Cálculo Numérico 2022
Trabajo Práctico 5

Interpolación y aproximación de funciones

Ejercicio 1:

(a) Enuncie y demuestre el teorema de existencia y unicidad del polinomio interpolante (ver Teorema 1, sección 6.1 del libro de Kincaid y Cheney).

(b) Escriba la forma de Newton del polinomio interpolante.

(c) Escriba la forma de Lagrange del polinomio interpolante.

(d) Escriba el método de coeficientes indeterminados para el polinomio interpolante.

(e) Analice las ventajas y desventajas entre las distintas formas de representación del polinomio interpolante.

Ejercicio 2:

(a) Para los datos de la siguiente tabla, encuentre el polinomio de interpolación en su forma de Lagrange $P_L(x)$, en su forma de Newton $P_N(x)$, y mediante el método de los coeficientes indeterminados $P_{CI}(x)$. Luego, reduzca los tres polinomios encontrados a la forma $P(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a$ con el fin de demostrar que son idénticos ya que las abcisas son distintas entre sí.

x	3	5	7	9
y	1.2	1.7	2.0	2.1

(b) Si se aproxima la función $f(x) = \sin(x)$ mediante un polinomio interpolante de grado nueve que interpola a $f(x)$ en diez puntos del intervalo $[0, 1]$, utilice el resultado sobre el error en interpolación polinomial para predecir una cota del error en dicho intervalo.

Ejercicio 3 (Aula):

(a) Encuentre el polinomio de interpolación de Newton para los siguientes datos utilizando diferencias divididas

x	0	1	3/2	2
$f(x)$	3	3	13/4	5/3

(b) Implemente una función de Octave `function [c] = dif_div(x,y)` para el método de diferencias divididas donde `c` es un vector con los coeficientes del polinomio interpolante en la forma de Newton

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

`x` es un vector con las abcisas de interpolación y `y` tiene los valores de la función en dichas abcisas. Pruebe el algoritmo con el problema anterior.

Ejercicio 4: Utilice el método de diferencias divididas de Newton para resolver el siguiente problema de interpolación de Hermite. Buscamos el polinomio que ajusta los siguientes valores: $p(1) = 2$, $p'(1) = 3$, $p(2) = 6$, $p'(2) = 7$, $p''(2) = 8$.

Ejercicio 5 (Aula):

(a) Defina interpolante de trazador cúbico y explique las diferencias entre trazador natural y trazador sujeto.

(b) Implemente `[a,b,c,d]=cubic_spline_natural(x,f)` como una función de Octave para el trazador cúbico natural, donde `a,b,c,d` son vectores que en la j-ésima componente tienen los coeficientes correspondientes al polinomio del tramo-j

$$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - xj)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

`x` es el vector con las coordenadas de los nodos y `f` es el vector con los valores de la función f en los correspondientes nodos.

(c) Un trazador cúbico natural $S(x)$ en $[0, 2]$ está definido por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Obtenga b, c y d.

Ejercicio 6 (Aula): Evalúe la función $f(x) = \sin(2\pi x)$ en 21 puntos equiespaciados en el intervalo $[-1, 1]$. Calcule el polinomio interpolador de Lagrange y el trazador cúbico natural. Compare las gráficas de estas dos funciones con la de $f(x)$ en el intervalo dado. Repita el mismo cálculo usando el siguiente conjunto de datos perturbados: $f(x_i) = \sin(2\pi x_i) + (-1)^{i+1}10^{-4}$, y observe que el polinomio interpolador de Lagrange es más sensible a pequeñas perturbaciones que el trazador cúbico.

Ejercicio 7 (Aula):

(a) Modifique la función desarrollada en el ejercicio 5.b) de manera que permita computar los coeficientes del **trazador cúbico sujeto**. Se debe preveer el ingreso de los valores de la derivada de la función en los extremos del intervalo de interpolación.

(b) Encuentre el trazador cúbico sujeto $S(x)$ definido en el intervalo $[1, 3]$ tal que

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

siendo que $f(1) = 0$, $f(2) = 4$, $f(3) = 22/3$ y asumiendo que $f'(1) = f'(3) = 3$. Utilice la función `[a,b,c,d]=cubic_spline_clamped(x,f,df)` desarrollada en el inciso anterior.

Ejercicio 8 (Aula): Se quiere determinar la trayectoria plana seguida por un brazo robot industrial (idealizado por un punto material) durante un ciclo de trabajo. El brazo robot debe satisfacer las siguientes restricciones: se debe encontrar en reposo en el punto $(0, 0)$ en el instante inicial. Luego de $1s$ se debe encontrar en el punto $(2, 4)$, $1s$ después debe alcanzar el punto $(6, 6)$ y detenerse allí (primera etapa). En una segunda etapa retoma inmediatamente su movimiento y alcanza, luego de otro segundo más el punto $(3, 2)$ para finalmente retornar al origen luego de otro segundo más, donde quedará detenido para repetir el ciclo de trabajo.
Encuentre el trazador cúbico sujeto correspondiente utilizando el código desarrollado en el ejercicio 7 y luego realice las siguientes gráficas: (a) x vs. t (etapas 1 y 2 en la misma gráfica), (b) y vs. t (idem anterior), y finalmente (c) en el plano xy la trayectoria completa encontrada.

4 Splines:
- 1er tramo Arriba: SxA1 y SyA1 -->2 spline porque x e y dependen de t
- 2er tramo Arriba: SxA2 y SyA2

polyfit: Dado un conjunto de datos (x_i, y_i), la función `p=polyfit(x,y,n)` de Octave devuelve un vector `p` cuyas componentes son los coeficientes del polinomio de grado `n` que ajusta a los datos en el sentido de cuadrados mínimos.

Ejercicio 9 (Aula): Un biólogo realiza un experimento de reproducción de mosquitos y toma las siguientes mediciones

Semana	Cantidad
0	432
1	599
2	1012
3	1909
4	2977
5	4190
6	5961

(a) Determinar el polinomio p_6 de grado menor o igual que 6 que interpola los datos de la tabla.

(b) Determinar la función lineal p_1 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos los datos dados (modelo lineal).

(c) Determinar el polinomio p_2 de grado ≤ 2 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos los datos dados (modelo cuadrático).

(d) Graficar los datos y la evolución de los tres modelos calculados durante las seis semanas. Determinar el error cuadrático en cada caso. ¿cuál de los modelos le parece que es más apropiado y por qué?

(e) Predecir cuál será la cantidad de mosquitos al cabo de 10 semanas según los diferentes modelos propuestos. ¿Sigue pensando que el modelo más apropiado es el que eligió en el item anterior?

(f) Si se sabe que la medición a las 10 semanas es de 14900 mosquitos, calcule el error relativo de cada una de sus predicciones y verifique si el modelo que consideró más apropiado es el que da la mejor predicción.

Ejercicio 10 (Aula): Se sospecha que los datos de la siguiente tabla:

x	-1	0	1	2
y	-1.1	-0.4	-0.9	-2.7

fueron producidos por una función de la forma $f(x) \approx -e^{ax^2+bx+c}$.

(a) Transforme la tabla de datos usando $\ln(-y)$ para aplicar el método de cuadrados mínimos.

(b) Graficar sobre el intervalo $[-1.5, 2.5]$ la curva y los puntos.

Ejercicio 11 (Aula): Después de una tormenta, se mide la concentración de una determinada bacteria en un área de natación:

t (hs)	4	8	12	16	20	24
c (CFU/100mL)	1590	1320	1000	900	650	560

El tiempo se mide en horas transcurridas después de finalizar la tormenta, y la unidad CFU es una *unidad de formación de colonia*. Se sabe que un modelo para la concentración tiene la forma $c(t) = be^{-kt}$, donde b y k son constantes positivas.

(a) Determine los valores de b y de k, utilizando el método de mínimos cuadrados. b = 1978.6 k = 0.053203

(b) Utilice el modelo para estimar la concentración al final de la tormenta. En t = 0, c(t) = 1978.6

(c) Utilice el modelo para determinar el tiempo en el que la concentración será 200 CFU / 100 mL. t = 43.077...

Ejercicios sugeridos: **S.3.1**:1-3,7-9,15,16,24,25; **S.3.2**:1,4,12-15; **S.3.3**:1,3a,3c,4,7; **S.3.4**:1-6,8-10,24-29; **S.8.1**:1-4,5a-d,6,7,9-12.