Distance maximale de visibilité

1 Calculs

1.1 Seuil scopique de vision

Le seuil scopique absolu de visibilité est donné par :

$$I \geq I_{min} \sim 2,5 \times 10^{-6} \text{ lumen/m}^2 \tag{1}$$

Où I_{min} est le flux lumineux minimum pouvant être perçu pour une source fixe éclairant constamment.

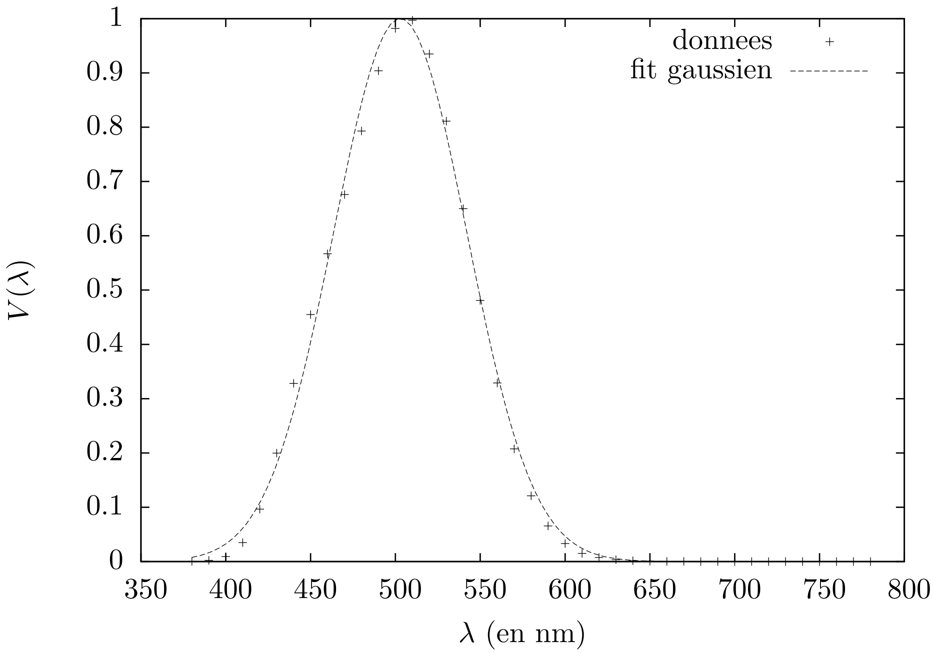
Par ailleurs le flux lumineux en lumen/m^2 (ou "lux") est donné par :

$$I = \frac{L}{d^2} = \frac{L_0}{d^2} \int_0^{+\infty} V(\lambda) p(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \tag{2}$$

Où $L_0 = 1700$lumen/W en vision scopique, V est l'efficacité lumineuse spectrale relative, et $p(\lambda)$ la puissance du signal lumineux (en W) comprise dans l'invervalle $[\lambda, \lambda + \mathrm{d}\lambda[$.

La fonction V a l'allure donnée sur la figure (1). On réalise un fit gaussien des données expérimentales afin d'en obtenir une interpolation fiable qui permette le calcul de l'intégrale (2).

FIGURE 1 – Efficacité lumineuse spectrale et fit $V(\lambda)$ sous la forme $\exp\big((\lambda-\lambda_0)^2/2\Delta\lambda^2\big)$. On trouve $\lambda_0 = 503$ nm, $\Delta\lambda^2 = 40$ nm.



1.2 Corps noir

Les étoiles sont des corps noirs. Aussi il est possible de considérer, si on néglige les phénomènes atmosphériques, que $p(\lambda)$ est simplement le spectre d'un corps noir (loi de planck). Dans ce cas, la valeur de l'intégrale ne dépend que de la température et du rayon de l'étoile :

$$I = 4\pi \frac{R_*}{d^2}^2 I_*(T) = 4\pi L_0 \frac{R_*^2}{d^2} \sigma T_*^4 \eta(T) \tag{3}$$

Ici η est une fonction sans dimension qui représente le "rendement lumineux" de l'étoile :

Et par ailleurs :

$$\eta(T) = \frac{1}{\sigma T_*^4} \int_0^{+\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{e^{\left((\lambda-\lambda_0)^2/2\Delta\lambda^2\right)}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} H(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{4}$$

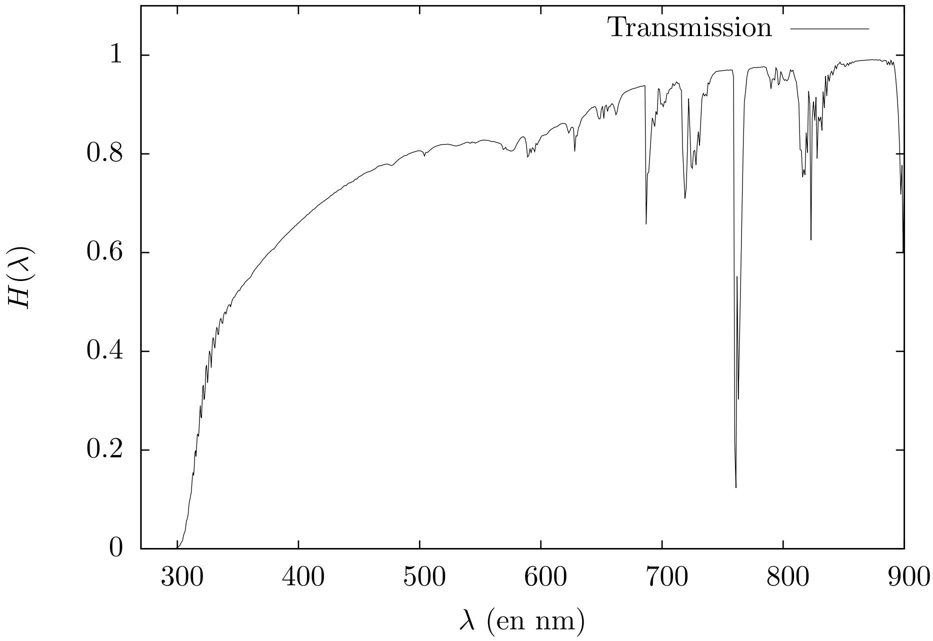
La fonction $\lambda \mapsto H(\lambda)$ représente la fraction de rayonnement transmise à travers l'atmosphère (à la verticale par exemple).

η est nécessairement plus petit que 1. Dans le cas idéal d'un rayonnement monochromatique à la longueur d'onde de sensibilité maximum de l'oeil $\eta = 1$. Pour un corps noir cependant le spectre est clairement non monochromatique et le rendement plus faible que 1. La courbe de $\eta(T)$ est donnée figure 3.

1.3 Atmosphère

La courbe de transmission de l'atmosphère à la verticale est donnée par la figure suivante :

FIGURE 2 – Courbe de transmission $H(\lambda)$ de l'atmosphère (traversée à la verticale)



H peut s'obtenir si l'on connait la quantité de rayonnement absorbée par unité d'épaisseur d'atmosphère en fonction de l'altitude $\alpha(x,\lambda)$:

$$H(\lambda) = K \exp\left[-\int_0^{+\infty} \alpha(x,\lambda)\,\mathrm{d}l\right] \tag{5}$$

Si l'atmosphère est traversée "de biais" :

$$H_\theta(\lambda) = K \exp\left[-\int_0^{+\infty} \alpha(x(l),\lambda)\,\mathrm{d}l\right] \text{ et } x = \sqrt{R^2 + l^2 + 2Rl\sin\theta} - R \tag{6}$$

De là :

$$l^2 + 2Rl\sin\theta + R^2 - (x+R)^2 = 0 \tag{7}$$

$$\Delta = 4R^2\sin^2\theta - 4R^2 + 4(x+R)^2 = 4\left[(x+R)^2 - R^2\cos^2\theta\right] \tag{8}$$

$$l = -R\sin\theta + \sqrt{(x+R)^2 - R^2\cos^2\theta} \tag{9}$$

$$\mathrm{d}l = \frac{x+R}{\sqrt{(x+R)^2 - R^2\cos^2\theta}}\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

$$H_\theta(\lambda) = K\exp\left[-\int_0^{+\infty}\alpha(x,\lambda)\frac{x+R}{\sqrt{(x+R)^2 - R^2\cos^2\theta}}\,\mathrm{d}x\right] \tag{11}$$

En supposant que l'atmosphère est de dimension h très inférieure au rayon terrestre, et à l'horizon ($\theta = 0$) :

$$H_{\mathrm{hor}}(\lambda) \simeq K\exp\left[-\int_0^{h}\alpha(x,\lambda)\sqrt{\frac{R}{2x}}\,\mathrm{d}x\right] \tag{12}$$

On suppose par ailleurs que l'atmosphère possède un profil isotherme et que $\alpha(x,\lambda) = \alpha_0(\lambda)\exp(-x/L)$ ($L \ll h$). Dès lors :

$$H_{\mathrm{hor}}(\lambda) \simeq K\exp\left[-\sqrt{\frac{R}{2}}\alpha_0(\lambda)\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-x/L)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right] = K\exp\left[-\sqrt{\frac{\pi RL}{2}}\alpha_0(\lambda)\right] \tag{13}$$

Si bien que :

$$H_{\mathrm{hor}}(\lambda) = H(\lambda)^{\sqrt{\pi R/2L}} \tag{14}$$

Or $\sqrt{\pi R/2L} \sim 35$! On ne voit rien à l'horizon. Il faut s'en approcher légèrement seulement.

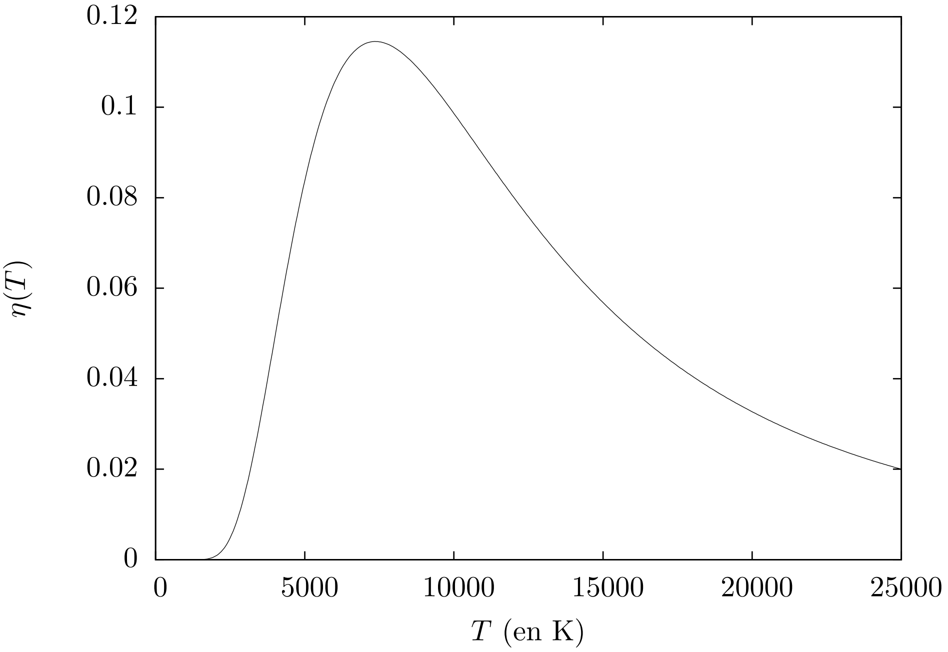
Plus généralement, il faut intégrer numériquement :

$$H_\theta(\lambda) = \exp\left[-\alpha_0(\lambda)\int_0^{+\infty}\exp(-x/L)\frac{x+R}{\sqrt{(x+R)^2 - R^2\cos^2\theta}}\,\mathrm{d}x\right] \tag{15}$$

Et alors :

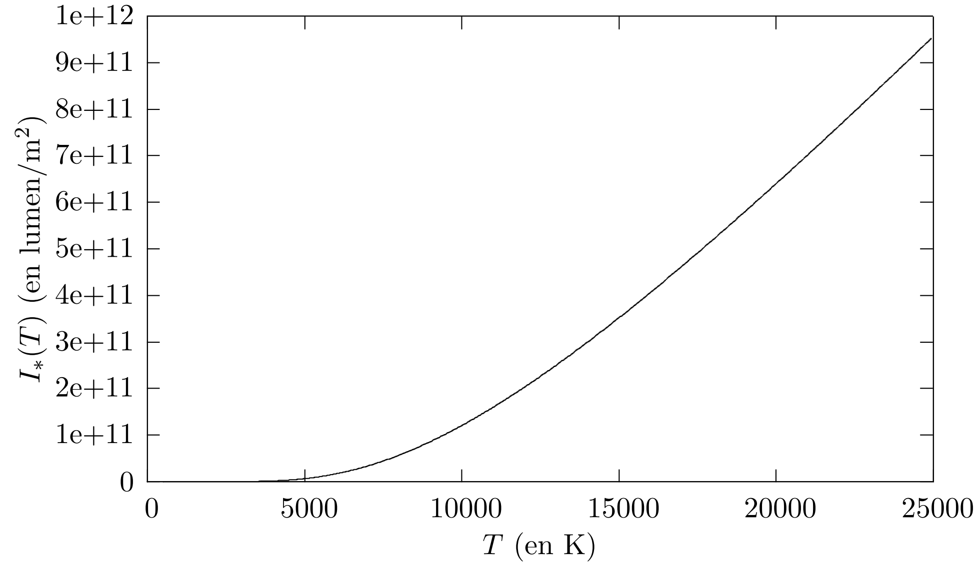
$$\ln\frac{H_\theta(\lambda)}{H_\lambda} = \frac{1}{L}\int_0^{+\infty}\exp(-x/L)\frac{x+R}{\sqrt{(x+R)^2 - R^2\cos^2\theta}}\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

Figure 3 – rendement lumineux η d'un corps noir en fonction de sa température. La luminosité apparente pour l'oeil d'un corps noir est donné par le produit de sa puissance et de η.



Le flux lumineux par unité de surface de l'étoile $I_*(T) = L_0\eta(T)\sigma T^4$ (qui ne dépend donc également que de la température) en lumen/m^2 est représenté figure 4.

FIGURE 4 – Courbe de $I_*(T) = L_0\eta(T)\sigma T^4$, qui est directement proportionnel au flux reçu par l'oeil.



Finalement la condition de visibilité se réécrit :

$$d \leq R_* \sqrt{4\pi \frac{I_*(T)}{I_{min}}} \tag{17}$$

Cette équation peut être réécrite en terme de $\eta(T)$:

$$d \leq R_* \sqrt{4\pi \frac{L_0 \sigma T^4 \eta(T)}{I_{min}}} \tag{18}$$

La luminosité donne donc une limite de la forme $d \leq \theta(T)R_*$. La fonction $\theta(T)$ est représentée figure 6 ainsi que les valeurs de d/R pour certaines étoiles.

FIGURE 5 – Courbe de $\theta(T) = d_{max}/R_*$. La zone verte sous la courbe correspond aux étoiles visibles.

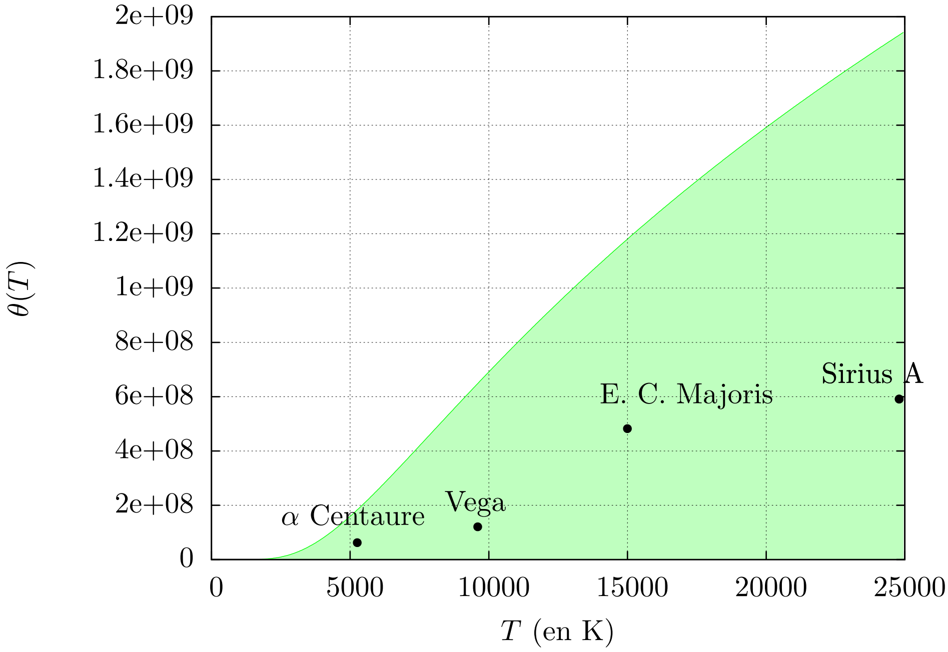


Figure 6 – Courbe de $\theta(T) = d_{max}/R_*$. La zone verte sous la courbe correspond aux étoiles visibles.