Iniciação Científica

Relatório Final

Desigualdades de Clarkson

Universidade de São Paulo

Instituto de Ciências Matemáticas e Computação

Aluno: **Lucas Giraldi Almeida Coimbra**

Orientador: **Éder Rítis Aragão Costa**

Agosto de 2024

São Carlos

Conteúdo

1 Teoria da Medida e Espaços L^p

O primeiro passo para o estudo das desigualdades de Clarkson é a construção de alguns conceitos de teoria da medida.

1.1 O problema da medida em $\mathbb{R}^n$

Considere a família $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Se $\{a_i\}_{i=1}^n$ e $\{b_i\}_{i=1}^n$ são conjuntos em $\mathbb{R}$ tais que $a_i < b_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então podemos definir

$$\ell\left(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^{n}|b_i - a_i|$$

como o *volume* do n-retângulo dado pelo cartesiano acima. O que procuramos a seguir é uma função $\ell\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ que estenda de maneira "minimamente razoável" o volume de n-retângulos em $\mathbb{R}^n$. Com "minimamente razoável", queremos dizer que a nossa esperança é de que:

- se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, então
$$\ell(A + x) = \ell(A);$$
- se $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então
$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i).$$

O texto produzido aqui pode ser de cunho acadêmico, mas o que seria de nós, autores, se não ensinássemos alguma coisa sobre a vida fora da matemática? Nossa primeira lição, portanto, é que esperança não serve de nada. Provaremos isso mostrando que tal extensão ℓ não pode existir. Para cumprir tal tarefa, definimos uma relação: se $x, y \in \mathbb{R}^n$ escrevemos

$$x \sim y \quad \text{se, e somente se,} \quad x - y \in \mathbb{Q}^n.$$

Proposição 1. *A relação definida acima é de equivalência.*

Demonstração. De fato,

- a relação é simétrica, já que $x - x = 0 \in \mathbb{Q}^n$;
- a relação é reflexiva, já que se $x - y \in \mathbb{Q}^n$, então $-(x - y) \in \mathbb{Q}^n$, e $-(x - y) = y - x$;
- a relação é transitiva, já que se $x - y, y - z \in \mathbb{Q}^n$, então $x - z = (x - y) - (y - z) \in \mathbb{Q}^n$.

□