Álgebra

Notas de Aula

Lucas Giraldi A. Coimbra

Sumário

Capítulo 1

Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento

Capítulo 2

Topologia Algébrica

Capítulo 3

Álgebra Homológica

3.1 Categorias

Essa seção foi construída pelo autor das notas de aula com o intuíto de resumir fatos categóricos relevantes para o estudo de álgebra homológica.

Uma ***categoria*** é uma classe $\mathcal{C}$, cujos elementos são chamados de ***objetos***, de maneira que para cada dois $A, B \in \mathcal{C}$ se associa um conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, cujos elementos são chamados de ***morfismos entre** A **e** B*. Se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, escrevemos $f \colon A \to B$. Pedimos que morfismos satisfaçam as seguintes condições:

- dados $A, B, C \in \mathcal{C}$, deve existir uma operação de composição $\circ$ que, dados $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to C$ produz um morfismo $g \circ f \colon A \to C$;
- dado $A \in \mathcal{C}$ deve existir um morfismo $\mathbb{1}_A \colon A \to A$ tal que para todos $B \in \mathcal{C}$, $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to A$ temos
$$f \circ \mathbb{1}_A = f \quad \text{e} \quad \mathbb{1}_A \circ g = g; \tag{3.1}$$
- dados $A, B, C, D \in \mathcal{C}$, $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ e $h \colon C \to D$, devemos ter
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \tag{3.2}$$

Um ***funtor covariante*** entre duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, denotado por $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. é uma associação, para cada $A \in \mathcal{C}$ de um objeto $F(A) \in \mathcal{C}$, e para cada $f \colon A \to B$, de um morfismo $F(f) \colon F(A) \to F(B)$, de maneira que $F(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{F(A)}$ e $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$. Um ***funtor contravariante*** é definido da mesma maneira, mas para cada $f \colon A \to B$ o funtor produz um morfismo $F(f) \colon F(B) \to F(A)$ e a regra de composição é dada por $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Uma ***transformação natural*** entre dois funtores covariantes $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, denotada por $\eta \colon F \to G$, é uma associação, para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, de um morfismo $\eta_A \colon F(A) \to G(A)$, de maneira que dados $f, g \colon A \to B$ (com $A, B \in \mathcal{C}$), o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_A} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

Uma transformação natural entre funtores contravariantes pode ser definida de maneira similar.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$, definimos o ***funtor identidade*** $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ por $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(A) = A$ e $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(f) = f$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$ e $f \colon A \to B$. Dadas categorias $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ e funtores $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, podemos definir a sua ***composição*** como o funtor $G \circ F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ dado por $(G \circ F)(A) = G(F(A))$ e $(G \circ F)(f) = G(F(f))$.

Diremos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ***isomorfas*** se existe um ***isomorfismo*** de categorias entre elas, isso é, um funtor $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que existe um outro funtor $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ de maneira que $F \circ G = \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F = \mathbb{1}_A$.

Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, três funtores covariantes $F, G, H \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e duas transformações naturais $\eta \colon F \to G$ e $\lambda \colon G \to H$, definimos a ***composição*** de η e λ como uma transformação natural $\lambda \circ \eta \colon F \to H$ cuja componente em $A \in \mathcal{C}$ é dada por $(\lambda \circ \eta)_A = \lambda_A \circ \eta_A$. Podemos definir também a ***transformação identidade*** por $\mathbb{1}_F \colon F \to F$ cuja componente em $A \in \mathcal{C}$ é $(\mathbb{1}_F)_A = \mathbb{1}_{F(A)}$.

Diremos que dois funtores $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ são ***naturalmente isomorfos*** se existe um ***isomorfismo natural*** entre eles, isso é, uma transformação natural $\eta\colon F \to G$ tal que existe uma outra transformação natural $\lambda\colon G \to F$ de maneira que $\lambda \circ \eta = \mathbb{1}_F$ e $\eta \circ \lambda = \mathbb{1}_G$.

Diremos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ***equivalentes*** se existe uma ***equivalência*** de categorias entre elas, isso é, um funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que existe um outro funtor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ de maneira que existem isomorfismos naturais $\eta\colon F \circ G \to \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ e $\lambda\colon G \circ F \to \mathbb{1}_A$.

Se $\mathcal{C}$ é uma categoria e $A, B \in \mathcal{C}$, então um ***produto*** de A e B é um outro objeto C, geralmente denotado por $A \times B$, equipado com um par de morfismos $\pi_A\colon A \times B \to A$ e $\pi_B\colon A \times B \to B$, satisfazendo a seguinte propriedade universal: para cada $D \in \mathcal{C}$ e para cada par de morfismos $f_A\colon D \to A$ e $f_B\colon D \to B$, existe um único morfismo $f\colon D \to A \times B$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

A definição pode ser estendida similarmente para uma família finita qualquer de objetos $A_1, \ldots, A_n$, produzindo o produto $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Se $\mathcal{C}$ é uma categoria e $A, B \in \mathcal{C}$, então um ***coproduto*** de A e B é um outro objeto C, geralmente denotado por $A \oplus B$, equipado com um par de morfismos $i_A\colon A \to A \oplus B$ e $i_B\colon B \to A \oplus B$, satisfazendo a seguinte propriedade universal: para cada $D \in \mathcal{C}$ e para cada par de morfismos $f_A\colon A \to D$ e $f_B\colon B \to D$, existe um único morfismo $f\colon A \oplus B \to D$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd} & D & \\ A \arrow[ur, "f_A"] \arrow[r, "i_A"'] & A \oplus B \arrow[u, dashed, "f"] & B \arrow[ul, "f_B"'] \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

A definição pode ser estendida similarmente para uma família finita qualquer de objetos $A_1, \ldots, A_n$, produzindo o produto $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$.

Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita ***pré-aditiva*** se, dados $A, B \in \mathcal{C}$, o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ possui uma operação binária, geralmente denotada por $+$, que faz dele um grupo abeliano, e de maneira que composição de morfismos é bilinear, isso é: dados $A, B, C \in \mathcal{C}$, $f_1, f_2\colon A \to B$ e $g_1, g_2\colon B \to C$, temos

$$g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2 \quad \text{e} \quad (g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1. \tag{3.3}$$

3.2 Aula 01

A referência principal do curso será o texto "Introduction to Homological Algebra"de Charles Weibel. O objetivo da primeira aula é dar algumas definições e lembrar certos conceitos categóricos.

Começamos com um anel R, que para todos os propósitos pode ser comutativo dependendo do objetivo do aluno, mas que por agora é apenas associativo e com unidade. Nos preocuparemos, ao longo do curso, com a categoria R-Mod dos módulos de R à esquerda, isso é, dos grupos abelianos $(M, +)$ equipados de uma ação de R à esquerda

$$\begin{aligned} R \times M &\to M \\ (a, x) &\mapsto ax' \end{aligned} \tag{3.4}$$

isso é, um morfismo de anéis $R \to \mathrm{End}(M)$ (note que $\mathrm{End}(M)$ possui estrutura de anel com a soma $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$). É importante notar que as categorias R-Mod e Mod-R (dos módulos à esquerda) não são necessariamente equivalentes (mas podem ser, caso R seja comutativo, ou possua uma involução).

Assume-se que o estudante já tem conhecimento da teoria de módulos sobre anéis. O objeto de interesse desse curso será a categoria dos complexos de cadeias. Um ***complexo de cadeias*** em R-Mod é uma sequência $C_\bullet = \{C_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset R$-Mod junto com uma coleção de morfismos de módulos $d = \{d_i\colon C_i \to C_{i-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $d^2 = 0$, isso é, tal que para cada $i \in \mathbb{Z}$ a composição $d_{i-1} \circ d_i\colon C_i \to C_{i-2}$ é o mapa nulo. Equivalentemente, podemos pedir que $\operatorname{im} d_i \subset \ker d_{i-1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Os ***módulos de homologia*** de $C_\bullet$ são definidos, para cada $i \in \mathbb{Z}$, por

$$H_i(C_\bullet) = \frac{\ker d_i}{\operatorname{im} d_{i+1}}. \tag{3.5}$$

Geralmente denotamos $\ker d_i$ por $Z_i(C_\bullet)$, que é o módulo das ***i-cadeias de $C_\bullet$***, e denotamos $\operatorname{im} d_{i+1}$ por $B_i(C_\bullet)$, que é o módulo dos ***i-bordos de $C_\bullet$***.

Podemos considerar também o conceito dual: um ***complexo de cocadeias*** em R-Mod é uma sequência $C^\bullet = \{C^i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset R$-Mod junto com uma coleção de morfismos de módulos $d = \{d^i : C^i \to C^{i+1}\}$ tal que $d^2 = 0$, isso é, tal que para cada $i \in \mathbb{Z}$ a composição $d^{i+1} \circ d^i : C^i \to C^{i+2}$ é o mapa nulo. Equivalentemente, podemos pedir que $\operatorname{im} d^i \subset \ker d^{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Os ***módulos de cohomologia*** de $C^\bullet$ são definidos, para cada $i \in \mathbb{Z}$, por

$$H^i(C^\bullet) = \frac{\ker d^i}{\operatorname{im} d^{i-1}}. \tag{3.6}$$

Geralmente denotamos $\ker d^i$ por $Z^i(C^\bullet)$, que é o módulo das ***i-cocadeias de $C^\bullet$***, e denotamos $\operatorname{im} d^{i-1}$ por $B^i(C^\bullet)$, que é o módulo dos ***i-cobordos de $C^\bullet$***.

Sempre que nos referirmos a "complexos" ao longo do curso, a menos que o contrário seja dito, iremos nos referir a complexos de cadeia. A grande maioria dos argumentos e dos resultados vale também para complexos de cocadeia, apenas invertendo as setas da demonstração.

O primeiro passo é notar que complexos em R-Mod formam uma categoria. Um ***morfismo de complexos*** entre complexos $C_\bullet$ e $D_\bullet$ é uma coleção de morfismos $f_\bullet = \{f_i : C_i \to D_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tais que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} \\ \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}} \\ D_i & \xrightarrow{d_i} & D_{i-1} \end{array}$$

Para cada complexo $C_\bullet$ temos a identidade $\mathbb{1}_{C_\bullet} : C_\bullet \to C_\bullet$ que age identicamente em cada módulo: $(\mathbb{1}_{C_\bullet})_i = \mathbb{1}_{C_i}$. Além disso, se temos morfismos $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ e $g_\bullet : D_\bullet \to E_\bullet$ podemos construir a composição $g_\bullet \circ f_\bullet : C_\bullet \to E_\bullet$ da maneira esperada: para cada $i \in \mathbb{Z}$, tomamos $(g_\bullet \circ f_\bullet)_i = g_i \circ f_i : C_i \to E_i$. Denotamos a categoria dos complexos em R-Mod por $\mathrm{Ch}_\bullet(R\text{-Mod})$ ou apenas $\mathrm{Ch}_\bullet$ se o anel estiver entendido do contexto.

Proposição 1

A categoria dos complexos de cadeia é aditiva.

Demonstração.