

INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL

Aprendizado de máquina e geometria hiperbólica complexa

Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e Computação

Aluno: Lucas Giraldi Almeida Coimbra
Orientador: Carlos Henrique Grossi Ferreira

Junho de 2023

São Carlos

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Geometria hiperbólica	2
2.1	Variedades e métricas riemannianas	2
2.2	Conexões e derivada covariante	3
2.3	Jacobiana e teorema da função inversa	4
2.4	Geodésicas e transporte paralelo	5
2.5	Mapa exponencial e mapa logarítmico	6
2.6	Curvatura por via de tensores	6
2.7	Conceitos métricos	8
3	Modelos para a geometria hiperbólica	8
3.1	O semi-espaço de Poincaré	8
3.2	O hiperboloide de Lorentz	9
3.3	O n -disco de Poincaré	9
3.4	O n -disco de Beltrami-Klein	9
3.5	O modelo do hemisfério	10
3.6	Isometrias entre os modelos	10
3.7	Generalizando operações euclidianas	10
4	Redes neurais	11
5	Misturando tudo	11

1 Introdução

2 Geometria hiperbólica

2.1 Variedades e métricas riemannianas

Uma *variedade topológica de dimensão n* é um espaço topológico M Hausdorff com base enumerável que é *localmente euclidiano de dimensão n* , isso é, para cada $p \in M$ existe um aberto U e um homeomorfismo $\phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$. O par (U, ϕ) será comumente chamado de *carta sobre p* . Se (V, ψ) é uma outra carta em M tal que $U \cap V \neq \emptyset$, chamamos de *mapas de transição* as funções

$$\phi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Se os mapas de transição forem suaves, diremos que (U, ϕ) e (V, ψ) são *compatíveis*. Uma *estrutura diferenciável* em M é uma cobertura de M por cartas que são duas a duas compatíveis. Dizemos que M é *suave* ou *diferenciável* se possuir uma estrutura diferenciável.

A partir de agora, toda carta estará em uma estrutura diferenciável previamente fixada, e portanto toda variedade será suave. Se $p \in M$ dizemos que $F: M \rightarrow N$ é *suave em p* se existirem (U, ϕ) carta sobre p e (V, ψ) carta sobre $F(p)$ tais que $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ é suave. A função F é *suave em $U \subset M$* se for suave em todo ponto de U , e é apenas *suave* se for suave em todo ponto de M .

Uma *curva* em M é um mapa suave $c: I \rightarrow M$ onde I é um intervalo de \mathbb{R} . Se $p \in M$, definimos por C_p^∞ como o conjunto dos mapas $f: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ suaves, onde U é uma vizinhança qualquer de p . Esse espaço é uma álgebra com as três operações:

- se $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: V \rightarrow \mathbb{R}$, definimos $f + g: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ por $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$;
- se $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $\lambda f: U \rightarrow \mathbb{R}$ por $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$;
- se $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: V \rightarrow \mathbb{R}$, definimos $fg: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ por $(fg)(p) = f(p)g(p)$.

Dada uma curva $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$, definimos $c'(0)$ como sendo um mapa $c'(0): C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$c'(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c)(t). \quad (2)$$

Esse mapa é linear e satisfaz a *regra de Leibniz*, isso é,

$$c'(0)(fg) = f(c(0)) \cdot c'(0)g + c'(0)f \cdot g(c(0)). \quad (3)$$

Se $p \in M$, o *espaço tangente a M em $p \in M$* como o conjunto

$$T_p M = \{c'(0) \mid c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \text{ e } c(0) = p\}. \quad (4)$$

Se M tem dimensão n , então $T_p M$ é um espaço vetorial de dimensão n . Seus elementos são chamados de *vetores tangentes*. Uma *métrica riemanniana* em M é a associação de um produto interno $\mathbf{g}_p(-, -)$ em $T_p M$ para cada $p \in M$. Mais do que isso, pedimos que essa associação seja suave. Entenderemos o que isso significa a seguir.

Um *campo vetorial* em M é uma associação X de um vetor $X_p \in T_p M$ para cada $p \in M$. Se $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ é uma carta sobre $p \in M$ e $r = (r^1, \dots, r^n)$ são as coordenadas em \mathbb{R}^n , definimos as derivadas parciais de $f \in C_p^\infty$ por

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial r^i} \right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1})(r). \quad (5)$$

Cada derivada parcial em p pode ser vista como um elemento de $T_p M$, afinal, se e^1, \dots, e^n é a base canônica de \mathbb{R}^n , então dadas as curvas $c^i(t) = te^i$ temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = (\phi^{-1} \circ c^i)'(0). \quad (6)$$

Esses vetores tangentes formam uma base para $T_p M$.

Se (U, ϕ) é uma em M e X é um campo vetorial em M , então para cada $p \in M$ podemos escrever, de maneira única,

$$X_p = \sum_{k=1}^n a^k(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p. \quad (7)$$

Dizemos que o campo vetorial X é *suave* se existir uma cobertura de M por cartas tais que os mapas a^i são sempre suaves. Ao dizermos que a métrica riemanniana tem que ser suave, queremos dizer que, para quaisquer X, Y campos suaves em M , o mapa $p \mapsto \mathbf{g}_p(X_p, Y_p)$ tem que ser suave. Uma *variedade riemanniana* é uma variedade suave equipada com uma métrica riemanniana.

2.2 Conexões e derivada covariante

Denotamos o conjunto de todos os campos suaves em M por $\mathfrak{X}(M)$. Se $M = \mathbb{R}^n$, vamos entender quem é a derivada direcional. Se $X = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ e X_p é o vetor tangente a p na direção X , então dada $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definimos a *derivada direcional de f na direção X_p*

$$D_{X_p}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tX) - f(p)}{t} = \sum_{k=1}^n v^k \left. \frac{\partial f}{\partial x^k} \right|_p = X_p f. \quad (8)$$

Podemos então trocar f por um campo vetorial suave $Y = \sum b^i \partial / \partial x^i$ e obtermos a *derivada direcional de Y na direção X_p*

$$D_{X_p}Y = \sum_{k=1}^n D_{X_p}b^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p. \quad (9)$$

Note que a derivada $D_{X_p}Y$ é um vetor tangente em p . Dessa forma, se X é um campo vetorial em \mathbb{R}^n podemos definir $D_X Y$ como o campo vetorial que, em p , vale $D_{X_p}Y$. Esse mapa é a *derivada direcional de Y na direção X* .

Agora vamos generalizar a derivada direcional em \mathbb{R}^n para uma variedade riemanniana qualquer. Uma *conexão afim* em M é um mapa

$$\begin{aligned} \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- se $C^\infty(M)$ é o conjunto dos mapas suaves $M \rightarrow \mathbb{R}$, então ∇ é $C^\infty(M)$ -linear na primeira coordenada;
- ∇ satisfaz a regra de Leibniz na segunda coordenada, isso é, se $f \in C^\infty(M)$, então

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \quad (10)$$

onde Xf é o mapa suave dado por $(Xf)(p) = X_p f$.

Conexões e métricas riemannianas não estão sempre conectadas. Porém, se M é uma variedade riemanniana e ∇ uma conexão afim em M , então podemos falar sobre alguns aspectos geométricos de ∇ . Definimos o *tensor torção* de ∇ como sendo o mapa $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$, onde $[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$ é o *bracket de Lie*. Do mesmo modo, definimos o *tensor curvatura* de ∇ como sendo o mapa $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$, isso é, para um campo vetorial suave Z , temos

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (11)$$

Dizemos que uma conexão ∇ em uma variedade riemanniana M é *compatível com a métrica* se $Z\mathbf{g}(X, Y) = \mathbf{g}(\nabla_Z X, Y) + \mathbf{g}(X, \nabla_Z Y)$. Uma *conexão de Levi-Civita* é uma conexão compatível com a métrica e que satisfaz $T(X, Y) = 0$ para todos X, Y campos suaves em M .

Proposição 2.1. *Toda variedade riemanniana possui uma, e apenas uma, conexão de Levi-Civita.*

Um campo vetorial *ao longo* de uma curva $c: I \rightarrow M$ é a associação V de um vetor $V(t) \in T_{c(t)}M$ para cada $t \in I$. Dizemos que V é *suave* se, para cada $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $(Vf)(t) = V(t)f$ é suave.

Se $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva e V é um campo ao longo de c , temos

$$V(t) = \sum_{k=1}^n v^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{c(t)}, \quad (12)$$

portanto podemos definir a *derivada de V com respeito a t* como sendo o campo

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (13)$$

Essa derivada satisfaz algumas propriedades importantes:

- ela é linear com respeito a V , isso é, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e U é outro campo ao longo de c , então

$$\frac{d(\lambda V + U)}{dt} = \lambda \frac{dV}{dt} + \frac{dU}{dt}; \quad (14)$$

- ela satisfaz a regra de Leibniz, isso é, se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (lembrando aqui que I é o domínio de c) é suave, então

$$\frac{d(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f \frac{dV}{dt}; \quad (15)$$

- ela é compatível com a derivada direcional em \mathbb{R}^n , isso é, se V se estende para um campo \tilde{V} em \mathbb{R}^n , então

$$\frac{dV}{dt} = D_{c'(t)}\tilde{V}. \quad (16)$$

Vamos agora generalizar o conceito da derivada de V para uma variedade M qualquer, utilizando de conexões afins. Se ∇ é uma conexão afim em M e $c: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma curva, então definimos uma *derivada covariante* como um operador D/dt que, para cada campo V ao longo de c associa um outro campo DV/dt ao longo de c . Pedimos que essa associação satisfaça as três propriedades que a derivada definida acima satisfaz:

- D/dt é linear, isso é, se V e U são campos ao longo de c e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$\frac{D(\lambda V + U)}{dt} = \lambda \frac{DV}{dt} + \frac{DU}{dt}; \quad (17)$$

- D/dt satisfaz a regra de Leibniz, isso é, se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é suave, então

$$\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}; \quad (18)$$

- D/dt é compatível com a conexão afim, isso é: se \tilde{V} é um campo em M que estende V , então

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)}V. \quad (19)$$

Definimos acima o que seria **uma** derivada covariante, mas acontece que, fixadas uma conexão e uma curva, sempre existe uma e apenas uma derivada covariante, portanto podemos falar **da** derivada covariante.

2.3 Jacobiana e teorema da função inversa

Se $F: M \rightarrow N$ é suave, então para toda carta (U, ϕ) sobre p e (V, ψ) sobre $F(p)$ o mapa $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ é suave. Sabemos da teoria de variedades que as derivadas parciais $\partial/\partial\phi^i$ e $\partial/\partial\psi^j$ formam base para T_pM e $T_{F(p)}N$, respectivamente. Considere agora a transformação linear D_pF dada por

$$D_pF(v)f = v(f \circ F) \quad (20)$$

que manda vetores tangentes a p para vetores tangentes a $F(p)$. Na expressão acima, estamos apenas descrevendo como o vetor $D_pF(v)$ age em uma função $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ suave. O mapa D_pF é chamado de *derivada de F em p* .

Podemos então considerar a matriz de $D_p F$ conforme as bases $\partial/\partial\phi^i$ e $\partial/\partial\psi^j$. Se denotarmos por F^i o mapa $\psi^i \circ F$, então temos que

$$D_p F = \left[\frac{\partial F^i}{\partial \phi^j} \Big|_p \right]. \quad (21)$$

Note que ela coincide com a matriz jacobiana que conhecemos do cálculo. De fato, essa coincidência motiva uma nova versão do teorema da função inversa.

Teorema 2.2. *Se $F: M \rightarrow N$ é suave e $\dim M = \dim N$, então F é um difeomorfismo local em $p \in M$ se, e somente se, $\det D_p F \neq 0$.*

2.4 Geodésicas e transporte paralelo

Se $c: I \rightarrow M$ é uma curva, então dizemos que c é uma *geodésica* se a derivada covariante DT/dt do seu campo velocidade $T(t) = c'(t)$ é nula. Note que a existência de uma conexão, e portanto de uma derivada covariante, não depende da existência de uma métrica riemanniana. Porém, caso a variedade M possua uma métrica, vamos sempre assumir que a conexão considerada é a conexão de Levi-Civita em M .

Proposição 2.3. *Geodésicas em variedades riemannianas possuem velocidade constante, isso é, se $c: I \rightarrow M$ é uma geodésica, então $\|c'(t)\|$ é constante para cada $t \in I$.*

Seja M uma variedade suave com uma conexão ∇ . Se (U, x^1, \dots, x^n) é uma carta em M , então temos os campos vetoriais $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Sabemos que todo campo vetorial em U se escreve como combinação linear destes, e portanto temos

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (22)$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados de *símbolos de Christoffel de ∇ em (U, x^1, \dots, x^n)* .

Sejam M uma variedade com uma conexão ∇ , $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ uma carta em M e Γ_{ij}^k os seus símbolos de Christoffel. Note que, se $c: I \rightarrow M$ é uma curva e $y = \phi \circ c$, então temos

$$T = c'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{dy^k}{dt} \partial_k. \quad (23)$$

Dessa maneira, segue que

$$\frac{DT}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \frac{D\partial_j}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \nabla_{c'(t)} \partial_j \quad (24)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \nabla_{\frac{dy^i}{dt} \partial_i} \partial_j = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^i}{dt} \nabla_{\partial_i} \partial_j \quad (25)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{d^2 y^k}{dt^2} \partial_k + \sum_{i,j,k=1}^n \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^i}{dt} \Gamma_{ij}^k \partial_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2 y^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k. \quad (26)$$

Portanto, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.4. *Se M é uma variedade suave com uma conexão ∇ e $c: I \rightarrow M$ é uma curva, então c é uma geodésica se, com respeito a qualquer carta $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, as componentes de $y = \phi \circ c$ satisfazem o sistema de EDOs*

$$\frac{d^2 y^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (27)$$

As equações do sistema acima são chamadas de *equações geodésicas*. Pelo teorema de existência e unicidade de solução para EDOs temos a existência e unicidade de geodésicas.

Teorema 2.5. *Seja M uma variedade suave com uma conexão ∇ . Dado $p \in M$ e $X_p \in T_p M$, existe uma geodésica $c: I \rightarrow M$ tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = X_p$. Mais do que isso, essa geodésica é única no sentido de que qualquer outra geodésica satisfazendo essas propriedades deve coincidir com c na intersecção de seus domínios.*

Um *difeomorfismo* entre variedades suaves M e N é um mapa $F: M \rightarrow N$ suave, bijetor e com inversa suave. Se M e N forem riemannianas, dizemos que F é uma *isometria* se, para todos $p \in M$ e $X_p, Y_p \in T_p M$, temos

$$\mathfrak{g}_p(X_p, Y_p) = \mathfrak{g}_{F(p)}(D_p F(X_p), D_p F(Y_p)). \quad (28)$$

Proposição 2.6. *Isometrias preservam conexões de Levi-Civita. Mais ainda, mapas que preservam conexões, preservam geodésicas. Como corolário, isometrias preservam geodésicas.*

Se $c: I \rightarrow M$ é uma curva e V é um campo ao longo de c , então dizemos que V é *paralelo* se $DV/Dt = 0$. Dessa forma, uma geodésica é uma curva cujo campo velocidade é paralelo. Fixado $X_p \in T_{c(t_0)} M$, existe um único campo V ao longo de c , paralelo, tal que $V(t_0) = X_p$. Se $c: [a, b] \rightarrow M$ é uma curva e V é um campo paralelo ao longo de c , dizemos que $V(b)$ é obtido a partir de $V(a)$ por *translação paralela*. Dizemos que $V(b)$ é o *transporte paralelo* de $V(a)$ ao longo de c .

Proposição 2.7. *Se V e W são paralelos ao longo de c em uma variedade riemanniana M , então $\|V\|$ e $\mathfrak{g}(V, W)$ são constantes.*

Um problema importante com questão ao transporte paralelo é a existência. Ela está garantida pelo resultado abaixo.

Teorema 2.8. *Se M é uma variedade suave com uma conexão ∇ e $c: [a, b] \rightarrow M$ uma curva. Dado $v \in T_{c(a)} M$, existe um campo vetorial paralelo V_t ao longo de c tal que $V_a = v$.*

2.5 Mapa exponencial e mapa logarítmico

Uma geodésica $c: I \rightarrow M$ é *maximal* se não podemos estender c para um intervalo maior do que I sem que a curva deixe de ser uma geodésica. Do Teorema 2.5 temos que, dado $p \in M$ e $X_p \in T_p M$ existe uma única geodésica maximal c com $c(0) = p$ e $c'(0) = X_p$. Vamos denotar essa geodésica por γ_{X_p} .

O *mapa exponencial* em um ponto $p \in M$ é a função dada por $\text{Exp}_p(X_p) = \gamma_{X_p}(1)$. Esse mapa não está necessariamente definido para todo $X_p \in T_p M$, visto que nem sempre γ_{X_p} possui 1 no seu domínio. Uma variedade com uma conexão é dita *completa* se toda geodésica puder ter seu domínio estendido para todo \mathbb{R} . No caso de variedades riemannianas consideradas com a conexão de Levi-Civita, temos dois resultados que nos ajudam no sentido de definir Exp_p para um conjunto satisfatório de vetores.

Proposição 2.9. *Para qualquer $p \in M$, com M variedade riemanniana, existem uma vizinhança U de p e dois números $\epsilon, \delta > 0$ tais que para todos $q \in U$ e $v \in T_q M$ com $\|v\| < \delta$, existe uma única geodésica $\gamma:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ com $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = v$.*

Corolário 2.10. *Para qualquer $p \in M$, com M variedade riemanniana, existem uma vizinhança U de p e um número $\delta > 0$ tais que para todos $q \in U$ e $v \in T_q M$ com $\|v\| < \delta$ existe uma única geodésica $\gamma:]-2, 2[\rightarrow M$ com $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = v$.*

O Corolário 2.10 nos diz que o mapa exponencial está sempre definido em todas as direções, porém essa existência só está garantida para velocidades pequenas. Se você for muito rápido, pode ficar cansado muito rápido e não dar tempo do seu conjunto de parâmetros englobar o 1.

Proposição 2.11. *A derivada $D_0 \text{Exp}_p$ é a identidade em $T_p M$ para qualquer $p \in M$.*

A Proposição acima garante, em particular, que sempre existe um $\epsilon > 0$ tal que Exp_p mapeia $B(0, \epsilon)$ difeomorficamente em M . Por causa disso, existe uma inversa para o mapa exponencial, que chamaremos de *mapa logarítmico*.

2.6 Curvatura por via de tensores

Fixada uma conexão ∇ em M , já conhecemos o tensor de torção, que é dado por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (29)$$

Ao tomarmos $X = \partial_i$ e $Y = \partial_j$ em uma carta (U, ϕ) , temos $[X, Y] = \partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i = 0$, portanto se a conexão ∇ é a de Levi-Civita, temos pelo anulamento da torção que $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$. Dessa maneira, as derivadas desses campos comutam.

Vamos tentar entender o que acontece para o tensor de curvatura. Começemos lembrando que ele é dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (30)$$

Ao tomarmos $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ e Z qualquer, temos novamente que $[X, Y] = 0$, portanto $\nabla_{[X, Y]} Z = 0$. Dessa forma, segue que

$$R(\partial_i, \partial_j)Z = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} Z - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} Z. \quad (31)$$

Porém, mesmo que ∇ seja a conexão de Levi-Civita, não temos garantia de que $R(X, Y)Z = 0$, dessa forma nem sempre derivar um campo em direções diferentes independe da ordem dessas derivadas. O que vai medir a diferença entre essas operações é a curvatura da sua variedade.

Para entendermos a curvatura geometricamente, precisamos falar de holonomia. Dado $p \in M$ e $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ fechada em p e contrátil, para cada $v \in T_p M$ podemos considerar o campo V_t ao longo de γ que seja paralelo e satisfaça $V_a = v$. O vetor $v' = V_b$, que é o transporte paralelo de v ao longo de γ , é chamado de *holonomia de v ao longo de γ* .

A menos que sua variedade possua curvatura 0, isso é, se $R(X, Y)Z = 0$ para todos X, Y, Z , a sempre existirá $v \in T_p M$ tal que $v' \neq v$. Ou seja, o ângulo entre esses dois vetores é também medido pela curvatura.

Agora vamos entender quem são as possíveis curvaturas de uma variedade riemanniana. Por enquanto, vamos dar enfoque em três principais tipos: a seccional (ou gaussiana), a de Ricci e a escalar.

A primeira coisa a notar é que, dados $x, y, z \in T_p M$, podemos construir campos suaves X, Y, Z ao redor de p de maneira que $X_p = x$, $Y_p = y$ e $Z_p = z$. Definimos então $R(x, y)z$ como sendo o campo $R(X, Y)Z$ no ponto p .

Teorema 2.12. *Seja $p \in M$ com $\dim M \geq 2$ e $W \leq T_p M$ um subespaço de dimensão 2 (também conhecido como plano). Considere x, y uma base para W e defina o número*

$$K(W) = \frac{\mathbf{g}_p(R(x, y)x, y)}{|x \wedge y|^2}, \quad (32)$$

onde $|x \wedge y|$ é a área do paralelogramo formado por x e y , que pode ser explicitamente calculada por

$$|x \wedge y| = \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \mathbf{g}_p(x, y)^2}, \quad (33)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma induzida pela métrica \mathbf{g} . Temos então que $K(W)$ não depende da base escolhida para W .

A quantidade $K(W)$ definida no teorema acima é a *curvatura seccional* ou *curvatura gaussiana* de W em p . Agora podemos usar essa curvatura para falarmos de curvatura de Ricci. Dado $p \in M$ e $v \in T_p M$ unitário, considere $w \in v^\perp$. Se $P_w = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$, então temos a curvatura seccional $K(P_w)$. A *curvatura de Ricci em p na direção v* é a média de todas essas curvaturas seccionais, ou seja,

$$\text{Ricci}_p(v) = \lambda \int_S K(P_w) dV, \quad (34)$$

onde S é a esfera unitária em $T_p M$, dV é a forma de volume em S e λ é uma constante positiva que é, honestamente, irrelevante. De fato, ela pode ser calculada explicitamente se utilizarmos a seguinte proposição.

Proposição 2.13. *Se w_1, \dots, w_{n-1} é uma base ortonormal de v^\perp , então*

$$\text{Ricci}_p(v) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}_p(R(x, z_i)x, z_i). \quad (35)$$

Probabilisticamente, podemos pensar que curvatura de Ricci é a curvatura seccional média de planos aleatórios da forma P_w . Isso nos dá alguma ideia do porquê não conseguimos recuperar as curvaturas seccionais a partir da curvatura de Ricci: há perda de informação, pois a partir da média de um conjunto de dados raramente conseguimos recuperar quem são esses dados.

Por fim, a *curvatura escalar* nada mais é do que uma média das curvaturas de Ricci, ou seja, se $p \in M$, podemos considerar uma base ortonormal z_1, \dots, z_n de $T_p M$. A curvatura escalar é o número definido por

$$K_s(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Ricci}_p(z_i). \quad (36)$$

Por mais que a curvatura escalar não dependa de uma direção, e apenas do ponto, não é a ela que nos referimos ao dizer que M tem curvatura constante κ em $p \in M$. Essa expressão diz que todas as curvaturas seccionais em p valem κ .

2.7 Conceitos métricos

Antes de brincarmos com a geometria hiperbólica, vamos falar de duas definições que aparecem na teoria de espaços métricos e que podem ser úteis mais para frente. Dado um espaço métrico (X, d) , o *produto de Gromov* é uma operação que, dados três pontos $x, y, z \in X$, retorna o número

$$(y, z)_x = \frac{1}{2}(d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)). \quad (37)$$

Dizemos que X é δ -*hiperbólico*, com $\delta > 0$, se para todos $x, y, z, w \in X$ temos

$$(x, z)_w \geq \min\{(x, y)_w, (y, z)_w\} - \delta. \quad (38)$$

Uma definição equivalente envolve triângulos geodésicos. Uma *geodésica* em (X, d) é a imagem isométrica de um intervalo $[a, b]$. Se γ é essa isometria, $x = \gamma(a)$ e $y = \gamma(b)$, denotamos a imagem de γ por $[x, y]$. Um *triângulo geodésico com vértices* $x, y, z \in X$ é a união das geodésicas $[x, y]$, $[y, z]$ e $[z, x]$. Se para cada $m \in [x, y]$ existe um ponto em $n \in [y, z] \cup [z, w]$ tal que $d(m, n) < \delta$, dizemos que o triângulo geodésico $\Delta(x, y, z)$ é δ -*fino*. Dizemos que (X, d) é δ -*hiperbólico* se todo triângulo geodésico é δ -fino.

Por fim, precisamos falar de *distorção*, que é uma medida de fidelidade para certos mergulhos de dados em aprendizado de máquina. Se X e Y são espaços métricos e $f: X \rightarrow Y$ é um mergulho de dados em X para pontos de Y , a *distorção de f em $x, y \in X$* é dada por

$$\mathbb{D}_f(a, b) = \frac{|d(a, b) - d(f(a), f(b))|}{d(a, b)}. \quad (39)$$

3 Modelos para a geometria hiperbólica

O espaço hiperbólico real é uma variedade riemanniana de curvatura constante igual a -1 . Existem diversos modelos isométricos para ele, e agora vamos falar de alguns. Aqui, é importante notar que todos esses modelos estão mergulhados

3.1 O semi-espaço de Poincaré

O primeiro modelo do qual vamos falar é o semi-espaço de Poincaré. Ele é dado, como variedade suave, pelo semi-espaço

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}. \quad (40)$$

Sua métrica, por sua vez, é dada pela expressão

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}. \quad (41)$$

Essa expressão significa que, para cada $p \in \mathbb{H}^n$, temos

$$\mathfrak{g}_p(u, v) = \frac{u_1 v_1 + \dots + u_n v_n}{p_n^2}. \quad (42)$$

As formas diferenciais dx_i recebem os vetores u, v e retornam as respectivas coordenadas. Por sua vez, sempre que x_i aparecer em uma fórmula, ele será substituído pela i -ésima coordenada do ponto onde a métrica está sendo construída.

Esse espaço, assim como toda variedade riemanniana, possui uma estrutura de espaço métrico induzida pela métrica riemanniana. Essa métrica, em \mathbb{H}^n , é dada por

$$d(x, y) = \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{\|x - y\|^2}{2x_n y_n} \right). \quad (43)$$

3.2 O hiperboloide de Lorentz

O modelo do hiperboloide depende do que chamamos de *métrica de Lorentz* em \mathbb{R}^{n+1} . Ela é definida por

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{L}} = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \quad (44)$$

Como variedade suave, o hiperboloide é definido por

$$\mathbb{L}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_{\mathbb{L}} = -1, x_0 > 0\}. \quad (45)$$

A métrica riemanniana em \mathbb{L}^n é induzida também da métrica de Lorentz, e é dada por

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2. \quad (46)$$

Note que essa métrica não faz muito sentido, visto que o espaço tangente de \mathbb{L}^n deveria ter dimensão n , mas aqui utilizamos $n + 1$ coordenadas. De fato, essa métrica se aplica apenas ao considerarmos o espaço tangente $T_p \mathbb{H}^n$ como o conjunto $p^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p \rangle_{\mathbb{L}} = 0\}$. A distância no hiperboloide, por sua vez, é dada por

$$d(x, y) = \operatorname{arccosh}(-\langle x, y \rangle_{\mathbb{L}}). \quad (47)$$

É importante notarmos aqui que a métrica riemanniana que definimos não parece ser um produto interno, justamente pelo fator negativo $-dx_0^2$. De fato, a métrica de Lorentz não é um produto interno em \mathbb{R}^n , mas ao restringirmos ela ao espaço p^\perp para qualquer $p \in \mathbb{L}^n$, essa restrição é sempre um produto interno.

3.3 O n -disco de Poincaré

O n -disco de Poincaré é, como variedade suave, dado por

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}. \quad (48)$$

Sua métrica é definida como

$$ds^2 = 4 \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^2} \quad (49)$$

e sua distância por

$$d(x, y) = \operatorname{arccosh} \left(1 + 2 \frac{\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)} \right). \quad (50)$$

3.4 O n -disco de Beltrami-Klein

O n -disco de Beltrami-Klein é, como variedade suave, dado por

$$\mathbb{K}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}. \quad (51)$$

É a mesma variedade suave que da origem ao disco de Poincaré, mas a denotamos por uma letra diferente apenas para diferenciar os dois modelos. A diferença é na métrica riemanniana, que em \mathbb{K}^n é dada por

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2} + \frac{(x_1 dx_1 + \cdots + x_n dx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^2}. \quad (52)$$

Como consequência, a distância nesse espaço é diferente da distância no disco de Poincaré, e nesse caso é dada por

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\|a - x\| \cdot \|b - y\|}{\|a - y\| \cdot \|b - x\|} \right). \quad (53)$$

Aqui, a e b são pontos construídos a partir de x e y pelo seguinte método: considere a reta r que passa por x e y e defina por a e b os pontos em que r intersecta \mathbb{S}^{n-1} . O ponto a será escolhido como o que estiver mais próximo a x , e o ponto b por consequência será escolhido como o que estiver mais próximo a y .

3.5 O modelo do hemisfério

O último modelo que iremos visitar é o do hemisfério. Como variedade suave, ele é dado por

$$\mathbb{J}^n = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} > 0\}, \quad (54)$$

e possui métrica dada por

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}. \quad (55)$$

A distância em \mathbb{J}^n , por sua vez, é dada por

$$d(x, y) = \operatorname{arccosh}(\langle \phi(x), \phi(y) \rangle_{\mathbb{L}}), \quad (56)$$

onde ϕ é o mapa dado por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right). \quad (57)$$

3.6 Isometrias entre os modelos

Devemos agora explicitar isometrias entre os modelos definidos acima. Para isso, definiremos apenas quatro desses mapas e, como composição de isometrias é uma isometria, definir apenas essas quatro funções nos dará isometrias entre quaisquer dois modelos por meio de tomar inversas e compor.

- O isomorfismo entre \mathbb{L}^n e \mathbb{B}^n é dado por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^n \mapsto \left(\frac{x_2}{1+x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1+x_1} \right) \in \mathbb{B}^n; \quad (58)$$

- O isomorfismo entre \mathbb{B}^n e \mathbb{H}^n é dado por

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n \mapsto \frac{1}{1+2x_1+||x||^2} (1-||x||^2, 2x_2, \dots, 2x_n) \in \mathbb{H}^n; \quad (59)$$

- O isomorfismo entre \mathbb{L}^n e \mathbb{K}^n é dado por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^n \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_1} \right) \in \mathbb{K}^n; \quad (60)$$

- O isomorfismo entre \mathbb{L}^n e \mathbb{J}^n é dado por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^n \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right) \in \mathbb{J}^n. \quad (61)$$

3.7 Generalizando operações euclidianas

O próximo passo agora é generalizar algumas operações de espaços euclidianos para os espaços hiperbólicos. Faremos isso pois, para construir redes neurais em espaços euclidianos, precisamos de álgebra linear, e portanto é uma boa ideia aprender como fazer álgebra linear em um espaço que não é vetorial. Um *girogrupo* é um conjunto G munido de uma operação binária \oplus satisfazendo as seguintes propriedades:

- existe ao menos um elemento $0 \in G$ tal que $0 \oplus a = a$ para todo $a \in G$. Todo elemento satisfazendo essa condição é chamado de *identidade à esquerda*.
- existe alguma identidade à esquerda $0 \in G$ de maneira que, para todo $a \in G$, existe $\ominus a \in G$ de maneira que $\ominus a \oplus a = 0$;
- para todos $a, b, c \in G$, existe um elemento $\operatorname{gyr}[a, b]c \in G$ tal que vale a igualdade $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \operatorname{gyr}[a, b]c$;

- O mapa $\text{gyr}[a, b]: c \mapsto \text{gyr}[a, b]c$ é um automorfismo de G , isso é, é uma bijeção que satisfaz $\text{gyr}[a, b](c \oplus d) = \text{gyr}[a, b]c \oplus \text{gyr}[a, b]d$;
- vale a *propriedade de redução à direita*, isso é, $\text{gyr}[a, b] = \text{gyr}[a \oplus b, b]$ para todos $a, b \in G$.

Um girogrupo G é *girocomutativo* se para todos $a, b \in G$ vale $a \oplus b = \text{gyr}[a, b](b \oplus a)$.

O principal exemplo de girogrupo para o estudo de aprendizado profundo é o *girogrupo de Möbius*. Considere o n -disco de Poincaré \mathbb{B}^n e defina nele a *soma de Möbius* dada por

$$x \oplus y = \frac{(1 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2)x + (1 - \|x\|^2)y}{1 + 2\langle x, y \rangle + \|x\|^2\|y\|^2}. \quad (62)$$

O par (\mathbb{B}^n, \oplus) é um girogrupo girocomutativo, que é chamado de girogrupo de Möbius de raio 1. Em um contexto mais geral, poderíamos tomar o interior de qualquer esfera centrada em 0 em qualquer espaço vetorial real com produto interno, mas para nossos estudos isso não será necessário.

Um *espaço de girovetores real com produto interno* (iremos nos referir a esses objetos apenas como espaços de girovetores) é um girogrupo girocomutativo (G, \oplus) tal que G está contido em um espaço vetorial real V com produto interno $\langle -, - \rangle$ e munido de uma nova operação $\otimes: \mathbb{R} \times G \rightarrow G$. Mais do que isso, pedimos que (G, \oplus, \otimes) satisfaça as seguintes propriedades:

- $\langle \text{gyr}[u, v]a, \text{gyr}[u, v]b \rangle = \langle a, b \rangle$ para todos $a, b, u, v \in G$;
-

4 Redes neurais

5 Misturando tudo

Referências

- [1] Hugo Cattarucci Botós. «Geometrias Clássicas». 2020. URL: <https://github.com/HugoCBotos/geometria-classica/blob/master/Geometrias%20Cl%C3%A1ssicas%20-%20Hugo%20C.%20Bot%C3%B3s.pdf>.
- [2] M. Ferreira e G. Ren. «Möbius gyrogroups: A Clifford algebra approach». Em: *Journal of Algebra* 328.1 (2011).
- [3] Anna Wienhard e Gye-Seon Lee. «Curvature of Riemannian Manifolds». 2015. URL: <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~lee/Soeren05.pdf>.
- [4] Loring W. Tu. *Differential Geometry: Connections, Curvature and Characteristic Classes*. Springer-Verlag New York Inc, 2017. ISBN: 978-3-319-55082-4.
- [5] Wei Peng e Tuomas Varanka e Abdelrahman Mostafa e Henglin Shi e Guoying Zhao. «Hyperbolic Deep Neural Networks: A Survey». Em: *JOURNAL OF LATEX CLASS FILES* 14.8 (2015).
- [6] Abraham Ungar. «Beyond Pseudo-rotations in Pseudo-Euclidean Spaces - An Introduction to the Theory of Bi-gyrogroups and Bi-gyrovector Spaces». Em: ed. por Themistocles M. Rassias. Elsevier, 2018. Cap. 2 e 3, 9 até 97.
- [7] James W. Cannon e William J. Floyd e Richard Kenyon e Walter R. Parry. «Flavours of Geometry». Em: ed. por Silvio Levy. MSRI Publications, 1997. Cap. 2, 59 até 115.