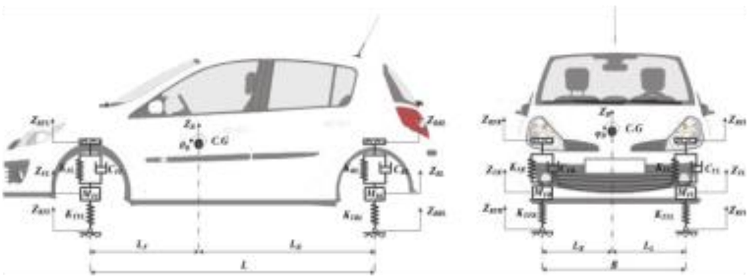
	TRABAJO PRACTICO N.º; 4 *Modos naturales y función de transferencia*	**Alumno**: Lucas Axel Gamaleri **N.º;** 60735 / 8
		Fecha: Oct - 2018

Introducción

Se busca modelar la dinámica de suspensión de un automóvil para representar los transitorios tras el movimiento del automóvil en terreno irregular. Y se intenta encontrar las relaciones entre las variaciones de altura del terreno y el movimiento de la carrocería.



Las cuestiones que se intentarán responder son:

- ¿Qué propiedades de la dinámica de la suspensión se podrían ajustar a través de una adecuada selección de las constantes elásticas y los amortiguadores en relación a las características dinámicas de la suspensión?

- ¿Qué variaciones sufriría la dinámica de la suspensión al variar la carga transportada por el automóvil y/o su distribución?

Desarrollo

Para encontrar las propiedades de la dinámica de la suspensión del automóvil, se requiere un modelo matemático que represente tanto los amortiguadores como el automóvil mismo.

Con este criterio se dividió el modelo en dos partes: por un lado se analizará la dinámica del automóvil considerando ciertas hipótesis simplificadoras del problema. Y luego se analizará "en detalle" las propiedades dinámicas de cada amortiguador por separado.

Por último se deben unir los modelos de detalle con la dinámica del automóvil para lograr un modelo matemático apropiado para responder a las cuestiones mencionadas en la introducción.

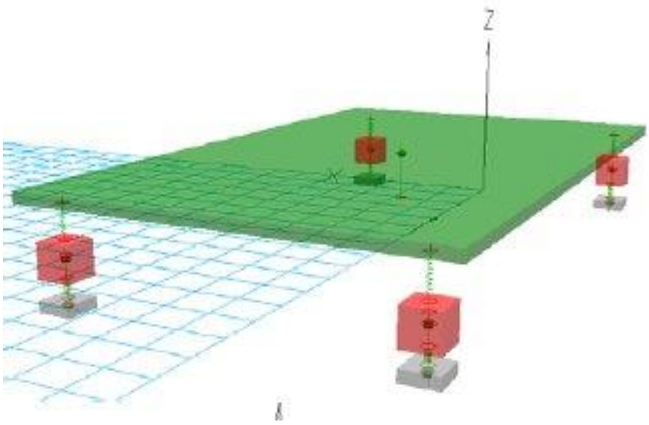
Desarrollo del modelo

1 Modelo físico del automóvil

Para simplificar el modelo se suponen las siguientes hipótesis:

1. Se asume la carrocería como un cuerpo rígido.
2. El vehículo es simétrico.
    1. Cada rueda tiene una suspensión independiente.
3. Las ruedas son rígidas y no se despegan del terreno.

Planteando las cuatro hipótesis anteriores se llega a un modelo de cuerpo rígido similar al siguiente esquema:

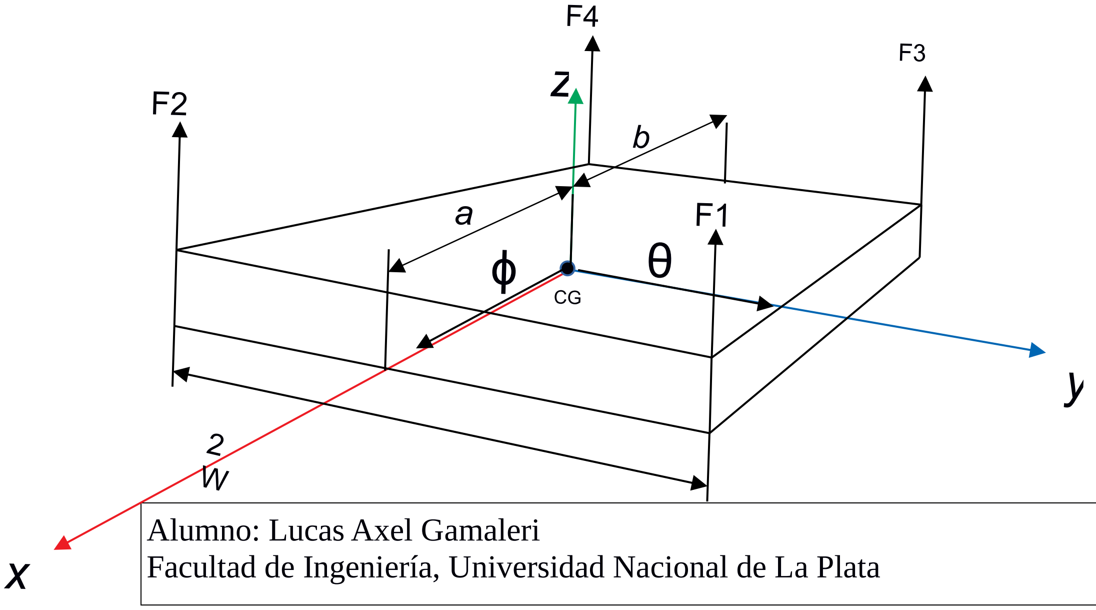


El modelo tiene tres grados de libertad que son los relevantes en el estudio. Los mismos son:

- Ángulo de cabeceo: θ [rad]
- Ángulo de rolido: ϕ [rad]
- Desplazamiento vertical: v [cm]

Como se puede observar en el esquema, las únicas fuerzas consideradas son las relativas a los amortiguadores.

A continuación están representadas las fuerzas aplicadas y su representación en el modelo.



Símbolo	Significado	Unidad
F_1	Fuerza ejercida por suspensión delantera izquierda	*Newton*
F_2	Fuerza ejercida por suspensión delantera derecha	*Newton*
F_3	Fuerza ejercida por suspensión trasera izquierda	*Newton*
F_4	Fuerza ejercida por suspensión trasera derecha	*Newton*
$2 \cdot W$	Ancho entre ejes	*Metros*
a	Distancia CG al eje delantero	*Metros*
b	Distancia CG al eje trasero	*Metros*
ϕ	Ángulo de rolido	*Radianes*
θ	Ángulo de cabeceo	*Radianes*

De éste modelo se plantean tres ecuaciones de la dinámica tomando momentos en CG, siento éste el punto donde se encuentra ubicado el centro de masa del automóvil. El eje de coordenadas se supone solidario al cuerpo rígido. Las ecuaciones son:

Movimiento vertical.

$m\dot{w} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$**(1.1)**

Movimiento de rolido y cabeceo.

$I_y\dot{\theta} = -(F_1 + F_2)a + (F_3 + F_4)b$**(1.2)**

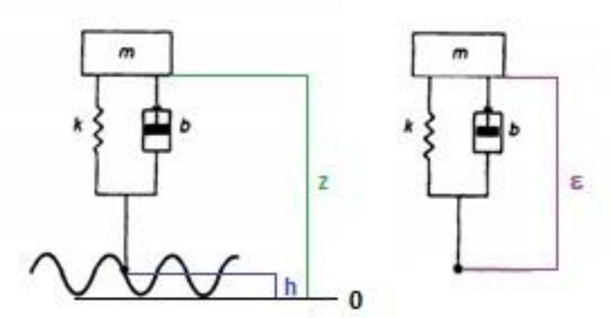
$I_x\dot{\phi} = (F_1 + F_3)W - (F_2 + F_4)W$**(1.3)**

2 Modelo en detalle, suspensión – amortiguador

Para simplificar el modelo se suponen las siguientes hipótesis:

- Neumáticos rígidos

- Resortes en régimen elástico puro (Ley de Hook)
- Deformaciones lentas en los resortes (Se desprecia efecto de histéresis de los materiales y el aumento del módulo de elasticidad debido a la velocidad de deformación)



$F_i = -K_i\varepsilon_i - b_i\dot{\varepsilon}_i$ **(2.1)**

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= z - h_1 - (a+b)\theta + 2W\phi \\ \varepsilon_2 &= z - h_2 - (a+b)\theta - 2W\phi \\ \varepsilon_3 &= z - h_3 + (a+b)\theta + 2W\phi \\ \varepsilon_4 &= z - h_4 + (a+b)\theta - 2W\phi \end{aligned} \quad \textbf{(2.2)}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \dot{z} - \dot{h}_1 - (a+b)\dot{\theta} + 2W\dot{\phi} \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \dot{z} - \dot{h}_2 - (a+b)\dot{\theta} - 2W\dot{\phi} \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \dot{z} - \dot{h}_3 + (a+b)\dot{\theta} + 2W\dot{\phi} \\ \dot{\varepsilon}_4 &= \dot{z} - \dot{h}_4 + (a+b)\dot{\theta} - 2W\dot{\phi} \end{aligned} \quad \textbf{(2.3)}$$

Además de las hipótesis simplificativas, se considera que los resortes delanteros son iguales, al igual que los resortes traseros (simetría respecto al plano “XZ”).

$$K_1 = K_2 = K_A \wedge b_1 = b_2 = b_A$$

$$K_3 = K_4 = K_B \wedge b_3 = b_4 = b_B$$

Reemplazando las fuerzas de la ecuación **(2.1)** en las ecuaciones de la dinámica se obtiene el sistema de ecuaciones.

$$m\dot{w} = -K_A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - K_B(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) - b_B(\dot{\varepsilon_3} + \dot{\varepsilon_4}) - b_A(\dot{\varepsilon_1} + \dot{\varepsilon_2})$$

$$I_x\dot{p} = [K_A(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + b_A(\dot{\varepsilon_2} - \dot{\varepsilon_1}) + K_B(\varepsilon_4 - \varepsilon_3) + b_B(\dot{\varepsilon_4} - \dot{\varepsilon_3})]W \quad \textbf{(3)}$$

$$I_y\dot{q} = [K_A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + b_A(\dot{\varepsilon_1} + \dot{\varepsilon_2})]a - [K_B(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) - b_B(\dot{\varepsilon_3} + \dot{\varepsilon_4})]b$$

$$w = \dot{z}$$
$$p = \dot{\phi}$$
$$q = \dot{\theta}$$

Análisis de función de transferencia

Se expresa el modelo dinámico de forma matricial de la siguiente forma, quedando la ecuación de estados como:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Reemplazando los términos de las ecuaciones **(2.2)** y **(2.3)** en el sistema de ecuaciones **(3)** se obtiene el sistema matricial $M\ddot{X} = C\dot{X} + KX + [\quad]h$ donde los vectores de estados son

$$\ddot{X} = \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \; ; \dot{X} = \begin{Bmatrix} w \\ p \\ q \end{Bmatrix}; \quad X = \begin{Bmatrix} z \\ \phi \\ \theta \end{Bmatrix} \; ; \quad u = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{Bmatrix}$$

y las matrices de coeficientes siendo:

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{pmatrix}$$

$$[B] = \begin{pmatrix} -2(b_A + b_B) & 0 & 2(a+b)(b_A - b_B) \\ 0 & -2W^2(b_A + b_B) & 0 \\ 2(a+b)(b_A - b_B) & 0 & -2(a+b)(ab_A + bb_B) \end{pmatrix}$$

$$[K] = \begin{pmatrix} -2(K_A + K_B) & 0 & 2(a+b)(K_A - K_B) \\ 0 & -2W^2(K_A + K_B) & 0 \\ 2(a+b)(K_A + K_B) & 0 & -2(a+b)(aK_A + bK_B) \end{pmatrix}$$

$$[\quad] = \begin{pmatrix} K_A & K_A & K_B & K_B \\ WK_A & -WK_A & WK_B & -WK_B \\ -aK_A & -aK_A & bK_B & bK_B \end{pmatrix}$$

Función de transferencia

La función de transferencia se define como el cociente entre las transformadas de Laplace de la **salida** de un sistema y la transformada de la **entrada** a un sistema. En el caso de salidas múltiples (sistemas de más de un grado de libertad), cada par entrada/salida define una función de transferencia distinta

$$\boxed{G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} = \frac{b_n s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}}$$

En general la función de transferencia está determinada por variables que se ponen de manifiesto físicamente, como una distancia, un voltaje, etc. Es decir que se pueden medir.

La función de transferencia puede ser utilizada para conocer la salida de un sistema generado por una entrada conocida.

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

donde G(s) y U(s) son ambas conocidas.

Tomando la transformada inversa de Laplace a ambos lados de la ecuación, la salida es:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{G(s)U(s)\}$$

Los cálculos se realizan numéricamente para un automóvil como ejemplo (cuyas propiedades se encuentran en un archivo), haciendo uso de funciones de Matlab. Donde para cada una de las variables de estado se obtuvieron las siguientes funciones racionales G(s).

$$h_1 = \frac{28000}{s+70} \qquad \dot{h}_1 = \frac{28000}{s+70}$$

$$h_2 = \frac{28000}{s+70} \qquad \dot{h}_2 = \frac{2000}{s+70}$$

$$h_3 = \frac{28000}{s+70} \qquad \dot{h}_3 = \frac{2000}{s+70}$$

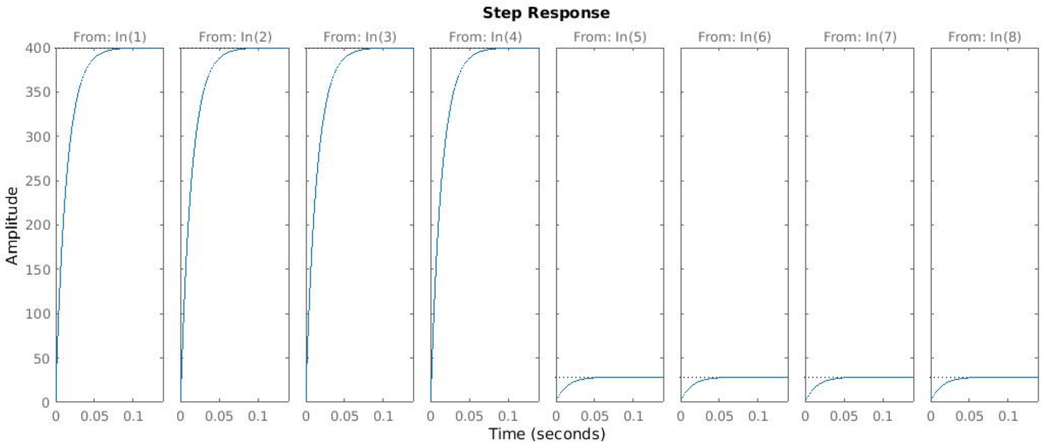
$$h_4 = \frac{28000}{s+70} \qquad \dot{h}_4 = \frac{2000}{s+70}$$

Al multiplicar estas funciones por una función U(s) y realizar la antitransformada de Fourier, se obtiene la función de transferencia.

Una forma muy generalizada de evaluar las características de un proceso dinámico es la de computar valores que parametricen la respuesta a una perturbación de tipo escalón.

Este tipo de perturbación es en general fácil de generar experimentalmente, y produce un desequilibrio teóricamente instantáneo en t = 0 , poniendo en evidencia la respuesta del sistema de forma limpia.

Para cada una de las variables, se muestra la respuesta a una perturbación de tipo impulso donde se puede observar el tiempo de establecimiento



En el mismo repositorio donde se encuentra ubicado el modelo, está la gráfica original creada con Matlab