Guía de Ejercicios - Sistemas de Tiempo Discreto

28 de agosto de 2025

1. Discretización por ZOH

1. Dado el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -a\,x + b\,u$$
$$y = c\,x$$

   Si la entrada es constante sobre períodos de tiempo T, obtener el sistema muestreado y evaluar cómo se mueven los polos según se varía T

2. Derivar los sistemas de tiempo discreto correspondientes a los siguientes de tiempo continuo. Considerar el uso de un ZOH

   a)

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Comprobar que es un doble integrador

   b)

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Comprobar que corresponde a un motor

c)

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué clase de sistema es?

d)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 3u$$

e)

$$\frac{d^3y}{dt^3} = u$$

3. Se asume que las siguientes ecuaciones en diferencias describen sistemas en tiempo continuo muestreados con un circuito *zero-order hold* y período de muestreo h. Determinar, si es posible, los correspondientes sistemas en tiempo continuo.

a)

$$y(kh) - 0{,}5\, y(kh-h) = 6\, u(kh-h)$$

b)

$$x(kh+h) = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 1 \\ 0 & -0{,}3 \end{bmatrix} x(kh) + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}7 \end{bmatrix} u(kh)$$
$$y(kh) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(kh)$$

c)

$$y(kh) + 0{,}5\, y(kh-h) = 6\, u(kh-h)$$

¿Es posible reconstruir siempre el sistema de tiempo continuo?

4. Considere el sistema continuo dado por

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)}.$$

Suponga que la entrada es una suma de impulsos en los instantes de muestreo, es decir,

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\big(t-kh\big)\, u(kh),$$

donde $\delta(\cdot)$ es el impulso de Dirac y $h > 0$ es el período de muestreo.

Determine la representación en tiempo discreto del sistema.

5. Determinar la función de transferencia por pulsos (pulse-transfer function) del siguiente sistema en tiempo discreto:

$$\begin{aligned} x(kh+h) &= \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(kh) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(kh) \\ y(kh) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(kh) \end{aligned}$$

6. Si $\beta < \alpha$ el siguiente sistema se conoce como red de adelanto

$$G(s) = \frac{s+\beta}{s+\alpha}$$

Para el siguiente sistema discreto

$$H(z) = \frac{z+b}{z+a}$$

determinar bajo qué condiciones funciona como red de adelanto

7. Sea el sistema

$$G(s) = \frac{s+b}{s+a}$$

Obtener las condiciones para que el sistema muestreado con T tenga inversa estable

2. Análisis de sistemas discretos

1. Dado el siguiente sistema de tiempo continuo

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1{,}4s + 1}$$

Obtener el sistema $H(z)$ muestreado con ZOH para $T = 0{,}4$. Calcular los márgenes de ganancia para ambos. ¿Qué ocurre con el mismo al variar el tiempo de muestreo?

2. Obtener el error estacionario al escalón y a la rampa del siguiente sistema:

$$y_k = H(q)u_k = \frac{q-0{,}5}{(q-0{,}8)(q-1)}$$

3. Dado el sistema discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

(a) Determine una secuencia de control $\{u(0), u(1), \dots\}$ tal que el sistema pase desde el estado inicial $x^\top(0) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ hasta el origen en un número finito de pasos.

(b) ¿Cuál es el número mínimo de pasos necesario para resolver el problema planteado en (a)?

(c) Explique por qué no es posible encontrar una secuencia de señales de control tal que el estado $x^\top(0) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ sea alcanzado partiendo desde el origen.

4. Obtener el sistema muestreado de

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 0{,}2s + 1}$$

Determinar los valores de T para los que el sistema tendrá oscilaciones ocultas