

Iniciação Científica

Relatório Final

---

# Uma Introdução à Topologia Algébrica

---

Universidade de São Paulo

Instituto de Ciências Matemáticas e Computação

Aluno: Lucas Giraldi Almeida Coimbra  
Orientador: Carlos Henrique Grossi Ferreira  
Coorientador: Hugo Cattarucci Botós

Novembro de 2021

São Carlos

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Homotopia e grupo fundamental</b>	<b>2</b>
2.1	Homotopia . . . . .	2
2.2	Grupo Fundamental . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Espaços de recobrimento</b>	<b>4</b>
3.1	Teoria geral . . . . .	4
3.2	Recobrimento universal . . . . .	5
3.3	Correspondência de Galois . . . . .	5
<b>4</b>	<b>O teorema de Van Kampen</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Homologia singular</b>	<b>7</b>
5.1	Simplexos singulares . . . . .	7
5.2	A categoria dos complexos de cadeia . . . . .	8
5.3	Homologia Relativa . . . . .	9
5.4	Axiomas de Eilenberg-Steenrod . . . . .	10
5.5	Homologia de esferas . . . . .	11
5.6	Lemas importantes . . . . .	12
5.7	Os Axiomas de Eilenberg-Steenrod: um Reencontro . . . . .	14
5.8	Sequência de Mayer-Vietoris . . . . .	15
5.9	O isomorfismo de suspensão . . . . .	15
5.10	Teoria de Grau . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Classificação de superfícies conexas e compactas</b>	<b>17</b>

# 1 Introdução

Ao longo da duração do projeto, o aluno estudou a teoria de grupos fundamentais de espaços topológicos, recobrimentos e a correspondência de Galois entre esses. Além disso, foi feita a classificação de superfícies compactas e os respectivos grupos fundamentais foram calculados a partir do teorema de Van Kampen. Por fim, foi estudada a teoria de homologia, que envolve tópicos como: a homologia singular, os axiomas de Eilenberg-Steenrod e uma introdução à teoria do grau. O presente documento lista os tópicos estudados pelo aluno de maneira mais detalhada, citando também todas as atividades relevantes das quais participou enquanto era constantemente orientado tanto pelo professor Carlos Henrique Grossi Ferreira quanto pelo doutorando Hugo Cattarucci Botós do ICMC.

## 2 Homotopia e grupo fundamental

### 2.1 Homotopia

**Definição 2.1.1.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $f, g: X \rightarrow Y$  duas aplicações contínuas. Dizemos que  $f$  e  $g$  são **homotópicas** ou **homotopicamente equivalentes** se, e somente se, existe uma aplicação contínua  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x$ . Nesse caso, escrevemos  $f \simeq g$  e chamamos  $H$  de uma **homotopia** entre  $f$  e  $g$ .*

Podemos pensar que para cada instante de tempo  $t$  existe uma função contínua  $H_t: X \rightarrow Y$ . Essas funções são bem parecidas com  $f$  se  $t \approx 0$  e bem parecidas com  $g$  se  $t \approx 1$  (pois  $H$  é contínua).

Um exemplo que será muito útil é o da homotopia linear. Se  $E$  é um espaço vetorial normado e  $f, g: X \rightarrow E$  são duas aplicações contínuas, então  $f$  e  $g$  são homotópicas: podemos considerar a homotopia  $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ . Esse tipo de homotopia é chamada de **homotopia linear**. Para definirmos a homotopia não fizemos uso da norma de  $E$ . O que acontece é que estamos utilizando o fato de  $E$  ser normado para inserirmos a topologia gerada pela norma (ou seja, se  $\|\cdot\|$  é a norma de  $E$ , os abertos são gerados por bolas da métrica  $d(x, y) = \|x - y\|$ ).

**Proposição 2.1.2.** *A relação  $\simeq$  é uma relação de equivalência*

A demonstração do fato se resume a trabalhar com a ideia de que para cada ponto  $x_0 \in X$  conseguimos um caminho  $H_x: [0, 1] \rightarrow Y$ . Esse caminho pode ser dado por apenas um ponto (reflexividade), podem ser percorridos nos dois sentidos (simetria) e pode ser percorrido com velocidades diferentes (transitividade).

Como consequência da proposição acima, temos que  $\simeq$  particiona o conjunto de todas as funções contínuas de  $X$  em  $Y$ . Denotaremos por  $[f]$  a classe de equivalência de  $f$  por  $\simeq$ , e a chamaremos de **classe de homotopia**.

**Definição 2.1.3.** *Diremos que  $f: X \rightarrow Y$  é uma **equivalência homotópica** se existe  $g: Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g \simeq Id_Y$  e  $g \circ f \simeq Id_X$ . Nesse caso, diremos que  $g$  é a **inversa homotópica** de  $f$  e que  $X$  e  $Y$  tem o mesmo **tipo de homotopia** ou que são **homotopicamente equivalentes**. Se  $Y$  for unitário, ou seja,  $X$  tiver o mesmo tipo de homotopia de um ponto, diremos que  $X$  é **contrátil**.*

Espaços vetoriais normados são sempre contráteis. Todo espaço Euclidiano de dimensão finita sem o 0 é homotopicamente equivalente à sua esfera unitária. É importante notar que homeomorfismos e equivalências homotópicas não são equivalentes: o segundo é muito mais fraco que o primeiro. Por exemplo,  $\mathbb{S}^n$  é homotopicamente equivalente a  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , mas não homeomorfo, pois o primeiro, ao contrário do segundo, é compacto.

**Proposição 2.1.4.** *Um espaço é contrátil se, e somente se, a sua identidade é homotópica a uma função constante. Por consequência, um espaço contrátil é sempre conexo por caminhos. A volta, porém, não é verdade, já que  $\mathbb{S}^n$  não é contrátil, mas é conexo por caminhos.*

**Proposição 2.1.5.** *Se  $X$  ou  $Y$  for contrátil, então  $f: X \rightarrow Y$  contínua é homotópica a uma função constante.*

A demonstração é simples, mas esconde algo muito interessante: se  $Y$  for contrátil, qualquer função é homotópica a uma mesma constante, portanto quaisquer duas aplicações contínuas  $X \rightarrow Y$  com contradomínio contrátil são homotópicas. Porém, se somente  $X$  for contrátil isso não necessariamente acontece, pois duas funções constantes podem não ser homotópicas. Isso pode ser resolvido se pedirmos que  $Y$  seja conexo por caminhos. Nesse caso, quaisquer funções constantes sejam homotópicas.

## 2.2 Grupo Fundamental

**Definição 2.2.1.** Um *caminho* em  $X$  é uma função contínua  $f: [0, 1] \rightarrow X$ . Diremos que dois caminhos  $f$  e  $g$  são *homotópicos* se existe uma homotopia  $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$  tal que

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x), \quad H(0, t) = f(0) = g(0) \quad e \quad H(1, t) = f(1) = g(1).$$

Da mesma maneira como a homotopia de funções, a relação dada pela homotopia de caminhos também é de equivalência.

**Definição 2.2.2.** Dados dois caminhos  $f, g$  de  $X$  com  $f(1) = g(0)$ , o *produto*  $fg$  é definido como o caminho que percorre  $f$  e depois  $g$ , ambos com velocidade dobrada:

$$fg(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Um *ciclo* em  $X$  é um caminho  $f$  com  $f(0) = f(1)$ . Toda relação de equivalência particiona um conjunto em classes. O conjunto das classes é chamado de *quociente* desse conjunto pela relação. Se  $P_1(X, x)$  é o conjunto de todos os ciclos de  $X$  em  $x$ , ou seja, ciclos  $f$  tais que  $f(0) = f(1) = x$ , denotaremos por  $\pi_1(X, x)$  o quociente de  $P_1(X, x)$  pela relação de homotopia e chamaremos esse conjunto de *grupo fundamental*.

A operação de produto de caminhos pode ser levada para o grupo fundamental simplesmente ao definirmos  $[f][g] := [fg]$ . Essa operação está bem definida e dá uma estrutura de grupo para  $\pi_1(X, x)$ . Aqui, a identidade é o caminho constante em  $x$  e a inversa de  $[f]$  é  $[f^{-1}]$ , onde definimos  $f^{-1}(t) := f(1 - t)$ .

Dados  $x_1, x_2 \in X$  que sejam ligados por um caminho  $\gamma$  de  $x_1$  em  $x_2$ , podemos construir um isomorfismo  $\phi: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_2)$  que é dado por  $\phi(f) = \gamma^{-1}f\gamma$ . Sua inversa é claramente dada por  $\phi^{-1}(f) = \gamma f \gamma^{-1}$ . Em geral esse isomorfismo não é natural, pois depende da escolha de  $\gamma$ , já que ele não precisa ser único. Se  $\pi_1(X, x_2)$  for abeliano, porém, a escolha de caminho é irrelevante, já que se  $\phi'(f) = \lambda^{-1}f\lambda$ , temos

$$\phi'(f) = \lambda^{-1}f\lambda = \lambda^{-1}f(\gamma\gamma^{-1})\lambda = (\lambda^{-1}f\gamma)(\gamma^{-1}\lambda) = (\gamma^{-1}\lambda)(\lambda^{-1}f\gamma) = \gamma^{-1}f\gamma = \phi(f).$$

Esse fato é de extrema importância simplesmente por nos dizer que se  $X$  é conexo por caminhos, então o grupo fundamental independe de ponto base, portanto podemos simplesmente escrever  $\pi_1(X)$ .

**Definição 2.2.3.** Se  $f: X \rightarrow Y$  é contínua e  $x \in X$ , podemos considerar o mapa  $f_\#: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$  dado por  $f_\#([\gamma]) := [f \circ \gamma]$ . Esse é chamado de *morfismo induzido* e sua existência, assim como o fato de que  $Id_\# = Id$  e  $(f \circ g)_\# = f_\# \circ g_\#$ , mostram que  $\pi_1: \mathbf{Top}_\bullet \rightarrow \mathbf{Grp}$  é um funtor.

**Proposição 2.2.4.** Se  $X$  e  $Y$  são conexos por caminhos e homotopicamente equivalentes, então  $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$ . Mais precisamente, se  $f: X \rightarrow Y$  é uma equivalência homotópica, então  $f_\#$  é um isomorfismo de grupos.

Uma observação importante é a relação entre ciclos e mapas com domínio em  $\mathbb{S}^1$ . Se  $f: [0, 1] \rightarrow X$  é um ciclo, então  $f(0) = f(1)$  e portanto podemos criar um mapa  $f': [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow X$  que desce  $f$  para o quociente. Como  $[0, 1]/\{0, 1\} = \mathbb{S}^1$ , então está estabelecida a correspondência. Ela é importante pois ajuda na demonstração do seguinte teorema:

**Teorema 2.2.5.** Se  $X$  é um espaço topológico conexo por caminhos, os seguintes itens são equivalentes:

- $\pi_1(X)$  é trivial;
- quaisquer dois mapas contínuos  $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  são homotópicos;
- toda aplicação contínua  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  admite uma extensão contínua para  $\mathbb{D}^2$ ;
- quaisquer dois caminhos  $f, g$  com mesmos extremos são homotópicos;

Um espaço conexo por caminhos que satisfaz qualquer um dos itens acima é chamado de **simplesmente conexo**.

Calcular grupos fundamentais é um trabalho complicado, mas nas próximas duas seções iremos desenvolver duas ferramentas que facilitarão esse cálculo. Por agora, temos uma proposição que pode nos ajudar, uma vez que tenhamos estabelecido os grupos fundamentais de alguns espaços mais simples.

**Proposição 2.2.6.**  $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ .

## 3 Espaços de recobrimento

### 3.1 Teoria geral

**Definição 3.1.1.** Um **fibrado com fibra  $F \neq \emptyset$**  é um mapa contínuo  $p: E \rightarrow B$  tal que para todo  $b \in B$  existem uma vizinhança  $V_x$  de  $b$  e um homeomorfismo  $\phi_x: V_x \times F \rightarrow p^{-1}(V_x)$  com  $p \circ \phi_x = \pi_{V_x}$  (projeção na primeira coordenada). Essa vizinhança  $V_x$  é chamada de **vizinhança trivializante**. Os espaços  $E$  e  $B$  são chamados, respectivamente, de **espaço total** e **base** do fibrado. É comum tratar o espaço total de um fibrado como o próprio fibrado, costume esse do qual não fugiremos.

Alguns exemplos de fibrados são:

- O cilindro é um fibrado sobre  $\mathbb{S}^1$ , ou seja, o mapa  $p: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  dado pela projeção na primeira coordenada, é um fibrado;
- De maneira similar, a faixa de Möbius também é um fibrado sobre  $\mathbb{S}^1$ ;
- A reta real  $\mathbb{R}$  também pode ser vista como fibrado sobre  $\mathbb{S}^1$ . Para ver isso, basta imaginar uma corda infinita sendo enrolada em formato de mola em cima da esfera (ver Figura 1).



Figura 1: Recobrimento  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$

Nos dois primeiros itens, a fibra é  $[0, 1]$ . No terceiro, porém, a fibra é  $\mathbb{Z}$ .

**Proposição 3.1.2.** Dados  $p: E \rightarrow B$  um fibrado,  $f: [0, 1] \rightarrow B$  um caminho e  $x \in p^{-1}(f(0))$ , existe um caminho  $f': [0, 1] \rightarrow E$  com  $f'(0) = x$  tal que  $p \circ f' = f$ . O caminho  $f'$  é chamado de um **levantamento** de  $f$ .

Em geral esses levantamentos não são únicos, mas existe um lugar onde é possível estabelecer uma certa unicidade para eles: estou falando de recobrimentos.

**Definição 3.1.3.** Um *recobrimento* é um fibrado com fibra discreta e base conexa por caminhos. Seu espaço total é chamado de *espaço de recobrimento*.

**Proposição 3.1.4.** Se  $p: E \rightarrow B$  é um recobrimento, então levantamentos de caminhos são únicos. Mais ainda, em recobrimentos podemos levantar homotopias, ou seja: se  $H: [0, 1]^2 \rightarrow B$  é uma homotopia de caminhos e  $x \in p^{-1}(H_0(0))$ , então existe uma única homotopia de caminhos  $H': [0, 1]^2 \rightarrow E$  tal que  $H'(0, 0) = x$  e  $p \circ H' = H$ .

**Corolário 3.1.5.** Levantamentos de caminhos homotópicos também são homotópicos.

## 3.2 Recobrimento universal

**Definição 3.2.1.** O *recobrimento universal* de  $X$  é um recobrimento  $p: E \rightarrow X$  tal que  $E$  é simplesmente conexo.

**Teorema 3.2.2.** Todo espaço conexo por caminhos e *localmente simplesmente conexo*, ou seja, tal que todo ponto possui base local simplesmente conexa, possui recobrimento universal.

Se  $B$  é um espaço satisfazendo as condições do teorema acima, definiremos o seu recobrimento universal da seguinte maneira: fixe  $b_0 \in B$  e defina  $C$  como sendo o conjunto de todos os caminhos que começam em  $b_0$ . O espaço de recobrimento  $E$  será definido como  $C / \simeq$ , onde  $\simeq$  é a relação de equivalência dada pela homotopia de caminhos. O mapa  $p: E \rightarrow B$  será dado por  $p([\gamma]) = \gamma(1)$  (que está bem definido pela definição de  $E$ ).

A topologia em  $E$  é definida da seguinte maneira: sejam  $\gamma$  um caminho começando em  $b_0$  e  $U$  é uma vizinhança simplesmente conexa de  $\gamma(1)$ . O subconjunto  $\langle U, \gamma \rangle$  de  $E$  é formado por elementos da forma  $\gamma\alpha$  para algum caminho  $\alpha$  com  $\alpha(0) = \gamma(1)$  que tenha imagem inteiramente contida em  $U$ . A topologia de  $E$  é gerada pela base definida por conjuntos da forma  $\langle U, \gamma \rangle$ . Mais detalhes sobre essa construção e a motivação por trás dela podem ser encontrados em [Gir].

**Teorema 3.2.3.** Dados  $p_1: E_1 \rightarrow B$  e  $p_2: E_2 \rightarrow B$  dois recobrimentos universais, existe um homeomorfismo  $\phi: E_1 \rightarrow E_2$  tal que  $p_1 = p_2 \circ \phi$ .

A demonstração desse teorema é um tanto técnica e depende dois lemas: o *critério de levantamento* e a *propriedade do levantamento único*.

**Lema 3.2.4.** Considere  $p: E \rightarrow B$  um recobrimento,  $Y$  um espaço conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos e  $f: Y \rightarrow B$  uma função contínua. Sejam  $e \in E$ ,  $b = p(e)$  e  $y \in f^{-1}(b)$ . Existe um levantamento  $f': Y \rightarrow E$  de  $f$  por  $p$  (ou seja,  $f = p \circ f'$ ) tal que  $f'(y) = e$  se, e somente se,  $f_{\#}(\pi_1(Y, y)) \subset p_{\#}(\pi_1(E, e))$ .

**Lema 3.2.5.** Se  $p: E \rightarrow B$  é um recobrimento e  $f: Y \rightarrow B$  é uma função contínua com  $Y$  conexo por caminhos, então dados  $f_1, f_2: Y \rightarrow B$  dois levantamentos de  $f$  por  $p$  tais que  $f_1(y) = f_2(y)$  para algum  $y$ , temos  $f_1 = f_2$ .

## 3.3 Correspondência de Galois

Assim como para corpos, existe uma correspondência de Galois para recobrimentos, que irá nos ajudar a calcular grupos fundamentais através de quocientes.

**Proposição 3.3.1.** Fixe um recobrimento universal  $p: E \rightarrow B$ . Se  $p': Y \rightarrow B$  é recobrimento e  $Y$  é conexo por caminhos, então existe um recobrimento  $p'': E \rightarrow Y$  tal que  $p = p' \circ p''$ . Nesse caso diremos que  $p'$  é chamado de *recobrimento intermediário*.

**Definição 3.3.2.** Dado  $p: E \rightarrow B$  um recobrimento, chamamos de *grupo deck* e denotamos por  $\text{Deck}(E/B)$  o grupo de todos os homeomorfismos  $f: E \rightarrow E$  tais que  $p \circ f = p$ , munido da operação de composição. Esses homeomorfismos serão chamados de *transformações deck*. Um recobrimento é dito *normal* se, para cada  $b \in B$  e para cada  $e, e' \in p^{-1}(b)$ , existir  $f \in \text{Deck}(E/B)$  tal que  $f(e) = e'$ . Todo recobrimento universal é normal.

A correspondência tem a ver com os recobrimentos intermediários:

$$\begin{array}{ccc}
 E \longrightarrow \text{Deck}(E/E) = \{1\} & & E \longleftarrow \text{Deck}(E/E) = \{1\} \\
 \downarrow p_2 & & \downarrow p_2 \\
 Y \longrightarrow \text{Deck}(E/Y) & \text{e} & E/H \longleftarrow H \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow p_1 \\
 B \longrightarrow \text{Deck}(E/B) & & B \longleftarrow \text{Deck}(E/B)
 \end{array}$$

No primeiro diagrama,  $p_1$  é um recobrimento intermediário e  $p_2$  é um recobrimento descrito pela Proposição 3.3.1. No segundo,  $H$  é um subgrupo qualquer de  $\text{Deck}(E/B)$ . Nesse caso,  $H$  também age sobre  $E$  e podemos tomar o quociente  $E/H$ . A aplicação quociente  $p_2$  é um recobrimento, assim como o mapa  $p_1$  dado por  $p_1(Hx) = p(x)$ . As setas horizontais não representam mapas, mas sim uma correspondência entre as estruturas. A parte interessante é que a correspondência "vai e volta", ou seja:

**Teorema 3.3.3.**  $E/\text{Deck}(E/Y) = Y$  e  $H = \text{Deck}(E/(E/H))$  (o primeiro é um homeomorfismo, o segundo um isomorfismo de grupos).

Essa correspondência é especialmente útil para calcular grupos fundamentais, já que temos a proposição abaixo, que cria uma relação entre o grupo fundamental de  $B$  e  $\text{Deck}(E/B)$ . Mais especificamente, eles são isomorfos.

**Teorema 3.3.4.**  $\pi_1(B) = \text{Deck}(E/B)$ .

**Proposição 3.3.5.**  $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$  e  $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ .

A demonstração, que seria complicadíssima sem utilizarmos as técnicas certas, fica relativamente simples. Basta considerar  $\mathbb{Z}$  como sendo o grupo das funções  $f_z(x) = x + z$ . Esse grupo será o  $\text{Deck}(\mathbb{R}/(\mathbb{R}/\mathbb{Z})) = \text{Deck}(\mathbb{R}/\mathbb{S}^1)$ , recobrimento que foi descrito na Figura 1. A segunda parte da proposição é dada pela Proposição 2.2.6, já que  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

## 4 O teorema de Van Kampen

Além de recobrimentos, existe uma outra ferramenta extremamente importante para calcular grupos fundamentais: o teorema de Van Kampen.

**Definição 4.0.1.** Dados dois grupos  $G$  e  $H$  com apresentações  $\langle R_G \mid S_G \rangle$  e  $\langle R_H \mid S_H \rangle$ , o **produto livre**  $G * H$  é o grupo apresentado por  $\langle R_G \cup R_H \mid S_G \cup S_H \rangle$ , ou seja, o grupo livre gerado pelos geradores de  $G$  e  $H$ , juntamente com as suas relações.

**Teorema 4.0.2.** Se  $X = A \cup B$  é conexo por caminhos, com  $A$  e  $B$  abertos conexos por caminhos tais que  $A \cap B \neq \emptyset$  e também é conexo por caminhos, então o morfismo de grupos  $\phi: \pi_1(A) * \pi_1(B) \rightarrow \pi_1(X)$  é sobrejetor. Além disso,  $\ker \phi$  é o subgrupo normal gerado por todos os elementos da forma  $i(\omega)j(\omega)^{-1}$ , onde  $i: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$  e  $j: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(B)$  são os morfismos induzidos pelas inclusões  $A \cap B \hookrightarrow A$  e  $A \cap B \hookrightarrow B$ .

Esse teorema se torna bastante útil ao calcular grupos fundamentais pois ele nos dá um isomorfismo  $\pi_1(A) * \pi_1(B) / \ker \phi = \pi_1(X)$  e também uma maneira explícita de saber quem é  $\ker \phi$ .

**Proposição 4.0.3.**  $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{1\}$  para  $n \geq 2$

A demonstração disso utiliza o teorema da seguinte maneira: defina  $A$  como sendo o hemisfério de cima de  $\mathbb{S}^n$ , mas alongado um pouquinho para baixo do equador. De maneira similar,  $B$  será o hemisfério de baixo, alongado um pouquinho acima do equador. A faixa do meio, que é a intersecção  $A \cap B$ , assim como cada uma das regiões, é conexa por caminhos. Como  $A$  e  $B$  são contráteis  $\pi_1(A) = \pi_1(B) = \{1\}$  e portanto  $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \pi_1(A) * \pi_1(B) / \ker \phi = \{1\} * \{1\} / \ker \phi = \{1\}$ .

## 5 Homologia singular

### 5.1 Simplexos singulares

A teoria de homologia é um campo muito importante da álgebra e da topologia algébrica, e será abordado em mais detalhe nas seções a seguir. A seguir estudaremos homologia singular. Precisamos primeiro estabelecer quem serão os blocos de construção dos nossos invariantes, os chamados **simplexos**.

**Proposição 5.1.1.** *Dados um espaço vetorial real  $V$  e  $e_0, \dots, e_n \in V$ , as afirmações a seguir são equivalentes:*

1. *não existe  $W \subset V$  subespaço afim  $(n-1)$ -dimensional tal que  $e_0, \dots, e_n \in W$ ;*
2. *os vetores  $e_1 - e_0, \dots, e_n - e_0$  são linearmente independentes.*

**Definição 5.1.2.** *Dados  $e_0, \dots, e_n \in V$  que satisfaçam uma das condições da Proposição 5.1.1, podemos definir o  **$n$ -simplexo** gerado por  $e_0, \dots, e_n$  como sendo a envoltória convexa*

$$[e_0, \dots, e_n] := \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \in V : \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Se  $V = \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\{e_0, \dots, e_n\}$  é sua base canônica, chamaremos  $[e_0, \dots, e_n]$  de  **$n$ -simplexo canônico**, que denotaremos por  $\Delta^n$ . Em todos os casos, chamaremos  $e_0, \dots, e_n$  de **vértices** do simplexo.

Eu disse que os simplexos seriam os tijolos dos grupos de homologia, mas quem é o cimento? Estes são os chamados grupos livres abelianos. Já falamos de grupos livres no teorema de Van Kampen, e vamos introduzir um conceito parecidíssimo aqui.

**Definição 5.1.3.** *Dado um conjunto  $X$ , denotaremos por  $\text{Free}_{\text{Ab}}(X)$  o  $\mathbb{Z}$ -módulo livre gerado por  $X$ . Esse conjunto será chamado de **grupo abeliano livre gerado por  $X$** .*

Olharemos para grupos abelianos livres bem específicos, os chamados grupos de cadeias singulares.

**Definição 5.1.4.** *Dado  $X$  um espaço topológico, definimos o  **$n$ -ésimo grupo de cadeias singulares** como sendo o grupo livre abeliano gerado pelos mapas contínuos do  $n$ -simplexo canônico em  $X$ :*

$$C_n(X) := \text{Free}_{\text{Ab}}(\{\sigma: \Delta^n \rightarrow X \mid \sigma \text{ é contínua} \}).$$

Os mapas que geram  $C_n(X)$  são chamados de  **$n$ -simplexos singulares** e os elementos de  $C_n(X)$  são chamados de  **$n$ -cadeias singulares**. Podemos estender essa definição para  $n$  negativo apenas dizendo que, nesses casos,  $C_n(X)$  é o grupo trivial.

O nome “ $n$ -simplexo singular” vem do fato de que os geradores desse grupo são funções que mapeiam  $\Delta^n$  em  $X$  de maneira não necessariamente injetora ou suave, portanto podem haver singularidades.

Para cada função contínua  $f: X \rightarrow Y$  temos um morfismo de grupos  $C_n(f): C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  dado por  $\sigma \mapsto f \circ \sigma$  e estendido por linearidade para os outros termos. Assim, da mesma forma que o grupo fundamental é um funtor de  $\text{Top}_\bullet$  em  $\text{Grp}$ , o  $n$ -ésimo grupo de cadeias singulares é um funtor covariante de  $\text{Top}$  em  $\text{Ab}$ , isto é,  $C_n(f \circ g) = C_n(f) \circ C_n(g)$  e  $C_n(\text{Id}_X) = \text{Id}_{C_n(X)}$ .

**Definição 5.1.5.** *Dado  $X$  um espaço topológico, definimos o  **$n$ -ésimo morfismo de bordo** como sendo o mapa  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  dado por*

$$\partial_n(\sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]}.$$

A notação  $[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]$  quer dizer que estamos omitindo o termo  $e_i$ . Esse  $(n-1)$ -simplexo pode ser naturalmente identificado com  $\Delta^{n-1}$ .



Na definição acima, o  $(-1)^i$  surge como uma correção para que os simplexes participando no bordo estejam corretamente orientados. Na Figura 2 representamos  $[e_0, e_1]$  como uma seta de  $e_0$  a  $e_1$ , e  $-[e_0, e_1]$  como sendo a seta na direção oposta. Note que a definição envolvendo  $\pm 1$  forma ciclos, isto é, sequencia de setas formando um percurso fechado.

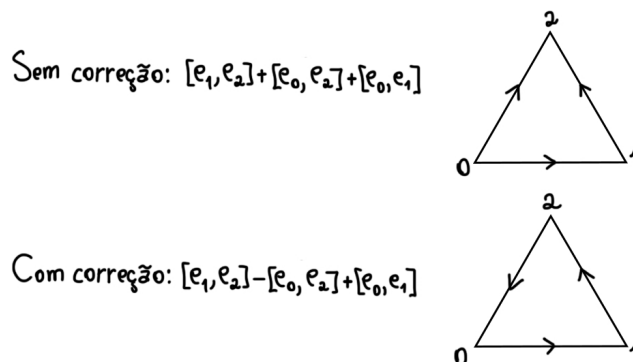


Figura 2: exemplo de bordo de um 2-simplexo

Da figura acima, podemos perceber que o bordo de um  $n$ -simplexo não possui bordo. Para não confiarmos apenas no desenho, o lema abaixo diz exatamente isso:

**Lema 5.1.6.** Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ .

## 5.2 A categoria dos complexos de cadeia

Agora vamos falar um pouco da categoria dos complexos de cadeia de  $R$ -módulos, que chamaremos de  $\text{Ch}(R)$ .

**Definição 5.2.1.** Dado um anel  $R$  e uma sequência

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} M_1 \xrightarrow{\partial_1} M_0 \xrightarrow{\partial_0} M_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} \cdots$$

de  $R$ -módulos (que a partir de agora denotaremos por  $\{M_i, \partial_i\}$ ), diremos que essa sequência é um **complexo de cadeias** se  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Essa definição é equivalente a dizer que  $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ . Se no lugar dessa inclusão, temos uma igualdade, diremos que o complexo é **exato**, seguindo a nomenclatura padrão de sequências.

Como podemos quocientar módulos por sub-módulos, podemos procurar entender quem é o quociente dos dois módulos mencionados acima:  $\ker \partial_n$  e  $\text{Im } \partial_{n+1}$ .

**Definição 5.2.2.** Dado um complexo de cadeias  $\{M_i, \partial_i\}$ , definimos o  **$n$ -ésimo grupo de homologia**  $H_n(M_i, \partial_i)$  como sendo  $\ker \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ . É costumeiro denotar  $\ker \partial_n$  por  $Z_n$  e dizer que seus elementos são  **$n$ -ciclos**. Além disso, vamos denotar  $\text{Im } \partial_{n+1}$  por  $B_n$  e chamar seus elementos de  **$n$ -bordos**.

Complexos sobre  $R$ -módulos formam uma categoria:

**Definição 5.2.3.** Dados dois complexos de cadeias  $\{A_i, \partial_i\}$  e  $\{B_i, \partial'_i\}$ , um **morfismo de complexos**  $f: \{A_i, \partial_i\} \rightarrow \{B_i, \partial'_i\}$  é uma família  $\{f_i: A_i \rightarrow B_i\}$  de morfismos de módulos tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\partial_i} & A_{i-1} \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_{i-1} \\ B_i & \xrightarrow{\partial'_i} & B_{i-1} \end{array}$$

comutam.

Abaixo definimos o conceito de homotopia de complexos, que é utilizado ao analisarmos os axiomas de Eilenberg-Steenrod.

**Definição 5.2.4.** Dados dois complexos de cadeias  $\{A_i, \partial_i\}$  e  $\{B_i, \partial'_i\}$ , dizemos que dois morfismos  $f, g: \{A_i, \partial_i\} \rightarrow \{B_i, \partial'_i\}$  são **homotópicos** se existe uma família  $h = \{h_i: A_i \rightarrow B_{i+1}\}$  de mapas tal que  $f - g = h \circ \partial + \partial' \circ h$  ou, mais explicitamente,  $f_i - g_i = h_{i+1} \circ \partial_i + \partial'_{i-1} \circ h_i$ . O diagrama abaixo não necessariamente comuta, ele só está aqui para facilitar a visualização dos morfismos utilizados.

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{i+2} & \xrightarrow{\partial_{i+2}} & A_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & A_i \\
 \downarrow f_{i+2} & & \downarrow f_{i+1} & & \downarrow f_i \\
 & \nwarrow h_{i+1} & & \nwarrow h_i & \\
 B_{i+2} & \xrightarrow{\partial'_{i+2}} & B_{i+1} & \xrightarrow{\partial'_{i+1}} & B_i
 \end{array}$$

Como se já não bastasse olhar para seqüências de módulos, vamos olhar para seqüências de complexos de cadeias.

**Definição 5.2.5.** Considere os complexos de cadeias  $\{A_i, \partial_i^A\}$ ,  $\{B_i, \partial_i^B\}$  e  $\{C_i, \partial_i^C\}$ . A seqüência

$$0 \longrightarrow \{A_i, \partial_i^A\} \xrightarrow{f} \{B_i, \partial_i^B\} \xrightarrow{g} \{C_i, \partial_i^C\} \longrightarrow 0$$

é **exata** se, para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , a seqüência curta abaixo for exata

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \longrightarrow 0.$$

### 5.3 Homologia Relativa

Já sabemos que os grupos de cadeias singulares formam um complexo de cadeias e portanto podemos falar dos seus grupos de homologia.

**Definição 5.3.1.** Seja  $X$  um espaço topológico. Os **grupos de homologia singular**  $H_n(X)$  são os grupos de homologia dados pelo complexo  $\{C_n(X), \partial_n\}$ , ou seja,  $H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X)$ , onde  $Z_n(X)$  é formado pelos  $n$ -ciclos, e  $B_n(X)$  pelos  $n$ -bordos.

Filosoficamente, a homologia singular mede a obstrução para  $n$ -ciclos se realizarem como bordos. Em particular, se  $H_n(X) = 0$ , então não há tal obstrução e todo  $n$ -ciclo é um bordo.

**Definição 5.3.2.** Definimos por  $\text{Top}^{(2)}$  a **categoria dos pares de espaços topológicos**. Um objeto é um par de espaços topológicos  $(X, A)$  onde  $X$  contém  $A$ , e um morfismo  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma função contínua  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $f(A) \subset B$ .

**Definição 5.3.3.** Dado um par  $(X, A)$ , definimos o  **$n$ -ésimo grupo de cadeias singulares relativas**  $C_n(X, A)$  como sendo o quociente  $C_n(X)/C_n(A)$ . O **morfismo de bordo**  $\partial_n$  nesse caso é a aplicação

$$[\sigma] \mapsto \left[ \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} \right],$$

que está bem definida pois o bordo de uma cadeia de  $A$  ainda é uma cadeia de  $A$ . Os conjuntos dos  $n$ -ciclos, dos  $n$ -bordos e o  **$n$ -ésimo grupo de homologia relativa** são denotados  $Z_n(X, A)$ ,  $B_n(X, A)$  e  $H_n(X, A)$  respectivamente.

Observe que  $H_n(X, \emptyset) = H_n(X)$ .

A intuição por trás da definição acima é a seguinte: um  $n$ -ciclo em  $(X, A)$  é uma  $n$ -cadeia  $\lambda$  em  $X$  cujo bordo está inteiramente contido em  $A$ . Já um  $n$ -bordo em  $(X, A)$  é uma  $n$ -cadeia  $\lambda$  em  $X$  que, a menos de uma parte em  $A$ , é o bordo de uma  $(n+1)$ -cadeia. A ideia aqui é que a homologia relativa de  $(X, A)$  vai nos ajudar a calcular a homologia singular de  $X/A$ , que é quando colapsamos  $A$  a um ponto.

Agora, vamos construir um conjunto de axiomas chamados de Axiomas de Eilenberg-Steenrod, que serão satisfeitos pela homologia relativa, e que serão de grande utilidade para calcular grupos de homologia explicitamente.

## 5.4 Axiomas de Eilenberg-Steenrod

**Definição 5.4.1.** Dado  $R$  um anel, uma *teoria de homologia com valores em  $R$ -módulos*  $(H_n, \delta_n)$  é uma família de funtores  $H_n: \text{Top}^{(2)} \rightarrow \text{Mod}_R$  e, para cada par  $(X, A)$ , uma família de morfismos de módulos  $\delta_n: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, \emptyset)$ . Essas famílias devem satisfazer certos axiomas que serão listados abaixo (geralmente pedimos algo a mais: pedimos que  $\delta_i$  sejam transformações naturais, mas isso está fora do escopo de um texto introdutório).

**Axioma 5.4.2.** Se  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são morfismos, diremos que  $f$  e  $g$  são *homotópicos* se existe uma homotopia  $H: [0, 1] \times X \rightarrow Y$  entre  $f$  e  $g$  tal que  $H([0, 1] \times A) \subset B$ . O *axioma da invariância por homotopia* diz que se esse for o caso, então  $H_n(f) = H_n(g)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Corolário 5.4.3.** Se  $X$  e  $Y$  são homotopicamente equivalentes, então  $H_n(X) = H_n(Y)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

A prova desse fato segue de analisarmos cuidadosamente os mapas induzidos da equivalência homotópica e de sua inversa.

**Axioma 5.4.4.** Dado  $(X, A)$  um par de espaços, o *axioma da sequência exata longa* diz que a sequência

$$\cdots \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n(X, A)} H_{n-1}(A, \emptyset) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} H_{n-1}(X, \emptyset) \xrightarrow{H_{n-1}(j)} H_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

de  $A$ -módulos é exata, onde  $i: (A, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$  é a inclusão  $A \hookrightarrow X$  e  $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  é a identidade em  $X$ .

Podemos tirar um resultado importante utilizando os axiomas já apresentados.

**Proposição 5.4.5.** As seguintes afirmações são equivalentes:

- para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $H_n(i)$  é um isomorfismo.
- para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $H_n(X, A) = \{0\}$ .

A ideia aqui é que  $H_n(X, A)$  é a homologia do quociente (não é exatamente, mas é quase), se  $H_n(X, A) = \{0\}$  isso nos diz que  $A$  se comporta como  $X$ , portanto seus grupos de homologia são isomorfos (um raciocínio análogo pode ser feito para a outra implicação).

**Corolário 5.4.6.** Dado  $X$  um espaço topológico,  $H_n(X, X) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

O último axioma obrigatório vai nos dizer como calcular os grupos de homologia de um espaço complicado usando os grupos de homologia de alguns de seus subespaços mais simples.

**Axioma 5.4.7.** Dado um espaço topológico  $X$  e dois subespaços  $A, B$  tais que  $\overline{A} \subset \text{Int } B$ , se  $i: (X \setminus A, B \setminus A) \hookrightarrow (X, B)$  é a inclusão, o *axioma da excisão* nos diz que  $H_n(i)$  é um isomorfismo para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Perceba que esse axioma, a priori, não tem ligação com a Proposição 5.4.5, pois os  $H_n(i)$  são grupos diferentes em cada uma delas.

**Corolário 5.4.8.** Se  $X = X_1 \sqcup X_2$ , então  $H_n(X, X_2) = H_n(X_1, \emptyset)$ .

Por fim, temos um outro axioma, que não é obrigatório, mas que será satisfeito pela homologia relativa.

**Axioma 5.4.9.** Diremos que a nossa teoria de homologia satisfaz o *axioma de dimensão* se para todo espaço unitário  $\{x\}$ , temos  $H_n(\{x\}, \emptyset) = 0$  se  $n \neq 0$ .

## 5.5 Homologia de esferas

Nessa subseção vamos calcular os grupos de homologia das esferas utilizando apenas os axiomas. Porém, antes disso, devemos falar rapidamente sobre sequências exatas curtas separáveis.

**Lema 5.5.1.** *Dada uma sequência exata curta de  $R$ -módulos*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{q} B \xrightarrow{r} C \longrightarrow 0$$

*são equivalentes:*

- a sequência tem uma **cisão pela esquerda**: existe  $t: B \rightarrow A$  tal que  $t \circ q$  é a identidade em  $A$ ;
- a sequência tem uma **cisão pela direita**: existe  $s: B \rightarrow C$  tal que  $r \circ s$  é a identidade em  $C$ ;
- a sequência tem uma **soma direta**: existe um isomorfismo  $\phi: B \rightarrow A \oplus C$  tal que  $\phi \circ q$  é a injeção natural de  $A$  em  $A \oplus C$  e  $r \circ \phi^{-1}$  é a projeção de  $A \oplus C$  em  $C$ .

Esse lema é chamado de **lema da cisão**.

A partir de agora vamos assumir que nossa teoria de homologia satisfaz o axioma de dimensão e, além disso, para todo espaço  $X$  unitário,  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . Além disso, vamos escrever  $H_n(X)$  para denotar  $H_n(X, \emptyset)$ .

**Lema 5.5.2.** *Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $H_n(X \sqcup Y) = H_n(X) \oplus H_n(Y)$ .*

A demonstração vem de analisarmos a sequência exata longa:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X \sqcup Y, Y) & \xrightarrow{\delta_{n+1}(X \sqcup Y, Y)} & H_n(Y) & & \\ & & & & \downarrow H_n(i) & & \\ & \searrow & & & & & \\ & & H_n(X \sqcup Y) & \xrightarrow{H_n(j)} & H_n(X \sqcup Y, Y) & \xrightarrow{\delta_n(X \sqcup Y, Y)} & H_{n-1}(Y) \\ & & & & & & \downarrow H_{n-1}(i) \\ & \searrow & & & & & \\ & & H_{n-1}(X \sqcup Y) & \xrightarrow{H_{n-1}(j)} & H_{n-1}(X \sqcup Y, Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

A sequência se separa nas sequências exatas curtas da forma

$$0 \longrightarrow H_n(Y) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X \sqcup Y) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X \sqcup Y, Y) \longrightarrow 0$$

e o resultado segue do lema da cisão.

**Corolário 5.5.3.**  $H_n(\mathbb{S}^0) = \{0\}$  se  $n \neq 0$  e  $H_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}^2$ .

Agora que já conhecemos os grupos de homologia de  $\mathbb{S}^0$ , podemos nos aventurar e calcular os grupos de homologia de  $\mathbb{S}^k$  para  $k > 0$ .

**Teorema 5.5.4.** *Se  $k \geq 1$ , então  $H_0(\mathbb{S}^k) = \mathbb{Z} = H_k(\mathbb{S}^k)$  e se  $n \neq 0$  e  $k$ , então  $H_n(\mathbb{S}^k) = 0$ .*

A principal parte da argumentação se trata de dividir a esfera  $\mathbb{S}^k$  em quatro partes: o disco de cima, o disco de baixo, a esfera do equador e um disco menor, na parte de cima, que chamaremos de  $\mathbb{D}_+^k$ ,  $\mathbb{D}_-^k$ ,  $\mathbb{S}^{k-1}$  e  $\mathbb{D}_{++}^k$ , respectivamente (olhar Figura 3). Construídos esses subespaços, podemos aplicar excisão, invariância por homotopia e o Corolário 5.4.3 para obtermos  $H_n(\mathbb{S}^k, \mathbb{D}_+^k) = H_n(\mathbb{D}_-^k, \mathbb{S}^{k-1})$ .

O resto da demonstração agora vai se tratar apenas de analisar as sequências exatas longas dos pares  $(\mathbb{S}^k, \mathbb{D}_+^k)$  e  $(\mathbb{D}_-^k, \mathbb{S}^{k-1})$ , que seguem a seguir:

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathbb{D}_+^k) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(\mathbb{S}^k) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(\mathbb{S}^k, \mathbb{D}_+^k) \xrightarrow{\delta_n(\mathbb{S}^k, \mathbb{D}_+^k)} H_{n-1}(\mathbb{D}_+^k) \longrightarrow \cdots$$

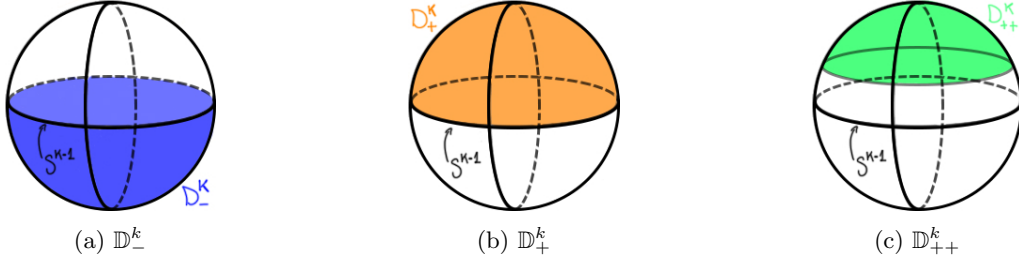


Figura 3: Quatro regiões importantes de  $\mathbb{S}^k$

$$\dots \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^{k-1}) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(\mathbb{D}_-^k) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(\mathbb{D}_-^k, \mathbb{S}^{k-1}) \xrightarrow{\delta_n(\mathbb{D}_-^k, \mathbb{S}^{k-1})} H_{n-1}(\mathbb{S}^{k-1}) \longrightarrow \dots$$

As duas seqüências podem ser separadas em seqüências exatas curtas que satisfazem uma das condições do lema da cisão, assim obtemos os isomorfismos  $H_n(\mathbb{S}^k) = H_n(\mathbb{D}_+^k) \oplus H_n(\mathbb{S}^k, \mathbb{D}_+^k)$  e  $H_{n-1}(\mathbb{S}^{k-1}) = H_n(\mathbb{S}^k, \mathbb{D}_+^k) \oplus H_{n-1}(\mathbb{D}_-^k)$ .

Vamos agora calcular os grupos de homologia de maneira indutiva:

- Se  $k = 1$ , temos:
  - $H_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \oplus H_0(\mathbb{S}^1, \mathbb{D}_+^1)$  e como  $H_0(\mathbb{S}^1, \mathbb{D}_+^1) \oplus \{0\} = \{0\}$ , temos  $H_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ ;
  - $H_1(\mathbb{S}^1) = H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{D}_+^1)$  e como  $H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{D}_+^1) \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ , temos  $H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ ;
  - se  $n \neq 0$  e  $1$ , então  $H_n(\mathbb{S}^1) = H_n(\mathbb{S}^1, \mathbb{D}_+^1)$  e como  $H_n(\mathbb{S}^1, \mathbb{D}_+^1) \oplus \{0\} = \{0\}$ , temos  $H_n(\mathbb{S}^1) = \{0\}$ .
- Agora, vamos assumir algumas coisas para o passo indutivo, que já provamos para  $\mathbb{S}^1$ :
  - $H_0(\mathbb{S}^{k-1}) = \mathbb{Z} = H_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1})$ ;
  - se  $n \neq 0$  ou  $k-1$ ,  $H_n(\mathbb{S}^{k-1}) = \{0\}$ .
- Por fim, vamos agora construir o passo indutivo (assumindo  $k > 1$ ):
  - $H_0(\mathbb{S}^k) = \mathbb{Z} \oplus H_0(\mathbb{S}^k, \mathbb{D}_+^k)$  e  $H_{-1}(\mathbb{S}^{k-1}) = \{0\} = H_{-1}(\mathbb{D}_-^k)$ , portanto  $H_0(\mathbb{S}^k) = \mathbb{Z}$ ;
  - $H_1(\mathbb{S}^k) = H_1(\mathbb{S}^k, \mathbb{D}_+^k)$  e  $H_0(\mathbb{S}^{k-1}) = \mathbb{Z} = H_0(\mathbb{D}_-^k)$ , portanto  $H_1(\mathbb{S}^k) = \{0\}$ ;
  - $H_k(\mathbb{S}^k) = H_k(\mathbb{S}^k, \mathbb{D}_+^k)$  e  $H_{k-1}(\mathbb{D}_-^k) = \{0\}$ , portanto  $H_k(\mathbb{S}^k) = H_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1}) = \mathbb{Z}$ .
  - se  $n \neq 0, 1$  e  $k$ , então  $H_n(\mathbb{S}^k) = H_n(\mathbb{S}^k, \mathbb{D}_+^k)$  e como  $H_{n-1}(\mathbb{D}_-^k) = \{0\}$  e  $H_{n-1}(\mathbb{S}^{k-1}) = \{0\}$  (pois  $n-1 \neq -1, 0$  ou  $k-1$ ), então  $H_n(\mathbb{S}^k) = \{0\}$ .

## 5.6 Lemas importantes

A seção a seguir será utilizada para enunciarmos e demonstrarmos alguns lemas importantes, que são ferramentas importantes de álgebra homológica (snake-lemma e lema dos 5) e de homologia singular (lema dos simplexos pequenos).

**Lema 5.6.1** (Snake-lemma). *Considere o diagrama comutativo abaixo, onde  $M', M, M'', N', N$  e  $N''$  são  $R$ -módulos com  $R$  algum anel comutativo, e  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', f, f'$  e  $f''$  são morfismos de*

$R$ -módulos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \ker f' & & \ker f & & \ker f'' & \\
 & \downarrow i' & & \downarrow i & & \downarrow i'' & \\
 M' & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\
 0 \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\alpha'} & N & \xrightarrow{\beta'} & N'' & \\
 \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi'' & & \\
 & \text{coker } f' & & \text{coker } f & & \text{coker } f'' & 
 \end{array}$$

Os morfismos  $\hookrightarrow$  são inclusões e os morfismos  $\twoheadrightarrow$  são os mapas quociente. Pedimos que as linhas centrais ( $M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  e  $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N''$ ) desse diagrama sejam exatas.

O lema diz que existe um morfismo  $\delta$  que faz com que a sequência destacada em vermelho no diagrama abaixo seja exata.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ker f' & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \ker f & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \ker f'' & & \\
 \downarrow i' & & \downarrow i & & \downarrow i'' & & \\
 M' & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\
 0 \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\alpha'} & N & \xrightarrow{\beta'} & N'' & \\
 \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi'' & & \\
 & \text{coker } f' & \xrightarrow{\bar{\alpha}'} & \text{coker } f & \xrightarrow{\bar{\beta}'} & \text{coker } f'' & 
 \end{array}$$

(A sequência destacada em vermelho é:  $\ker f' \xrightarrow{\bar{\alpha}} \ker f \xrightarrow{\bar{\beta}} \ker f'' \xrightarrow{\delta} N'' \xrightarrow{\pi''} \text{coker } f'' \xrightarrow{\bar{\beta}'} \text{coker } f \xrightarrow{\bar{\alpha}'} \text{coker } f'$ )

Além disso, o lema também diz que se  $\alpha$  for injetor, então  $\bar{\alpha}$  é injetor e, se  $\beta'$  for sobrejetor, então  $\bar{\beta}'$  é sobrejetor.

**Lema 5.6.2** (Lema dos 5). Se  $A, B, C, D, E, A', B', C', D'$  e  $E'$  são  $R$ -módulos tais que  $a$  é um epimorfismo,  $e$  é um monomorfismo,  $b$  e  $d$  são isomorfismos, o diagrama abaixo comuta e suas linhas são exatas, então  $c$  é um isomorfismo também.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{f_A} & B & \xrightarrow{f_B} & C & \xrightarrow{f_C} & D & \xrightarrow{f_D} & E \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\
 A' & \xrightarrow{f'_A} & B' & \xrightarrow{f'_B} & C' & \xrightarrow{f'_C} & D' & \xrightarrow{f'_D} & E'
 \end{array}$$

**Definição 5.6.3.** Dado  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{U} = \{U_j\}$  uma cobertura para  $X$  tal que  $\text{Int } U := \{\text{Int } U_j\}$  também é uma cobertura para  $X$ , um simplexo singular  $\sigma$  é  **$\mathcal{U}$ -pequeno** se, para algum  $j$ ,  $\text{Im } \sigma \subset U_j$ . O grupo abeliano livre gerado por esses simplexos será denotado  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  e será chamado de  **$n$ -ésimo grupo de cadeias singulares  $\mathcal{U}$ -pequenas**.

**Lema 5.6.4** (Lema dos simplexos pequenos). Seja  $i$  o morfismo de complexos de cadeias dado pelas inclusões  $i_n: C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$  induz um isomorfismo de homologias.

Ou seja, podemos ignorar simplexos singulares muito grandes e calcular os grupos de homologia de um espaço usando só os simplexos singulares pequenos o suficiente.

## 5.7 Os Axiomas de Eilenberg-Steenrod: um Reencontro

Agora, vamos analisar os axiomas do ponto de vista da homologia singular, provendo uma heurística para a demonstração de que esses são satisfeitos.

**Proposição 5.7.1.** *A homologia relativa satisfaz o axioma da sequência exata longa, ou seja, dado  $(X, A)$  um par de espaços topológicos, temos uma sequência exata longa*

$$\cdots \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n(X, A)} H_{n-1}^{sing}(A) \xrightarrow{H_{n-1}^{sing}(i)} H_{n-1}^{sing}(X) \xrightarrow{H_{n-1}^{sing}(j)} H_{n-1}^{sing}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

A demonstração dessa proposição é consequência direta do lema abaixo sobre a categoria dos complexos de cadeia, que nos ensina a passar de uma sequência exata curta para uma sequência exata longa.

**Lema 5.7.2.** *Dada uma sequência exata curta de complexos de cadeia*

$$0 \longrightarrow \{A_k, \partial_k^A\} \xrightarrow{f} \{B_k, \partial_k^B\} \xrightarrow{g} \{C_k, \partial_k^C\} \longrightarrow 0$$

*temos uma sequência exata longa*

$$\cdots \longrightarrow H_n(\{A_i, \partial_i^A\}) \longrightarrow H_n(\{B_i, \partial_i^B\}) \longrightarrow H_n(\{C_i, \partial_i^C\}) \longrightarrow H_{n-1}(\{A_i, \partial_i^A\}) \longrightarrow \cdots$$

A demonstração desse fato é simplesmente aplicar o snake-lemma três vezes. Primeiro, aplique nas sequências exatas curtas de índice  $n+1$  e  $n$  para conseguir a sequência exata à direita dos co-núcleos. Depois, aplique nas sequências exatas curtas de índice  $n-1$  e  $n-2$  para conseguir a sequência exata à esquerda dos núcleos. Por fim, a sequência exata longa será formada pela sequência da cobra que é construída ao aplicarmos o lema para o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} A_n / \text{Im } \partial_{n+1}^A & \longrightarrow & B_n / \text{Im } \partial_{n+1}^B & \longrightarrow & C_n / \text{Im } \partial_{n+1}^C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \overline{\partial_n^A} & & \downarrow \overline{\partial_n^B} & & \downarrow \overline{\partial_n^C} & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker \partial_{n-1}^A & \longrightarrow & \ker \partial_{n-1}^B & \longrightarrow & \ker \partial_{n-1}^C \end{array}$$

Por fim, a prova da Proposição 5.7.1 é uma aplicação do Lema acima na sequência exata curta abaixo:

$$0 \longrightarrow \{C_k^{sing}(A), \partial_k(A)\} \xrightarrow{i} \{C_k^{sing}(X), \partial_k(X)\} \xrightarrow{j} \{C_k^{sing}(X, A), \partial_k(X, A)\} \longrightarrow 0$$

onde  $i$  é a inclusão e  $j$  é o mapa quociente.

**Proposição 5.7.3.** *A homologia relativa satisfaz o axioma da invariância por homotopia, ou seja, se  $f, g: X \rightarrow Y$  são homotópicos, então  $H_n(X) = H_n(Y)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .*

A sua prova é a combinação de dois lemas interessantes: um relativamente fácil e um bastante não trivial.

**Lema 5.7.4** (O fácil). *Dados  $f, g: \{A_i, \partial_i^A\} \rightarrow \{B_i, \partial_i^B\}$  dois morfismos de complexos de cadeia, então se  $f$  e  $g$  são homotópicos,  $H_n(f) = H_n(g)$ .*

**Lema 5.7.5** (O difícil). *Dadas  $f, g: X \rightarrow Y$  funções contínuas, se  $f$  e  $g$  são homotópicas então  $C(f)$  e  $C(g)$ , os respectivos morfismos induzidos no complexo singular, são homotópicos.*

A demonstração do lema difícil se resume a construir um “operador prisma”, que é, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , dado por

$$h_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i H \circ (\sigma \times Id)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}.$$

onde  $H$  é a homotopia entre  $f$  e  $g$ . Esses mapas vão definir a homotopia entre  $C(f)$  e  $C(g)$  e são chamados de operadores prismas pois tomam um simplexo singular  $\sigma$  e retornam uma decomposição de seu prisma (a imagem por  $H$  do simplexo multiplicado pelo intervalo  $[0, 1]$ ).

**Proposição 5.7.6.** *A homologia relativa satisfaz o axioma da excisão, ou seja, dados  $A \subset B \subset X$  com  $\bar{A} \subset \text{Int } B$ , a inclusão  $(X \setminus A, B \setminus A) \rightarrow (X, B)$  induz isomorfismos  $H_n(X \setminus A, B \setminus A) \rightarrow H_n(X, B)$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Equivalentemente, dados  $U, V \subset X$  com  $X = \text{Int } U \cup \text{Int } V$ , a inclusão  $(V, U \cap V) \rightarrow (X, U)$  induz isomorfismos  $H_n(V, U \cap V) \rightarrow H_n(X, U)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .*

Esse teorema é apenas uma aplicação do lema dos simplexes pequenos para a cobertura  $\mathcal{U} = \{U, V\}$  (que são dados pelo enunciado do teorema). A parte bastante complicada é a demonstração do lema dos simplexes pequenos, que envolve um processo chamado **divisão baricêntrica**.

A divisão baricêntrica acontece indutivamente. A ideia é pegar um simplexo e, sem diminuir sua dimensão, fazer com que ele fique menor e menor até que caiba em um dos abertos da minha cobertura.

Para o caso  $n = 0$ , a divisão baricêntrica de  $[v_0]$  é apenas o simplexo  $[v_0]$ . Para o caso  $n = 1$ , a divisão baricêntrica de  $[v_0, v_1]$  é  $[v_0, b_{01}] + [b_{01}, v_1]$ , onde  $b_{01}$  é o ponto médio de  $[v_0, v_1]$ . Indutivamente, a divisão baricêntrica de  $[v_0, \dots, v_n]$  é  $\sum_i [b, w_0^i, \dots, w_{n-1}^i]$ , onde  $[w_0^i, \dots, w_{n-1}^i]$  é um simplexo na divisão baricêntrica de uma das faces de  $[v_0, \dots, v_n]$  e  $b$  é o **baricentro** do simplexo, o ponto dado por  $b = \sum_i v_i / (n + 1)$ .

## 5.8 Sequência de Mayer-Vietoris

**Teorema 5.8.1** (Sequência de Mayer-Vietoris). *Dados  $A, B \subset X$  tais que  $X = \text{Int } A \cup \text{Int } B$ , temos uma sequência exata longa:*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Essa sequência é, nada mais nada menos, que a sequência exata longa retirada a partir da sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B) \longrightarrow C_n(A) \oplus C_n(B) \longrightarrow C_n(A + B) \longrightarrow 0.$$

Denotamos por  $C_n(A + B)$  o grupo gerado pelos simplexes que estão contidos em  $A$  ou contidos em  $B$ .

## 5.9 O isomorfismo de suspensão

**Definição 5.9.1.** *Dado um espaço topológico  $X$ , o quociente  $CX := X \times [0, 1] / X \times \{1\}$  é chamado **cone** de  $X$ . A **suspensão**  $SX$  de  $X$  é definida como  $CX / X \times \{0\}$ .*

Vamos agora calcular os grupos de homologia da suspensão de  $X$  utilizando a sequência de Mayer-Vietores. Se chamarmos de  $p$  o ponto para qual  $X \times \{1\}$  foi contraído e de  $q$  o ponto para o qual  $X \times \{0\}$  foi contraído, definiremos então  $A := SX - p$  e  $B := SX - q$ . Observe que  $A$  e  $B$  são homotopicamente equivalentes a  $CX$ . A intersecção  $A \cap B$  é homotopicamente equivalente a  $X$  e assim temos a sequência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(CX) \oplus H_n(CX) \longrightarrow H_n(SX) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow H_0(SX) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, suponha que  $X$  é conexo por caminhos (veja o lema 5.5.2). Assim  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . Além disso,  $CX$  é contrátil, em particular  $H_0(CX) = \mathbb{Z}$  e  $H_n(CX) = 0$  para  $n > 0$ .

A sequência acima se reduz a:



$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{n+1}(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow H_{n+1}(SX) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(SX) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow H_{n-1}(SX) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow H_0(SX) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Se  $n \geq 2$ , pela exatidão temos um isomorfismo  $H_{n-1}(X) = H_n(SX)$ . Para  $n = 1$  podemos analisar o final da sequência exata longa:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(SX) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow H_0(SX) \longrightarrow 0$$

Temos que  $H_1(SX) = 0$ , pois  $H_1(SX) \hookrightarrow \mathbb{Z}$  e  $\text{Im}(H_1(SX) \rightarrow \mathbb{Z}) = \ker(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2) = 0$ . O caso  $n = 0$  segue dos espaços em questão serem todos conexos por caminhos.

## 5.10 Teoria de Grau

**Definição 5.10.1.** Dada uma função contínua  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , podemos considerar o morfismo induzido  $H_n(f): H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$ . Identificamos  $H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$  e chamamos o número  $\deg(f) := H_n(f)(1)$  de **grau** de  $f$ .

- $\deg(\text{Id}) = 1$ , afinal  $H_n(\text{Id}) = \text{Id}$  e portanto  $H_n(\text{Id})(1) = 1$ ;
- Se  $f$  não for sobrejetora, então é homotópica a uma constante (via projeção estereográfica). Em particular,  $\deg(f) = 0$ ;
- $f \simeq g$  se, e somente se,  $\deg(f) = \deg(g)$ . A ida é tranquila, já que  $H_n(f) = H_n(g)$ . A volta é um teorema famoso provado por Hopf, por volta de 1925;
- $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$ , afinal,  $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$ . Em particular, se  $f$  é uma equivalência homotópica, então  $|\deg f| = 1$ ;
- Se  $f$  é uma reflexão em  $\mathbb{S}^n$ , então  $\deg f = -1$ ;
- O mapa antipodal de  $\mathbb{S}^n$  dado por  $x \mapsto -x$  possui grau  $(-1)^{n+1}$ , pois é a composição de  $n+1$  reflexões (uma em cada coordenada, já que  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ );
- Se  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  não possui pontos-fixos, então  $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ . Se  $f(x) \neq x$ , então o segmento de reta  $t \mapsto (1-t)f(x) - tx$  entre  $f(x)$  e  $-x$  não passa pela origem, portanto podemos definir uma homotopia entre  $f$  e  $-Id$  dada por

$$f_t(x) := \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}.$$

A seguir, vamos falar de uma técnica que é muito útil para calcular os graus da maioria dos mapas contínuos que aparecem na prática.

Considere  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , com  $n \neq 0$ , que possui uma fibra finita, ou seja, tal que existe  $y \in \mathbb{S}^n$  com  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Sejam  $U_i$  vizinhanças disjuntas dos elementos da fibra de  $y$  tais que  $f(U_i) \subset V$ , onde  $V$  é uma vizinhança de  $y$ . Sabemos que  $f(U_i \setminus \{x_i\}) \subset V \setminus \{y\}$  e, para cada  $i$ , temos o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} & & H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(V, V \setminus \{y\}) \\ & \swarrow \simeq_1 & \downarrow k_i & & \downarrow \simeq_2 \\ H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{x_i\}) & \xleftarrow{p_i} & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus f^{-1}(y)) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{y\}) \\ & \nwarrow \simeq_3 & \uparrow j & & \uparrow \simeq_4 \\ & & H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(\mathbb{S}^n) \end{array}$$

Os morfismos destacados  $p_i, j$  e  $k_i$  são dados por inclusões. Os dois isomorfismos da parte de cima são dados pelo axioma da excisão, enquanto os isomorfismos da parte de baixo vem do axioma da sequência exata longa.

Note que  $H_n(f) : H_n(U_i, U_i - x_i) \rightarrow H_n(V, V - y)$  pode ser visto como um endomorfismo de grupos de  $\mathbb{Z}$ . Seu grau é chamado de **grau local** de  $f$  em  $x_i$  e geralmente é denotado por  $\deg(f|_{x_i})$ .

**Proposição 5.10.2.** *Se  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  é contínuo, então  $\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}$ .*

## 6 Classificação de superfícies conexas e compactas

O trabalho desta seção será falar sobre a classificação das superfícies compactas e conexas.

**Definição 6.0.1.** *Uma **superfície** é um espaço topológico  $X$  tal que, para todo  $x \in X$ , existe  $V$  vizinhança de  $x$  homeomorfa a um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Além disso, pedimos que  $X$  seja de Hausdorff e que tenha base enumerável.*

**Definição 6.0.2.** *Uma **triangulação** de  $X$  é uma cobertura de **triângulos** em  $X$  (conjuntos homeomorfos ao 2-simplexo canônico) tal que cada aresta é face de exatamente dois triângulos adjacentes e a intersecção de dois triângulos distintos é vazia, um vértice ou uma aresta. Mais precisamente, essa é a definição de **pseudo-variedade** de dimensão 2, objeto frequentemente utilizado em topologia algébrica de variedades. Toda superfície admite uma triangulação, o que é conhecido como teorema de Radó.*

**Definição 6.0.3.** *A **soma conexa**  $X_1 \# X_2$  de duas superfícies  $X_1, X_2$  é a superfície obtida da seguinte forma:*

- *Retira-se um disco aberto pequeno de  $X_1$ , obtendo-se uma superfície que tem um círculo como bordo. Faz-se o mesmo com  $X_2$ .*
- *Cola-se as duas superfícies ao longo dos círculos.*

A soma conexa de uma superfície  $X$  qualquer e uma esfera é a superfície  $X$ , ou seja, a esfera é o elemento neutro da operação soma conexa. Além disso, essa operação é comutativa e associativa. Um exemplo de soma conexa é o bi-toro, obtido como soma de dois toros. O tri-toro vem da soma de um bi-toro e um toro. Se  $X$  é uma superfície, então denotaremos por  $nX$  a soma conexa de  $n$  cópias de  $X$ .

**Teorema 6.0.4** (Teorema de classificação de superfícies). *Toda superfície compacta e conexa é homeomorfa a uma, e somente uma, das seguintes superfícies:*

- $\mathbb{S}^2$  (a esfera bidimensional);
- $n\mathbb{T}^2$  (soma conexa de  $n$  cópias do toro bidimensional);
- $n\mathbb{P}^2$  (soma conexa de  $n$  cópias do plano projetivo).

Toda superfície pode ser obtida a partir da colagem de lados de um polígono plano.

**Definição 6.0.5.** *Um **diagrama plano** é um polígono com um número par de lados. Esses lados são nomeados e devemos sempre ter exatamente dois lados nomeados com a mesma letra ou símbolo. Além disso, lados devem ser orientados, ou seja, todos os lados devem ter indicações do sentido em que devem ser percorridos.*

Cada diagrama plano pode ser traduzido em uma sequência de letras, que serão os nomes de suas arestas. Essa sequência pode ser obtida ao escolhermos um vértice e começarmos a percorrer o contorno do polígono no sentido anti-horário, anotando o nome de cada aresta pela qual passamos. Se percorrermos o lado nomeado pela letra  $x$  e sua seta estiver em concordância com o sentido anti-horário, então o designamos por  $x$ , caso contrário, se a orientação do lado estiver oposta ao caminho percorrido no sentido anti-horário, então denotamo-o por  $x^{-1}$ . No quadrado da Figura 4,

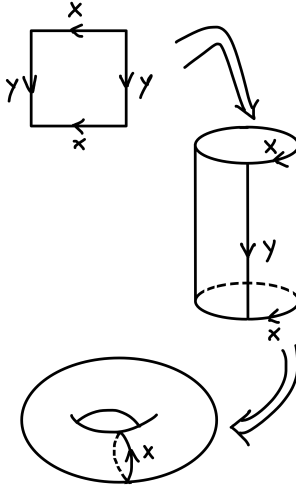


Figura 4: Diagrama plano do toro  $\mathbb{T}^2$

por exemplo, começando-se no vértice superior direito e percorrendo no sentido anti-horário obtemos  $xyx^{-1}y^{-1}$ .

Mas, afinal, como um diagrama plano representa uma superfície? Bem, basta colarmos tudo! Colocamos nesse polígono a topologia quociente que identifica arestas com o mesmo nome, preservando o sentido. As Figuras 4 e 5 (a primeira feita por mim, e a segunda retirada de [Sam]) mostram a colagem do diagrama plano do toro e a soma conexa de dois toros através dos seus diagramas planos.

Pelas figuras 4 e 5, podemos ver que as sequências que representam o toro e o bi-toro são, respectivamente,  $xyx^{-1}y^{-1}$  e  $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ . De maneira geral, a sequência da soma conexa de  $n$  toros representados por  $x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}$ , denotada  $n\mathbb{T}^2$ , é  $x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \cdots x_n y_n x_n^{-1} y_n^{-1}$ . A partir de agora, não farei mais distinção entre um diagrama plano e suas sequências.

**Lema 6.0.6.** *As seguintes operações em diagramas planos produzem diagramas que correspondem a superfícies homeomorfas às originais:*

- *Colapsar arestas opostas adjacentes:*  $\cdots xaa^{-1}y \cdots \mapsto \cdots xy \cdots$ ;
- *Cortar:*  $\cdots xy \cdots \mapsto \cdots xa$  e  $a^{-1}y \cdots$ ;
- *Colar:*  $\cdots xa$  e  $a^{-1}y \cdots \mapsto \cdots xy \cdots$ .

Utilizando o lema acima, podemos finalmente aprender a classificar as superfícies. A demonstração da classificação é feita em cinco passos e abaixo está um esboço para que possamos entendê-la.

**Definição 6.0.7.** *Dado um diagrama plano, um **par de arestas opostas** é um par de arestas da forma  $\cdots a \cdots a^{-1} \cdots$ . Já um **par de arestas trançadas** é um par de arestas da forma  $\cdots a \cdots a \cdots$ .*

1. Elimine todos os pares de arestas opostas adjacentes, utilizando o primeiro item do Lema 6.0.6. Se aqui o processo acabar, ou seja, ficarmos sem arestas, a superfície em questão será  $\mathbb{S}^2$ ;
2. Nomeamos os vértices do polígono de maneira que, vértices que após a colagem serão identificados, tenham o mesmo nome. Após isso, realizamos cortes e colagens espertos para que todos os vértices tenham o mesmo nome;
3. Agora, vamos pegar pares de arestas trançadas e colapsá-los através de cortes e colagens, de maneira que no final tenhamos pares de arestas trançadas adjacentes (uma ilustração do processo pode ser vista na Figura 10 de [Hua]). Se, após esse processo, nosso diagrama for do tipo  $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$  então nossa superfície é a soma conexa de  $n$  planos projetivos;

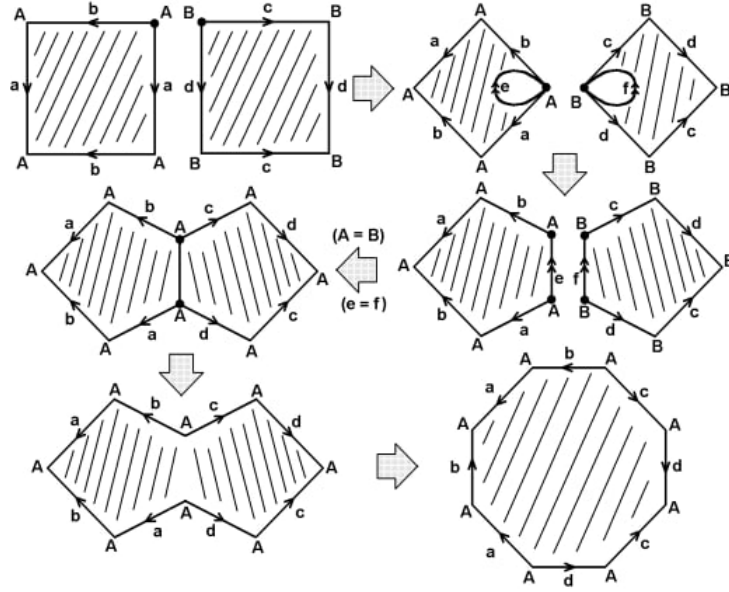


Figura 5: Soma conexa de dois toros ilustrada pelos seus diagramas planos

4. O próximo passo é transformar qualquer par de pares de arestas opostas em um pedaço da forma  $xyx^{-1}y^{-1}$  (uma ilustração do processo pode ser vista na Figura 12 de [Hua]);
5. Sobram duas possibilidades: soma conexa de toros ou uma soma conexa de toros com planos projetivos, ou seja, segmentos contendo  $xyx^{-1}y^{-1}zz$ . Nesse último caso, podemos terminar a classificação utilizando o resultado abaixo.

**Teorema 6.0.8.**  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ .

Uma demonstração do teorema acima, que é um desenho dos cortes e colagens, pode ser achada na Figura 13 de [Hua].

## Referências

- [Aur] Leandro F. Aurichi, Notas de topologia geral, 2017. Link: <https://sites.icmc.usp.br/aurichi/doku.php?id=curso:topologia2017>.
- [BoT] Herivelto Borges, Eduardo Tengan, Álgebra comutativa em quatro movimentos, Projeto Euclides, 2015.
- [Lag] Elon Lages, Grupo fundamental e espaços de recobrimentos, Projeto Euclides, 2012.
- [Hat] Allen Hatcher, Algebraic topology. Link: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [Rom] Roman Sauer, Algebraic Topology 20/21. Link: [https://www.youtube.com/playlist?list=PL2Rb\\_pWJf9JqgIR6RR3VFF2FwKCyaUUZn](https://www.youtube.com/playlist?list=PL2Rb_pWJf9JqgIR6RR3VFF2FwKCyaUUZn).
- [Sam] João C. V. Sampaio, Topologia das superfícies: uma introdução intuitiva. Link: [https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/xiiiebt\\_superficies.PDF](https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/xiiiebt_superficies.PDF).
- [Hua] Justin Huang, Classification of Surfaces. Link: <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Huang.pdf>.
- [Gir] Lucas Giraldo A. Coimbra, Correspondência de Galois e mais Grupos Fundamentais. Link: <https://lucasgac.github.io/notes/fundamental-group/04.html>.