Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental

④ Métodos Numéricos – Erros

2020.1

Prof. Antonio Carlos

Erro é algo muito presente em Métodos Numéricos;

- **Na maioria das vezes, as soluções obtidas por Métodos Numéricos é aproximada e não exata;**
- **Sendo a solução uma aproximação da resposta real, quanto menos erro tiver, melhor será;**

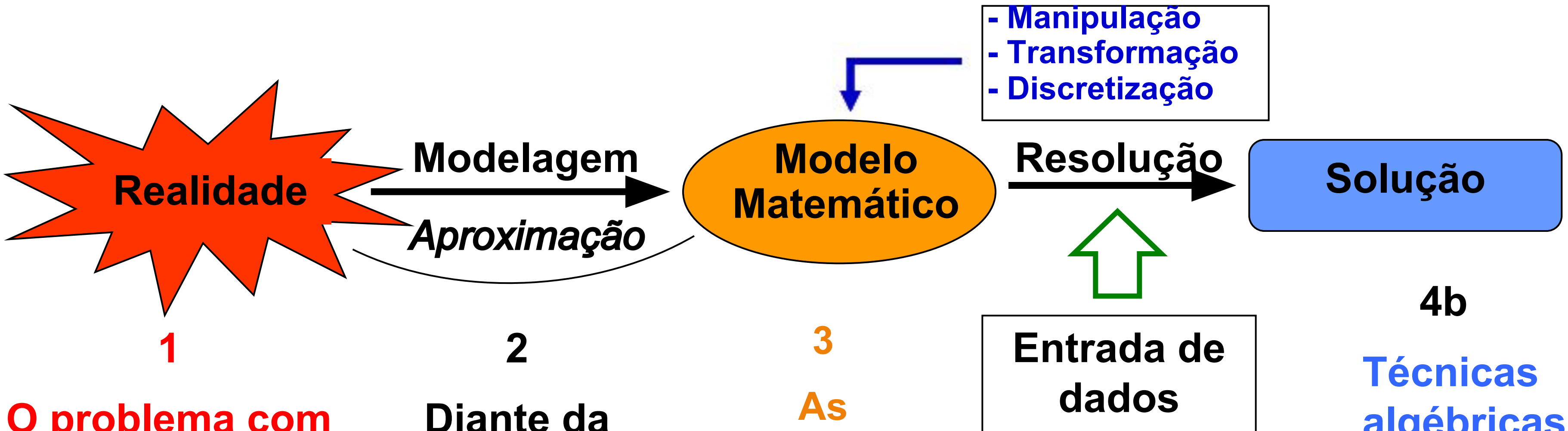
Definição

- **Erro – é a diferença entre o valor real x e o valor aproximado (calculado, medido, computado, etc.) x'.**

$$Erro = x - x'$$

Do Problema até a Solução

- O diagrama abaixo mostra a seqüência de cinco ações e procedimentos desde o problema até a solução



1

O problema com todas as suas características simples e/ou complexas

2

Diante da complexidade do problema, busca-se simplificações para tornar a abordagem menos difícil

3

As características (simplificadas ou não) do problema são transformadas em modelo matemático (que pode ser manipulado)

4a

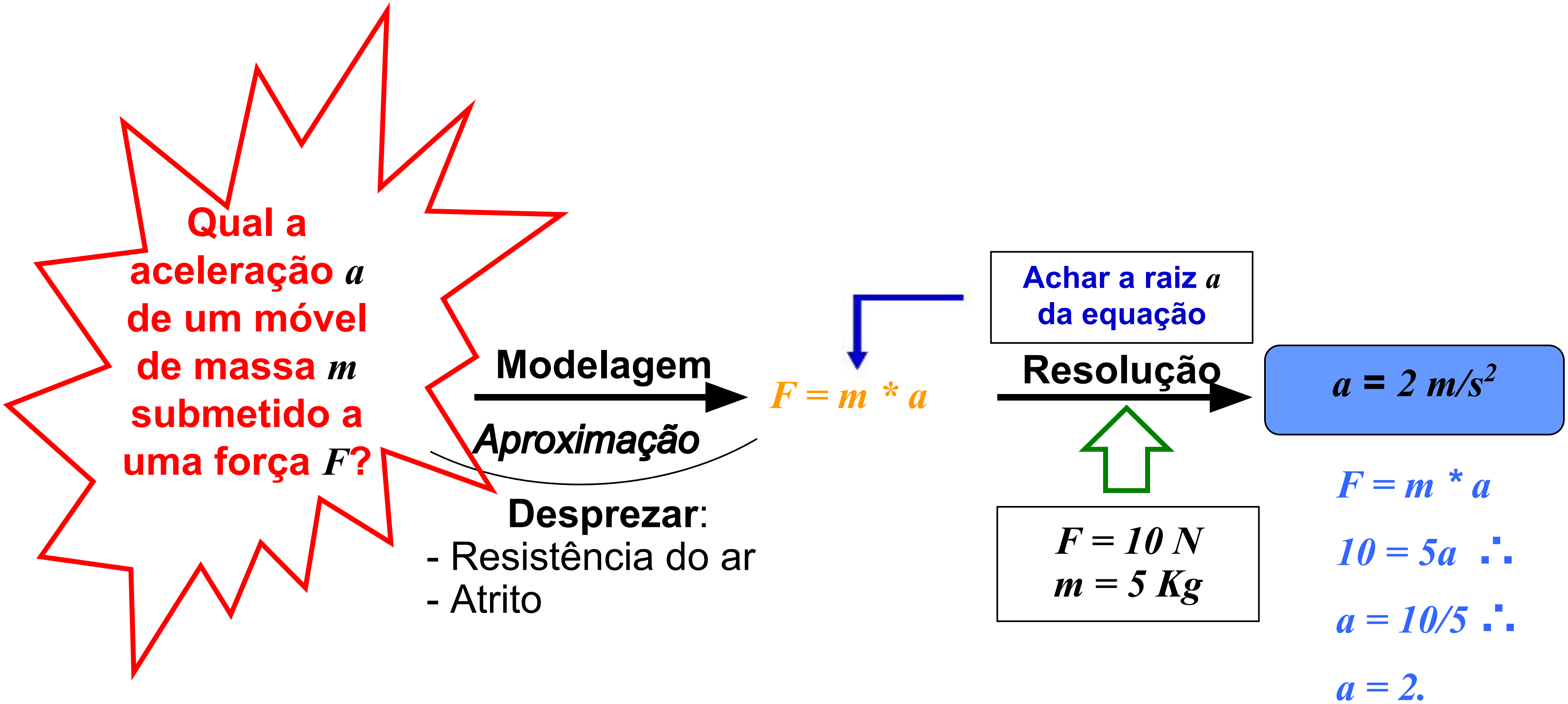
Aqui são entrados os dados do problema que vão alimentar as variáveis do modelo matemático

4b

Técnicas algébricas, aritméticas e lógicas sobre o modelo matemático levam à solução.

Do Problema até a Solução

- **Observe o modelo do slide anterior sendo aplicado a um problema corriqueiro da Física Clássica.**



- **As etapas Modelagem/Aproximação e Entrada de dados/Resolução são uma constante fonte de erros em Métodos Numéricos.**

Caracterizando o Erro

1. **Quanto à Origem:**

a. Erro nos dados (na coleta) – os dados podem ser anotados errados na fase de coleta.

b. Erro de leitura, medida, etc. – o leiturista, medidor, avaliador,etc. pode se enganar, confundir, etc.

c. Erro do instrumento (imprecisão) – todo instrumento possui imprecisões decorrentes de sua tecnologia de fabricação.

d. Erro de paralaxe (ângulo de visão) – a posição do leiturista em relação ao instrumento pode acarretar uma leitura errada

e. Erro na entrada dos dados – erro de digitação, por exemplo

Caracterizando o Erro (quanto ao método)

2. **Erro de Truncamento -** o método exigiria um tempo de processamento maior do que o realizado; a parada do procedimento foi forçada, ocorreu antes do tempo necessário para produzir um resultado mais preciso.

   Ex.: Calcular o valor e^x pela série de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

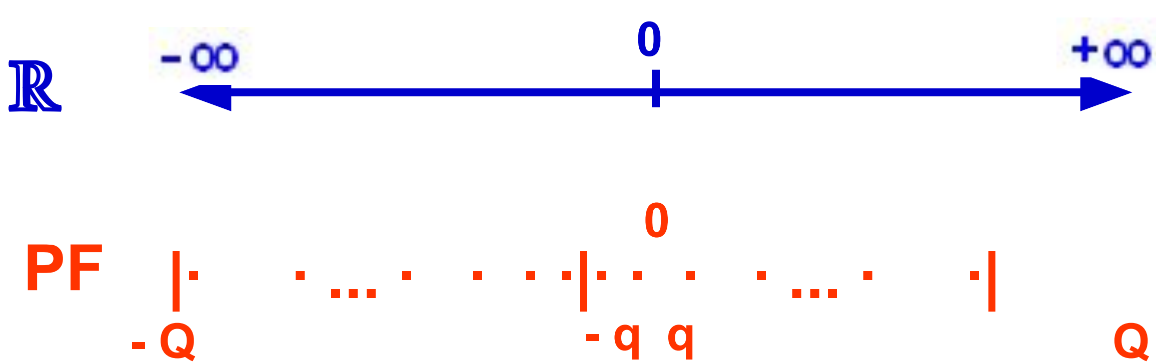
- A série acima possui infinitos termos, mas na prática, apenas os n primeiros termos são utilizados.
- Se fossem utilizados 20 termos em vez de 10, a precisão seria maior.

Caracterizando o Erro (quanto ao método)

. Erro de Arredondamento – o sistema de representação numérica utilizado não oferece (ou não se requer) precisão suficiente.

- Ex1.: A resposta é requerida com apenas 3 casas decimais quando poderia ser mais precisa com mais casas decimais.

Ex2.: No computador os reais ($\mathbb{R}$) são representados pelo sistema de Ponto Flutuante (PF) da máquina; o infinito e denso é representado no finito e espaçado, ou seja, alguns números reais por não existirem no PF do computador são obrigados a serem representados por algum que existe no PF



Caracterizando o Erro (quanto ao método)

3. **Erro de Conversão –** ocorre quando números de representação finita em um sistema de numeração de origem são representados de maneira finita no sistema de numeração de destino, quando, no destino, eles têm representação infinita .

Ex.: Converta $0{,}7_{10}$ para a base 2

$$0{,}7_{10} = 0{,}1011001100110\ldots_2 = 0{,}1\overline{0110}_2$$

Na base 2 o número equivalente é uma dízima periódica, mas na memória finita de um computador não se pode guardar algo que é infinito, logo a quantidade de casas decimais na base 2 é, obrigatoriamente, limitada.

Caracterizando o Erro

4. Quanto ao Potencial de Contaminação do Resultado

4.1 Erro absoluto (E_a) – é o erro real, bruto, sem disfarce.

$$E_a(x) = \left| x - x' \right|$$

4.2 Erro relativo (E_r) – relativo a um valor de referência; aquele valor que você usa como base

$$E_r(x) = \left| \frac{x - x'}{x} \right| = \left| \frac{x - x'}{x'} \right| = \frac{E_a(x)}{x \ ou \ x'}$$

4.2 Erro relativo percentual ($E_{r\%}$) – É o E_r dado em percentagem

$$E_{r\%}(x) = E_r(x) \times 100\%$$

Comentários sobre os tipos de erros do slide anterior

- Se você observar erro absoluto é a própria definição de erro do slide 2, só que dado em módulo.
- O Erro relativo geralmente é utilizado quando se pode confundir a ordem de grandeza do erro absoluto com a ordem de grandeza da variável considerada.
- O Erro relativo percentual é utilizado quando se quer saber quantos por cento de erro contamina a variável considerada.

Propagação do Erro

- **Operações aritméticas em seqüência usando operandos contaminados com erros fazem com que esses erros se propaguem ao longo de toda a cadeia de operações, acabando por contaminar operações com operandos isentos de erros.**

- **Considere y como sendo o resultado exato de uma seqüência f de operações em função de n operandos isentos de erros,**

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad [I]$$

- **E y' o resultado da mesma seqüência f de operações sobre os mesmos n operandos agora contaminados por erros,**

$$y' = f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad [II]$$

Propagação do Erro

Considere o erro absoluto E_i do i-ésimo operando usado na seqüência de operações,

$$E_i = x_i - x_i' \qquad [III]$$

E o erro absoluto total E da seqüência f de operações,

$$E = y - y' \qquad [IV]$$

Assim, substituindo *[I]* e *[II]* em *[IV]*

$$E = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1', x_2', \ldots, x_n') \qquad [V]$$

Propagação do Erro

Donde, isolando cada x_i' e substituindo em *[V]*, temos

$$E = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1 - E_1, x_2 - E_2, \ldots, x_n - E_n) \qquad [VI]$$

Expandindo $f(x_i - E_i)$ pela série de Taylor a seguir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad \text{onde} \quad c_n = \frac{f^n(x)}{n!} \qquad [VII]$$

Para expandir $f(x_i - E_i)$, fazemos $x = x_i - E_i$ e $a = x_i$. Assim,

$$x - a = x_i - E_i - x_i = -E_i \quad [VIII]$$

Portanto,

$$f(x_i - E_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_i)}{n!}(-E_i)^n \qquad [IX]$$

Donde, isolando do somatório a derivada de ordem *0* [que a própria *$f(x_i)$*], temos

$$f(x_i - E_i) = f(x_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(x_i)}{n!}(-E_i)^n \qquad [X]$$

Propagação do Erro

Expandindo para $x = (x_1 - E_1, x_2 - E_2, \ldots, x_n - E_n)$,

$$f(x_1 - E_1, x_2 - E_2, \ldots, x_n - E_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_i^k} (-E_i)^k \qquad [XI]$$

Donde, expandindo o 2º. somatório (das derivadas parciais)

$$f(x_1 - E_1, x_2 - E_2, \ldots, x_n - E_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots)}{\partial x_i} E_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_1, \ldots)}{\partial x_i^2} E_i^2 - \ldots \qquad [XII]$$

Propagação do Erro

Então, o erro absoluto de toda a operação será

$$E = y - y'$$

$$= f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1 - E_1, x_2 - E_2, ..., x_n - E_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x...)}{\partial x_i} E_i - \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x...)}{\partial x_i^2} E_i^2 + ... \qquad [XIII]$$

Supondo $E_i << 0$, podemos desprezar as derivadas de 2ª. ordem em diante, e obtemos

$$\boxed{E \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x...)}{\partial x_i} E_i \right|} \qquad [XIV]$$

Exercícios propostos

1. **Cite dois tipos de erro na origem dos dados e explique como tais erros podem acontecer.**

2. **Um procedimento para produzir um resultado com precisão ótima deveria ser realizado em** 10 **etapas, mas devido a urgência foi realizado em apenas** 6 **etapas. Que tipo de erro foi cometido na realização do procedimento? Justifique.**

3. **Um computador tem capacidade de armazenar** 10 **casas decimais. Um procedimento realizado em tal máquina deveria produzir o resultado** $1{,}237645823592274$**, mas foi mostrado na tela o número** $1{,}2376458236$**. Que tipo de erro foi cometido? Justifique.**

4. **Qual o tipo de erro cometido pela máquina do exercício anterior se o número mostrado fosse** $1{,}2376458235$**? R – Truncamento, mas Justifique.**

5. **Um problema de métodos numéricos foi resolvido em um computador que armazenava apenas** 15 **casas decimais. O tempo de** $1{,}35\ s$ **usado no problema foi achado na memória da máquina como** $1{,}010110011001100_2$**. Que tipo de erro foi cometido?**

④ Métodos Numéricos - Erro

Exercícios propostos

Qual a definição de erro?

Qual o significado filosófico de erro absoluto?

A aceleração da gravidade g é tabelada pelos físicos com o valor de $9{,}80665\ m/s^2$. No laboratório de Física os alunos de ESA encontraram o valor para g de $9{,}81012\ m/s^2$. Calcule:

a. O erro absoluto

b. O erro relativo ao valor tabelado

c. O erro relativo ao valor medido pelos alunos

d. O erro relativo percentual ao valor tabelado.

Uma grandeza x medida de valor $2{,}42$ estava contaminada com $2{,}5\%$ de erro relativo percentual. Assim,

a. Qual o valor real da grandeza x?

b. Qual o erro relativo ao valor real?

c. Qual o erro absoluto?

Exercícios propostos

0. Uma grandeza de valor $0{,}825$ está contaminada com um erro absoluto de $0{,}332$. O valor real dessa grandeza pode estar em qual intervalo?
1. No problema anterior, qual seria a melhor maneira de expressar o erro da grandeza considerada? Justifique.
2. Qual a importância de se estudar a propagação de erros em operações matemáticas?
3. Calcule o erro absoluto da operação $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.
4. Calcule o erro absoluto da operação $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2$.
5. Calcule o erro absoluto da operação $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 3x_2^2$
6. Se no problema anterior $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$ com erros absolutos respectivos de $0{,}01$ e $0{,}02$, então qual o valor do erro absoluto da operação?

Obs.: nos problemas 13 a 16 use *[XIV]*

Por enquanto é só...

Estão abençoados!