Qualificação de Mestrado

Lucas Giraldi Almeida Coimbra

14 de fevereiro de 2024

Conteúdo

1 Álgebra Linear

1.1 Fundamentos e Dualidade

Fundamentos

Tome $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um **espaço vetorial** é um conjunto V munido de duas operações

$$\begin{aligned} +\colon V \times V &\to V \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{K} \times V &\to V \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned} \tag{1}$$

tais que a operação $+$ (soma) é comutativa, associativa, possui identidade e todos os inversos, e a operação de $\cdot$ (produto por escalar) satisfaz as relações distributivas, $1x = x$ e $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

Um **subespaço vetorial** de um espaço vetorial V é um subconjunto $S \subset V$ tal que para todos $x, y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $x + y \in S$ e $\lambda x \in S$. Todo espaço vetorial é um subespaço vetorial de si mesmo, assim como $\{0\}$ é sempre um subespaço vetorial. Chamamos V e $\{0\}$ de **subespaços triviais**. Se $U, W \subset V$ são dois subespaços, então o conjunto $U + V = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ é a **soma** desses subespaços, e é também um subespaço. Se $U \cap W = \{0\}$, então diremos que a soma desses espaços é uma **soma direta** e a denotamos por $U \oplus W$. A intersecção $U \cap W$ também é sempre um subespaço vetorial.

Uma **combinação linear** de vetores em V é uma soma finita

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i x_i = 0 \tag{2}$$

onde cada $\lambda^i \in \mathbb{K}$ e cada $x_i \in V$. Dado um conjunto $S \subset V$, o conjunto $\langle S \rangle$ de todas as combinações lineares de elementos de S é um subespaço vetorial de V, chamado de **subespaço gerado por** S. O conjunto S é **gerador** de V se $\langle S \rangle = V$.

Dizemos que $x_1, \dots, x_n \in V$ são **linearmente independentes** se para quaisquer $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i x_i = 0, \tag{3}$$

então $\lambda_i = 0$ para todo i. Vetores que não são linearmente independentes são **linearmente dependentes**. Fica claro da definição que um conjunto de vetores é linearmente dependente se, e somente se, um dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros. Além disso, é fácil ver que se uma subcoleção de vetores é linearmente dependente, então a coleção original também é. Mais ainda, qualquer coleção de vetores que contenha o 0 é linearmente dependente.

Lema 1. *Sejam $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ um gerador de V e $v_1, \dots, v_m$ vetores linearmente independentes. Então, $m \leq n$.*

Demonstração. Suponha que $m > n$. Como S gera V, então existem $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ tais que

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i s_i. \tag{4}$$

Como $y_1 \neq 0$ (pela independência linear), então algum λ_j é não nulo, ou seja, podemos substituir s_j por y_1 e o conjunto resultante ainda gera V. Pela independência linear dos y_i, podemos fazer essa operação mais $n-1$ vezes, garantindo que $y_1, \dots, y_n$ geram V. Porém, isso significa que $y_{n+1}, \dots, y_m$ são combinação linear de $y_1, \dots, y_n$, o que contradiz a independência linear. Segue então que $m \leq n$. □

Um espaço V é **finitamente gerado** se existe um conjunto gerador finito. Uma **base** de V é um conjunto gerador linearmente independente.

Lema 2. *Todo espaço finitamente gerado possui uma base.*

Demonstração. Se $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ gera V, então se S é linearmente independente o trabalho acabou. Caso contrário, algum s_i é combinação linear dos outros, e então retiramos ele e o conjunto resultante ainda gera V. Fazemos isso até que os vetores que sobram em S sejam linearmente independentes, e assim temos uma base. □

A partir de agora vamos trabalhar apenas com espaços finitamente gerados e, caso queiramos falar em um contexto mais geral, iremos explicitar. A **dimensão** de um espaço V, denotada por $\dim V$, é o número de elementos de uma base. Pelo Teorema a seguir, esse número está bem definido.

Teorema 3. *Toda base possui mesmo número de elementos.*

Demonstração. Como bases são linearmente independentes e geradoras, o resultado segue facilmente do Lema 1. □

O Lema 2 assume implicitamente que o conjunto S que gera V é não vazio. Caso tenhamos $V = \langle \varnothing \rangle$, então $V = \{0\}$ e o chamamos de **espaço trivial**. Sua dimensão é, por definição, nula.

Teorema 4. *Todo conjunto linearmente independente pode ser estendido para uma base.*

Demonstração. Se S é um conjunto linearmente independente, então considere $\langle S \rangle$. Se $\langle S \rangle = V$, então o conjunto S já é uma base. Caso contrário, seja $v \in V \setminus \langle S \rangle$ e tome $S_1 = S \cup \{v\}$. Podemos agora testar se $\langle S_1 \rangle = V$ e, caso contrário, repetir o processo. Como o espaço V é finitamente gerado, esse processo obrigatoriamente acaba, que é quando adicionamos vetores o suficiente em S para que se torne uma base. □

Note que todo subespaço de um espaço com dimensão finita, possui dimensão finita (pelo Lema 1). Se W é um subespaço de V, um subespaço U de V é um **complemento** de W se $U \oplus W = V$.

Teorema 5. *Complementos sempre existem e são únicos.*

Demonstração. Se W é um subespaço, seja $v_1, \ldots, v_m$ uma base de W e a complete para uma base $v_1, \ldots, v_m$, $w_1, \ldots, w_n$ de V. Defina $U = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$. Se $x \in U \cap W$, então existem $\lambda^1, \ldots, \lambda^m$ e $\mu^1, \ldots, \mu^n$ em $\mathbb{K}$ tais que

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu^j w_j, \tag{5}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda^i v_i + \sum_{j=1}^{n} \mu^j w_j = 0, \tag{6}$$

portanto cada λ^i e μ^j é nulo, da onde segue que $x = 0$ e assim $U \cap W = \{0\}$. Mais ainda, se $x \in V$, então podemos escrever

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i v_i + \sum_{j=1}^{n} \mu^j w_j \tag{7}$$

e assim $x = v + w$ com $v \in U$ e $w \in W$, da onde segue que $V = U \oplus W$. □

Note que da demonstração acima tiramos um outro fato importante: se $V = U \oplus W$, então $\dim V = \dim U + \dim W$. Esse fato pode ser generalizado, isso é, se $V = V_1 + \cdots + V_n$ e $V_i \cap V_j = \{0\}$ quando $i \neq j$, então escrevemos

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \tag{8}$$

e nesse caso temos

$$\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i. \tag{9}$$

Proposição 6. *Se $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ e $x \in V$, então existem $x_i \in V_i$ únicos tais que $x = x_1 + \cdots + x_n$.*

Demonstração. Considere bases v_i^j de cada V_j, e denota $m_j = \dim V_j$. Dado $x \in V$, existe uma combinação linear

$$x = \sum_{i_1=1}^{m_1} \lambda_1^{i_1} v_{i_1}^1 + \cdots + \sum_{i_n=1}^{m_n} \lambda_n^{i_n} v_{i_n}^n, \tag{10}$$

e portanto podemos tomar

$$x_j = \sum_{i_j=1}^{m_j} \lambda_j^{i_j} v_{i_j}^j. \tag{11}$$

Para mostrarmos que essa é a única maneira de decompor x, suponha que $x = y_1 + \cdots + y_n$ com $y_j \in V_j$. Temos que

$$y_j = \sum_{i_j=1}^{m_j} \mu_j^{i_j} v_{i_j}^j \tag{12}$$

e assim

$$\sum_{i_1=1}^{m_1} (\lambda_1^{i_1} - \mu_1^{i_1}) v_{i_1}^1 + \cdots + \sum_{i_n=1}^{m_n} (\lambda_n^{i_n} - \mu_n^{i_n}) v_{i_n}^n = 0 \tag{13}$$

e portanto $\lambda_j^{i_j} - \mu_n^{i_j} = 0$ para todo j e todo $i_j \leq m_j$, da onde segue que $x_j = y_j$. □

A **codimensão** de um subespaço S em um espaço V é definida por $\operatorname{codim} S = \dim V - \dim S$. Um espaço de codimensão 1 é um **hiperplano** em V.

Uma **transformação linear** é um mapa $T\colon V \to W$ entre espaços vetoriais tal que $T(x+y) = T(x)+T(y)$ e $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todos $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Se T for bijetora, dizemos que é um **isomorfismo linear** e que V e W são **isomorfos**. A cada transformação linear estão associados dois subespaços vetoriais: o **núcleo** e a **imagem**:

$$\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \quad \text{e} \quad \operatorname{im} T = \{w \in W \mid w = T(v) \text{ para algum } v \in V\}. \tag{14}$$

É importante notar que uma transformação linear pode ser unicamente determinada pelo seus valores em alguma base do domínio. De fato, se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base de V, então dado $v \in V$ temos $v = \lambda^i e_i$ e portanto, por linearidade, $T(v) = \lambda^i T(e_i)$, assim basta sabermos as coordenadas de v e os valores de T na base para determinar $T(v)$. A partir de agora, será comum denotarmos Tv para $T(v)$ caso T seja linear.

Proposição 7. *Uma transformação linear $T\colon V \to W$ é injetora se, e somente se, $\ker T = \{0\}$. Além disso, transformações lineares preservam dependência linear, e transformações lineares injetoras preservam independência linear.*

Demonstração. Se T é injetora, então $\ker T = \{0\}$ pois só existe um vetor que é levado em $0 \in W$, que é $0 \in V$. Agora, se $\ker T = \{0\}$, então se $T(v) = T(w)$, temos $T(v) - T(w) = 0$ e assim $T(v-w) = 0$, portanto $v - w = 0$ e assim $v = w$.

Se $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes, então existem $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ não toodos nulos e tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i = 0. \tag{15}$$

Dessa forma, se T é linear, como $T(0) = 0$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i T(v_i) = 0, \tag{16}$$

assim os vetores $T(v_i)$ são linearmente dependentes.

Se $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes e T é injetora, então considere uma combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i T(v_i) = 0. \tag{17}$$

Como T é linear, isso equivale a dizer que

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i\right) = 0 \tag{18}$$

e, como T é injetora, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i = 0, \tag{19}$$

assim cada $\lambda^i = 0$ e portanto os vetores $T(v_i)$ são linearmente independentes. □

Corolário 8. *Se V e W tem dimensão finita, então são isomorfos se, e somente se, tem a mesma dimensão.*

Demonstração. Se $T\colon V \to W$ é isomorfismo, considere uma base $v_1, \ldots, v_n$ de V. Então $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ são linearmente independentes e geram a imagem, afinal, se $w \in \operatorname{im} T$, então existe $v \in V$ com $T(v) = w$, assim

$$w = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i T(v_i). \tag{20}$$

Como T é sobrejetor, $\operatorname{im} T = W$, portanto $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ formam base de W, assim $\dim V = \dim W$.

Se $\dim V = \dim W = n$, então sejam $v_1, \ldots, v_n$ e $w_1, \ldots, w_n$ bases de V e W, respectivamente. Definimos $T\colon V \to W$ por $T(v_i) = w_i$ e o estendemos por linearidade, ou seja, se

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i, \tag{21}$$

definimos

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i w_i. \tag{22}$$

Esse mapa é injetor pois se $T(v) = 0$, $\lambda^i = 0$ e assim $v = 0$. O mapa é sobrejetor pois se

$$w = \sum_{i=1}^{n} \mu^i w_i \in W, \tag{23}$$

então

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \mu^i v_i\right) = w. \tag{24}$$

□

Proposição 9. *Se $T\colon V \to W$ é um isomorfismo, então T^{-1} também é.*

Demonstração. T^{-1} é também bijetora, então basta mostrarmos sua linearidade. Se $v, w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$T^{-1}(v + w) = T^{-1}(T(T^{-1}(v)) + T(T^{-1}(w))) = T^{-1}(T(T^{-1}(v) + T^{-1}(w))) = T^{-1}(v) + T^{-1}(w) \tag{25}$$

e, além disso,

$$T^{-1}(\lambda v) = T^{-1}(\lambda T(T^{-1}(v))) = T^{-1}(T(\lambda T^{-1}(v))) = \lambda T^{-1}(v). \tag{26}$$

□

Fixado W um subespaço de um espaço V, podemos definir uma relação de equivalência, denotada por

$$u \equiv v \mod W \tag{27}$$

se, e somente se, $u - v \in W$. Denotamos a classe de equivalência de $v \in V$ por $[v]$ e o conjunto de todas as classes de equivalência por V/W, que será chamado de **quociente de V por W**. Esse conjunto possui estrutura de espaço vetorial utilizando as seguintes operações, que estão bem definidas:

$$[v] + [w] = [v + w] \quad \text{e} \quad \lambda[v] = [\lambda v]. \tag{28}$$

Proposição 10. *Se V é um espaço vetorial e W um subespaço, então $\dim V/W = \dim V - \dim W$. Mais precisamente, se $w_1, \ldots, w_n$ é uma base de V de maneira que $w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_m$ é uma base de V, então $[v_1], \ldots, [v_m]$ é uma base de V/W.*

Demonstração. Primeiro, vamos verificar que $[v_1], \ldots, [v_m]$ são linearmente independentes. De fato, considere uma combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i [v_i] = [0]. \tag{29}$$

Pela definição das operaçções no quociente, temos que

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i\right] = [0], \tag{30}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda^i v_i = w \in W. \tag{31}$$

Escrevendo w na base de W, temos

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda^i v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu^j w_j, \tag{32}$$

portanto $\lambda^i = \mu^j = 0$, da onde segue que $[v_1], \dots, [v_m]$ são linearmente independentes. O próximo passo é mostrar que esses vetores geram V/W. Se $[v] \in V/W$, então

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i v_i + \sum_{j=1}^{n} \mu^j w_j \tag{33}$$

e assim

$$[v] = \left[\sum_{i=1}^{m} \lambda^i v_i + \sum_{j=1}^{n} \mu^j w_j\right] = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i [v_i] + \sum_{j=1}^{n} \mu^j [w_j] = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i [v_i] + \sum_{j=1}^{n} \mu^j [0] = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i [v_i]. \tag{34}$$

□

Como corolário, se $\dim V = \dim W$, temos que $\dim V/W = 0$, portanto $V/W = \{0\}$ e assim $V = W$. O proxímo item é o que chamamos de teorema do isomorfismo, na sua versão linear.

Teorema 11. *Se $T\colon V \to W$ é linear, então o mapa*

$$\begin{aligned} \tilde{T}\colon V/\ker T &\to \operatorname{im} T \\ [v] &\mapsto T(v) \end{aligned} \tag{35}$$

está bem definido e é um isomorfismo linear. Como consequência, temos o teorema do núcleo e imagem:

$$\dim V = \dim \operatorname{im} T + \dim \ker T.$$

Demonstração. O mapa é sobrejetor, afinal, se $w \in \operatorname{im} T$, então existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$, portanto $\tilde{T}([v]) = w$. O mapa é injetor, afinal, se $[v] \in \ker \tilde{T}$, então $\tilde{T}([v]) = 0$, assim $T(v) = 0$, portanto $v \in \ker T$ e assim $[v] = [0]$. Como $\dim V/\ker T = \dim V - \dim \ker T$ e $\tilde{T}$ é isomorfismo, então

$$\dim V - \dim \ker T = \dim \operatorname{im} T, \tag{36}$$

de onde segue o resultado. □

Se V e W são espaços vetoriais, o conjunto $V \times W$ é também um espaço vetorial com as operações

$$(x, y) + (v, w) = (x + v, y + w) \quad \text{e} \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y). \tag{37}$$

Se $V = U + W$, e $I = U \cap W$, então podemos tomar $T\colon U \times W \to V$ dada por $(u, w) \mapsto u + w$. Como $V = U + W$, o mapa é sobrejetor. Além disso, seu núcleo é $\{(x, -x) \mid x \in I\}$, que é isomorfo a I, assim segue do teorema do isomorfismo que

$$\dim U \times V = \dim V + \dim U \cap W \tag{38}$$

e, como $\dim U \times V = \dim U + \dim V$, segue que

$$\dim V = \dim U + \dim W - \dim U \cap W. \tag{39}$$

Proposição 12. *Se V e W possuem a mesma dimensão finita, então são equivalentes as seguintes afirmações sobre uma transformação linear $T\colon V \to W$:*

- *T é injetora;*
- *T é sobrejetora;*
- *T é um isomorfismo;*
- *T leva bases em bases;*

Demonstração. Se T é injetora, então $\ker T = \{0\}$ e assim, pelo teorema do núcleo e imagem, $\dim W = \dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = \dim \operatorname{im} T$, assim $\operatorname{im} T = W$ e T é sobrejetora.

Se T é sobrejetora, então $\dim \operatorname{im} T = \dim W = \dim V$, assim $\dim V = \dim \ker T + \dim V$, portanto $\dim \ker T = 0$ e portanto $\ker T = \{0\}$, da onde segue que T é injetora, e portanto um isomorfismo (pois já é sobrejetora).

Se T é isomorfismo, então se $v_1, \ldots, v_n$ é base de V, então pela injetividade, $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ são linearmente independentes. Mais ainda, $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ geram a imagem de T, que é W, portanto esses vetores formam base de W.

Por fim, se T leva bases em bases, então se $v_1, \ldots, v_n$ é base de V e $T(v) = 0$, então se

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i, \tag{40}$$

temos

$$0 = T(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i T(v_i), \tag{41}$$

da onde segue, pela independência linear de $T(v_1), \ldots, T(v_n)$, que $\lambda^i = 0$, assim $v = 0$ e portanto T é injetora. $\square$

Dualidade

A partir de agora, todo espaço será finitamente gerado, ou em outros termos, terá dimensão finita. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ (lembrando que $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Um **funcional** ou **covetor** em V é um mapa linear $\varphi \colon V \to \mathbb{K}$. Denotamos o conjunto de todos os funcionais lineares em V por V^*. Esse conjunto se torna um espaço vetorial ao definirmos

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) \quad \text{e} \quad (\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v). \tag{42}$$

Fixada uma base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de V (aqui, e representa uma lista de n vetores), se $v[e] = (v^1, \ldots, v^n)$ são as coordenadas de v na base e, isso é,

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i \tag{43}$$

, então podemos definir os mapas

$$\begin{aligned} \varepsilon^i \colon V &\to \mathbb{K} \\ v &\mapsto v^i, \end{aligned} \tag{44}$$

que vamos chamar de **diferenciais** com respeito a base e. A lista de vetores $\varepsilon = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ é uma base de V^*, chamada de **base dual** de e. O fato dessa lista ser uma base implica diretamente que o mapa $e_i \mapsto \varepsilon^i$ é um isomorfismo entre V e V^*. Esse isomorfismo não é natural, isso é, ele depende da escolha de base e. Uma outra base gera outro isomorfismo, e não existe uma base canônica que podemos considerar.

Para um exemplo de isomorfismo natural, podemos considerar o **espaço bidual** de V, que é simplesmente V^{**}, isso é, o conjunto de todos os funcionais em V^*. Se $v \in V$ e $\varphi \in V^*$, podemos definir $v(\varphi) = \varphi(v)$ e portanto tratar cada $v \in V$ como um elemento de V^{**}. Essa identificação gera um isomorfismo entre V e V^{**} que não depende de nenhuma escolha arbitrária.

Seja W um subespaço de V. O **aniquilador** de W, denotado por $W^\perp$, é o subespaço de V^* consistido de todos os covetores que se anulam em W.

Proposição 13. *Se W é subespaço de V, então*

$$\dim W^\perp + \dim W = \dim V, \tag{45}$$

ou seja, $\dim W^\perp = \operatorname{codim} W$.

Demonstração. Considere uma base $w_1, \dots, w_n$ de W e um completamento $w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_m$ para uma base de V. Defina $T\colon V \to V^*$ por $T(w_i) = 0$ e $T(v_i) = \nu_i$, onde ν_i são os elementos da base dual correspondentes a v_i. O núcleo de T é claramente W, basta mostrarmos que $\operatorname{im} T = W^\perp$.

Se $\varphi \in W^\perp$, então

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \omega_i + \sum_{j=1}^{m} \mu^j \nu_j. \tag{46}$$

e assimm $\varphi(w_i) == \lambda^i$, mas $\varphi \in W^\perp$, portanto $\varphi(w_i) = 0$, assim

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \mu^j \nu_j \tag{47}$$

e portanto

$$T\left(\sum_{j=1}^{m} \mu^j v_j\right) = \varphi, \tag{48}$$

assim $\varphi \in \operatorname{im} T$. Por outro lado, se $\varphi \in \operatorname{im} T$, então φ é combinação linear dos covetores $\nu_1, \dots, \nu_m$, que estão todos em $W^\perp$, portanto $\varphi \in W^\perp$, assim $\operatorname{im} T = W^\perp$. □

Proposição 14. *Se W é um subespaço de V, então o isomorfismo $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$ identifica W com $W^{\perp\perp}$.*

Demonstração. De fato, se $v \in W$, então precisamos mostrar que $v(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in W^\perp$, isso é, $w \in W^{\perp\perp}$. Isso, porém, é óbvio, já que $v(\varphi) = \varphi(v) = 0$, já que $v \in W$.

Agora, se $w \in W^{\perp\perp}$, então $w(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in W^\perp$, ou seja, $\varphi(w) = 0$ para todo $\varphi \in W^\perp$, assim $w \in W$. □

1.2 Mapas Lineares, Matrizes, Determinante e Traço

Mapas Lineares e Matrizes

Um fato utilizando anteriormente, e que não foi provado, é que a composição de mapas lineares é linear.

Proposição 15. *Composição de mapas lineares é linear e, em particular, composição de isomorfismos é isomorfismo. Mais ainda, se S e T são isomorfismos, $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.*

Demonstração. Se $T\colon V \to W$ e $S\colon W \to U$ são lineares, então dados $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$(S \circ T)(u + v) = S(T(u + v)) = S(T(u) + T(v)) = S(T(u)) + S(T(v)) = (S \circ T)(u) + (S \circ T)(v) \tag{49}$$

e, além disso,

$$(S \circ T)(\lambda u) = S(T(\lambda u)) = S(\lambda T(u)) = \lambda S(T(u)) = \lambda (S \circ T)(u). \tag{50}$$

Se T e S forem isomorfismos, então

$$(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}) = S \circ (T \circ T^{-1}) \circ S^{-1} = S \circ S^{-1} = \mathrm{Id}_U \tag{51}$$

e, além disso,

$$(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = T^{-1} \circ (S^{-1} \circ S) \circ T = T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V\,. \tag{52}$$

□

Além disso, a demonstração de que o núcleo de um mapa linear é um subespaço vetorial também nunca foi apresentada, mas isso é por que esse fato é um corolário de um resultado um pouco mais geral.

Proposição 16. *Se $T\colon V \to W$ é linear e $U \subset W$ é um subespaço, então $T^{-1}(U)$ é um subesaço*

Demonstração. De fato, se $u, v \in T^{-1}(U)$, então $T(u), T(v) \in W$, assim $T(u + v) = T(u) + T(v) \in W$, portanto $u + v \in T^{-1}(W)$. Mais ainda, se $\lambda \in \mathbb{K}$, então $T(\lambda u) = \lambda T(u) \in W$, assim $\lambda u \in T^{-1}(W)$. □

Podemos observar que, em coordenadas, todo mapa linear possui uma forma canônica.

Proposição 17. *Se* $\dim V = n$*,* $\dim W = m$ *e* $T\colon V \to W$ *é linear, então fixadas* e *e* f *bases de* V *e* W *temos*

$$Tv[f] = \left(\sum_{i_1=1}^{n} \lambda^1_{i_1} v[e]^{i_1}, \ldots, \sum_{i_m=1}^{n} \lambda^m_{i_m} v[e]^{i_m} \right) \tag{53}$$

onde $Tv[f]$ *são as coordenadas de* Tv *na base* f *e* $v[e]^j$ *é a* j*-ésima coordenada de* v *na base* e*.*

Podemos organizar os números λ^i_j da Proposição 17 em um retângulo da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda^1_1 & \lambda^1_2 & \cdots & \lambda^1_{n-1} & \lambda^1_n \\ \lambda^2_1 & \lambda^2_2 & \cdots & \lambda^2_{n-1} & \lambda^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda^{m-1}_1 & \lambda^{m-1}_2 & \cdots & \lambda^{m-1}_{n-1} & \lambda^{m-1}_n \\ \lambda^m_1 & \lambda^m_2 & \cdots & \lambda^m_{n-1} & \lambda^m_n \end{bmatrix} \tag{54}$$

Uma tabela nesse estilo será chamada de **matriz**. Cada coleção de números colocados na horizontal será uma **linha** da matriz, e cada coleção de números na vertical será uma **coluna** da matriz. Perceba que toda transformação da origem a uma matriz como a descrita acima, que vamos chamar de **matriz de T com respeito as bases e e f**. Para abreviar a notação, denotamos a matriz acima por $[T]_{e,f} = [\lambda^i_j]_{m\times n}$, onde m e n são o número de linhas e colunas, respectivamente.

Agora vamos introduzir as operações em matrizes. Se $A = [a^i_j]_{n\times m}$ e $B = [b^i_j]_{n\times m}$ são matrizes, então podemos somá-las e multiplicar uma delas por um escalar da seguinte forma:

$$A + B = [a^i_j + b^i_j]_{n\times m} \quad \text{e} \quad \lambda A = [\lambda a^i_j]_{n\times m}. \tag{55}$$

Além disso, se $C = [c^i_j]_{m\times k}$ então podemos definir um produto entre A e C (note que o número de linhas de C deve ser o mesmo número de colunas de A) fazendo

$$AC = \left[\sum_{s=1}^{m} a^i_s c^s_j \right]_{n\times k}. \tag{56}$$

O produto não é comutativo, afinal, se $k \neq n$ então CA pode nem estar definido. Se $k = n \neq m$, então necessariamente $AC \neq CA$, visto que AC é $n \times n$ e $CA = m \times m$. Por fim, mesmo que $n = m = k$, poderíamos ter $AC \neq CA$, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Proposição 18. *Toda matriz vem de um mapa linear.*

Demonstração. Se $A = [a^i_j]$ é uma matriz $n \times m$, podemos enxergá-la como um mapa $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que pega vetores $x = (x^1, \ldots, x^n)$ e retorna Ax, onde x é visto como a matriz coluna

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \tag{58}$$

e Ax, que também é uma matriz coluna $n \times 1$, é identificada com um vetor de $\mathbb{R}^n$ da mesma maneira. O mapa é linear, afinal,

$$A(x+y) = \left[\sum_{k=1}^{m} a^i_k (x^k + y^k) \right]_{n\times 1} = \left[\sum_{k=1}^{m} a^i_k x^k + \sum_{k=1}^{m} a^i_k y^k \right]_{n\times 1} = Ax + Ay \tag{59}$$

e, além disso,

$$A(\lambda x) = \left[\sum_{k=1}^{m} a^i_k (\lambda x^k) \right]_{n\times 1} = \left[\lambda \sum_{k=1}^{m} a^i_k x^k \right]_{n\times 1} = \lambda A x. \tag{60}$$

É fácil notar que a matriz de A com respeito às bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ é a própria A. $\square$

Todo sistema linear pode ser traduzido para uma equação de matrizes. De fato, considere o sistema linear

$$\begin{cases} a^1_1 x^1 + \cdots + a^1_m x^m = b^1 \\ \qquad\quad \vdots \\ a^n_1 x^1 + \cdots + a^n_m x^m = b^n \end{cases} \tag{61}$$

e perceba que, denotando $x = (x^1, \dots, x^n)$ e $b = (b^1, \dots, b^n)$, podemos escrever esse sistema simplesmente como $Ax = b$, onde $A = [a^i_j]_{n\times m}$.

Se $n > m$, o sistema é dito **sobredeterminado**, e existem mais equações do que incógnitas. Nesse caso a matriz nunca pode ser sobrejetora, e sempre vão existir infinitos vetores b tais que $Ax = b$ não possui solução. Se $b \in \operatorname{im} A$, note que $A^{-1}(b) = y + \ker A$ para algum y tal que $Ay = b$, então ou toda solução é única (se A for injetora) ou nenhuma solução é única (caso contrário).

Se $m > n$, isso é, existe mais incógnitas do que equações, então A nunca é injetora, e assim sempre que existe solução para $Ax = b$, a solução nunca é única. A justificativa é simples, afinal, $\dim\ker A = m - \dim\operatorname{im} A$ e $\dim\operatorname{im} A \leq n < m$, assim $\dim\ker A > 0$ e, se $b \in \operatorname{im} A$, então $A^{-1}(b) = y + \ker A$ para alguma solução y, assim $A^{-1}(b)$ é infinito.

Se $n = m$, então se $Ax = b$ sempre tem solução, ela é sempre única, pois sobrejetividade e injetividade de A são equivalentes. Nesse caso, A é um isomorfismo, denotamos sua inversa por A^{-1} e a solução do sistema é $x = A^{-1}b$. Note que checar a injetividade de A é determinar se $Ax = 0$ possui solução não nula. Assumimos que o leitor já sabe técnicas de escalonamento de sistemas e portanto achar soluções já seja uma ferramenta conhecida.

Proposição 19. *Se $S, T\colon V \to U$ e $R\colon U \to W$ são lineares e e, f e g são bases de V, U e W, respectivamente, então*

$$[T + S]_{e,f} = [T]_{e,f} + [S]_{e,f}, \quad [\lambda T]_{e,f} = \lambda [T]_{e,f} \quad e \quad [R \circ T]_{e,g} = [R]_{f,g}[T]_{e,f}. \tag{62}$$

Demonstração. Note que, se $[T]_{e,f} = [\lambda^i_j]$, $[S]_{e,f} = [\mu^i_j]$ e $[R]_{f,g} = [\nu^i_j]$, então

$$Te_j = \sum_{i=1}^{\dim U} \lambda^i_j f_i, \quad Se_j = \sum_{i=1}^{\dim U} \mu^i_j f_i \quad \text{e} \quad Rf_j = \sum_{i=1}^{\dim W} \nu^i_j g_i, \tag{63}$$

assim

$$(T + S)e_j = Te_j + Se_j = \sum_{i=1}^{\dim U} \lambda^i_j f_i + \sum_{i=1}^{\dim U} \mu^i_j f_i = \sum_{i=1}^{\dim U} (\lambda^i_j + \mu^i_j) f_i, \tag{64}$$

portanto o resultado da soma segue. Similarmente,

$$(\delta T)e_j = \delta T e_j = \delta \sum_{i=1}^{\dim U} \lambda^i_j f_i = \sum_{i=1}^{\dim U} (\delta \lambda^i_j) f_i, \tag{65}$$

portanto o resultado do produto por escalar segue. Por fim,

$$(R \circ T)e_j = RTe_j = R\left(\sum_{i=1}^{\dim U} \lambda^i_j f_i\right) = \sum_{i=1}^{\dim U} \lambda^i_j R f_i = \sum_{i=1}^{\dim U} \lambda^i_j \sum_{k=1}^{\dim W} \nu^k_i g_k = \sum_{k=1}^{\dim W} \left(\sum_{i=1}^{\dim U} \lambda^i_j \nu^k_i\right) g_k, \tag{66}$$

da onde segue o resultado da composição. □

Esse resultado é tudo que precisamos para tratar matrizes e mapas lineares como as mesmas entidades. Em particular, isso garante que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ para matrizes também! Mesmo que o resultado tenha sido provado apenas para mapas.

Proposição 20. *Se $T, S\colon V \to U$ e $R\colon U \to W$ são lineares, então vale que $R \circ (T + S) = R \circ T + R \circ S$. Se $Q\colon W \to V$ é linear, então vale que $(T + S) \circ Q = T \circ Q + S \circ Q$.*

Demonstração. Na primeira distributiva, basta usar que R é linear e, na segunda, basta aplicar a definição da soma de mapas. □

Se $T\colon V \to U$ é linear, então induz um mapa $T^\top\colon U^* \to V^*$, chamado de **transposto** de T, dado por $T^\top(\varphi) = \varphi \circ T$. Ao mesmo tempo, dada uma matriz $A = [a^i_j]_{n\times m}$ definimos sua **matriz transposta** por $A^\top = [a^j_i]_{m\times n}$. Adivinhem?

Proposição 21. *Se e é uma base de V, f é uma base de U e ε e δ são suas bases duais, então*

$$[T']_{\delta,\varepsilon} = [T]^\top_{e,f} \tag{67}$$

Demonstração. Como $\dim V = \dim V^*$ e $\dim U = \dim U^*$, as dimensões das duas matrizes batem. Agora, note que se

$$Te_j = \sum_{i=1}^{\dim U} \lambda^i_j f_i, \tag{68}$$

então

$$(T^\top \delta^j)(e_k) = (\delta^j \circ T)(e_k) = \delta^j\left(\sum_{i=1}^{\dim U} \lambda^i_k f_i\right) = \lambda^j_k, \tag{69}$$

assim, se $v[e] = (v^1, \dots, v^n)$ então

$$(T^\top \delta^j)(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^j_i v^i = \sum_{i=1}^{n} \lambda^j_i \varepsilon^i(v), \tag{70}$$

portanto

$$T^\top \delta^j = \sum_{i=1}^{n} \lambda^j_i \varepsilon^i, \tag{71}$$

provando assim o resultado. □

Vamos agora mostrar alguns fatos sobre a transposta de mapas lineares.

Proposição 22. *Se $T, S\colon V \to U$ e $R\colon U \to W$ são lineares, então $(R\circ T)^\top = T^\top \circ R^\top$, $(T+S)^\top = T^\top + S^\top$ e, se T for um isomorfismo, então $T^\top$ também é e $(T^\top)^{-1} = (T^{-1})^\top$.*

Demonstração. Note que

$$(R\circ T)^\top \varphi = \varphi \circ R \circ T = T^\top(\varphi \circ R) = T^\top(R^\top \varphi) \tag{72}$$

e, além disso,

$$(T+S)^\top \varphi = \varphi \circ (T+S) = \varphi \circ T + \varphi \circ S = T^\top \varphi + S^\top phi. \tag{73}$$

Por fim, se T for isomorfismo, então

$$(T^\top \circ (T^{-1})^\top)\varphi = \varphi \circ T^{-1} \circ T = \varphi \quad \text{e}((T^{-1})^\top \circ T^\top)\varphi = \varphi \circ T \circ T^{-1} = \varphi, \tag{74}$$

portanto $(T^\top)^{-1} = (T^{-1})^\top$. □

Até agora, temos maquinário para provar um monte de coisas sobre matrizes, usando mapas lineares. Mas e o contrário, é possível? Podemos garantir, por exemplo, que $T^{\top\top} = T$ (usando a idenficação natural $V^{**} = V$) usando apenas que isso é óbvio para matrizes? Sim! Porém, devemos anter terminar a nossa correspondência entre mapas lineares e matrizes. Já sabemos que toda matriz é um mapa linear, e todo mapa linear pode ser representado por uma matriz. Resta mostrar que essa correspondência "vai e volta":

> Se $T\colon V \to U$ é um mapa linear, então o mapa induzido por uma matriz $[T]_{e,f}$ corresponde a T. Se A é uma matriz, então a matriz do mapa induzido por A, em alguma base, é A.

A segunda parte já concluímos anteriormente, então basta entendermos a primeira mais precisamente, e prová-la.

Proposição 23. *Se $T\colon V \to U$ é um mapa linear, $\dim V = n$, $\dim U = m$ e e e f são bases de V e U, então o mapa $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ induzido por $[T]_{e,f}$ leva $v[e]$ em $Tv[f]$.*

Demonstração. Sejam $[T]_{e,f} = [\lambda^i_j]_{m\times n}$ e $v[e] = (v^1, \ldots, v^n)$. Então o mapa induzido por $[T]_{e,f}$ é dado por

$$[T]_{e,f}(v^1, \ldots, v^n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^1_i v^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda^m_i v^i\right). \tag{75}$$

Agora, note que

$$Tv = T\left(\sum_{i=1}^{n} v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v^i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i \sum_{j=1}^{m} \lambda^j_i f_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^j_i v^i\right) f_j, \tag{76}$$

o que conclui que $Tv[f] = [T]_{e,f} v[e]$. □

Corolário 24. *Se $T, S\colon V \to U$ são lineares e existem bases e e f de V e U tais que $[T]_{e,f} = [S]_{e,f}$, então $T = S$.*

Demonstração. Como $[T]_{e,f} = [S]_{e,f}$, então eles levam $v[e]$ em $Tv[f] = Sv[f]$, portanto $Tv = Sv$. □

Vamos usar isso ao nosso favor! Note que, em termos de matrizes, fica bem claro que, para qualquer matriz T, $T^{\top\top} = T$, já que estamos apenas trocando linhas por colunas, duas vezes. Isso indica, claro, que o mesmo vale para mapas lineares!

Proposição 25. *Fazendo as identificações naturais de $V^{**} = V$ e $U^{**} = U$, se $T\colon V \to U$ é linear, então $T^{\top\top} = T$.*

Demonstração. Como

$$[T]^{\top}_{e,f} = [T^{\top}]_{\delta,\varepsilon} \implies [T]^{\top\top}_{e,f} = [T^{\top}]^{\top}_{\delta,\varepsilon}, \tag{77}$$

e também

$$[T]^{\top\top}_{e,f} = [T]_{e,f} \quad \text{e} \quad [T^{\top}]^{\top}_{\delta,\varepsilon} = [T^{\top\top}]_{e,f}, \tag{78}$$

então

$$[T]_{e,f} = [T^{\top\top}]_{e,f}. \tag{79}$$

□

Prosseguindo com matrizes, vamos agora falar de posto. Dada uma matriz A de dimensões $n\times m$, o **posto** de A, denotado $\operatorname{rank} A$, e que é a dimensão da imagem de A. Também definimos o **posto de linhas** de A, que é o maior número de linhas de A linearmente independentes, quando consideradas como vetores de $\mathbb{R}^m$. Por fim, definimos o **posto de colunas** de A, que é o maior número de colunas de A linearmente independentes, quando consideradas como vetores de $\mathbb{R}^n$. A ideia é mostrarmos que todos esses são equivalentes.

Proposição 26. *As colunas de $A = [a^i_j]_{n\times m}$ geram* $\operatorname{im} A$.

Demonstração. Se $x \in \mathbb{R}^m$, então $Ax \in \mathbb{R}^n$ e, se $x = (x^1, \ldots, x^m)$, temos

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a^1_j x^j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a^n_j x^j\right) = \sum_{j=1}^{m} x^j (a^1_j, \ldots, a^n_j). \tag{80}$$

□

Corolário 27. *O posto de colunas de uma matriz é igual ao posto dessa mesma matriz.*

A parte problemática é mostrar que o posto de linhas e colunas é o mesmo. Bom, o caminho para isso é simples: o posto de linhas de A é o posto de colunas de $A^{\top}$, que é o posto de $A^{\top}$. Se mostrarmos que $\operatorname{rank} A^{\top} = \operatorname{rank} A$, o trabalho terminou. Para isso, vamos utilizar a noção de aniquilador que vimos anteriormente.

Teorema 28. *Se $T\colon V \to U$ é linear, então* $(\operatorname{im} T)^{\perp} = \ker T^{\top}$.

Demonstração. Se $\varphi \in (\operatorname{im} T)^{\perp}$, então dado $v \in V$, $\varphi(Tv) = 0$, isso é, $T^{\top}\varphi = 0$, ou seja, $\varphi \in \ker T^{\top}$. Por outro lado, se $\varphi \in \ker T^{\top}$, então $T^{\top}\varphi = 0$, ou seja, se $u \in \operatorname{im} T$, então existe $v \in V$ com $u = Tv$, assim $\varphi(u) = \varphi(Tv) = 0$ e portanto $\varphi \in (\operatorname{im} T)^{\perp}$. □

Corolário 29. *Se* $T\colon V \to U$ *é linear, então* $\dim \operatorname{im} T = \dim \operatorname{im} T^\top$.

Demonstração. Pelo teorema do núcleo e imagem,

$$\dim \operatorname{im} T^\top + \dim \ker T^\top = \dim U^* \tag{81}$$

e, como

$$\dim(\operatorname{im} T)^\perp + \dim \operatorname{im} T = \dim U, \tag{82}$$

então o resultado segue, usando que $\dim U = \dim U^*$ e $\dim(\operatorname{im} T)^\perp = \dim \ker T^\top$. □

Vamos agora focar a discussão em transformações lineares da forma $T\colon V \to V$, que costumamos chamar de **operadores** em V. Denotamos o conjunto dos operadores por $\mathcal{L}(V, V)$. Por consequência, nossa discussão de matrizes irá também se limitar a **matrizes quadradas**, isso é, aquelas em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Note que a composição de mapas em $\mathcal{L}(V, V)$ sempre está definida, assim como o produto de duas matrizes quadradas de mesmas dimensões, por mais que ele não seja comutativo. O mapa identidade $\mathrm{Id}\colon V \to V$ é claramente linear e, dada e uma base de V, como $\mathrm{Id}(e) = e$, fica claro que

$$[\mathrm{Id}]_{e,e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{83}$$

que a partir de agora será chamada de **matriz identidade** $n \times n$, em que $n = \dim V$.

A partir de agora, iremos utilizar que a composição de mapas corresponde ao produto de matrizes e omitir o sinal de composição em mapas lineares. Dados dois mapas lineares $T, S \in \mathcal{L}(V, V)$, definimos $T_S = STS^{-1}$. O mapa $T \mapsto T_S$ é uma **conjugação**. Dizemos que T_S é **similar** ou **conjugada** a T. Esse mapa é claramente um isomorfismo linear (basta ver que a conjugação por S^{-1} é o mapa inverso da conjugação por S).

Teorema 30. *Conjugação é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Se $R = T_S$ para alguma T, então $T = R_{S^{-1}}$, assim conjugação é simétrica. Mais ainda, $T = T_{\mathrm{Id}}$, então conjugação é reflexiva. Por fim, se $R = T_S$ e $T = K_L$, então $R = T_S = (K_L)_S = K_{SL}$. □

Mais ainda, fica claro que se M é invertível e conjugada a T, então T é invertível. De fato, se $M = T_S$, então $T = M_{S^{-1}} = M_S^{-1}$, portantoo $T^{-1} = M_S$.

Determinantes e Traço

Para definirmos a noção de determinante, precisamos de permutações. Se $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{N}$, uma **permutação em** X é uma bijeção $\sigma\colon X \to X$. O **discriminante** de X é o número

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j). \tag{84}$$

O **sinal** da permutação σ é o número $(-1)^\sigma$ que satisfaz

$$P(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^\sigma P(X_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}). \tag{85}$$

Denotamos por S_n o conjunto de todas as permutações em $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Se $A = [a^i_j]_{n\times n}$ é uma matriz, definimos o determinante

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a^1_{\sigma(1)} \cdots a^n_{\sigma(n)}. \tag{86}$$

Proposição 31. *Se* A *é uma matriz* $n \times n$, *então* $\det(A) = \det(A^\top)$.

Demonstração. De fato, basta usar que $(-1)^\sigma = (-1)^{\sigma^{-1}}$ e temos

$$\begin{aligned} \det(A^\top) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)} && (87) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma^{-1}} a^1_{\sigma^{-1}(1)} \cdots a^n_{\sigma^{-1}(n)} && (88) \\ &= \det(A). && (89) \end{aligned}$$

□

Teorema 32. *Valem as seguintes propriedades:*

1. *Se* $a_j = (a_j^1, \ldots, a_j^n)$ *e* $a^i = (a_1^i, \ldots, a_n^i)$, *então podemos enxergar* det *como uma função das colunas* a_j *ou das linhas* a^i. *Para toda* $\sigma \in S_n$,

$$\det(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma \det(a_1, \ldots, a_n) \quad e \quad \det(a^{\sigma(1)}, \ldots, a^{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma \det(a^1, \ldots, a^n); \tag{90}$$

2. *Se duas colunas ou duas linhas de* A *forem iguais, então* $\det(A) = 0$*;*

3. *O* det *é multilinear, isso é, para todos* i, j,

$$\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, \lambda a_j + b_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) = \lambda \det(a_1, \ldots, a_n) + \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \tag{91}$$

e

$$\det(a^1, \ldots, a^{i-1}, \lambda a^i + b^i, a^{i+1}, \ldots, a^n) = \lambda \det(a^1, \ldots, a^n) + \det(a^1, \ldots, a^{i-1}, b^i, a^{i+1}, \ldots, a^n); \tag{92}$$

4. $\det(\mathrm{Id}_{n\times n}) = 1$*;*

5. *Se* $a_1, \ldots, a_n$ *ou* $a^1, \ldots, a^n$ *forem linearmente dependentes, então* $\det(A) = 0$.

Demonstração. 1. Se $\sigma \in S^n$, então

$$\begin{aligned}
\det(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) &= \sum_{\rho \in S_n} (-1)^\rho a^1_{\rho(\sigma(1))} \cdots a^n_{\rho(\sigma(n))} && (93)\\
&= (-1)^\sigma \sum_{\rho \in S_n} (-1)^\rho (-1)^\sigma a^1_{\rho(\sigma(1))} \cdots a^n_{\rho(\sigma(n))} && (94)\\
&= (-1)^\sigma \sum_{\rho \in S_n} (-1)^{\rho\circ\sigma} a^1_{\rho(\sigma(1))} \cdots a^n_{\rho(\sigma(n))} && (95)\\
&= (-1)^\sigma \det(a_1, \ldots, a_n). && (96)
\end{aligned}$$

O resultado para a permutação de linhas sai do fato de que $\det(A) = \det(A^\top)$;

2. Se $a_i = a_j$, seja σ a permutação dada por $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ e que fixa todo o resto. Temos

$$\det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = -\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \tag{97}$$

e portanto, como $a_i = a_j$, temos $\det A = -\det A$, assim $\det A = 0$. O resultado para o caso em que duas linhas são iguais sai do fato de que $\det(A) = \det(A^\top)$;

3. De fato, temos

$$\begin{aligned}
\det(a^1, \ldots, \lambda a^i + b^i, \ldots, a^n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a^1_{\sigma(1)} \cdots (\lambda a^i_{\sigma(i)} + b^i_{\sigma(i)}) \cdots a^n_{\sigma(n)} && (98)\\
&= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a^1_{\sigma(1)} \cdots a^i_{\sigma(i)} \cdots a^n_{\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a^1_{\sigma(1)} \cdots b^i_{\sigma(i)} \cdots a^n_{\sigma(n)} && (99)\\
&= \lambda \det(a^1, \ldots, a^n) + \det(a^1, \ldots, b^i, \ldots, a^n). && (100)
\end{aligned}$$

O resultado análogo para o caso da multilinearidade nas colunas sai do fato de que $\det(A) = \det(A^\top)$;

4. Temos $a^i_j = 0$ se $i \neq j$, e a única prmutação que fixa todos os valores é a identidade, que tem sinal 1, portannto

$$\det(\mathrm{Id}_{n\times n}) = a^1_1 \cdots a^n_n = 1; \tag{101}$$

5. Se $a_i = \lambda^1 a_1 + \cdots + \lambda^{i-1} a_{i-1} + \lambda^{i+1} a_{i+1} + \cdots + \lambda^n a_n$, então

$$\begin{aligned}
\det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) &= \det(a_1, \ldots, \lambda^1 a_1 + \cdots + \lambda^{i-1} a_{i-1} + \lambda^{i+1} a_{i+1} + \cdots + \lambda^n a_n, \ldots, a_n) && (102)\\
&= \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda^j \det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) && (103)
\end{aligned}$$

e, como cada a_j é uma cópia de outra coluna, todos os determinantes dentro do somatório são nulos, assim $\det(A) = 0$. O resultado análogo para a dependência linear das linhas sai do fato de que $\det(A) = \det(A^\top)$.

$\square$

Essas propriedades são importantes para fazer contas, porém, elas são mais importantes ainda pois podem ser utilizadas para definir o determinante!

Proposição 33. *As propriedades* 1, 3 *e* 4 *definem unicamente o determinante.*

Demonstração. Queremos mostrar que qualquer função $D(a_1, \dots, a_n)$ que seja multilinear, alternada e que tenha valor 1 na base canônica de $\mathbb{R}^n$, é o determinante. Note que as propriedades 2 e 5 também valém para qualquer D desse tipo, já que são consequências das outras.

Como $a_j = (a_j^1, \dots, a_j^n) = a^1 e_i + \cdots + a^n e_n$ onde e_i é a base canônica, então usando as propriedades 3 e 4 temos

$$D(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i_1=1}^{n} a_1^{i_1} D(e_{i_1}, a_2, \dots, a_n) \tag{104}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} D(e_{i_1}, e_{i_2}, a_3, \dots, a_n) \tag{105}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \tag{106}$$

e, denotando por $\sigma_{i_1,\dots,i_n}$ a permutação $\sigma(j) = i_j$ temos

$$D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = (-1)^{\sigma_{i_1,\dots,i_n}} D(e_1, \dots, e_n) = (-1)^{\sigma_{i_1,\dots,i_n}}. \tag{107}$$

Porém, como todas as combinações de $i_1, \dots, i_n$ são atingidas nos somatórios, $\sigma_{i_1,\dots,i_n}$ eventualmente se passa por todas as permutações, assim

$$D(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)} = \det(A^\top) = \det(A). \tag{108}$$

$\square$

O próximo passo é mostrar que o determinante é multiplicativo. Para isso introduzimos uma notação. Se A é uma matriz $n \times n$ e $t \in \mathbb{R}$, então $A + t$ é definido como $A + t\,\mathrm{Id}_{n\times n}$.

Teorema 34. *Se A e B são matrizes $n \times n$, então* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demonstração. Suponha que $\det(B) \neq 0$ e defina $D(A) = \det(AB)/\det(B)$. Seja $e_1, \dots, e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Se $f_i \in \mathbb{R}^n$, então existe uma matriz $n \times n$ tal que $f_i = Ce_i$. Assim,

$$D(Ae_1, \dots, \lambda Ae_i + Ce_i, \dots, Ae_n) = \frac{\det(ABe_1, \dots, (\lambda A + C)Be_i, \dots, ABe_n)}{\det(B)} \tag{109}$$

$$= \frac{\lambda \det(ABe_1, \dots, ABe_n) + \det(ABe_1, \dots, CBe_i, \dots, ABe_n)}{\det(B)} \tag{110}$$

$$= \lambda D(Ae_1, \dots, Ae_n) + D(Ae_1, \dots, Ce_i, \dots, Ae_n), \tag{111}$$

da onde segue a multilinearidade. Mais ainda,

$$D(\mathrm{Id}_{n\times n}) = \det(\mathrm{Id}_{n\times n} B)/\det(B) = \det(B)/\det(B) = 1 \tag{112}$$

e

$$D(Ae_{\sigma(1)}, \dots, Ae_{\sigma(n)}) = \det(AB_{\sigma(1)}, \dots, ABe_{\sigma(n)})/\det(B) \tag{113}$$

$$= (-1)^\sigma \det(ABe_1, \dots, ABe_n)/\det(B) \tag{114}$$

$$= (-1)^\sigma D(Ae_1, \dots, Ae_n), \tag{115}$$

portanto segue que $D(A) = \det(A)$ e assim $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Se $\det(B) = 0$, tome $B(t) = B + t$. Temos que $\det(B(t))$ é um polinômio não nulo (afinal, é mônico), portanto $\det(AB(t)) = \det(A)\det(B(t))$ e, tomando $t \to 0$, o resultado segue. $\square$

Corolário 35. *Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se,* $\det(A) \neq 0$.

Demonstração. Se A é invertível, então existe B com $AB = \mathrm{Id}$, assim $\det(A)\det(B) = \det(\mathrm{Id}) = 1$, portanto é impossível que $\det(A)$ seja nulo. Por outro lado, se A não é invertível, então A não é sobrejetora, portanto sua imagem, o espaço gerado pelas suas colunas, é próprio, da onde segue que suas colunas são linearmente dependentes e assim o seu determinante é nulo. □

Deixo aqui mais duas fórmulas que podem ser úteis para o cálculo de determinantes e de inversas, sem as demonstrações. se A é uma matriz $n \times n$, denotamos por A^i_j a matriz $(n-1)\times(n-1)$ dada pela remoção da i-ésima linha e da j-ésima coluna de A. Valem as seguintes identidades:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a^i_j \det(A^i_j) \quad \text{e} \quad A^{-1} = \left[(-1)^{i+j}\frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}\right]_{n\times n}. \tag{116}$$

Para terminarmos esse capítulo, vamos falar do traço. Se A é uma matriz $n \times n$, seu **traço** é definido por

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a^i_i. \tag{117}$$

Fica claro da definição que o traço é linear.

Proposição 36. *Se A e B são matrizes $n \times n$,* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Demonstração. Temos

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^i_k b^k_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a^k_i b^i_k = \mathrm{tr}(BA) \tag{118}$$

□

Proposição 37. *Se A é uma matriz $n \times n$, então*

$$\mathrm{tr}(AA^\top) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a^i_j)^2 \tag{119}$$

Demonstração. De fato,

$$\mathrm{tr}(AA^\top) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^i_j a^i_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a^i_j)^2 \tag{120}$$

□

Agora recordamos a noção de similaridade, mas para matrizes. Se M e T são matrizes $n \times n$, dizemos que M é **similar** a T se $M = STS^{-1}$ para alguma matriz S invertível.

Proposição 38. *Matrizes similares possuem mesmo traço e determinante.*

Demonstração. Se $M = STS^{-1}$, então

$$\det(M) = \det(STS^{-1}) = \det(S^{-1}ST) = \det(T) \quad \text{e} \quad \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(STS^{-1}) = \mathrm{tr}(S^{-1}ST) = \mathrm{tr}(T). \tag{121}$$

□

O próximo passo agora é falar sobre mudanças de coordenadas. Se $e = (e_1, \ldots, e_n)$ e $f = (f_1, \ldots, f_n)$ são bases de V, então podemos escrever

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j f_i. \tag{122}$$

A matriz $A = [a^i_j]_{n\times n}$ leva a base f na base e (escrevemos $e = Af$). Note que A é invertível, afinal, caso seu determinante fosse nulo, os vetores e_j seriam linearmente dependentes. Agora, se $v[e] = (v^1, \ldots, v^n)$ e $v[f] = (u^1, \ldots, u^n)$, então

$$v = \sum_{j=1}^{n} v^j e_j = \sum_{j=1}^{n} v^j \sum_{i=1}^{n} a^i_j f_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a^i_j v^j\right) f_i, \tag{123}$$

portanto $v[f] = Av[e]$ e assim $v[e] = A^{-1}v[f]$. A matriz A portanto é chamada de **matriz de mudança da base** e **para a base** f. Note que a mesma matriz que leva a base f na base e, leva as coordenadas de v na base e para as coordenadas de v na base f, isso é:

"as coordenadas de um vetor mudam contra a mudança de base".

Por esse motivo, dizemos que vetores são **quantidades contravariantes**. Por outro lado, considerando as bases duais ε e φ de e e f, se $\mu[\varepsilon] = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ então

$$\mu(v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi^i(v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u^i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \sum_{j=1}^{n} a^i_j v^j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a^i_j \mu_i \right) \varepsilon^j(v), \tag{124}$$

da onde segue que $\mu[e] = A\mu[f]$, ou seja,

"as coordenadas de um covetor mudam a favor da mudança de base".

Por esse motivo, dizemos que vetores são **quantidades covariantes**. Índices em quantidades contravariantes sempre são colocados embaixo, e os índices em quantidades covariantes sempre são colocados em cima. Índices em coordenadas sempre são colocados ao contrário (coordenadas de vetores tem índice em cima, e coordenadas de vetores tem índice em baixo).

Se $T \colon V \to W$ é linear, então fixe e e f bases de V e x e y bases de W. Vamos entender como se da a transformação de $[T]_{f,y}$ em $[T]_{e,x}$. Se

$$Te_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i_j x_i \quad \text{e} \quad Tf_j = \sum_{i=1}^{m} \mu^i_j y_i, \tag{125}$$

então seja $A = [a^i_j]_{n\times n}$ a matriz de mudança de base de e para f e $B = [b^i_j]_{m\times m}$ a matriz de mudança de base de y para x, então

$$Tf_i = \sum_{r=1}^{n} \mu^r_i y_r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \mu^r_i b^k_r x_k \tag{126}$$

e assim

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j Tf_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b^k_r \mu^r_i a^i_j x_k. \tag{127}$$

Isso mostra que $[T]_{e,x} = B[T]_{f,y}A$. Tomando $W = V$, $x = e$ e $y = f$, então $B = A^{-1}$, assim $[T]_{e,e}$ é similar a $[T]_{f,f}$. Portanto, podemos definir o **determinante** de T como sendo o determinante da matriz de T em alguma base, e o conceito está bem definido, pois matrizes similares possuem o mesmo determinante. O mesmo vale para o traço.

1.3 Estrutura Euclidiana e Formas Bilineares

A partir de agora, tomamos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou seja, todo escalar é real. Uma **estrutura Euclidiana** em um espaço vetorial V é um mapa

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (v, u) &\mapsto \langle v, u \rangle \end{aligned} \tag{128}$$

que satisfaz:

- para todo $v \in V$ com $v \neq 0$, $\langle v, v \rangle > 0$ - **positividade**;
- para todos $u, v \in V$, $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$ - **simetria**;
- para todos $u, v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda v + u, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$ - **linearidade** na primeira entrada, que junto com a simetria se torna **bilinearidade**.

Um mapa dessa forma é chamado de **produto interno**, e um espaço com uma estrutura Euclidiana é um **espaço Euclidiano**. A **norma** de um vetor v é o número $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. A norma representa a distância de v a 0, portanto a **distância** entre u e v é definida por $||u - v||$. Os próximos dois teoremas são chamados de desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade triangular.

Teorema 39. *Dados $u, v \in V$, temos $|\langle v, u\rangle| \leq ||v|| \cdot ||u||$.*

Demonstração. Se $u = 0$, então a desigualdade é trivialmente verdadeira. Considere o mapa $q(t) = ||v+tu||^2$. Usando a bilinearidade, temos que

$$q(t) = ||v||^2 + 2t\langle v, u\rangle + t^2||u||^2. \tag{129}$$

Tome $t = -\langle v, u\rangle/||u||^2$ e temos

$$q(t) = ||v||^2 - \frac{\langle v, u\rangle^2}{||u||^2} \geq 0, \tag{130}$$

da onde segue o resultado. □

Teorema 40. *Dados $u, v \in V$, temos $||v + u|| \leq ||v|| + ||u||$.*

Demonstração. Temos

$$||v + u||^2 = ||v||^2 + 2\langle v, u\rangle + ||u||^2 \leq ||v||^2 + 2||v|| \cdot ||u|| + ||u||^2 = (||v|| + ||u||)^2. \tag{131}$$

Tirando a raíz dos dois lados, a desigualdade segue. □

Dois vetores u e v são **perpendiculares** ou **ortogonais** se $\langle v, u\rangle = 0$. Fica claro que, nesse caso, vale o teorema de pitágoras: $||v - u||^2 = ||v||^2 + ||u||^2$. Se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base de V, dizemos que ela é **ortonormmal** se

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta^i_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases} \tag{132}$$

Note que $||e_i|| = \sqrt{\langle e_i, e_i\rangle} = 1$. O principal resultado é que toda base pode ser transformada numa base ortonormal.

Teorema 41. *O teorema a seguir é chamado de ortonormalização de Gram-Schmidt. Dada uma base $f_1, \ldots, f_n$ de V, existe uma outra base $e_1, \ldots, e_n$ com as seguintes propriedades:*

1. *$e_1, \ldots, e_n$ é ortonormal;*
2. *e_k é uma combinação linear de $f_1, \ldots, f_k$ para todo k.*

Demonstração. Definimos $e_1 = f_1/||f_1||$. Se $e_1, \ldots, e_{k-1}$ já estiverem definidos, definimos

$$e_k = c\left(f_k - \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_j\right) \tag{133}$$

com $c_j = \langle f_k, e_j\rangle$ e c escolhido de tal forma que $||e_k|| = 1$. Se $l < k$, então

$$\langle e_k, e_l\rangle = c\langle f_k, e_l\rangle - c\sum_{j=1}^{k-1}\langle f_k, e_j\rangle\langle e_j, e_l\rangle = (c - c)\langle f_k, e_l\rangle = 0. \tag{134}$$

O caso $l > k$ é consequência do caso $l < k$ por simetria. □

Se $e = (e_1, \ldots, e_n)$ é uma base ortonormal, $x[e] = (x^1, \ldots, x^n)$ e $y[e] = (y^1, \ldots, y^n)$, então fica claro que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i \quad \text{e} \quad ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2. \tag{135}$$

O resultado que segue é chamado de teorema de representação de Riesz (versão de dimensão finita).

Teorema 42. *Dado $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ um covetor, existe um $v \in V$ tal que $\varphi(u) = \langle u, v\rangle$. A associação $\varphi \mapsto u$ é um isomorfismo linear entre V e V^*.*

Demonstração. Seja $e = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base ortonormal. Se $v[e] = (v^1, \ldots, v^n)$, então

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} v^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle \varphi(e_i) = \left\langle v, \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i \right\rangle. \tag{136}$$

Como o segundo vetor não depende de v, fica provada a primeira parte do resultado. Se $\varphi(v) = \langle v, u \rangle$ e $\iota(v) = \langle v, w \rangle$, então

$$(\varphi + \iota)(v) = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle = \langle v, u + w \rangle \quad \text{e} \quad (\lambda\varphi)(v) = \lambda \langle v, u \rangle = \langle v, \lambda u \rangle, \tag{137}$$

assim a associação $\varphi \mapsto u$ é linear. Se $u = 0$, então claramente $\varphi = 0$, assim o mapa é injetor e, como $\dim V = \dim V^*$, é um isomorfismo. □

Dado um subespaço U de V, o **complemento ortogonal** de U em V é o subespaço

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0, \text{ para todo } u \in U\}. \tag{138}$$

Essa notação pode ser ambígua com a notação para o aniquilador de U, mas isso é por que eles são o mesmo espaço, através da representação de Riesz.

Proposição 43. *Se U é um subespaço de V, então $U \oplus U^\perp = V$.*

Demonstração. Se U' é o aniquilador, sabemos que $\dim U' = \dim U^\perp$, assim $\dim U^\perp + \dim U = \dim V$, portanto $\dim U \cap U^\perp = 0$, assim a soma é direta e o resultado está provado. □

Pelo resultado anterior, cada $v \in V$ se quebra unicamente em $v = x + y$ com $x \in U$ e $y \in U^\perp$. A **projeção** em U é o mapa $Pv = x$.

Proposição 44. *O mapa P é linear e $P^2 = P$.*

Demonstração. Se $v = x + y$ e $w = r + s$ com $x, r \in U$ e $y, s \in U^\perp$, então $v + w = (x + r) + (y + s)$ e, pela unicidade da decomposição, $P(v + w) = x + r = Pv + Pw$. Além disso, $\lambda v = \lambda x + \lambda y$ e, pela unicidade da decomposição $P(\lambda v) = \lambda x = \lambda P v$. Por fim, $P^2 v = P(Pv) = Px = x$, pois $x \in U$, assim $P^2 = P$. □

Teorema 45. *O vetor Pv minimiza, em U, a distância até x.*

Demonstração. Se $v = x + y$ com $x \in U$ e $y \in U^\perp$, dado $w \in U$ temos

$$v - w = x - w + y \tag{139}$$

e, como $x - w \in U$, então $||v - w||^2 = ||x - w||^2 + ||y||^2$. Claramente o valor $||v - w||^2$ é mínimo quando $w = x$. □

Se $T\colon V \to W$ é um mapa entre espaços Euclidianos, então considere o transposto $T^\top\colon W^* \to V^*$. Fazendo a identificação de W^* e V^* com W e V, temos um mapa $T^*\colon W \to V$, chamado de **adjunto** de T.

Proposição 46. *Se $v \in V$, $w \in W$ e $T\colon V \to W$ é linear, então $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle$. De fato, se $S\colon W \to V$ é linear e satisfaz $\langle Tv, w \rangle = \langle v, Sw \rangle$, então $S = T^*$.*

Demonstração. Denotamos $\varphi_x(v) = \langle v, x \rangle$. Se $u = T^* w$, então $\varphi_u = T^\top(\varphi_w)$, assim

$$\langle v, T^* w \rangle = \varphi_u(v) = T^\top(\varphi_w) v = (\varphi_w \circ T) v = \varphi_w(Tv) = \langle Tv, w \rangle. \tag{140}$$

Por fim, se S satisfaz a igualdade, então se $u = Sw$, temos $\varphi_u(v) = \varphi_w(Tv) = T^\top(\varphi_w) v$, assim $\varphi_u = T^\top(\varphi_w)$ da onde segue que $S = T^*$. □

O próximo passo é demonstrar algumas propriedades sobre o adjunto.

Proposição 47. *Se $T, S\colon V \to W$ e $R\colon W \to U$ são lineares, então*

$$(T + S)^* = T^* + S^*, , \quad (T^*)^* = T \quad e \quad (RT)^* = T^* R^*. \tag{141}$$

Além disso, se T for um isomorfismo, então $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Demonstração. Note que

$$\langle (T+S)v, u\rangle = \langle Tv, u\rangle + \langle Sv, u\rangle = \langle v, T^*u\rangle + \langle v, S^*u\rangle = \langle v, (T^*+S^*)u\rangle. \tag{142}$$

Além disso,

$$\langle T^*u, v\rangle = \langle v, T^*u\rangle = \langle Tv, u\rangle = \langle u, Tv\rangle \tag{143}$$

e também temos

$$\langle RTv, u\rangle = \langle TvR^*u\rangle = \langle v, T^*R^*u\rangle. \tag{144}$$

Por fim,

$$TT^{-1} = \mathrm{Id}_W \implies (T^{-1})^*T^* = \mathrm{Id}_W, \tag{145}$$

concluindo o resultado desejado. □

Vamos agora achar a matriz da transformação de Riesz. Se e é uma base ortonormal de V e ε é sua base dual, então se R_V é a representação de Riesz, temos que

$$R_V\varepsilon^j = e_j \tag{146}$$

assim a matriz de R_V (com respeito a essas bases) é a identidade! Segue que a matriz do mapa adjunto, com respeito a duas bases ortogonais, assim como do mapa transposto, é a matriz transposta do mapa original.

Se V e W são espaços Euclidianos, um mapa $T\colon V \to W$ **preserva distâncias** se

$$||Tv - Tu|| = ||v - u|| \tag{147}$$

para todos $v, u \in V$. Mapas que preserva distâncias são sempre injetores. Um mapa bijetor que preserva distâncias é uma **isometria** entre V e W, e nesse caso dizemos que V e W são **isométricos**.

1.4 Teoria Espectral

2 Grupos

3 Anéis

4 Corpos

5 Métricos

6 Análise 1

7 Análise 2

8 Análise Complexa

9 Medida

10 Funcional

11 EDO

12 EDP

13 Probabilidade

14 Topologia

15 Topologia Algébrica

16 Topologia Diferencial

17 Análise em Variedades

18 Riemanniana