,}5)(x-2{,}1)-2{,}07(x-0{,}3)(x-1{,}5)(x-2{,}1)(x-3{,}1)$$

$$P_3(x) = -2{,}07x^4 + 13{,}67x^3 - 29{,}58x^2 + 35{,}63x - 5{,}29$$

Erro em Interpolação

- **Suponha que *m* pontos de uma função *f(x)* qualquer sejam interpolados por um polinômio $P_{m-1}(x)$.**



Erro em Interpolação

• **A função Erro Total de Interpolação** $E_T(x)$**, para qualquer** x **no intervalo** $[x_0 , x_{m-1}]$**, é dada por**

$$E_T(x) = f(x) - P_{m-1}(x) \qquad \therefore$$

$$E_T(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{m-1}) \frac{f^m(\varepsilon)}{m!}$$

Para $\varepsilon \in (x_0 , x_n)$**, tal que** ε **maximize o valor de** $f^m(\varepsilon)$**.**

• f^m **é a derivada de ordem** m **da função** $f(x)$**.**

Por enquanto é só...

Estão abençoados!