EXEMPLO

(a) $\lim_{x \to c} \overbrace{(x^3 + 4x^2 - 3)}^{f(x)}$ (b) $\lim_{x \to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ (c) $\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

$\lim_{x \to c} (x^3 + 4x^2 - 3)$

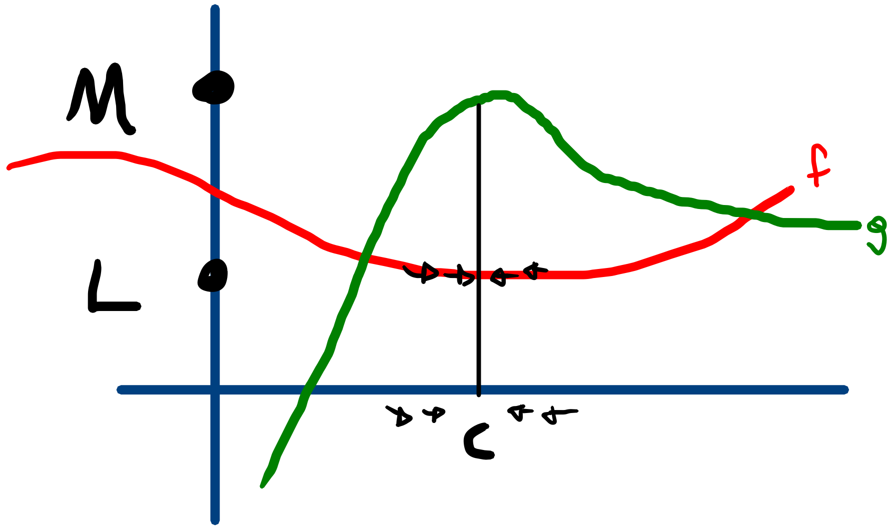
$\lim_{x \to c} x^3$

$\lim_{x \to c} x = c$

$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} x = x_0 \\ \lim_{x \to x_0} k = k \qquad k \text{ constante} \end{array}}$

TEOREMA 1 — Leis do limite Se L, M, c e k são números reais e

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M, \quad \text{então}$$



1. *Regra da soma:* $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Regra da diferença:* $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Regra da multiplicação por constante:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
4. *Regra do produto:* $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
5. *Regra do quociente:* $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Regra da potenciação:* $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$, n é um número inteiro positivo
7. *Regra da raiz:* $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n é um número inteiro positivo

(Se n for um número par, suporemos que $\lim_{x \to c} f(x) = L > 0$.)

R. Soma

$$\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = \boxed{\lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)} = L + M$$

Ex: $\lim_{x \to 3} (x + \pi) = \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} \pi = 3 + \pi$

R. Mult. por constante

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{3} \cdot x + 8 = \lim_{x \to 5} \sqrt{3} \cdot x + \lim_{x \to 5} 8 =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 8 = \sqrt{3} \cdot 5 + 8$$

Ex: $\lim_{x \to 5} (\sqrt{3} + 8) x = (\sqrt{3} + 8) \lim_{x \to 5} x = (\sqrt{3} + 8) \cdot 5$

Ex: $\lim\limits_{x\to c} x^2 = \lim\limits_{x\to c} x\cdot x = \lim\limits_{x\to c} x \cdot \lim\limits_{x\to c} x = c\cdot c = c^2$

$$\lim_{x\to 5} 2x(x^2+3) \overset{R.P.}{=} \left(\lim_{x\to 5} 2x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 5} x^2+3\right) \overset{\substack{R.M.C.\\ R.S.}}{=}$$

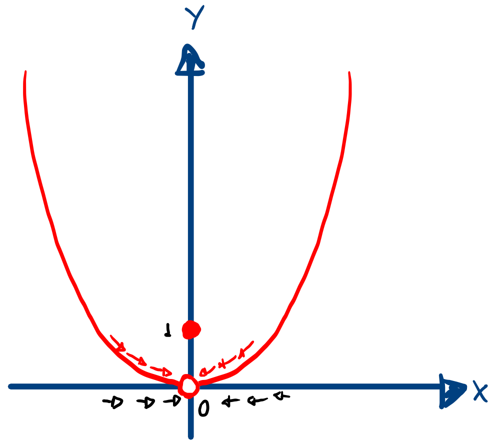
$$= 2\cdot 5\cdot\left(\lim_{x\to 5} x^2 + \lim_{x\to 5} 3\right) \overset{R.Pot.}{=} 2\cdot 5\cdot\left(5^2+3\right)$$

Ex: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\quad 1 \notin Dom(f)$

Se $x \neq 1$ então $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$$

Ex: $g(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$



$g(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

A condição problemática da Regra do Quociente

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2-2h}{h} \ \cancel{=} \ \frac{\lim_{h\to 0} h^2-2h}{\lim_{h\to 0} h}$$

falso

R.D.
R.Pd.
R.M.C.

$$\lim_{h\to 0} h^2-2h = 0^2-2\cdot 0$$

$$\lim_{h\to 0} h^2-2h = \lim_{h\to 0} h^2 - \lim_{h\to 0} 2h = \left(\lim_{h\to 0} h\right)^2 - 2\lim_{h\to 0} h =$$

$$= 0^2 - 2\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{h\to 0} h = 0$$

Correto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h-2)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} h-2 = 0-2 = -2$$

Ex: $\lim_{h\to 0} \frac{h^2-2h}{h+1} \overset{R.Q.}{=} \frac{\lim_{h\to 0} h^2-2h}{\lim_{h\to 0} h+1} = \frac{0}{1} = 0$

TESTE: $\lim_{h\to 0} h+1 = 0+1 = 1$ ✓

Ex: dúvida: $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = ?$ (Existe?)

Erros comuns:

EXEMPLO

$$\lim_{x \to c} (x^3 + 4x^2 - 3)$$

TEOREMA 2 — Limites de polinômios Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, então

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

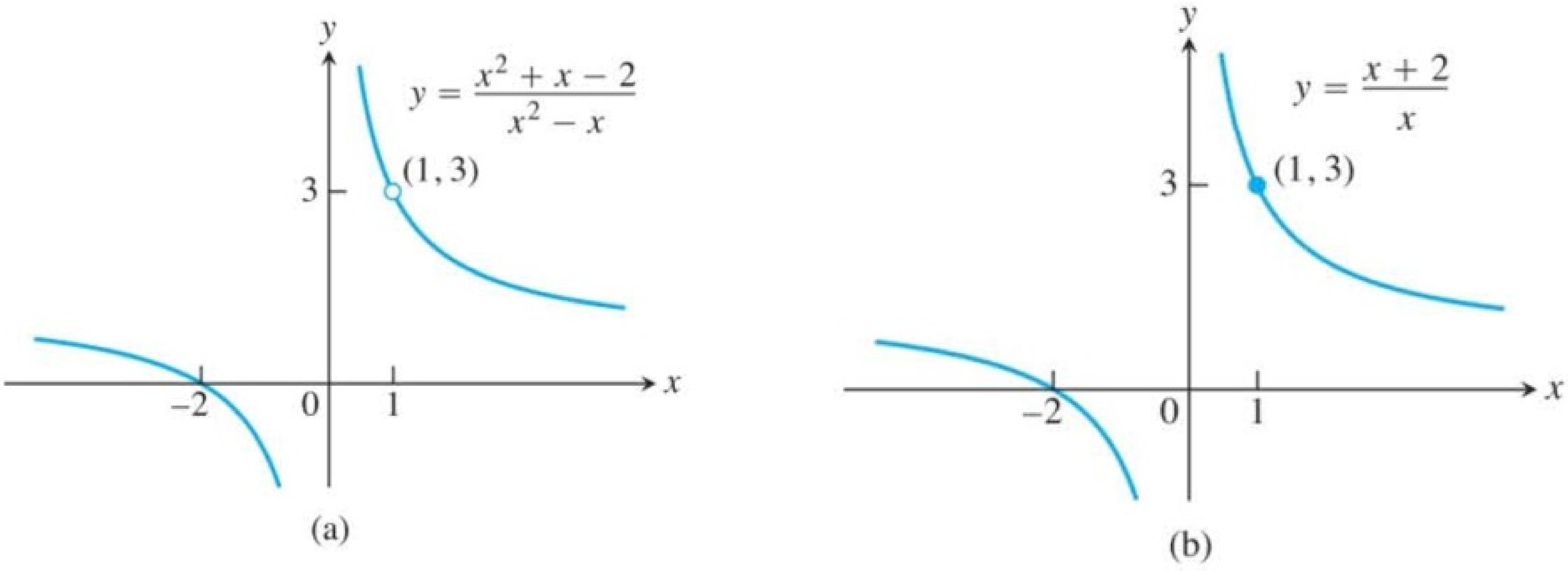
$$\lim_{x \to c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$$

TEOREMA 3 — Limites das funções racionais

Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$, então

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Funções diferentes, Limites Iguais



"Cancelamento" entra fatores comuns (cancelamento algébrico)

TEOREMA 4 — Teorema do confronto Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo c, exceto, possivelmente, no próprio $x = c$. Suponha também que

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L.$$

Então, $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

O que fazer com as funções trigonométricas?

O teorema do confronto nos ajuda a estabelecer importantes regras de limite:

(a) $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$ **(b)** $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$

(c) Para qualquer função f, $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$ implica $\lim_{x \to c} f(x) = 0$.

TEOREMA 5 Se $f(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente em $x = c$, e os limites de f e g existirem quando x se aproxima de c, então

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$