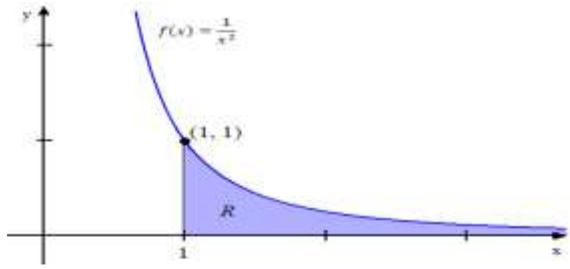
4. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS (RESUMO)

Até agora, estudamos a integral definida de uma função contínua em um determinado intervalo fechado $[a, b]$. Ou seja, foi preciso que nossas integrais definidas tivessem duas propriedades:

- 1ª) que o domínio da integração de a a b, fosse finito;
- 2ª) que a imagem do integrando fosse finita nesse domínio.

Entretanto, na prática nós frequentemente encontramos problemas que fazem com que não se cumpram uma ou as duas condições. Nestes casos, temos o que chamamos de integrais impróprias.

Em diversas aplicações, especialmente em estatística, é necessário por exemplo, considerar a área de uma região que se estende indefinidamente para a direita ou para a esquerda ao longo do eixo x.



4.1. Integrais Impróprias com limites de integração infinitos

Definição 4.1: Integrais com limites infinitos de integração são integrais impróprias. Assim,

1) Se f é contínua para todo $x \geq a$, ou seja, se f é contínua em $[a, +\infty)$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.1)$$

2) Se f é contínua para todo $x \leq b$, ou seja, se f é contínua em $(-\infty, b]$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.2)$$

3) Se f é contínua para todo x, ou seja, se f é contínua em $(-\infty, +\infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \qquad (4.3)$$

onde c é um número real qualquer.

Observação:

i. Em (4.1) e (4.2) se o limite existe e é finito, a integral imprópria converge e o limite é o valor da integral imprópria. Caso contrário, dizemos que a integral imprópria diverge.

ii. Em (4.3), a integral do lado esquerdo converge se as duas integrais do lado direito também forem convergentes. Se isso não ocorre a integral diverge e não tem valor.

iii. Em (4.3) tomando $c = 0$ e usando (4.1) e (4.2), temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \boldsymbol{f(x)dx} + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \boldsymbol{f(x)dx}.$$

Logo, podemos escrever o item 3) da definição 4.1 dada acima, da seguinte forma:

"Se f é contínua para todo x, ou seja, se f é contínua em $(-\infty, +\infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \boldsymbol{f(x)dx} + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \boldsymbol{f(x)dx}."$$

Exemplo 4.1: Verifique se as integrais impróprias abaixo convergem ou divergem.

a) $\boldsymbol{I = \int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}}$**.**

Solução: Por definição $I = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$.

- Calculando a integral indefinida $\int \frac{dx}{(4-x)^2}$.

Pelo Método da substituição, fazendo $u = 4 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$. Daí,

$$\int \boldsymbol{\frac{dx}{(4-x)^2}} = \int -\boldsymbol{\frac{du}{u^2}} = -\int \boldsymbol{u^{-2}du} = -\boldsymbol{\frac{u^{-1}}{(-1)}} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{\frac{1}{4-x}} + \boldsymbol{C}.$$

- Calculando a integral definida $\int_{a}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$, pelo TFC:

$$\int_{a}^{2} \boldsymbol{\frac{dx}{(4-x)^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4-x}}\Bigg]_{a}^{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\frac{1}{4-a}}.$$

- Calculando a integral imprópria:

$$\boldsymbol{I} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{2} \boldsymbol{\frac{dx}{(4-x)^2}} = \lim_{a \to -\infty} \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\frac{1}{4-a}}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}.$$

Logo, a integral imprópria converge.

b) I = $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3}}$**.**

Solução: Por definição $I = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+3} + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+3}$.

- Calculando a integral indefinida $\int \frac{dx}{x^2+3}$. Pela tabela das integrais:

$$\int \boldsymbol{\frac{dx}{x^2+3}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}} + \boldsymbol{C}.$$

- Calculando as integrais definidas pelo TFC:

$$\int_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_{a}^{0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \underbrace{arctg\ 0}_{=0} - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{a}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

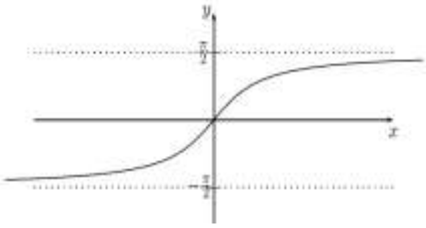
e

$$\int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_{0}^{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{b}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \underbrace{arctg 0}_{=0} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

- Calculando a integral imprópria:

$$I = \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Logo, a integral imprópria converge.



c) $\mathbf{I} = \int_{0}^{+\infty} \boldsymbol{senxdx}.$

Solução: Por definição $I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b senx\ dx$.

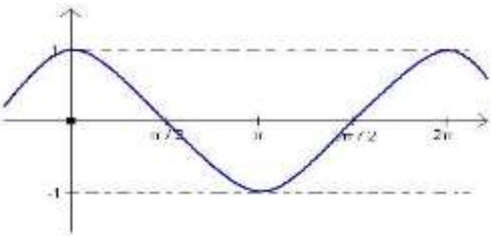
- Calculando a integral definida $\int_0^b senx\ dx$, pelo TFC:

$$\int_0^b senx\ dx = -cosx]_0^b = -cosb - (-\cos 0) = -\cos b + 1.$$

- Calculando a integral imprópria:

$I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b senx\ dx = \lim_{b\to+\infty} (-\cos b + 1)$, e este limite não existe, pois quando $b \to +\infty$, $\cos b$ oscila entre -1 e 1.

Logo, a integral imprópria diverge.



Exemplo 4.2: Para quais valores de p a integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge? Quando a integral converge, qual é o seu valor?(Exercício)

Teorema 4.1: Sejam f e g funções contínuas em $[a, +\infty)$ tais que $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, +\infty)$

i) Se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ também converge.

ii) Se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge, então $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ também diverge.

Exemplo 4.3. Mostre que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$ converge.

Exemplo 4.4. Mostre que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}} dx$ diverge.

4.2. Integrais impróprias com integrandos infinitos

Definição4.2: Integrais de funções que se tornam infinitas em um ponto dentro do intervalo de integração são integrais impróprias.

1) Se f é contínua em $(a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)dx. \qquad (4.4)$$

2) Se f é contínua em $[a, b)$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s \to b^-} \int_a^s f(x)dx. \qquad (4.5)$$

3) Se f é contínua em $[a, c) \cup (c, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (4.6)$$

Observação:

i. Em (4.4) e (4.5) se o limite é finito, a integral imprópria converge e o limite é o valor da integral imprópria. Caso contrário, a integral imprópria diverge.
ii. Em (4.6), a integral do lado esquerdo converge se as duas integrais do lado direito também forem convergentes. Se isso não ocorre a integral diverge e não tem valor.
iii. Usando (4.4) e (4.5), podemos escrever a equação (4.6) da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s \to c^-} \int_a^s f(x)dx + \lim_{r \to c^+} \int_r^b f(x)dx.$$

Exemplo 4.5: Verifique a convergência das integrais abaixo.

a) $\int_1^2 \frac{1}{2-x} dx$

Solução: O integrando $f(x) = \frac{1}{2-x}$ é contínuo em $[1,2)$, mais se torna infinito quando $x \to 2$. Daí,

$$\int_1^2 \frac{1}{2-x}dx = \overbrace{\lim_{s\to 2^-}\int_1^s \frac{1}{2-x}dx}^{Cálc\ Auxiliar} = \lim_{s\to 2^-}(-ln\ |2-x|)]_1^s$$
$$= \lim_{s\to 2^-}(-ln|2-s| + ln|2-1|) = \lim_{s\to 2^-}(-ln|2-s|+0) = \infty.$$

Portanto, a integral diverge.

b)$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}$

Solução: O integrando $f(x) = \frac{1}{(x-2)^{2/3}}$ é contínuo em $[0,2) \cup (2,3]$, mais se torna infinito quando $x \to 2$. Daí,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}.$$

Onde:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{s\to 2^-}\int_0^s \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{s\to 2^-}\left[3.(x-2)^{1/3}\right]\Big|_0^s$$
$$= \lim_{s\to 2^-}\left[3.(s-2)^{1/3} - 3.(0-2)^{1/3}\right] = -3.(-2)^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{2}.$$

e

$$\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{r\to 2^+}\int_r^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}(x)dx = \lim_{r\to 2^+}\left[3.(x-2)^{1/3}\right]\Big|_r^3$$
$$= \lim_{r\to 2^+}\left[3.(3-2)^{1/3} - 3.(r-2)^{1/3}\right] = 3.$$

Daí,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 3\sqrt[3]{2} + 3.$$

Logo, a integral converge.

Cálculo auxiliar:

Item a) $\int \frac{1}{2-x}dx$. Pelo Método da substituição, fazendo $u = 2-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$. Daí,

$$\int \frac{1}{u}(-du) = -\int \frac{du}{u} = -ln|2-x| + C.$$

Item b) $\int \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}$. Pelo Método da substituição, fazendo $u = x-2 \Rightarrow du = dx$. Daí,

$$\int \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \int \frac{du}{u^{2/3}} = \int u^{-2/3}du = \frac{u^{1/3}}{1/3} + C = 3.(x-2)^{1/3} + C.$$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

d) $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}$

e) $\int_0^{\infty} e^x dx$

f) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$

Teorema 4.2: Sejam f e g funções contínuas em $(a, b]$ tais que $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b]$.

i) Se $\int_a^b g(x)dx$ converge, então $\int_a^b f(x)dx$ também converge.

ii) Se $\int_a^b f(x)dx$ diverge, então $\int_a^b g(x)dx$ também diverge.

Exemplo 4.6. Mostre que a integral imprópria $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Exemplo 4.7. Mostre que a integral imprópria $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$ diverge.

4.4 Aplicando as integrais impróprias no cálculo de áreas

Exemplo 4.6: Encontrar a área sob o gráfico da curva $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $para\ x \geq 1$. Represente-a graficamente.

Exemplo 4.8: É possível encontrar um número finito que represente a área da região abaixo da curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, no intervalo (0,16].

1ª Lista de Exercícios – Unidade II

1. Investigar as integrais impróprias seguintes: (Verificar se converge ou diverge)

a) $\int_{-\infty}^{0} e^{2x+1} dx$	b) $\int_{-\infty}^{0} x.e^{-x^2} dx$	c) $\int_7^{+\infty} \frac{1}{(x-5)^2} dx$
d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$	e) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x ln^3 x} dx$	f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^3}{(x^4+3)^2} dx$
g) $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{3-2e^x} dx$	h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$	i) $\int_1^{+\infty} re^{-rx} dx, \quad r > 0$

2. Encontrar a área sob o gráfico da curva $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $para\ x \geq 1$. Represente-a graficamente.
3. Seja $a > 0$. Mostre que a integral imprópria $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Gabarito

Q1) a) $\frac{1}{2}$;conv	b) $-\frac{1}{2}$; converge	c) $\frac{1}{7}$; converg	d) $diverge$	e) $\frac{1}{2}$; converge	$g)\ \frac{log3}{2}$;converg	h) -2 converg e	i) diverg e

Referências:

FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. Cálculo A. Editora McGraw Hill.

CLARK, Marcondes Rodrigues. Cálculo de funções de uma variável real/ Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. – Teresina: EDUFPI, 2012.