

INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL

---

# Aprendizado de máquina e geometria hiperbólica complexa

---

Universidade de São Paulo  
Instituto de Ciências Matemáticas e Computação

Aluno: Lucas Giraldo Almeida Coimbra  
Orientador: Carlos Henrique Grossi Ferreira

Junho de 2023

São Carlos

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Geometria hiperbólica</b>	<b>2</b>
2.1	Variedades e métricas riemannianas . . . . .	2
2.2	Conexões e derivada covariante . . . . .	3
2.3	Jacobiana e teorema da função inversa . . . . .	4
2.4	Geodésicas e transporte paralelo . . . . .	5
2.5	Mapa exponencial e mapa logarítmico . . . . .	6
2.6	Curvatura por via de tensores . . . . .	6
2.7	Conceitos métricos . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Modelos para a geometria hiperbólica</b>	<b>8</b>
3.1	O semi-espaço de Poincaré . . . . .	8
3.2	O hiperboloide de Lorentz . . . . .	9
3.3	O $n$ -disco de Poincaré . . . . .	9
3.4	O $n$ -disco de Beltrami-Klein . . . . .	9
3.5	O modelo do hemisfério . . . . .	10
3.6	Isometrias entre os modelos . . . . .	10
3.7	Generalizando operações euclidianas . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Redes neurais</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Misturando tudo</b>	<b>10</b>

# 1 Introdução

## 2 Geometria hiperbólica

### 2.1 Variedades e métricas riemannianas

Uma *variedade topológica de dimensão  $n$*  é um espaço topológico  $M$  Hausdorff com base enumerável que é *localmente euclidiano de dimensão  $n$* , isso é, para cada  $p \in M$  existe um aberto  $U$  e um homeomorfismo  $\phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ . O par  $(U, \phi)$  será comumente chamado de *carta sobre  $p$* . Se  $(V, \psi)$  é uma outra carta em  $M$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ , chamamos de *mapas de transição* as funções

$$\phi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Se os mapas de transição forem suaves, diremos que  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  são *compatíveis*. Uma *estrutura diferenciável* em  $M$  é uma cobertura de  $M$  por cartas que são duas a duas compatíveis. Dizemos que  $M$  é *suave* ou *diferenciável* se possuir uma estrutura diferenciável.

A partir de agora, toda carta estará em uma estrutura diferenciável previamente fixada, e portanto toda variedade será suave. Se  $p \in M$  dizemos que  $F: M \rightarrow N$  é *suave em  $p$*  se existirem  $(U, \phi)$  carta sobre  $p$  e  $(V, \psi)$  carta sobre  $F(p)$  tais que  $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$  é suave. A função  $F$  é *suave em  $U \subset M$*  se for suave em todo ponto de  $U$ , e é apenas *suave* se for suave em todo ponto de  $M$ .

Uma *curva* em  $M$  é um mapa suave  $c: I \rightarrow M$  onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ . Se  $p \in M$ , definimos por  $C_p^\infty$  como o conjunto dos mapas  $f: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  suaves, onde  $U$  é uma vizinhança qualquer de  $p$ . Esse espaço é uma álgebra com as três operações:

- se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos  $f + g: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  por  $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ ;
- se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definimos  $\lambda f: U \rightarrow \mathbb{R}$  por  $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$ ;
- se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos  $fg: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  por  $(fg)(p) = f(p)g(p)$ .

Dada uma curva  $c: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$ , definimos  $c'(0)$  como sendo um mapa  $c'(0): C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$c'(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c)(t). \quad (2)$$

Esse mapa é linear e satisfaz a *regra de Leibniz*, isso é,

$$c'(0)(fg) = f(c(0)) \cdot c'(0)g + c'(0)f \cdot g(c(0)). \quad (3)$$

Se  $p \in M$ , o *espaço tangente a  $M$  em  $p \in M$*  como o conjunto

$$T_p M = \{c'(0) \mid c: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M \text{ e } c(0) = p\}. \quad (4)$$

Se  $M$  tem dimensão  $n$ , então  $T_p M$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ . Seus elementos são chamados de *vetores tangentes*. Uma *métrica riemanniana* em  $M$  é a associação de um produto interno  $\mathbf{g}_p(-, -)$  em  $T_p M$  para cada  $p \in M$ . Mais do que isso, pedimos que essa associação seja suave. Entenderemos o que isso significa a seguir.

Um *campo vetorial* em  $M$  é uma associação  $X$  de um vetor  $X_p \in T_p M$  para cada  $p \in M$ . Se  $\phi = (x^1, \dots, x^n)$  é uma carta sobre  $p \in M$  e  $r = (r^1, \dots, r^n)$  são as coordenadas em  $\mathbb{R}^n$ , definimos as derivadas parciais de  $f \in C_p^\infty$  por

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial r^i} \right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1})(r). \quad (5)$$

Cada derivada parcial em  $p$  pode ser vista como um elemento de  $T_p M$ , afinal, se  $e^1, \dots, e^n$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , então dadas as curvas  $c^i(t) = te^i$  temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = (\phi^{-1} \circ c^i)'(0). \quad (6)$$

Esses vetores tangentes formam uma base para  $T_p M$ .

Se  $(U, \phi)$  é uma em  $M$  e  $X$  é um campo vetorial em  $M$ , então para cada  $p \in M$  podemos escrever, de maneira única,

$$X_p = \sum_{k=1}^n a^k(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p. \quad (7)$$

Dizemos que o campo vetorial  $X$  é *suave* se existir uma cobertura de  $M$  por cartas tais que os mapas  $a^i$  são sempre suaves. Ao dizermos que a métrica riemanniana tem que ser suave, queremos dizer que, para quaisquer  $X, Y$  campos suaves em  $M$ , o mapa  $p \mapsto \mathbf{g}_p(X_p, Y_p)$  tem que ser suave. Uma *variedade riemanniana* é uma variedade suave equipada com uma métrica riemanniana.

## 2.2 Conexões e derivada covariante

Denotamos o conjunto de todos os campos suaves em  $M$  por  $\mathfrak{X}(M)$ . Se  $M = \mathbb{R}^n$ , vamos entender quem é a derivada direcional. Se  $X = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$  e  $X_p$  é o vetor tangente a  $p$  na direção  $X$ , então dada  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definimos a *derivada direcional de  $f$  na direção  $X_p$*

$$D_{X_p}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tX) - f(p)}{t} = \sum_{k=1}^n v^k \left. \frac{\partial f}{\partial x^k} \right|_p = X_p f. \quad (8)$$

Podemos então trocar  $f$  por um campo vetorial suave  $Y = \sum b^i \partial / \partial x^i$  e obtermos a *derivada direcional de  $Y$  na direção  $X_p$*

$$D_{X_p}Y = \sum_{k=1}^n D_{X_p}b^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p. \quad (9)$$

Note que a derivada  $D_{X_p}Y$  é um vetor tangente em  $p$ . Dessa forma, se  $X$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^n$  podemos definir  $D_X Y$  como o campo vetorial que, em  $p$ , vale  $D_{X_p}Y$ . Esse mapa é a *derivada direcional de  $Y$  na direção  $X$* .

Agora vamos generalizar a derivada direcional em  $\mathbb{R}^n$  para uma variedade riemanniana qualquer. Uma *conexão afim* em  $M$  é um mapa

$$\begin{aligned} \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- se  $C^\infty(M)$  é o conjunto dos mapas suaves  $M \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $\nabla$  é  $C^\infty(M)$ -linear na primeira coordenada;
- $\nabla$  satisfaz a regra de Leibniz na segunda coordenada, isso é, se  $f \in C^\infty(M)$ , então

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \quad (10)$$

onde  $Xf$  é o mapa suave dado por  $(Xf)(p) = X_p f$ .

Conexões e métricas riemannianas não estão sempre conectadas. Porém, se  $M$  é uma variedade riemanniana e  $\nabla$  uma conexão afim em  $M$ , então podemos falar sobre alguns aspectos geométricos de  $\nabla$ . Definimos o *tensor torção* de  $\nabla$  como sendo o mapa  $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ , onde  $[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$  é o *bracket de Lie*. Do mesmo modo, definimos o *tensor curvatura* de  $\nabla$  como sendo o mapa  $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$ , isso é, para um campo vetorial suave  $Z$ , temos

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (11)$$

Dizemos que uma conexão  $\nabla$  em uma variedade riemanniana  $M$  é *compatível com a métrica* se  $Z\mathbf{g}(X, Y) = \mathbf{g}(\nabla_Z X, Y) + \mathbf{g}(X, \nabla_Z Y)$ . Uma *conexão de Levi-Civita* é uma conexão compatível com a métrica e que satisfaz  $T(X, Y) = 0$  para todos  $X, Y$  campos suaves em  $M$ .

**Proposição 2.1.** *Toda variedade riemanniana possui uma, e apenas uma, conexão de Levi-Civita.*

Um campo vetorial *ao longo* de uma curva  $c: I \rightarrow M$  é a associação  $V$  de um vetor  $V(t) \in T_{c(t)}M$  para cada  $t \in I$ . Dizemos que  $V$  é *suave* se, para cada  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(Vf)(t) = V(t)f$  é suave.

Se  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva e  $V$  é um campo ao longo de  $c$ , temos

$$V(t) = \sum_{k=1}^n v^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{c(t)}, \quad (12)$$

portanto podemos definir a *derivada de  $V$  com respeito a  $t$*  como sendo o campo

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (13)$$

Essa derivada satisfaz algumas propriedades importantes:

- ela é linear com respeito a  $V$ , isso é, se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $U$  é outro campo ao longo de  $c$ , então

$$\frac{d(\lambda V + U)}{dt} = \lambda \frac{dV}{dt} + \frac{dU}{dt}; \quad (14)$$

- ela satisfaz a regra de Leibniz, isso é, se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  (lembrando aqui que  $I$  é o domínio de  $c$ ) é suave, então

$$\frac{d(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f \frac{dV}{dt}; \quad (15)$$

- ela é compatível com a derivada direcional em  $\mathbb{R}^n$ , isso é, se  $V$  se estende para um campo  $\tilde{V}$  em  $\mathbb{R}^n$ , então

$$\frac{dV}{dt} = D_{c'(t)}\tilde{V}. \quad (16)$$

Vamos agora generalizar o conceito da derivada de  $V$  para uma variedade  $M$  qualquer, utilizando de conexões afins. Se  $\nabla$  é uma conexão afim em  $M$  e  $c: I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma curva, então definimos uma *derivada covariante* como um operador  $D/dt$  que, para cada campo  $V$  ao longo de  $c$  associa um outro campo  $DV/dt$  ao longo de  $c$ . Pedimos que essa associação satisfaça as três propriedades que a derivada definida acima satisfaz:

- $D/dt$  é linear, isso é, se  $V$  e  $U$  são campos ao longo de  $c$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  então

$$\frac{D(\lambda V + U)}{dt} = \lambda \frac{DV}{dt} + \frac{DU}{dt}; \quad (17)$$

- $D/dt$  satisfaz a regra de Leibniz, isso é, se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  é suave, então

$$\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}; \quad (18)$$

- $D/dt$  é compatível com a conexão afim, isso é: se  $\tilde{V}$  é um campo em  $M$  que estende  $V$ , então

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)}V. \quad (19)$$

Definimos acima o que seria **uma** derivada covariante, mas acontece que, fixadas uma conexão e uma curva, sempre existe uma e apenas uma derivada covariante, portanto podemos falar **da** derivada covariante.

### 2.3 Jacobiana e teorema da função inversa

Se  $F: M \rightarrow N$  é suave, então para toda carta  $(U, \phi)$  sobre  $p$  e  $(V, \psi)$  sobre  $F(p)$  o mapa  $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$  é suave. Sabemos da teoria de variedades que as derivadas parciais  $\partial/\partial\phi^i$  e  $\partial/\partial\psi^j$  formam base para  $T_pM$  e  $T_{F(p)}N$ , respectivamente. Considere agora a transformação linear  $D_pF$  dada por

$$D_pF(v)f = v(f \circ F) \quad (20)$$

que manda vetores tangentes a  $p$  para vetores tangentes a  $F(p)$ . Na expressão acima, estamos apenas descrevendo como o vetor  $D_pF(v)$  age em uma função  $f: N \rightarrow \mathbb{R}$  suave. O mapa  $D_pF$  é chamado de *derivada de  $F$  em  $p$* .

Podemos então considerar a matriz de  $D_p F$  conforme as bases  $\partial/\partial\phi^i$  e  $\partial/\partial\psi^j$ . Se denotarmos por  $F^i$  o mapa  $\psi^i \circ F$ , então temos que

$$D_p F = \left[ \frac{\partial F^i}{\partial \phi^j} \Big|_p \right]. \quad (21)$$

Note que ela coincide com a matriz jacobiana que conhecemos do cálculo. De fato, essa coincidência motiva uma nova versão do teorema da função inversa.

**Teorema 2.2.** *Se  $F: M \rightarrow N$  é suave e  $\dim M = \dim N$ , então  $F$  é um difeomorfismo local em  $p \in M$  se, e somente se,  $\det D_p F \neq 0$ .*

## 2.4 Geodésicas e transporte paralelo

Se  $c: I \rightarrow M$  é uma curva, então dizemos que  $c$  é uma *geodésica* se a derivada covariante  $DT/dt$  do seu campo velocidade  $T(t) = c'(t)$  é nula. Note que a existência de uma conexão, e portanto de uma derivada covariante, não depende da existência de uma métrica riemanniana. Porém, caso a variedade  $M$  possua uma métrica, vamos sempre assumir que a conexão considerada é a conexão de Levi-Civita em  $M$ .

**Proposição 2.3.** *Geodésicas em variedades riemannianas possuem velocidade constante, isso é, se  $c: I \rightarrow M$  é uma geodésica, então  $\|c'(t)\|$  é constante para cada  $t \in I$ .*

Seja  $M$  uma variedade suave com uma conexão  $\nabla$ . Se  $(U, x^1, \dots, x^n)$  é uma carta em  $M$ , então temos os campos vetoriais  $\partial_i = \partial/\partial x^i$ . Sabemos que todo campo vetorial em  $U$  se escreve como combinação linear destes, e portanto temos

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (22)$$

Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  são chamados de *símbolos de Christoffel de  $\nabla$  em  $(U, x^1, \dots, x^n)$* .

Sejam  $M$  uma variedade com uma conexão  $\nabla$ ,  $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$  uma carta em  $M$  e  $\Gamma_{ij}^k$  os seus símbolos de Christoffel. Note que, se  $c: I \rightarrow M$  é uma curva e  $y = \phi \circ c$ , então temos

$$T = c'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{dy^k}{dt} \partial_k. \quad (23)$$

Dessa maneira, segue que

$$\frac{DT}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \frac{D\partial_j}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \nabla_{c'(t)} \partial_j \quad (24)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \nabla_{\frac{dy^i}{dt} \partial_i} \partial_j = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 y^j}{dt^2} \partial_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^i}{dt} \nabla_{\partial_i} \partial_j \quad (25)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{d^2 y^k}{dt^2} \partial_k + \sum_{i,j,k=1}^n \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^i}{dt} \Gamma_{ij}^k \partial_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{d^2 y^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k. \quad (26)$$

Portanto, temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.4.** *Se  $M$  é uma variedade suave com uma conexão  $\nabla$  e  $c: I \rightarrow M$  é uma curva, então  $c$  é uma geodésica se, com respeito a qualquer carta  $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ , as componentes de  $y = \phi \circ c$  satisfazem o sistema de EDOs*

$$\frac{d^2 y^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (27)$$

As equações do sistema acima são chamadas de *equações geodésicas*. Pelo teorema de existência e unicidade de solução para EDOs temos a existência e unicidade de geodésicas.

**Teorema 2.5.** *Seja  $M$  uma variedade suave com uma conexão  $\nabla$ . Dado  $p \in M$  e  $X_p \in T_p M$ , existe uma geodésica  $c: I \rightarrow M$  tal que  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ . Mais do que isso, essa geodésica é única no sentido de que qualquer outra geodésica satisfazendo essas propriedades deve coincidir com  $c$  na intersecção de seus domínios.*

Um *difeomorfismo* entre variedades suaves  $M$  e  $N$  é um mapa  $F: M \rightarrow N$  suave, bijetor e com inversa suave. Se  $M$  e  $N$  forem riemannianas, dizemos que  $F$  é uma *isometria* se, para todos  $p \in M$  e  $X_p, Y_p \in T_p M$ , temos

$$\mathfrak{g}_p(X_p, Y_p) = \mathfrak{g}_{F(p)}(D_p F(X_p), D_p F(Y_p)). \quad (28)$$

**Proposição 2.6.** *Isometrias preservam conexões de Levi-Civita. Mais ainda, mapas que preservam conexões, preservam geodésicas. Como corolário, isometrias preservam geodésicas.*

Se  $c: I \rightarrow M$  é uma curva e  $V$  é um campo ao longo de  $c$ , então dizemos que  $V$  é *paralelo* se  $DV/Dt = 0$ . Dessa forma, uma geodésica é uma curva cujo campo velocidade é paralelo. Fixado  $X_p \in T_{c(t_0)} M$ , existe um único campo  $V$  ao longo de  $c$ , paralelo, tal que  $V(t_0) = X_p$ . Se  $c: [a, b] \rightarrow M$  é uma curva e  $V$  é um campo paralelo ao longo de  $c$ , dizemos que  $V(b)$  é obtido a partir de  $V(a)$  por *translação paralela*. Dizemos que  $V(b)$  é o *transporte paralelo* de  $V(a)$  ao longo de  $c$ .

**Proposição 2.7.** *Se  $V$  e  $W$  são paralelos ao longo de  $c$  em uma variedade riemanniana  $M$ , então  $\|V\|$  e  $\mathfrak{g}(V, W)$  são constantes.*

Um problema importante com questão ao transporte paralelo é a existência. Ela está garantida pelo resultado abaixo.

**Teorema 2.8.** *Se  $M$  é uma variedade suave com uma conexão  $\nabla$  e  $c: [a, b] \rightarrow M$  uma curva. Dado  $v \in T_{c(a)} M$ , existe um campo vetorial paralelo  $V_t$  ao longo de  $c$  tal que  $V_a = v$ .*

## 2.5 Mapa exponencial e mapa logarítmico

Uma geodésica  $c: I \rightarrow M$  é *maximal* se não podemos estender  $c$  para um intervalo maior do que  $I$  sem que a curva deixe de ser uma geodésica. Do Teorema 2.5 temos que, dado  $p \in M$  e  $X_p \in T_p M$  existe uma única geodésica maximal  $c$  com  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ . Vamos denotar essa geodésica por  $\gamma_{X_p}$ .

O *mapa exponencial* em um ponto  $p \in M$  é a função dada por  $\text{Exp}_p(X_p) = \gamma_{X_p}(1)$ . Esse mapa não está necessariamente definido para todo  $X_p \in T_p M$ , visto que nem sempre  $\gamma_{X_p}$  possui 1 no seu domínio. Uma variedade com uma conexão é dita *completa* se toda geodésica puder ter seu domínio estendido para todo  $\mathbb{R}$ . No caso de variedades riemannianas consideradas com a conexão de Levi-Civita, temos dois resultados que nos ajudam no sentido de definir  $\text{Exp}_p$  para um conjunto satisfatório de vetores.

**Proposição 2.9.** *Para qualquer  $p \in M$ , com  $M$  variedade riemanniana, existem uma vizinhança  $U$  de  $p$  e dois números  $\epsilon, \delta > 0$  tais que para todos  $q \in U$  e  $v \in T_q M$  com  $\|v\| < \delta$ , existe uma única geodésica  $\gamma: ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = q$  e  $\gamma'(0) = v$ .*

**Corolário 2.10.** *Para qualquer  $p \in M$ , com  $M$  variedade riemanniana, existem uma vizinhança  $U$  de  $p$  e um número  $\delta > 0$  tais que para todos  $q \in U$  e  $v \in T_q M$  com  $\|v\| < \delta$  existe uma única geodésica  $\gamma: ]-2, 2[ \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = q$  e  $\gamma'(0) = v$ .*

O Corolário 2.10 nos diz que o mapa exponencial está sempre definido em todas as direções, porém essa existência só está garantida para velocidades pequenas. Se você for muito rápido, pode ficar cansado muito rápido e não dar tempo do seu conjunto de parâmetros englobar o 1.

**Proposição 2.11.** *A derivada  $D_0 \text{Exp}_p$  é a identidade em  $T_p M$  para qualquer  $p \in M$ .*

A Proposição acima garante, em particular, que sempre existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $\text{Exp}_p$  mapeia  $B(0, \epsilon)$  difeomorficamente em  $M$ . Por causa disso, existe uma inversa para o mapa exponencial, que chamaremos de *mapa logarítmico*.

## 2.6 Curvatura por via de tensores

Fixada uma conexão  $\nabla$  em  $M$ , já conhecemos o tensor de torção, que é dado por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (29)$$

Ao tomarmos  $X = \partial_i$  e  $Y = \partial_j$  em uma carta  $(U, \phi)$ , temos  $[X, Y] = \partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i = 0$ , portanto se a conexão  $\nabla$  é a de Levi-Civita, temos pelo anulamento da torção que  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$ . Dessa maneira, as derivadas desses campos comutam.

Vamos tentar entender o que acontece para o tensor de curvatura. Começemos lembrando que ele é dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (30)$$

Ao tomarmos  $X = \partial_i$ ,  $Y = \partial_j$  e  $Z$  qualquer, temos novamente que  $[X, Y] = 0$ , portanto  $\nabla_{[X, Y]} Z = 0$ . Dessa forma, segue que

$$R(\partial_i, \partial_j)Z = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} Z - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} Z. \quad (31)$$

Porém, mesmo que  $\nabla$  seja a conexão de Levi-Civita, não temos garantia de que  $R(X, Y)Z = 0$ , dessa forma nem sempre derivar um campo em direções diferentes independe da ordem dessas derivadas. O que vai medir a diferença entre essas operações é a curvatura da sua variedade.

Para entendermos a curvatura geometricamente, precisamos falar de holonomia. Dado  $p \in M$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  fechada em  $p$  e contrátil, para cada  $v \in T_p M$  podemos considerar o campo  $V_t$  ao longo de  $\gamma$  que seja paralelo e satisfaça  $V_a = v$ . O vetor  $v' = V_b$ , que é o transporte paralelo de  $v$  ao longo de  $\gamma$ , é chamado de *holonomia de  $v$  ao longo de  $\gamma$* .

A menos que sua variedade possua curvatura 0, isso é, se  $R(X, Y)Z = 0$  para todos  $X, Y, Z$ , a sempre existirá  $v \in T_p M$  tal que  $v' \neq v$ . Ou seja, o ângulo entre esses dois vetores é também medido pela curvatura.

Agora vamos entender quem são as possíveis curvaturas de uma variedade riemanniana. Por enquanto, vamos dar enfoque em três principais tipos: a seccional (ou gaussiana), a de Ricci e a escalar.

A primeira coisa a notar é que, dados  $x, y, z \in T_p M$ , podemos construir campos suaves  $X, Y, Z$  ao redor de  $p$  de maneira que  $X_p = x$ ,  $Y_p = y$  e  $Z_p = z$ . Definimos então  $R(x, y)z$  como sendo o campo  $R(X, Y)Z$  no ponto  $p$ .

**Teorema 2.12.** *Seja  $p \in M$  com  $\dim M \geq 2$  e  $W \leq T_p M$  um subespaço de dimensão 2 (também conhecido como plano). Considere  $x, y$  uma base para  $W$  e defina o número*

$$K(W) = \frac{\mathfrak{g}_p(R(x, y)x, y)}{|x \wedge y|^2}, \quad (32)$$

onde  $|x \wedge y|$  é a área do paralelogramo formado por  $x$  e  $y$ , que pode ser explicitamente calculada por

$$|x \wedge y| = \sqrt{||x||^2 ||y||^2 - \mathfrak{g}_p(x, y)}, \quad (33)$$

onde  $||\cdot||$  é a norma induzida pela métrica  $\mathfrak{g}$ . Temos então que  $K(W)$  não depende da base escolhida para  $W$ .

A quantidade  $K(W)$  definida no teorema acima é a *curvatura seccional* ou *curvatura gaussiana* de  $W$  em  $p$ . Agora podemos usar essa curvatura para falarmos de curvatura de Ricci. Dado  $p \in M$  e  $v \in T_p M$  unitário, considere  $w \in v^\perp$ . Se  $P_w = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ , então temos a curvatura seccional  $K(P_w)$ . A *curvatura de Ricci em  $p$  na direção  $v$*  é a média de todas essas curvaturas seccionais, ou seja,

$$\text{Ricci}_p(v) = \lambda \int_S K(P_w) dV, \quad (34)$$

onde  $S$  é a esfera unitária em  $T_p M$ ,  $dV$  é a forma de volume em  $S$  e  $\lambda$  é uma constante positiva que é, honestamente, irrelevante. De fato, ela pode ser calculada explicitamente se utilizarmos a seguinte proposição.

**Proposição 2.13.** *Se  $w_1, \dots, w_{n-1}$  é uma base ortonormal de  $v^\perp$ , então*

$$\text{Ricci}_p(v) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{g}_p(R(x, z_i)x, z_i). \quad (35)$$

Probabilisticamente, podemos pensar que curvatura de Ricci é a curvatura seccional média de planos aleatórios da forma  $P_w$ . Isso nos dá alguma ideia do porquê não conseguimos recuperar as curvaturas seccionais a partir da curvatura de Ricci: há perda de informação, pois a partir da média de um conjunto de dados raramente conseguimos recuperar quem são esses dados.



Por fim, a *curvatura escalar* nada mais é do que uma média das curvaturas de Ricci, ou seja, se  $p \in M$ , podemos considerar uma base ortonormal  $z_1, \dots, z_n$  de  $T_p M$ . A curvatura escalar é o número definido por

$$K_s(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Ricci}_p(z_i). \quad (36)$$

Por mais que a curvatura escalar não dependa de uma direção, e apenas do ponto, não é a ela que nos referimos ao dizer que  $M$  tem curvatura constante  $\kappa$  em  $p \in M$ . Essa expressão diz que todas as curvaturas seccionais em  $p$  valem  $\kappa$ .

## 2.7 Conceitos métricos

Antes de brincarmos com a geometria hiperbólica, vamos falar de duas definições que aparecem na teoria de espaços métricos e que podem ser úteis mais para frente. Dado um espaço métrico  $(X, d)$ , o *produto de Gromov* é uma operação que, dados três pontos  $x, y, z \in X$ , retorna o número

$$(y, z)_x = \frac{1}{2}(d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)). \quad (37)$$

Dizemos que  $X$  é  $\delta$ -*hiperbólico*, com  $\delta > 0$ , se para todos  $x, y, z, w \in X$  temos

$$(x, z)_w \geq \min\{(x, y)_w, (y, z)_w\} - \delta. \quad (38)$$

Uma definição equivalente envolve triângulos geodésicos. Uma *geodésica* em  $(X, d)$  é a imagem isométrica de um intervalo  $[a, b]$ . Se  $\gamma$  é essa isometria,  $x = \gamma(a)$  e  $y = \gamma(b)$ , denotamos a imagem de  $\gamma$  por  $[x, y]$ . Um *triângulo geodésico com vértices*  $x, y, z \in X$  é a união das geodésicas  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  e  $[z, x]$ . Se para cada  $m \in [x, y]$  existe um ponto em  $n \in [y, z] \cup [z, w]$  tal que  $d(m, n) < \delta$ , dizemos que o triângulo geodésico  $\Delta(x, y, z)$  é  $\delta$ -*fino*. Dizemos que  $(X, d)$  é  $\delta$ -*hiperbólico* se todo triângulo geodésico é  $\delta$ -fino.

Por fim, precisamos falar de *distorção*, que é uma medida de fidelidade para certos mergulhos de dados em aprendizado de máquina. Se  $X$  e  $Y$  são espaços métricos e  $f: X \rightarrow Y$  é um mergulho de dados em  $X$  para pontos de  $Y$ , a *distorção de  $f$  em  $x, y \in X$*  é dada por

$$\mathbb{D}_f(a, b) = \frac{|d(a, b) - d(f(a), f(b))|}{d(a, b)}. \quad (39)$$

## 3 Modelos para a geometria hiperbólica

O espaço hiperbólico real é uma variedade riemanniana de curvatura constante igual a  $-1$ . Existem diversos modelos isométricos para ele, e agora vamos falar de alguns. Aqui, é importante notar que todos esses modelos estão mergulhados

### 3.1 O semi-espaço de Poincaré

O primeiro modelo do qual vamos falar é o semi-espaço de Poincaré. Ele é dado, como variedade suave, pelo semi-espaço

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}. \quad (40)$$

Sua métrica, por sua vez, é dada pela expressão

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}. \quad (41)$$

Essa expressão significa que, para cada  $p \in \mathbb{H}^n$ , temos

$$\mathfrak{g}_p(u, v) = \frac{u_1 v_1 + \dots + u_n v_n}{p_n^2}. \quad (42)$$

As formas diferenciais  $dx_i$  recebem os vetores  $u, v$  e retornam as respectivas coordenadas. Por sua vez, sempre que  $x_i$  aparecer em uma fórmula, ele será substituído pela  $i$ -ésima coordenada do ponto onde a métrica está sendo construída.

Esse espaço, assim como toda variedade riemanniana, possui uma estrutura de espaço métrico induzida pela métrica riemanniana. Essa métrica, em  $\mathbb{H}^n$ , é dada por

$$d(x, y) = \operatorname{arccosh} \left( 1 + \frac{\|x - y\|^2}{2x_n y_n} \right). \quad (43)$$

### 3.2 O hiperboloide de Lorentz

O modelo do hiperboloide depende do que chamamos de *métrica de Lorentz* em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ela é definida por

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{L}} = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \quad (44)$$

Como variedade suave, o hiperboloide é definido por

$$\mathbb{L}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_{\mathbb{L}} = -1, x_0 > 0\}. \quad (45)$$

A métrica riemanniana em  $\mathbb{L}^n$  é induzida também da métrica de Lorentz, e é dada por

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2. \quad (46)$$

Note que essa métrica não faz muito sentido, visto que o espaço tangente de  $\mathbb{L}^n$  deveria ter dimensão  $n$ , mas aqui utilizamos  $n + 1$  coordenadas. De fato, essa métrica se aplica apenas ao considerarmos o espaço tangente  $T_p \mathbb{H}^n$  como o conjunto  $p^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p \rangle_{\mathbb{L}} = 0\}$ . A distância no hiperboloide, por sua vez, é dada por

$$d(x, y) = \operatorname{arccosh}(-\langle x, y \rangle_{\mathbb{L}}). \quad (47)$$

É importante notarmos aqui que a métrica riemanniana que definimos não parece ser um produto interno, justamente pelo fator negativo  $-dx_0^2$ . De fato, a métrica de Lorentz não é um produto interno em  $\mathbb{R}^n$ , mas ao restringirmos ela ao espaço  $p^\perp$  para qualquer  $p \in \mathbb{L}^n$ , essa restrição é sempre um produto interno.

### 3.3 O $n$ -disco de Poincaré

O  $n$ -disco de Poincaré é, como variedade suave, dado por

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}. \quad (48)$$

Sua métrica é definida como

$$ds^2 = 4 \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^2} \quad (49)$$

e sua distância por

$$d(x, y) = \operatorname{arccosh} \left( 1 + 2 \frac{\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)} \right). \quad (50)$$

### 3.4 O $n$ -disco de Beltrami-Klein

O  $n$ -disco de Beltrami-Klein é, como variedade suave, dado por

$$\mathbb{K}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}. \quad (51)$$

É a mesma variedade suave que da origem ao disco de Poincaré, mas a denotamos por uma letra diferente apenas para diferenciar os dois modelos. A diferença é na métrica riemanniana, que em  $\mathbb{K}^n$  é dada por

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2} + \frac{(x_1 dx_1 + \cdots + x_n dx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^2}. \quad (52)$$

Como consequência, a distância nesse espaço é diferente da distância no disco de Poincaré, e nesse caso é dada por

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\|a - x\| \cdot \|b - y\|}{\|a - y\| \cdot \|b - x\|} \right). \quad (53)$$

Aqui,  $a$  e  $b$  são pontos construídos a partir de  $x$  e  $y$  pelo seguinte método: considere a reta  $r$  que passa por  $x$  e  $y$  e defina por  $a$  e  $b$  os pontos em que  $r$  intersecta  $\mathbb{S}^{n-1}$ . O ponto  $a$  será escolhido como o que estiver mais próximo a  $x$ , e o ponto  $b$  por consequência será escolhido como o que estiver mais próximo a  $y$ .

### 3.5 O modelo do hemisfério

O último modelo que iremos visitar é o do hemisfério. Como variedade suave, ele é dado por

$$\mathbb{J}^n = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} > 0\}, \quad (54)$$

e possui métrica dada por

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}. \quad (55)$$

A distância em  $\mathbb{J}^n$ , por sua vez, é dada por

$$d(x, y) = \operatorname{arccosh}(\langle \phi(x), \phi(y) \rangle_{\mathbb{L}}), \quad (56)$$

onde  $\phi$  é o mapa dado por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right). \quad (57)$$

### 3.6 Isometrias entre os modelos

Devemos agora explicitar isometrias entre os modelos definidos acima.

### 3.7 Generalizando operações euclidianas

## 4 Redes neurais

## 5 Misturando tudo

## Referências

- [1] Hugo Cattarucci Botós. «Geometrias Clássicas». 2020. URL: <https://github.com/HugoCBotos/geometria-classica/blob/master/Geometrias%20Cl%C3%A1ssicas%20-%20Hugo%20C.%20Bot%C3%B3s.pdf>.
- [2] Anna Wienhard e Gye-Seon Lee. «Curvature of Riemannian Manifolds». 2015. URL: <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~lee/Soeren05.pdf>.
- [3] Loring W. Tu. *Differential Geometry: Connections, Curvature and Characteristic Classes*. Springer-Verlag New York Inc, 2017. ISBN: 978-3-319-55082-4.
- [4] Wei Peng e Tuomas Varanka e Abdelrahman Mostafa e Henglin Shi e Guoying Zhao. «Hyperbolic Deep Neural Networks: A Survey». Em: *JOURNAL OF LATEX CLASS FILES* 14.8 (2015).
- [5] James W. Cannon e William J. Floyd e Richard Kenyon e Walter R. Parry. «Flavours of Geometry». Em: ed. por Silvio Levy. MSRI Publications, 1997. Cap. 2, 59 até 115.