

# Distance maximale de visibilité

## 1 Calculs

### 1.1 Seuil scopique de vision

Le seuil scopique absolu de visibilité est donné par :

$$I \geq I_{min} \sim 2,5 \times 10^{-6} \text{ lumen/m}^2 \quad (1)$$

Où  $I_{min}$  est le flux lumineux minimum pouvant être perçu pour une source fixe éclairant constamment.

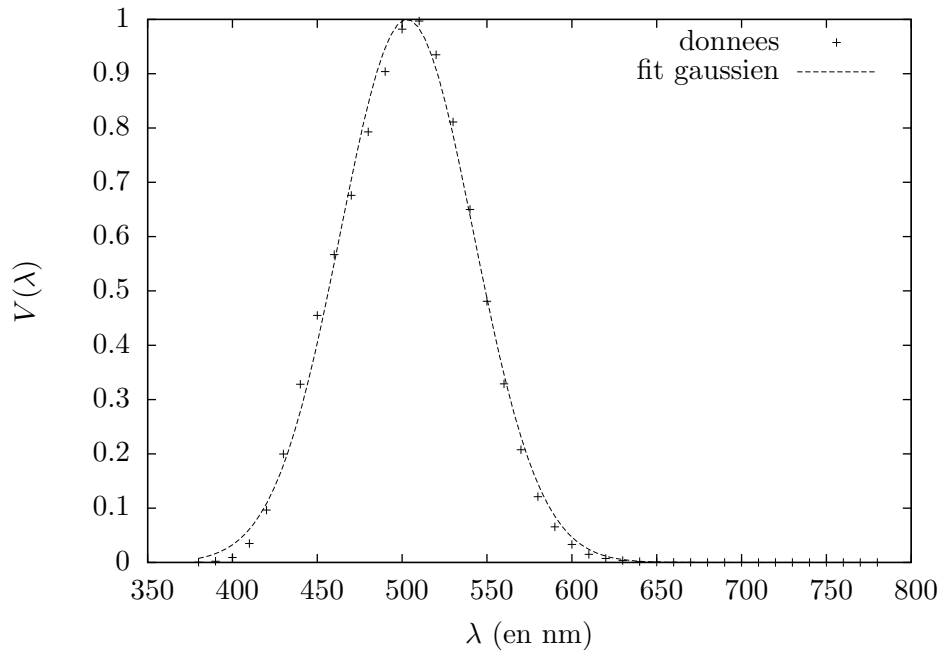
Par ailleurs le flux lumineux en lumen/m<sup>2</sup> (ou "lux") est donné par :

$$I = \frac{L}{d^2} = \frac{L_0}{d^2} \int_0^{+\infty} V(\lambda)p(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

Où  $L_0 = 1700 \text{ lumen/W}$  en vision scopique,  $V$  est l'efficacité lumineuse spectrale relative, et  $p(\lambda)$  la puissance du signal lumineux (en W) comprise dans l'intervalle  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ .

La fonction  $V$  a l'allure donnée sur la figure (1). On réalise un fit gaussien des données expérimentales afin d'en obtenir une interpolation fiable qui permette le calcul de l'intégrale (2).

FIGURE 1 – Efficacité lumineuse spectrale et fit  $V(\lambda)$  sous la forme  $\exp((\lambda - \lambda_0)^2/2\Delta\lambda^2)$ . On trouve  $\lambda_0 = 503 \text{ nm}$ ,  $\Delta\lambda^2 = 40 \text{ nm}$ .



## 1.2 Corps noir

Les étoiles sont des corps noirs. Aussi il est possible de considérer, si on néglige les phénomènes atmosphériques, que  $p(\lambda)$  est simplement le spectre d'un corps noir (loi de planck). Dans ce cas, la valeur de l'intégrale ne dépend que de la température et du rayon de l'étoile :

$$I = 4\pi \frac{R_*^2}{d^2} I_*(T) = 4\pi L_0 \frac{R_*^2}{d^2} \sigma T_*^4 \eta(T) \quad (3)$$

Ici  $\eta$  est une fonction sans dimension qui représente le "rendement lumineux" de l'étoile :  
Et par ailleurs :

$$\eta(T) = \frac{1}{\sigma T_*^4} \int_0^{+\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{e^{((\lambda-\lambda_0)^2/2\Delta\lambda^2)}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} H(\lambda) d\lambda \quad (4)$$

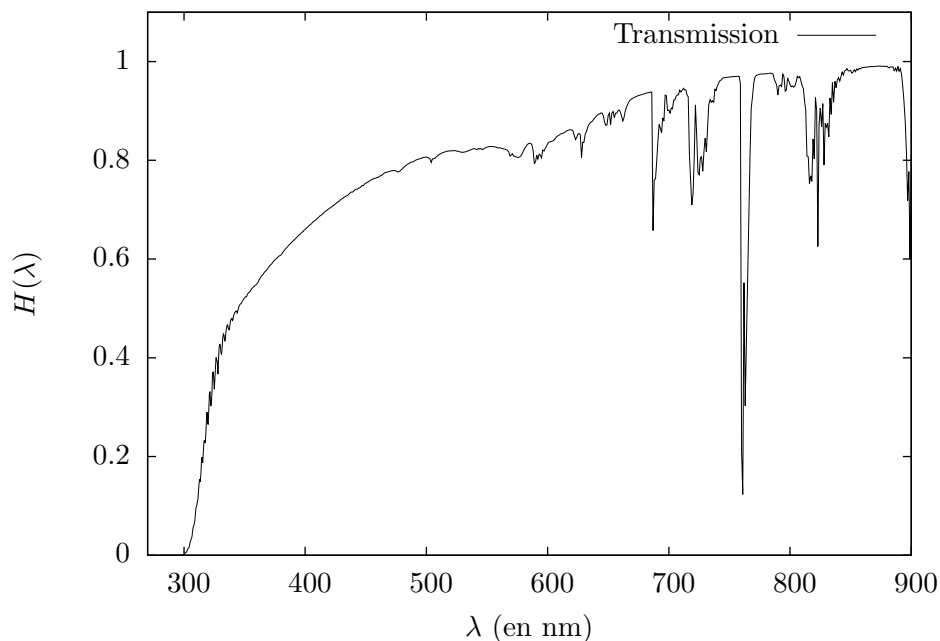
La fonction  $\lambda \mapsto H(\lambda)$  représente la fraction de rayonnement transmise à travers l'atmosphère (à la verticale par exemple).

$\eta$  est nécessairement plus petit que 1. Dans le cas idéal d'un rayonnement monochromatique à la longueur d'onde de sensibilité maximum de l'oeil  $\eta = 1$ . Pour un corps noir cependant le spectre est clairement non monochromatique et le rendement plus faible que 1. La courbe de  $\eta(T)$  est donnée figure 3.

## 1.3 Atmosphère

La courbe de transmission de l'atmosphère à la verticale est donnée par la figure suivante :

FIGURE 2 – Courbe de transmission  $H(\lambda)$  de l'atmosphère (traversée à la verticale)



$H$  peut s'obtenir si l'on connaît la quantité de rayonnement absorbée par unité d'épaisseur d'atmosphère en fonction de l'altitude  $\alpha(x, \lambda)$  :

$$H(\lambda) = K \exp \left[ - \int_0^{+\infty} \alpha(x, \lambda) dl \right] \quad (5)$$

Si l'atmosphère est traversée "de biais" :

$$H_\theta(\lambda) = K \exp \left[ - \int_0^{+\infty} \alpha(x(l), \lambda) dl \right] \text{ et } x = \sqrt{R^2 + l^2 + 2Rl \sin \theta} - R \quad (6)$$

De là :

$$l^2 + 2Rl \sin \theta + R^2 - (x + R)^2 = 0 \quad (7)$$

$$\Delta = 4R^2 \sin^2 \theta - 4R^2 + 4(x + R)^2 = 4 [(x + R)^2 - R^2 \cos^2 \theta] \quad (8)$$

$$l = -R \sin \theta + \sqrt{(x + R)^2 - R^2 \cos^2 \theta} \quad (9)$$

$$dl = \frac{x + R}{\sqrt{(x + R)^2 - R^2 \cos^2 \theta}} dx \quad (10)$$

$$H_\theta(\lambda) = K \exp \left[ - \int_0^{+\infty} \alpha(x, \lambda) \frac{x + R}{\sqrt{(x + R)^2 - R^2 \cos^2 \theta}} dx \right] \quad (11)$$

En supposant que l'atmosphère est de dimension  $h$  très inférieure au rayon terrestre, et à l'horizon ( $\theta = 0$ ) :

$$H_{\text{hor}}(\lambda) \simeq K \exp \left[ - \int_0^h \alpha(x, \lambda) \sqrt{\frac{R}{2x}} dx \right] \quad (12)$$

On suppose par ailleurs que l'atmosphère possède un profil isotherme et que  $\alpha(x, \lambda) = \alpha_0(\lambda) \exp(-x/L)$  ( $L \ll h$ ). Dès lors :

$$H_{\text{hor}}(\lambda) \simeq K \exp \left[ - \sqrt{\frac{R}{2}} \alpha_0(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x/L)}{\sqrt{x}} dx \right] = K \exp \left[ - \sqrt{\frac{\pi RL}{2}} \alpha_0(\lambda) \right] \quad (13)$$

Si bien que :

$$H_{\text{hor}}(\lambda) = H(\lambda) \sqrt{\pi R/2L} \quad (14)$$

Or  $\sqrt{\pi R/2L} \sim 35$  ! On ne voit rien à l'horizon. Il faut s'en approcher légèrement seulement. Plus généralement, il faut intégrer numériquement :

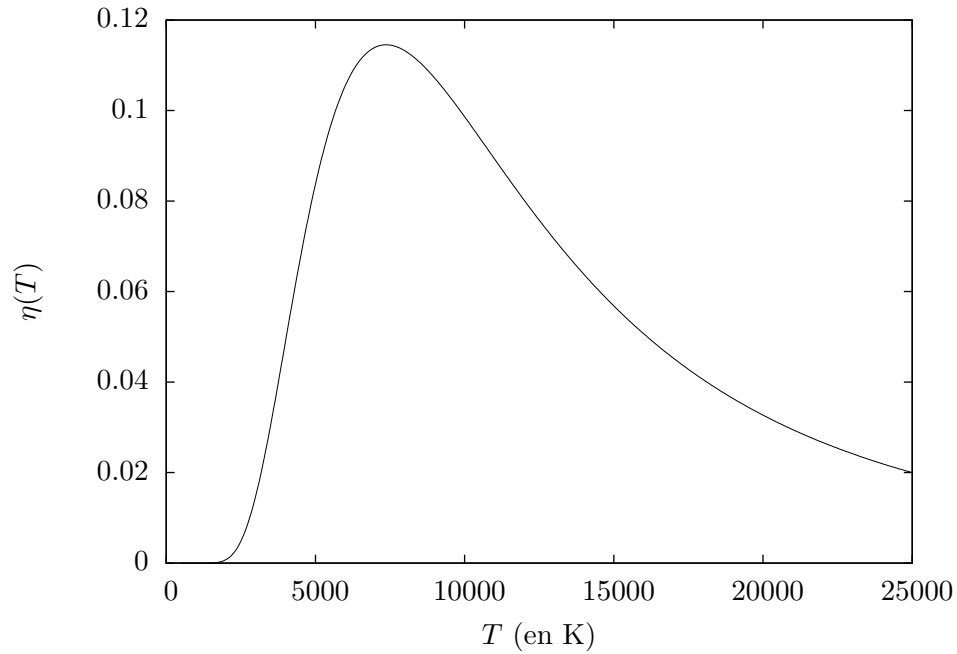
$$H_\theta(\lambda) = \exp \left[ - \alpha_0(\lambda) \int_0^{+\infty} \exp(-x/L) \frac{x + R}{\sqrt{(x + R)^2 - R^2 \cos^2 \theta}} dx \right] \quad (15)$$

Et alors :

$$\text{AM}(\theta) \equiv \frac{\ln H_\theta(\lambda)}{\ln H(\lambda)} = \frac{1}{L} \int_0^{+\infty} \exp(-x/L) \frac{x + R}{\sqrt{(x + R)^2 - R^2 \cos^2 \theta}} dx \quad (16)$$

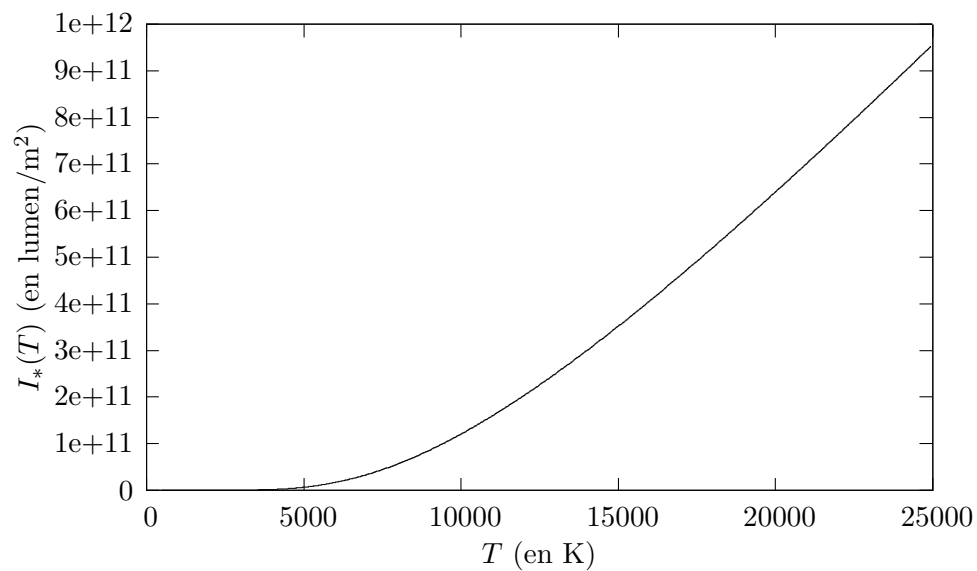
## 1.4 Rendement lumineux corps noir

FIGURE 3 – rendement lumineux  $\eta$  d'un corps noir en fonction de sa température. La luminosité apparente pour l'oeil d'un corps noir est donné par le produit de sa puissance et de  $\eta$ .



Le flux lumineux par unité de surface de l'étoile  $I_*(T) = L_0\eta(T)\sigma T^4$  (qui ne dépend donc également que de la température) en lumen/m<sup>2</sup> est représenté figure 4.

FIGURE 4 – Courbe de  $I_*(T) = L_0\eta(T)\sigma T^4$ , qui est directement proportionnel au flux reçu par l'oeil.



## 1.5 Condition de visibilité

Finalement la condition de visibilité se réécrit :

$$d \leq R_* \sqrt{4\pi \frac{I_*(T)}{I_{min}}} \quad (17)$$

Cette équation peut être réécrite en terme de  $\eta(T)$  :

$$d \leq R_* \sqrt{4\pi \frac{L_0 \sigma T^4 \eta(T)}{I_{min}}} \quad (18)$$

La luminosité donne donc une limite de la forme  $d \leq \theta(T) R_*$ . La fonction  $\theta(T)$  est représentée figure 6 ainsi que les valeurs de  $d/R$  pour certaines étoiles.

FIGURE 5 – Courbe de  $\theta(T) = d_{max}/R_*$ . La zone verte sous la courbe correspond aux étoiles visibles.

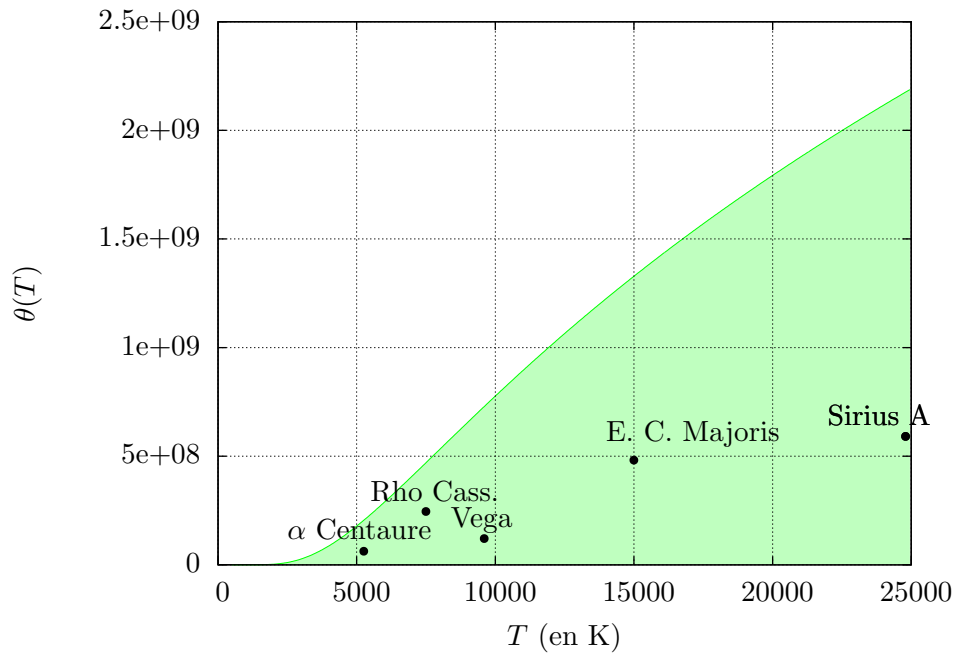


FIGURE 6 – Courbe de  $\theta(T) = d_{max}/R_*$ . La zone verte sous la courbe correspond aux étoiles visibles.

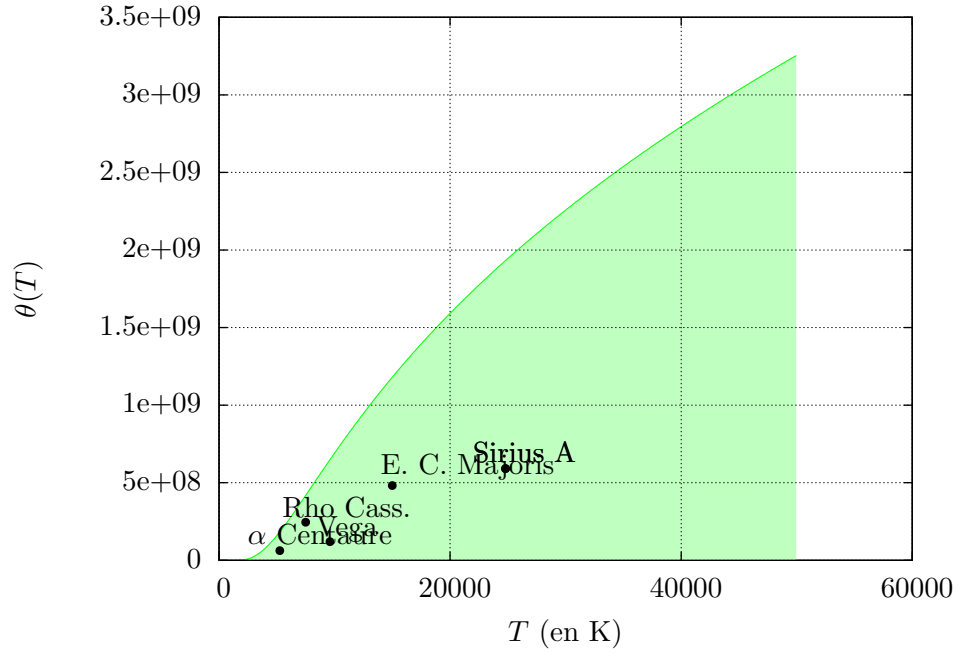


FIGURE 7 – Courbe de  $\theta(T) = d_{max}/R_*$  en tenant compte de l'atmosphère, et pour différents angles d'élévation. (de 15 à 90 deg de 5 en 5)

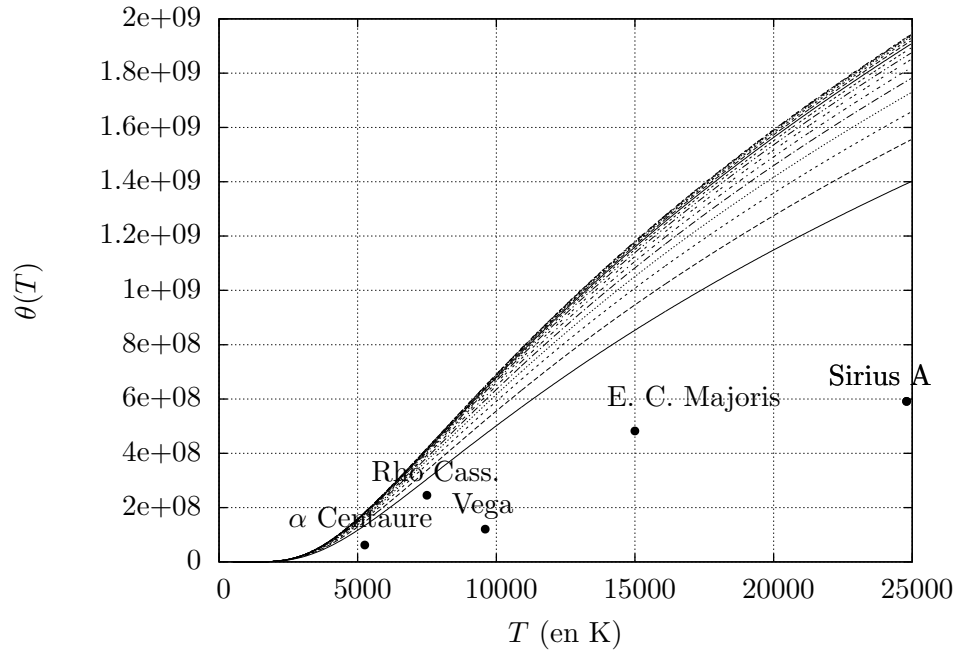
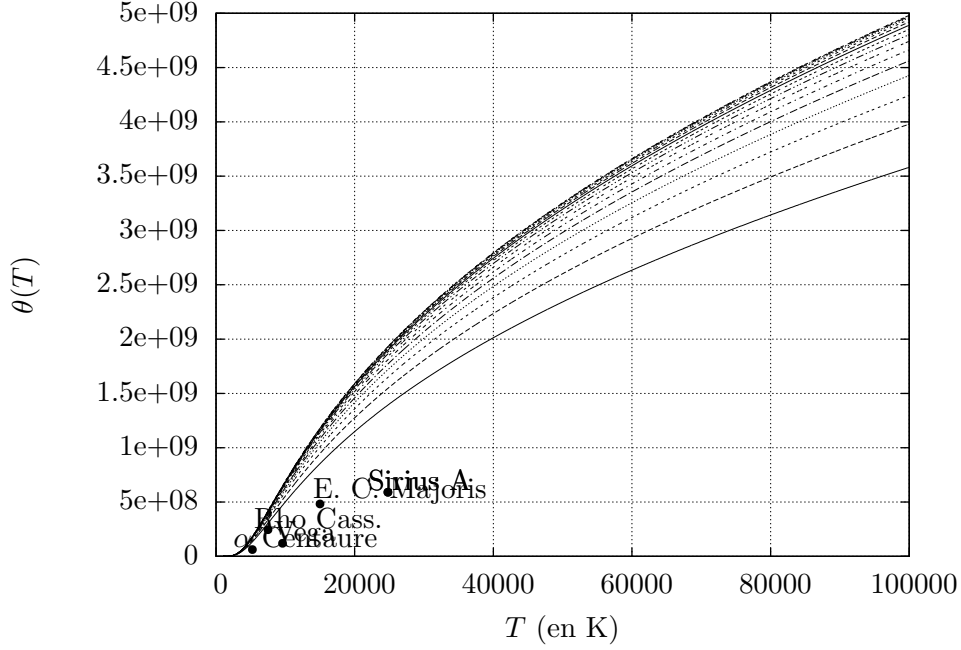


FIGURE 8 – Courbe de  $\theta(T) = d_{max}/R_*$  en tenant compte de l’atmosphère, et pour différents angles d’élévation. (de 15 à 90 deg de 5 en 5)



## 1.6 Magnitude apparente

La magnitude apparente dans une bande donnée est définie par :

$$m \equiv m_0 - 2.5 \log \frac{F}{F_0} \quad (19)$$

Où  $m_0$  est la magnitude d’un astre de référence dans cette bande, et  $F$  et  $F_0$  les flux reçus par l’astre et la référence dans cette bande.

Une bande peut être définie par une gaussienne  $(\lambda_{max}, \sigma_\lambda)$ . On travaillera avec les bandes V  $((\lambda_{max}, \sigma_\lambda) = (551 \text{ nm}, 88 \text{ nm}))$  et B  $((\lambda_{max}, \sigma_\lambda) = (445 \text{ nm}, 94 \text{ nm}))$

Pour des corps noirs, en définissant le rendement dans une bande  $X$  donnée comme  $\eta_X(T)$  alors :

$$m \equiv m_0 - 2.5 \log \frac{\eta_X(T)}{\eta_X(T_0)} \frac{R^2 d_0^2}{R_0^2 d^2} \quad (20)$$

Cela donne en particulier :

$$m_{max} \equiv m_0 - 2.5 \log \frac{\eta_X(T)}{\eta_X(T_0)} - 5 \log \frac{d_0}{R_0 \theta(T)} \quad (21)$$