

## Cálculo Numérico 2022

### Trabajo Práctico 7

#### Algoritmos para problemas de valores iniciales

**Ejercicio 1 (Aula):** Clasifique los siguientes esquemas en métodos de un paso, multipasos, explícitos e implícitos, e indique el orden de cada uno.

- (a) Euler hacia adelante:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$

- (b) Euler hacia atrás:

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$$

- (c) Trapezoidal o Crank-Nicholson:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) \quad \text{Implicito 2do Orden}$$

- (d) Euler modificado (Runge-Kutta de 2do Orden):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))]$$

- (e) Heun (Runge-Kutta de 3er Orden):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}[f_n + 3f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf_n)]$$

- (f) Runge-Kutta de 4to Orden:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ k_1 &= h \cdot f(t_i, y_i) \\ k_2 &= h \cdot f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= h \cdot f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

**Ejercicio 2 (Aula):** Considere el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y' = -y + \sin t + \cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Se desea conocer el valor de la variable de estado  $y$  a tiempo  $t = 2$ .

- (a) Complete la siguiente tabla con la aproximación de  $y(2)$  obtenida utilizando los métodos de Euler, RK2 y RK4 con los pasos indicados:

$h$	$L$	Euler	RK2	RK4
1/10	20	0.9464898783245997	0.9277223839885811	0.9092967015229165
1/20	40	0.9277223839885811	0.918468234483594	0.9092973826063873
1/40	80	0.918468234483594	0.9138725514623429	0.9092974240964233
1/80	160	0.9138725514623435	0.9115824363802026	0.9092974266561746
1/160	320	0.9115824363802031	0.9104392955239702	0.9092974268151208
1/320	640	0.9104392955239704	0.9098682024180114	0.9092974268250227

numero de evaluaciones de  $f$ :  
 Para Euler será  $L$   
 Para RungeKutta 2 será  $L*2$   
 Para Runge Kutta 4 será  $L*4$

- (b) Determine la cantidad de pasos  $L$  y el número de evaluaciones de  $f$  que fueron necesarios, en cada método, para obtener  $y(2)$  con:

(i) Tres decimales correctos.      (ii) Seis decimales correctos.

**Ejercicio 3 (Aula):** Se desea resolver un PVI de la forma

$$y' = f(t, y) \quad a \leq t \leq b \quad y(a) = y_0$$

mediante el método de Crank-Nicholson con iteraciones de Newton para avanzar la solución.

- (a) Explícite y justifique en un pseudo-código las ecuaciones que se resuelven en cada paso del procedimiento.
- (b) Implemente en Octave la función `function [t,y] = CN_Newton(f,dfdy,a,b,y0,N)` que resuelve este problema, donde `dfdy` es la derivada parcial de la función `f` respecto de `y`, y `N` es el número de pasos. Dicha función devuelve el vector de los pasos de tiempo `t` y la solución aproximada en el vector `y`.
- (c) Repita el ejercicio para el método de Euler hacia atrás.

**Ejercicio 4 (Aula):** Analice el comportamiento del error para los métodos de Euler hacia adelante, Euler hacia atrás y Crank-Nicholson cuando se resuelve el siguiente PVI

$$y' = te^{3t} - 2y \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 0$$

cuya solución exacta es  $y(t) = te^{3t}/5 - e^{3t}/25 + e^{-2t}/25$ . Considere los siguientes pasos  $h = 0.2$ ,  $h = 0.1$  y  $h = 0.05$ . Determine si el orden empírico para cada uno de los métodos se corresponde con el teórico.

**Ejercicio 5:** Utilice los esquemas de Runge-Kutta de cuarto orden y el siguiente esquema predictor-corrector de Adams de cuarto orden para resolver el PVI del ejercicio 4. Compare los resultados obtenidos.

- (a) Adams-Bashford de 4to orden (predictor)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

- (b) Adams-Moulton de 4to orden (corrector)

$$m = (n+1) - (n-3) = 4$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

**Conceptos de consistencia, orden, estabilidad y convergencia:** sea un método multipaso escrito en su forma general (donde el número de pasos del método es  $p + 1$ )

$p$  siempre es  $m-1$

$p = m - 1 = 3$

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j y_{n-j} + h \sum_{j=-1}^p b_j f(t_{n-j}, y_{n-j})$$

si  $b(-1) = 0$  entonces el método es explícito(?)

para el PVI  $y' = f(t, y)$ ,  $a \leq t \leq b$  con  $y(a) = \alpha$ , y su error local de truncamiento

$$T_n(y) = y(t_{n+1}) - \sum_{j=0}^p a_j y(t_{n-j}) - h \sum_{j=-1}^p b_j y'(t_{n-j})$$

podemos analizar:

- **Consistencia:** una condición necesaria y suficiente para que el método multipaso dado sea consistente es que se cumpla

$$\sum_{j=0}^p a_j = 1 \quad \text{y} \quad -\sum_{j=0}^p j a_j + \sum_{j=-1}^p b_j = 1$$

- **Orden:** para que el método multipaso sea  $O(h^m)$  es necesario y suficiente que además de las ecuaciones anteriores se verifique

$$\sum_{j=0}^p (-j)^k a_j + k \sum_{j=-1}^p (-j)^{k-1} b_j = 1 \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, m$$

- **Condición de la Raíz:** consiste en analizar las raíces del polinomio característico

$$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{j=0}^p a_j r^{p-j}$$

Si sus raíces (no necesariamente distintas) cumplen  $|r_i| \leq 1$  para cada  $i = 1, 2, \dots, m$  y si todas las raíces con valor absoluto igual a 1 son simples, se dice que el método cumple la condición de la raíz.

- **Estabilidad:** los métodos se clasifican de la siguiente manera según su *estabilidad*:
  - (a) **Fuertemente Estables:** son aquellos que cumplen la condición de la raíz y tienen a  $r = 1$  como la única raíz de la ecuación característica cuya magnitud es igual a uno.
  - (b) **Débilmente Estables:** aquellos que cumplen la condición de la raíz pero tienen más de una raíz cuyo valor absoluto o módulo es igual a uno.
  - (c) **Inestables:** aquellos que no cumplen la condición de la raíz.

Adam Bashfor 4 es débilmente estable porque  $r_1 = 1$  y  $r_2=r_3=r_4 = 0$

**Relaciones entre las definiciones:** un método multipaso de la forma

$$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1, \dots, y_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

donde

$$y_{i+1} = a_{m-1}y_i + a_{m-2}y_{i-1} + \dots + a_{m-1}y_i + hF(t_i, h, y_{i+1}, y_i, \dots, y_{i+1-m})$$

es estable si y sólo si cumple la condición de la raíz. Además, si el método es consistente, entonces será estable si y sólo si es convergente.

**Ejercicio 6:** Analice consistencia, estabilidad, orden y convergencia de los métodos Euler hacia atrás, Crank-Nicholson, Adams-Bashford y Adams-Moulton.

## Ejercicios de aplicación

**Ejercicio 7 (Aula):** La trayectoria de una partícula que se mueve en el plano está dada por la curva  $(x_1(t), x_2(t))$ , donde las funciones  $x_1$  y  $x_2$  son la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -tx_2(t) \\ x_2'(t) = tx_1(t) - tx_2(t) \end{cases}$$

Resuelva este sistema en el intervalo  $[0, 20]$  con el método de Euler utilizando paso  $h = 0.05$  y grafique la trayectoria de la partícula, sabiendo que en tiempo  $t = 0$  se encontraba en el punto  $(1, -1)$ .

**Ejercicio 8 (Aula):** (Modelo predador-presa de Lotka-Volterra) Consideremos el siguiente modelo

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(3 - 0.002x_2) \\ x_2'(t) &= -x_2(0.5 - 0.0006x_1) \end{aligned}$$

- ¿Cuál variable representa al predador y cuál a la presa? Para determinar esto, tenga en cuenta las siguientes preguntas:
  - ¿Cuál de las dos especies puede sobrevivir sin la existencia de la otra?
  - ¿Qué especie se extingue si la otra no existe?
- Calcule numéricamente una solución donde la población inicial de la presa es 1600 y la de predadores es 800, considerando el tiempo  $t$  en meses. Dibujar la solución, graficando ambas poblaciones con el tiempo, y describir el fenómeno representado (utilice un método que usted considere apropiado, y un intervalo de tiempo que sea representativo de lo que sucede).

**Ejercicio 9 (Aula):** Considere siguiente PVI de orden 3:

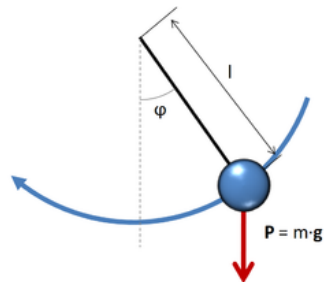
$$\begin{cases} y^{(3)} + 4y'' + 5y' + 2y = -4 \sin t - 2 \cos t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$$

- Reescriba el problema como un sistema de EDO de primer orden, con sus respectivos valores iniciales.
- Grafique la solución y obtenga el valor de la variable de estado  $y$  en  $t = 2.5$ , con 6 dígitos exactos.
- Indique cuántas veces se anula la función  $y'(t)$  en el intervalo  $[0, 15]$ .

**Ejercicio 10 (Aula):** (Péndulo simple) Si consideramos un péndulo de brazo rígido de longitud  $\ell$ , donde no hay fricción ni resistencia del aire, el ángulo  $\varphi(t)$  que forma el péndulo con la vertical satisface la siguiente ecuación diferencial de orden dos:

$$\varphi''(t) + \frac{g}{\ell} \sin \varphi(t) = 0,$$

donde  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  es la constante de aceleración gravitacional.



Supongamos (por simplicidad) que la longitud del brazo es igual a  $9.81m$ , con lo que obtenemos la ecuación

$$\varphi''(t) + \sin \varphi(t) = 0.$$

Resolver esta ecuación numéricamente en el intervalo  $[0, 20]$  y explicar, en cada uno de los siguientes casos, la situación física descripta (condiciones iniciales y evolución):

- |                                         |                                          |
|-----------------------------------------|------------------------------------------|
| (a) $\varphi(0) = 0.1, \varphi'(0) = 0$ | (e) $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$    |
| (b) $\varphi(0) = 0.7, \varphi'(0) = 0$ | (f) $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1.99$ |
| (c) $\varphi(0) = 3.0, \varphi'(0) = 0$ | (g) $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 2$    |
| (d) $\varphi(0) = 3.5, \varphi'(0) = 0$ | (h) $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 2.01$ |

**Ejercicio 11 (Aula):** Utilice el método predictor-corrector de Adams del ejercicio 5 para resolver el siguiente PVI,

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^3 \ln(t) \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$$

cuya solución exacta es:  $y(t) = (7/4)t + (1/2)t^3 \ln(t) - (3/4)t^3$ . Considere el método de Runge-Kutta de cuarto orden para calcular la solución en los pasos 1, 2 y 3 (el 0 es la condición inicial) requeridos por el predictor. Resuelva el problema para los pasos  $h = 0.2$ ,  $h = 0.1$  y  $h = 0.05$ . Presente una tabla con los errores máximos obtenidos para cada ecuación y saque conclusiones.