# Qualificação de Mestrado

Lucas Giraldi Almeida Coimbra

24 de janeiro de 2024

## Conteúdo



# 1 Álgebra Linear

## 1.1 Fundamentos e Dualidade

Tome $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um **espaço vetorial** é um conjunto $V$ munido de duas operações

$$\begin{aligned} +\colon V \times V &\to V \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{K} \times V &\to V \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned} \tag{1}$$

tais que a operação $+$ (soma) é comutativa, associativa, possui identidade e todos os inversos, e a operação de $\cdot$ (produto por escalar) satisfaz as relações distributivas, $1x = x$ e $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

Um **subespaço vetorial** de um espaço vetorial $V$ é um subconjunto $S \subset V$ tal que para todos $x, y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $x + y \in S$ e $\lambda x \in S$. Todo espaço vetorial é um subespaço vetorial de si mesmo, assim como $\{0\}$ é sempre um subespaço vetorial. Chamamos $V$ e $\{0\}$ de **subespaços triviais**. Se $U, W \subset V$ são dois subespaços, então o conjunto $U + V = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ é a **soma** desses subespaços, e é também um subespaço. Se $U \cap W = \{0\}$, então diremos que a soma desses espaços é uma **soma direta** e a denotamos por $U \oplus W$. A intersecção $U \cap W$ também é sempre um subespaço vetorial.

Uma **combinação linear** de vetores em $V$ é uma soma finita

$$\lambda^i x_i = 0 \tag{2}$$

onde cada $\lambda^i \in \mathbb{K}$. Dado um conjunto $S \subset V$, o conjunto $\langle S \rangle$ de todas as combinações lineares de elementos de $S$ é um subespaço vetorial de $V$, chamado de **subespaço gerado por** $S$. O conjunto $S$ é **gerador** de $V$ se $\langle S \rangle = V$.

Dizemos que $x_1, \ldots, x_n \in V$ são **linearmente independentes** se para quaisquer $\lambda^1, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\lambda^i x_i = 0, \tag{3}$$

então $\lambda_i = 0$ para todo $i$. Vetores que não são linearmente independentes são **linearmente dependentes**. Fica claro da definição que um conjunto de vetores é linearmente dependente se, e somente se, um dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros. Além disso, é fácil ver que se uma subcoleção de vetores é linearmente dependente, então a coleção original também é. Mais ainda, qualquer coleção de vetores que contenha o 0 é linearmente dependente.

**Lema 1.** *Sejam $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ um gerador de $V$ e $v_1, \ldots, v_m$ vetores linearmente independentes. Então, $m \leq n$.*

*Demonstração.* Suponha que $m > n$. Como $S$ gera $V$, então existem $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ tais que $y_1 = \lambda^i s_i$. Como $y_1 \neq 0$ (pela independência linear), então algum $\lambda_j$ é não nulo, ou seja, podemos substituir $s_j$ por $y_1$ e o conjunto resultante ainda gera $V$. Pela independência linear dos $y_i$, podemos fazer essa operação mais $n - 1$ vezes, garantindo que $y_1, \ldots, y_n$ geram $V$. Porém, isso significa que $y_{n+1}, \ldots, y_m$ são combinação linear de $y_1, \ldots, y_n$, o que contradiz a independência linear. Segue então que $m \leq n$. □

Um espaço $V$ é **finitamente gerado** se existe um conjunto gerador finito. Uma **base** de $V$ é um conjunto gerador linearmente independente.

**Lema 2.** *Todo espaço finitamente gerado possui uma base.*

*Demonstração.* Se $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ gera $V$, então se $S$ é linearmente independente o trabalho acabou. Caso contrário, algum $s_i$ é combinação linear dos outros, e então retiramos ele e o conjunto resultante ainda gera $V$. Fazemos isso até que os vetores que sobram em $S$ sejam linearmente independentes, e assim temos uma base. □

A partir de agora vamos trabalhar apenas com espaços finitamente gerados e, caso queiramos falar em um contexto mais geral, iremos explicitar. A **dimensão** de um espaço $V$, denotada por $\dim V$, é o número de elementos de uma base. Pelo Teorema a seguir, esse número está bem definido.

**Teorema 3.** *Toda base possui mesmo número de elementos.*

*Demonstração.* Como bases são linearmente independentes e geradoras, o resultado segue facilmente do Lema 1. □

O 2 assume implicitamente que o conjunto $S$ que gera $V$ é não vazio. Caso tenhamos $V = \langle \varnothing \rangle$, então $V = \{0\}$ e o chamamos de **espaço trivial**. Sua dimensão é, por definição, nula.

**Teorema 4.** *Todo conjunto linearmente independente pode ser estendido para uma base.*

*Demonstração.* Se $S$ é um conjunto linearmente independente, então considere $\langle S \rangle$. Se $\langle S \rangle = V$, então o conjunto $S$ já é uma base. Caso contrário, seja $v \in V \setminus \langle S \rangle$ e tome $S_1 = S \cup \{v\}$. Podemos agora testar se $\langle S_1 \rangle = V$ e, caso contrário, repetir o processo. Como o espaço $V$ é finitamente gerado, esse processo obrigatoriamente acaba, que é quando adicionamos vetores o suficiente em $S$ para que se torne uma base. □

Note que todo subespaço de um espaço com dimensão finita, possui dimensão finita (pelo Lema 1). Se $W$ é um subespaço de $V$, um subespaço $U$ de $V$ é um **complemento** de $W$ se $U \oplus W = V$.

**Teorema 5.** *Complementos sempre existem e são únicos.*

*Demonstração.* Se $W$ é um subespaço, seja $v_1, \dots, v_m$ uma base de $W$ e a complete para uma base $v_1, \dots, v_m$, $w_1, \dots, w_n$ de $V$. Defina $U = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$. Se $x \in U \cap W$, então existem $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ e $\mu^1, \dots, \mu^n$ em $\mathbb{K}$ tais que

$$x = \lambda^i v_i = \mu^j w_j, \tag{4}$$

ou seja, $\lambda^i v_i + \mu^j v_j = 0$, portanto cada $\lambda^i$ e $\mu^j$ é nulo, da onde segue que $x = 0$ e assim $U \cap W = \{0\}$. Mais ainda, se $x \in V$, então podemos escrever $x = \lambda^i v_i + \mu^j w_j$ e assim $x = v + w$ com $v \in U$ e $w \in W$, da onde segue que $V = U \oplus W$. □

Note que da demonstração acima tiramos um outro fato importante: se $V = U \oplus W$, então $\dim V = \dim U + \dim W$. Esse fato pode ser generalizado, isso é, se $V = V_1 + \cdots + V_n$ e $V_i \cap V_j = \{0\}$ quando $i \neq j$, então escrevemos

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \tag{5}$$

e nesse caso temos

$$\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i. \tag{6}$$

**Proposição 6.** *Se $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ e $x \in V$, então existem $x_i \in V_i$ únicos tais que $x = x_1 + \cdots + x_n$.*

*Demonstração.* Como já observamos, se $v_i^j$ é uma base de $V_j$, então podemos escrever $x = \lambda_j^i v_i^j$ e assim tomamos $x_j = \lambda^i v_i^j$ □

—————————-

Dadas duas bases $e = (e_1, \dots, e_n)$ e $f = (f_1, \dots, f_n)$ de $V$, podemos escrever unicamente cada $e_j$ como

$$e_j = a_j^i f_i \tag{7}$$

e fica claro que o determinante da matriz $A = [a_j^i]$ é não nulo, caso contrário os vetores $e_j$ seriam linearmente dependentes. Se $x[e] = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ e $x[f] = (\mu^1, \dots, \mu^n)$, então sabemos que $\lambda^j e_j = \mu^i f_i$ e portanto

$$\mu^i f_i = \lambda^j a_j^i f_i. \tag{8}$$

Como os vetores $f_i$ são linearmente independentes, segue que $\mu^i = a_j^i \lambda^j$. Dessa forma, temos que $x[e] = Ax[f]$, portanto $x[f] = A^{-1}x[e]$, ou seja, *a troca de coordenadas de $x$ da base $e$ para base $f$ é dada pela matriz inversa da matriz que troca a base $f$ para a base $e$* (como vimos em 7). Podemos abreviar essa frase dizendo que vetores são **quantidades contravariantes**, no sentido de que eles mudam de coordenadas de maneira inversa a uma mudança de base. Em particular, é por isso que sempre denotamos os índices de vetores embaixo. Para **quantidades covariantes**, os índices são denotados em cima (números não obedecem essa regra e seus índices são posicionados de maneira a obedecer a notação de soma de Einstein).

## 2 Grupos

## 3 Anéis

## 4 Corpos

## 5 Métricos

## 6 Análise 1

## 7 Análise 2

## 8 Análise Complexa

## 9 Medida

## 10 Funcional

## 11 EDO

## 12 EDP

## 13 Probabilidade

## 14 Topologia

## 15 Topologia Algébrica

## 16 Topologia Diferencial

## 17 Análise em Variedades

## 18 Riemanniana