

INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL

---

# Aprendizado de máquina e geometria hiperbólica complexa

---

Universidade de São Paulo  
Instituto de Ciências Matemáticas e Computação

Aluno: Lucas Giraldi Almeida Coimbra  
Orientador: Carlos Henrique Grossi Ferreira

Junho de 2023

São Carlos

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Geometria hiperbólica</b>	<b>2</b>
2.1	Variedades e métricas riemannianas . . . . .	2
2.2	Conexões e derivada covariante . . . . .	3
2.3	Geodésicas e transporte paralelo . . . . .	4
2.4	Mapa exponencial e mapa logarítmico . . . . .	6
2.5	Curvatura . . . . .	6
2.6	Conceitos métricos . . . . .	6
2.7	Modelos para a geometria hiperbólica . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Redes neurais</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Misturando tudo</b>	<b>6</b>

# 1 Introdução

## 2 Geometria hiperbólica

### 2.1 Variedades e métricas riemannianas

Uma *variedade topológica de dimensão  $n$*  é um espaço topológico  $M$  Hausdorff com base enumerável que é *localmente euclidiano de dimensão  $n$* , isso é, para cada  $p \in M$  existe um aberto  $U$  e um homeomorfismo  $\phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ . O par  $(U, \phi)$  será comumente chamado de *carta sobre  $p$* . Se  $(V, \psi)$  é uma outra carta em  $M$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ , chamamos de *mapas de transição* as funções

$$\phi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Se os mapas de transição forem suaves, diremos que  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  são *compatíveis*. Uma *estrutura diferenciável* em  $M$  é uma cobertura de  $M$  por cartas que são duas a duas compatíveis. Dizemos que  $M$  é *suave* ou *diferenciável* se possuir uma estrutura diferenciável.

A partir de agora, toda carta estará em uma estrutura diferenciável previamente fixada, e portanto toda variedade será suave. Se  $p \in M$  dizemos que  $F: M \rightarrow N$  é *suave em  $p$*  se existirem  $(U, \phi)$  carta sobre  $p$  e  $(V, \psi)$  carta sobre  $F(p)$  tais que  $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$  é suave. A função  $F$  é *suave em  $U \subset M$*  se for suave em todo ponto de  $U$ , e é apenas *suave* se for suave em todo ponto de  $M$ .

Uma *curva* em  $M$  é um mapa suave  $c: I \rightarrow M$  onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ . Se  $p \in M$ , definimos por  $C_p^\infty$  como o conjunto dos mapas  $f: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  suaves, onde  $U$  é uma vizinhança qualquer de  $p$ . Esse espaço é uma álgebra com as três operações:

- se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos  $f + g: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  por  $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ ;
- se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definimos  $\lambda f: U \rightarrow \mathbb{R}$  por  $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$ ;
- se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos  $fg: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  por  $(fg)(p) = f(p)g(p)$ .

Dada uma curva  $c: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$ , definimos  $c'(0)$  como sendo um mapa  $c'(0): C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$c'(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c)(t). \quad (2)$$

Esse mapa é linear e satisfaz a *regra de Leibniz*, isso é,

$$c'(0)(fg) = f(c(0)) \cdot c'(0)g + c'(0)f \cdot g(c(0)). \quad (3)$$

Se  $p \in M$ , o *espaço tangente a  $M$  em  $p \in M$*  como o conjunto

$$T_p M = \{c'(0) \mid c: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M \text{ e } c(0) = p\}. \quad (4)$$

Se  $M$  tem dimensão  $n$ , então  $T_p M$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ . Seus elementos são chamados de *vetores tangentes*. Uma *métrica riemanniana* em  $M$  é a associação de um produto interno  $\mathbf{g}_p(-, -)$  em  $T_p M$  para cada  $p \in M$ . Mais do que isso, pedimos que essa associação seja suave. Entenderemos o que isso significa a seguir.

Um *campo vetorial* em  $M$  é uma associação  $X$  de um vetor  $X_p \in T_p M$  para cada  $p \in M$ . Se  $\phi = (x^1, \dots, x^n)$  é uma carta sobre  $p \in M$  e  $r = (r^1, \dots, r^n)$  são as coordenadas em  $\mathbb{R}^n$ , definimos as derivadas parciais de  $f \in C_p^\infty$  por

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial r^i} \right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1})(r). \quad (5)$$

Cada derivada parcial em  $p$  pode ser vista como um elemento de  $T_p M$ , afinal, se  $e^1, \dots, e^n$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , então dadas as curvas  $c^i(t) = te^i$  temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = (\phi^{-1} \circ c^i)'(0). \quad (6)$$

Esses vetores tangentes formam uma base para  $T_p M$ .

Se  $(U, \phi)$  é uma em  $M$  e  $X$  é um campo vetorial em  $M$ , então para cada  $p \in M$  podemos escrever, de maneira única,

$$X_p = \sum_{k=1}^n a^k(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p. \quad (7)$$

Dizemos que o campo vetorial  $X$  é *suave* se existir uma cobertura de  $M$  por cartas tais que os mapas  $a^i$  são sempre suaves. Ao dizermos que a métrica riemanniana tem que ser suave, queremos dizer que, para quaisquer  $X, Y$  campos suaves em  $M$ , o mapa  $p \mapsto \mathbf{g}_p(X_p, Y_p)$  tem que ser suave. Uma *variedade riemanniana* é uma variedade suave equipada com uma métrica riemanniana.

## 2.2 Conexões e derivada covariante

Denotamos o conjunto de todos os campos suaves em  $M$  por  $\mathfrak{X}(M)$ . Se  $M = \mathbb{R}^n$ , vamos entender quem é a derivada direcional. Se  $X = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$  e  $X_p$  é o vetor tangente a  $p$  na direção  $X$ , então dada  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definimos a *derivada direcional de  $f$  na direção  $X_p$*

$$D_{X_p}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tX) - f(p)}{t} = \sum_{k=1}^n v^k \left. \frac{\partial f}{\partial x^k} \right|_p = X_p f. \quad (8)$$

Podemos então trocar  $f$  por um campo vetorial suave  $Y = \sum b^i \partial / \partial x^i$  e obtermos a *derivada direcional de  $Y$  na direção  $X_p$*

$$D_{X_p}Y = \sum_{k=1}^n D_{X_p}b^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p. \quad (9)$$

Note que a derivada  $D_{X_p}Y$  é um vetor tangente em  $p$ . Dessa forma, se  $X$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^n$  podemos definir  $D_X Y$  como o campo vetorial que, em  $p$ , vale  $D_{X_p}Y$ . Esse mapa é a *derivada direcional de  $Y$  na direção  $X$* .

Agora vamos generalizar a derivada direcional em  $\mathbb{R}^n$  para uma variedade riemanniana qualquer. Uma *conexão afim* em  $M$  é um mapa

$$\begin{aligned} \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- se  $C^\infty(M)$  é o conjunto dos mapas suaves  $M \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $\nabla$  é  $C^\infty(M)$ -linear na primeira coordenada;
- $\nabla$  satisfaz a regra de Leibniz na segunda coordenada, isso é, se  $f \in C^\infty(M)$ , então

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \quad (10)$$

onde  $Xf$  é o mapa suave dado por  $(Xf)(p) = X_p f$ .

Conexões e métricas riemannianas não estão sempre conectadas. Porém, se  $M$  é uma variedade riemanniana e  $\nabla$  uma conexão afim em  $M$ , então podemos falar sobre alguns aspectos geométricos de  $\nabla$ . Definimos o *tensor torção* de  $\nabla$  como sendo o mapa  $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ , onde  $[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$  é o *bracket de Lie*. Do mesmo modo, definimos o *tensor curvatura* de  $\nabla$  como sendo o mapa  $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$ , isso é, para um campo vetorial suave  $Z$ , temos

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (11)$$

Dizemos que uma conexão  $\nabla$  em uma variedade riemanniana  $M$  é *compatível com a métrica* se  $Z\mathbf{g}(X, Y) = \mathbf{g}(\nabla_Z X, Y) + \mathbf{g}(X, \nabla_Z Y)$ . Uma *conexão de Levi-Civita* é uma conexão compatível com a métrica e que satisfaz  $T(X, Y) = 0$  para todos  $X, Y$  campos suaves em  $M$ .

**Proposição 2.1.** *Toda variedade riemanniana possui uma, e apenas uma, conexão de Levi-Civita.*

Um campo vetorial *ao longo* de uma curva  $c: I \rightarrow M$  é a associação  $V$  de um vetor  $V(t) \in T_{c(t)}M$  para cada  $t \in I$ . Dizemos que  $V$  é *suave* se, para cada  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(Vf)(t) = V(t)f$  é suave.

Se  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva e  $V$  é um campo ao longo de  $c$ , temos

$$V(t) = \sum_{k=1}^n v^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{c(t)}, \quad (12)$$

portanto podemos definir a *derivada de  $V$  com respeito a  $t$*  como sendo o campo

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (13)$$

Essa derivada satisfaz algumas propriedades importantes:

- ela é linear com respeito a  $V$ , isso é, se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $U$  é outro campo ao longo de  $c$ , então

$$\frac{d(\lambda V + U)}{dt} = \lambda \frac{dV}{dt} + \frac{dU}{dt}; \quad (14)$$

- ela satisfaz a regra de Leibniz, isso é, se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  (lembrando aqui que  $I$  é o domínio de  $c$ ) é suave, então

$$\frac{d(fV)}{dt} = \frac{df}{dt} V + f \frac{dV}{dt}; \quad (15)$$

- ela é compatível com a derivada direcional em  $\mathbb{R}^n$ , isso é, se  $V$  se estende para um campo  $\tilde{V}$  em  $\mathbb{R}^n$ , então

$$\frac{dV}{dt} = D_{c'(t)} \tilde{V}. \quad (16)$$

Vamos agora generalizar o conceito da derivada de  $V$  para uma variedade  $M$  qualquer, utilizando de conexões afins. Se  $\nabla$  é uma conexão afim em  $M$  e  $c: I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma curva, então definimos uma *derivada covariante* como um operador  $D/dt$  que, para cada campo  $V$  ao longo de  $c$  associa um outro campo  $DV/dt$  ao longo de  $c$ . Pedimos que essa associação satisfaça as três propriedades que a derivada definida acima satisfaz:

- $D/dt$  é linear, isso é, se  $V$  e  $U$  são campos ao longo de  $c$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  então

$$\frac{D(\lambda V + U)}{dt} = \lambda \frac{DV}{dt} + \frac{DU}{dt}; \quad (17)$$

- $D/dt$  satisfaz a regra de Leibniz, isso é, se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  é suave, então

$$\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt}; \quad (18)$$

- $D/dt$  é compatível com a conexão afim, isso é: se  $\tilde{V}$  é um campo em  $M$  que estende  $V$ , então

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)} V. \quad (19)$$

Definimos acima o que seria **uma** derivada covariante, mas acontece que, fixadas uma conexão e uma curva, sempre existe uma e apenas uma derivada covariante, portanto podemos falar **da** derivada covariante.

## 2.3 Geodésicas e transporte paralelo

Se  $c: I \rightarrow M$  é uma curva, então dizemos que  $c$  é uma *geodésica* se a derivada covariante  $DT/dt$  do seu campo velocidade  $T(t) = c'(t)$  é nula. Note que a existência de uma conexão, e portanto de uma derivada covariante, não depende da existência de uma métrica riemanniana. Porém, caso a variedade  $M$  possua uma métrica, vamos sempre assumir que a conexão considerada é a conexão de Levi-Civita em  $M$ .

**Proposição 2.2.** *Geodésicas em variedades riemannianas possuem velocidade constante, isso é, se  $c: I \rightarrow M$  é uma geodésica, então  $\|c'(t)\|$  é constante para cada  $t \in I$ .*

Seja  $M$  uma variedade suave com uma conexão  $\nabla$ . Se  $(U, x^1, \dots, x^n)$  é uma carta em  $M$ , então temos os campos vetoriais  $\partial_i = \partial/\partial x^i$ . Sabemos que todo campo vetorial em  $U$  se escreve como combinação linear destes, e portanto temos

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (20)$$

Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  são chamados de *símbolos de Christoffel de  $\nabla$  em  $(U, x^1, \dots, x^n)$* .

Sejam  $M$  uma variedade com uma conexão  $\nabla$ ,  $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$  uma carta em  $M$  e  $\Gamma_{ij}^k$  os seus símbolos de Christoffel. Note que, se  $c: I \rightarrow M$  é uma curva e  $y = \phi \circ c$ , então temos

$$T = c'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{dy^k}{dt} \partial_k. \quad (21)$$

Dessa maneira, segue que

$$\frac{DT}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \frac{D\partial_j}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \nabla_{c'(t)} \partial_j \quad (22)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \nabla_{\frac{dy^i}{dt} \partial_i} \partial_j = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^i}{dt} \nabla_{\partial_i} \partial_j \quad (23)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{d^2 y^k}{dt^2} \partial_k + \sum_{i,j,k=1}^n \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^i}{dt} \Gamma_{ij}^k \partial_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{d^2 y^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k. \quad (24)$$

Portanto, temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.3.** *Se  $M$  é uma variedade suave com uma conexão  $\nabla$  e  $c: I \rightarrow M$  é uma curva, então  $c$  é uma geodésica se, com respeito a qualquer carta  $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ , as componentes de  $y = \phi \circ c$  satisfazem o sistema de EDOs*

$$\frac{d^2 y^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (25)$$

As equações do sistema acima são chamadas de *equações geodésicas*. Pelo teorema de existência e unicidade de solução para EDOs temos a existência e unicidade de geodésicas.

**Teorema 2.4.** *Seja  $M$  uma variedade suave com uma conexão  $\nabla$ . Dado  $p \in M$  e  $X_p \in T_p M$ , existe uma geodésica  $c: I \rightarrow M$  tal que  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ . Mais do que isso, essa geodésica é única no sentido de que qualquer outra geodésica satisfazendo essas propriedades deve coincidir com  $c$  na intersecção de seus domínios.*

Um *difeomorfismo* entre variedades suaves  $M$  e  $N$  é um mapa  $F: M \rightarrow N$  suave, bijetor e com inversa suave. Se  $M$  e  $N$  forem riemannianas, dizemos que  $F$  é uma *isometria* se, para todos  $p \in M$  e  $X_p, Y_p \in T_p M$ , temos

$$\mathfrak{g}_p(X_p, Y_p) = \mathfrak{g}_{F(p)}(D_p F(X_p), D_p F(Y_p)). \quad (26)$$

**Proposição 2.5.** *Isometrias preservam conexões de Levi-Civita. Mais ainda, mapas que preservam conexões, preservam geodésicas. Como corolário, isometrias preservam geodésicas.*

Se  $c: I \rightarrow M$  é uma curva e  $V$  é um campo ao longo de  $c$ , então dizemos que  $V$  é *paralelo* se  $DV/Dt = 0$ . Dessa forma, uma geodésica é uma curva cujo campo velocidade é paralelo. Fixado  $X_p \in T_{c(t_0)} M$ , existe um único campo  $V$  ao longo de  $c$ , paralelo, tal que  $V(t_0) = X_p$ . Se  $c: [a, b] \rightarrow M$  é uma curva e  $V$  é um campo paralelo ao longo de  $c$ , dizemos que  $V(b)$  é obtido a partir de  $V(a)$  por *translação paralela*. Dizemos que  $V(b)$  é o *transporte paralelo* de  $V(a)$  ao longo de  $c$ .

**Proposição 2.6.** *Se  $V$  e  $W$  são paralelos ao longo de  $c$  em uma variedade riemanniana  $M$ , então  $\|V\|$  e  $\mathfrak{g}(V, W)$  são constantes.*

## 2.4 Mapa exponencial e mapa logarítmico

Uma geodésica  $c: I \rightarrow M$  é *maximal* se não podemos estender  $c$  para um intervalo maior do que  $I$  sem que a curva deixe de ser uma geodésica. Do Teorema 2.4 temos que, dado  $p \in M$  e  $X_p \in T_p M$  existe uma única geodésica maximal  $c$  com  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ . Vamos denotar essa geodésica por  $\gamma_{X_p}$ .

O *mapa exponencial* em um ponto  $p \in M$  é a função dada por  $\text{Exp}_p(X_p) = \gamma_{X_p}(1)$ . Esse mapa não está necessariamente definido para todo  $X_p \in T_p M$ , visto que nem sempre  $\gamma_{X_p}$  possui 1 no seu domínio. Uma variedade com uma conexão é dita *completa* se toda geodésica puder ter seu domínio estendido para todo  $\mathbb{R}$ . No caso de variedades riemannianas consideradas com a conexão de Levi-Civita, temos dois resultados que nos ajudam no sentido de definir  $\text{Exp}_p$  para um conjunto satisfatório de vetores.

**Proposição 2.7.** *Para qualquer  $p \in M$ , com  $M$  variedade riemanniana, existem uma vizinhança  $U$  de  $p$  e dois números  $\epsilon, \delta > 0$  tais que para todos  $q \in U$  e  $v \in T_q M$  com  $\|v\| < \delta$ , existe uma única geodésica  $\gamma: ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = q$  e  $\gamma'(0) = v$ .*

**Corolário 2.8.** *Para qualquer  $p \in M$ , com  $M$  variedade riemanniana, existem uma vizinhança  $U$  de  $p$  e um número  $\delta > 0$  tais que para todos  $q \in U$  e  $v \in T_q M$  com  $\|v\| < \delta$  existe uma única geodésica  $\gamma: ]-2, 2[ \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = q$  e  $\gamma'(0) = v$ .*

O Corolário 2.8 nos diz que o mapa exponencial está sempre definido em todas as direções, porém essa existência só está garantida para velocidades pequenas. Se você for muito rápido, pode ficar cansado muito rápido e não dar tempo do seu conjunto de parâmetros englobar o 1.

gvetg

## 2.5 Curvatura

## 2.6 Conceitos métricos

## 2.7 Modelos para a geometria hiperbólica

# 3 Redes neurais

# 4 Misturando tudo

## Referências

- [1] Hugo Cattarucci Botós. «Geometrias Clássicas». 2020.
- [2] Loring W. Tu. *Differential Geometry: Connections, Curvature and Characteristic Classes*. Springer-Verlag New York Inc, 2017. ISBN: 978-3-319-55082-4.
- [3] Wei Peng e Tuomas Varanka e Abdelrahman Mostafa e Henglin Shi e Guoying Zhao. «Hyperbolic Deep Neural Networks: A Survey». Em: *JOURNAL OF LATEX CLASS FILES* 14.8 (2015).