

# Trabajo Práctico Entregable N°2

Resolución de ecuaciones no lineales

Facultad: Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas.

Carrera: Ingeniería Informática

Materia: Cálculo Numérico

Alumno: Garcia, Lucas Enedín

## I. INTRODUCCIÓN

Realizaremos un ejercicio de práctica en el cual se plantea un problema que contiene una función no lineal a la cual debemos calcularle sus raíces utilizando diferentes métodos de resolución para ecuaciones no lineales. Dichos métodos fueron vistos en clase y se hará una breve descripción de los que fueron aplicados para la resolución del ejercicio planteado.

## II. MÉTODOS A UTILIZAR

### Método de Bisección:

Este método procede buscando una raíz de una función  $f(x)$  propuesta en la mitad de un intervalo  $(a,b)$ . Y repitiendo iterativamente este procedimiento.

Para ello, la  $f(x)$  debe ser continua en  $[a,b]$  y tiene que cumplirse que  $f(a)*f(b) < 0$ , es decir que sean de signos distintos. Con estas condiciones se cumple el Teorema del valor medio, el cual nos garantiza que existe un valor  $p$  en  $(a,b)$  tal que  $f(p) = 0$ , por lo tanto el método de Bisección siempre converge.

### Método de Newton-Raphson:

Para este método es necesario que la función  $f(x)$  sea continuamente diferenciable 2 veces. A partir de un desarrollo en serie de Taylor alrededor de un valor  $\bar{x}$  de la siguiente forma:

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(p))$$

Donde:

- $\bar{x}$  es una aproximación a la raíz  $p$  de  $f(x)$ . ( $|\bar{x} - p|$  pequeño).
- $\xi(p)$  está entre  $p$  y  $\bar{x}$ .

Despreciando el término cuadrático frente al lineal y despejando  $p$  se llega a que:

$$p \cong \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

Con  $f'(\bar{x}) \neq 0$ .

Por lo que el método Newton-Raphson construye una sucesión  $\{p_n\}$  con la fórmula de recurrencia:

$$p_n \cong p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad n \geq 1$$

**Método de la Secante:**

Este método es similar al anterior con la diferencia que utiliza una aproximación a la derivada de  $f$ , con el fin de evitar tener que calcularla, ya que no siempre es sencillo de obtener.

Se aproxima a la derivada, en la iteración  $n$ :

$$f'(p_n) \approx \frac{f(p_n) - f(p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}}$$

De esta manera, la fórmula del Método de la Secante es:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{(p_n - p_{n-1}) \cdot f(p_n)}{f(p_n) - f(p_{n-1})}$$

**Otros métodos:**

**Método de Punto Fijo:** transforma el problema de hallar un cero de una función  $f(x)$  en otro de hallar el punto fijo de  $g(x)$ . donde:

$$g(x) = x + f(x) \quad (2)$$

el valor de  $x$  que verifica la ecuación  $f(x) = 0$  también verifica la ecuación (2).

El método de Newton-Raphson puede verse como un caso del método de Punto Fijo, donde  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

**Método de Regula Falsi (falsa posición):** Es similar al método de la Secante con la diferencia de que, en cada iteración, para trazar la secante, toma los dos últimos puntos que acotan la raíz buscada, como lo hace el método de Bisección. Por ende, es una combinación de ambos métodos.

---

### III. ENUNCIADO

La energía térmica total de un dispositivo está dada por la expresión:

$$E(t) = \left( \left( t + \frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{3} \right) e^{-t}$$

para cada instante de tiempo  $t$ .

- Determinar los momentos en los que la energía del dispositivo es igual a 1,5.
- Determinar la máxima energía del sistema y en qué tiempo ocurre.
- Determinar el instante de tiempo en donde se da la máxima tasa de crecimiento instantánea de la energía.

Justificar cuál método eligió para resolver cada inciso, destacando las ventajas del mismo.

### IV. RESOLUCIÓN

a) Momentos en los que la energía del dispositivo es igual a 1,5:

Observando la gráfica de la energía respecto al tiempo se puede ver que hay 2 puntos en los cuales  $E(t)$  interseca la recta horizontal que se marcó en 1.5, es decir, que hay 2 momentos en los que la Energía térmica es igual a 1.5. Vemos que el primer momento se da antes de llegar a  $t=2$  y el segundo momento se da aproximadamente en  $t = 4$ .

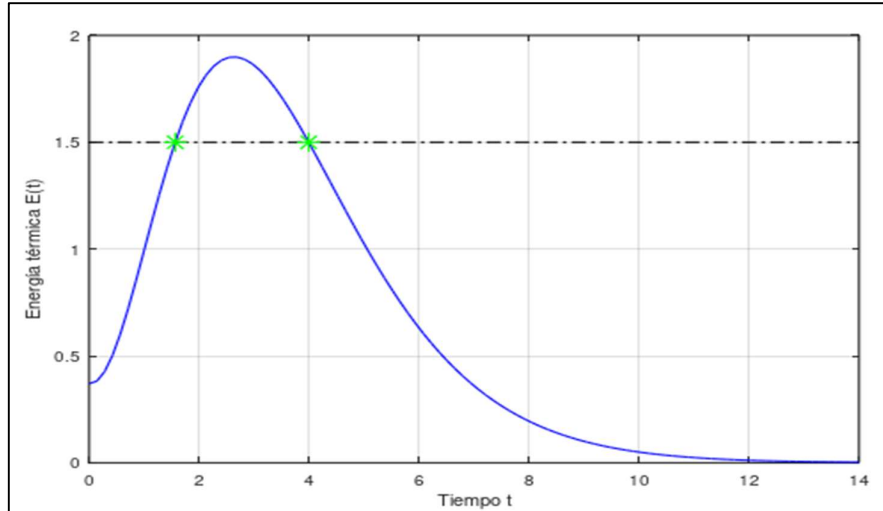


Figura 1: Gráfica de  $E(t)$  marcando los valores donde  $E(t) = 1.5$

Para obtener resultados más precisos, primeramente, definimos una función  $f(t)$  de la siguiente forma:

$$f(t) = E(t) - 1.5$$

$$f(t) = \left( \left( t + \frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{3} \right) e^{-t} - 1.5$$

Como debemos hallar los valores de  $t$  en donde  $E(t) = 1.5$ , utilizamos esta nueva función  $f(t)$  para la ecuación  $f(t) = 0$ . De esta manera, las raíces de la función serán los valores que estamos buscando para  $E(t)$ .

En este inciso se utilizaron 2 algoritmos para cada raíz, primeramente, se hicieron 3 iteraciones con el método de Bisección, con el fin de acercarnos al valor de la raíz. Luego aplicamos el método de Newton-Raphson tomando como punto inicial el valor obtenido en el algoritmo anterior y obtuvimos que la Energía del dispositivo llega a 1.5 cuando  $t = 1.5649$  y  $t = 3.9924$ .

### ¿Por qué se aplicaron 2 algoritmos?

El primer algoritmo (Bisección) tiene convergencia global, es decir que si hay un intervalo  $[a,b]$  que contiene a la raíz, este método siempre converge. Sin embargo, su convergencia es lenta.

El segundo algoritmo (Newton-Raphson) tiene convergencia local, es decir que el valor inicial  $x_0$  debe ser cercano a la raíz buscada, de lo contrario puede que el método no converja. Sin embargo, si el valor inicial  $x_0$  está cerca de la raíz y dicha raíz es simple, entonces el método tiene convergencia cuadrática.

Por lo tanto, es conveniente realizar algunas iteraciones con el método de Bisección para acercarnos a la raíz, y luego aplicar Newton-Raphson para acelerar la convergencia.

#### b) Valor de la máxima energía del sistema y el tiempo en el que ocurre:

Debemos calcular los puntos críticos utilizando la primera derivada de  $E(t)$ , la cual es:

$$E'(t) = \left( 3 \left( t + \frac{1}{3} \right)^2 - \left( t + \frac{1}{3} \right)^3 - \frac{1}{3} \right) e^{-t}$$

En la Figura 2 se observa la función de Energía térmica  $E(t)$  (en azul), y su derivada  $E'(t)$  (en rojo).

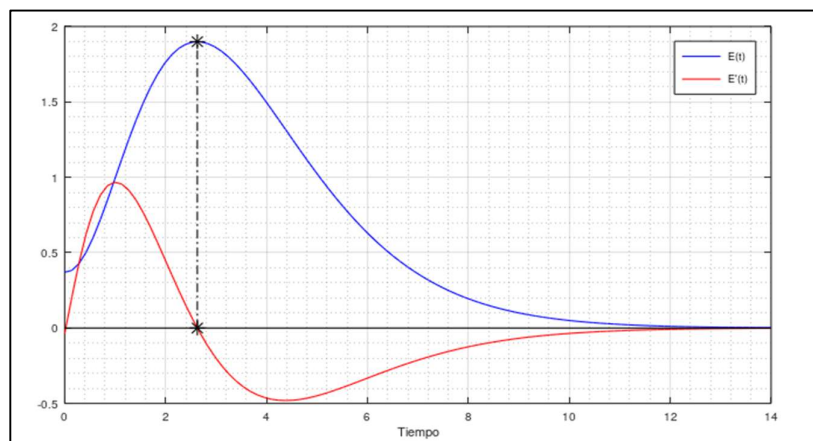


Figura 2: Gráfica de la función  $E(t)$  junto con su derivada.

Vemos que  $E(t)$  toma el valor máximo cuando  $E'(t) = 0$ .

En este inciso utilizaremos los mismos métodos del inciso anterior, pero trabajándolos por separado con el fin de obtener una comparación entre ambos.

Para utilizar el método de Newton-Raphson fue necesario calcular también la segunda derivada de la función  $E(t)$ , la cual es:

$$E''(t) = \left( 6 \left( t + \frac{1}{3} \right) - 6 \left( t + \frac{1}{3} \right)^2 + \left( t + \frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{3} \right) e^{-t}$$

Ya que toma como función principal  $f(t) = E'(t)$ , y se necesita la derivada de ésta  $f(t)$ .

Con ambos algoritmos, tanto con el algoritmo de Bisección, por un lado, como con el de Newton-Raphson por otro, se llegó a que la máxima energía del sistema es de

$E_{\text{MAX}} = 1.8997$  en el tiempo  $t = 2.6287$ .

### Comparación de los métodos:

En la Figura 3 se observa claramente la diferencia en la convergencia aplicando el método de Bisección y, por otro lado, el método Newton-Raphson.

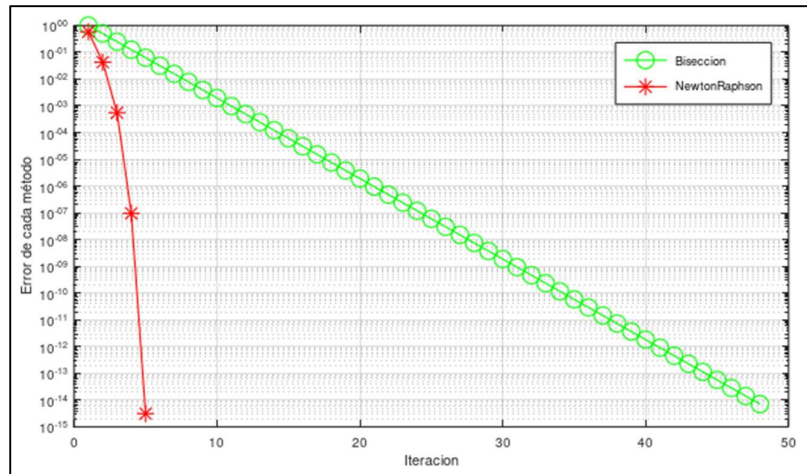


Figura 3: Tasa de convergencia del Método de Newton-Raphson y del Método Bisección.

En tan sólo 5 iteraciones Newton-Raphson llega al resultado obtenido con una tolerancia de  $1e-14$ , mientras que al método de Bisección le llevó 48 iteraciones para llegar al mismo resultado. Sin embargo, deben tenerse en cuenta los parámetros dados a cada método. En este caso, para Bisección se tomó el intervalo  $[1; 3]$  y el valor inicial para Newton-Raphson fue  $x_0 = 2$  el cual está lo suficientemente cerca de la raíz. Si el valor inicial fuera otro, por ejemplo  $x_0 = 1$ , Newton-Raphson ya no convergería debido a la forma de función y a que el valor inicial está relativamente lejos de la raíz. Mientras que, si se tomara otro intervalo para el método de Bisección, por ejemplo  $[1; 40]$ , este seguiría convergiendo, aunque le lleve más iteraciones.

c) Tiempo en donde se da la máxima tasa de crecimiento instantánea de la energía:

Para este punto se hace uso de la segunda derivada de  $E(t)$ , la cual vimos en el inciso anterior que es:

$$E''(t) = \left( 6 \left( t + \frac{1}{3} \right) - 6 \left( t + \frac{1}{3} \right)^2 + \left( t + \frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{3} \right) e^{-t}$$

En la Figura 4 se observa la función de la derivada primera de la Energía térmica  $[E'(t)]$  (en rojo), y su derivada  $E''(t)$  (en magenta).

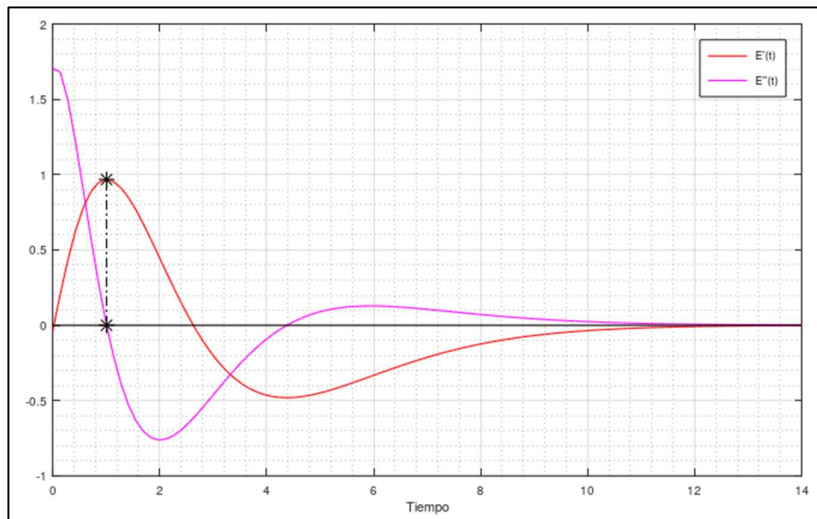


Figura 4: Gráfica de la primera y segunda derivada de  $E(t)$ .

Vemos que la razón de cambio de energía respecto al tiempo, es decir  $E'(t)$ , toma el valor máximo cuando  $E''(t) = 0$ . Para este inciso utilizamos el Método de la Secante con el fin de evitar calcular la tercera derivada de  $E(t)$ .

Podemos ver que el valor máximo de  $E'(t)$  se encuentra entre  $t=0$  y  $t=2$ . Tomando esos valores como puntos iniciales del método se llegó a que en el instante  $t = 1.0079$  se da la máxima tasa de crecimiento instantánea de la energía, la cual es  $E'(t) = 0.9674$ .

## V. SCRIPTS

En las siguientes figuras se observan los Scripts desarrollados en Octave para la resolución del ejercicio.

```

=====INCISO A=====
#Funcion de Energia termica E(t):
E = @(t) ((t+1/3).^3+1/3).*e.^(-t);
#Primera derivada E'(t):
dE = @(t) e.^(-t).*(3*(t+1/3).^2-((t+1/3).^3+1/3));

#Intervalo de tiempo
t = linspace(0,14,100);

f = @(t) E(t) - 1.5; %funcion auxiliar f(t) = E(t) - 1.5
      %derivada de f(t) = dE(t)

%-----Aplicamos primero Biseccion y luego NewtonRaphson para cada raiz-----
tol = 1e-14;
kmax = 100;

disp('Biseccion, NewtonRaphson - RAI2 1')
[x0_r1, rhB_r1, itB_r1] = Biseccion (f, 0, 2, 3, tol); %a = 0, b=2, maxit = 3.
x0_r1 %Valor inicial para NewtonRaphson
[r1, rhNR_r1, itNR_r1] = NewtonRaphson(f, dE, x0_r1, tol, kmax);
Tiempo_t1 = r1 %Valor buscado t1 donde E(t1) = 1.5

disp('Biseccion, NewtonRaphson - RAI2 2')
[x0_r2, rhB_r2, itB_r2] = Biseccion (f, 2, 5, 3, tol); %a = 2, b=5, maxit = 3.
x0_r2 %Valor inicial para NewtonRaphson
[r2, rhNR_r2, itNR_r2] = NewtonRaphson(f, dE,x0_r2, tol, kmax);
Tiempo_t2 = r2

#Gráfica de la funcion E(t):
figure(2)
plot(t,E(t),'b');
grid on
hold on
line([0,14],[1.5,1.5],"linestyle", "-.-","color","k");
plot(r1,1.5,'*g',r2,1.5,'*g')
%title('Grafica de E(t) marcando los valores cuando E(t)=1.5')
xlabel('Tiempo t');
ylabel('Energía térmica E(t)')
hold off;
=====

```

Figura 5: Script para el inciso a.



```

=====INCISO B=====
#Funcion de Energia termica E(t):
E = @(t) ((t+1/3).^3+1/3).*e.^(-t);
#Primera derivada E'(t):
dE = @(t) e.^(-t).*(3*(t+1/3).^2-((t+1/3).^3+1/3));
#Segunda derivada E''(t):
ddE = @(t) e.^(-t).*(6*(t+1/3) - 6*(t+1/3).^2 + ((t+1/3).^3) + 1/3);
#Intervalo de tiempo
t = linspace(0,14,100);

disp('Biseccion') %intervalo[1,3], maxit=100, tol = 1e-14
[x0, rhB, itB] = Biseccion (dE, 1, 3, 100, 1e-14);
tiempoMAX_E = x0
maximaEnergia_B = E(x0)

disp('NewtonRaphson') %punto inicial p0 = 2, tol = 1e-14, maxit=100, tol = 1e-14
[rNR, rhNR, itNR] = NewtonRaphson(dE, ddE,2, 1e-14, 100);
tiempoMAX_E = rNR
maximaEnergia_NR = E(rNR)

figure(3)
plot(t,E(t),'b-',t,dE(t),'r-')
hold on
grid on
grid minor
plot(rNR,maximaEnergia_NR,'k*')
plot(rNR,0,'k*')
line([0,14],[0,0],'color','k')
line([rNR,rNR],[0,maximaEnergia_NR],'linestyle','-.','color','k')
hold off
xlabel('Tiempo')
Funciones = {"E(t)", "E'(t)"};
legend(Funciones);
=====
#-----Comparaciones de los métodos: Biseccion vs. Newton-Raphson-----
figure(4)
semilogy(rhB,'g-o')
hold on
grid on
semilogy(rhNR,'r-*')
hold off
%title('Tasa de Convergencia para el inciso B')
xlabel('Iteracion')
ylabel('Error de cada método')
Metodos = {'Biseccion', 'NewtonRaphson'};
legend(Metodos);
=====

```

Figura 6: Script para el inciso b.

```

=====INCISO C=====
#Primera derivada E'(t):
dE = @(t) e.^(-t).*(3*(t+1/3).^2-((t+1/3).^3+1/3));
#Segunda derivada E''(t):
ddE = @(t) e.^(-t).*(6*(t+1/3) - 6*(t+1/3).^2 + ((t+1/3).^3) + 1/3);

#Intervalo de tiempo
t = linspace(0,14,100);

disp('M. Secante para el punto c')
%[raiz,error, iteraciones] = Secante(funcion, x0, x1, iteracion_max, tolerancia)
[r, rh, it] = Secante (ddE, 0, 2, 100, 1e-14);
tiempo = r
maximaRazondeCambiodeE = dE(r)

figure(3)
plot(t,dE(t),'r-',t,ddE(t),'m-')
hold on
grid on
grid minor
plot(r,maximaRazondeCambiodeE,'*k',r,0,'*k')
line([0,14],[0,0],'color','k')
line([r,r],[0,maximaRazondeCambiodeE],'linestyle','-.','color','k')
hold off
xlabel('Tiempo')
Funciones = {"E'(t)", "E''(t)"};
legend(Funciones);
=====

```

Figura 7: Script para el inciso c.

## VI. ALGORITMOS

En las siguientes figuras se observan los algoritmos de cada método desarrollados en Octave:

```
function [x, rh, it] = Biseccion (f, a, b, maxit, tol)
    fa = f(a);
    fb = f(b);
    if (fa*fb>0)
        error('No se cumple la regla de los signos.');
```

```
    endif
    it = 0;
    while (it < maxit)
        it++;
        x = a + (b-a)/2;
        fx = f(x);

        if (fx*fb < 0)
            rh(it) = max(abs([fx,b-x]));
            fa = fx;
            a = x;
        else
            rh(it) = max(abs([fx,x-a]));
            fb = fx;
            b = x;
        endif
        if (rh(it)<tol)
            break;
        endif
    endwhile
endfunction
```

Figura 8: Algoritmo del método de Bisección.

```
function [x, rh, it] = NewtonRaphson(f, df, x0, tol, kmax)
    it = 0;
    while it<kmax
        it+=1;
        x = x0 - f(x0)/df(x0);
        rh(it) = abs(x-x0);
        if rh(it)<tol;
            break;
        endif
        x0 = x;
    endwhile
endfunction
```

Figura 9: Algoritmo del método de Newton Raphson.

```
function [x, rh it] = Secante (f, x0, x1, kmax, tol)
    it = 0;
    fx0 = f(x0);
    fx1 = f(x1);

    if sign(fx0)*sign(fx1)>0
        error ('Los limites del intervalo medido en f son del mismo signo');
```

```
    endif

    while (it<kmax)
        it++;
        x = x1 - fx1*(x1 - x0)/(fx1 - fx0);
        fx = f(x);
        rh(it) = abs(fx);
        if rh(it)< tol && abs(x - x1) <tol
            break;
        endif
        fx0 = fx1;
        fx1 = fx;
        x0 = x1;
        x1 = x;
    endwhile
endfunction
```

Figura 10: Algoritmo del método de la Secante.

En conclusión, vimos que algunos métodos tienen la ventaja de converger más rápido como es el caso de Newton-Raphson, pero tienen la desventaja de que su convergencia sea local. Por ese motivo, es conveniente combinar algunos métodos de manera que podamos asegurar la convergencia, pero también que podamos llegar al resultado de manera más rápida y eficiente.