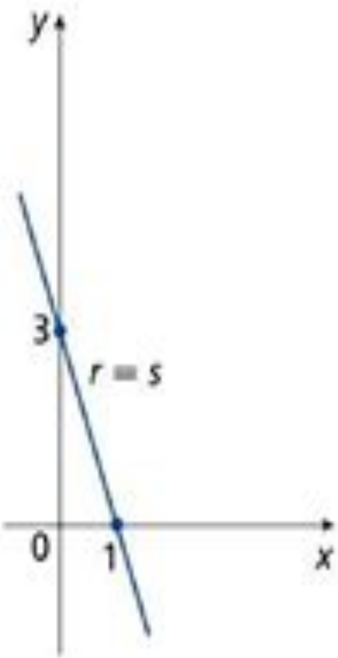
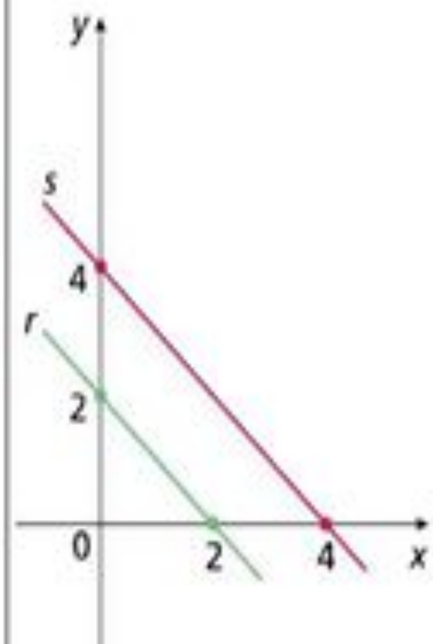
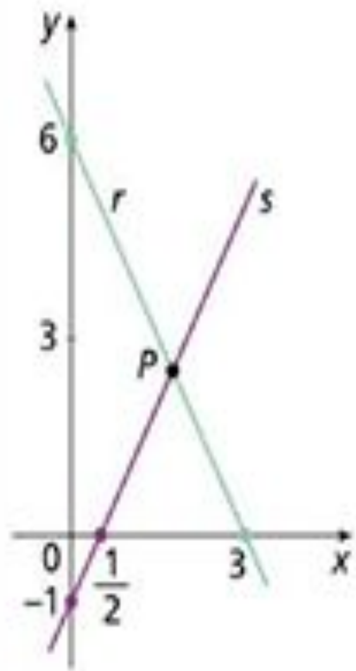
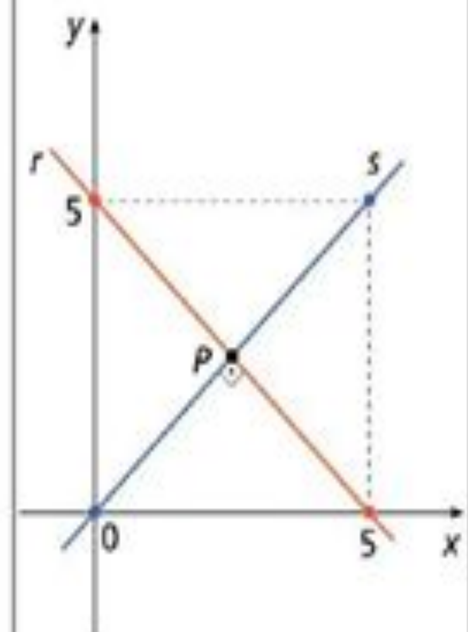
# Geometria Analítica:
# A Reta

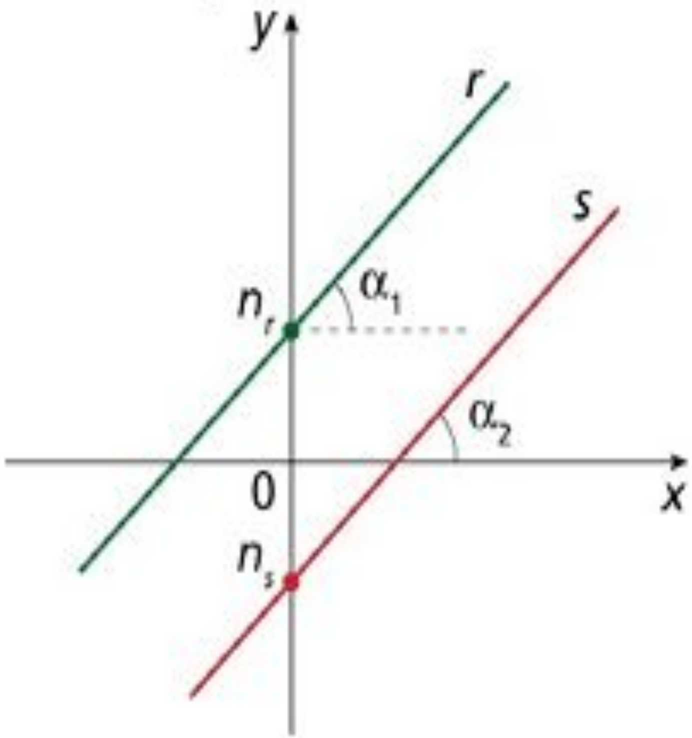
- Posição relativa entre duas retas;
- Ângulo formado entre duas retas;
- Distância entre ponto e reta;
- Área de triângulo.

Profº Lucas Müller

# Posição relativa de duas retas

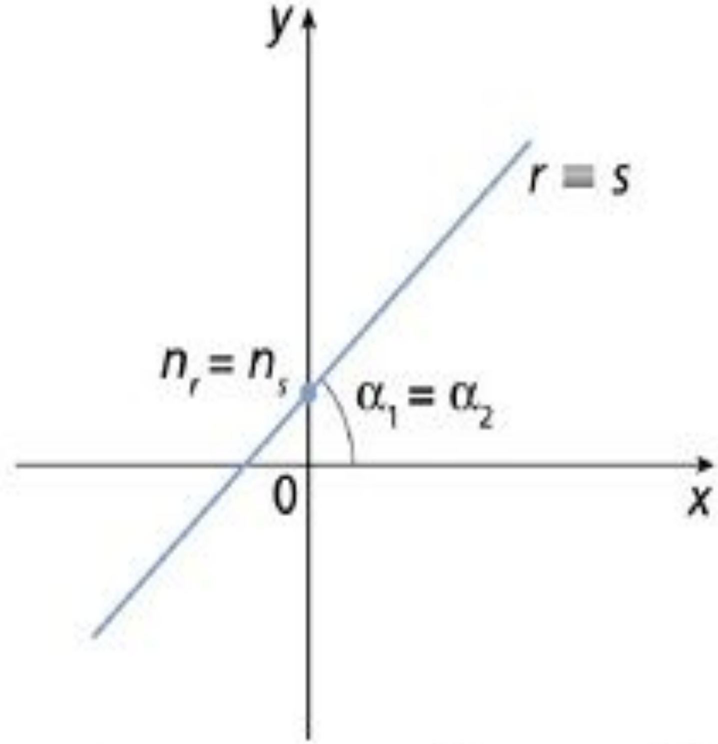
| Retas paralelas | | Retas concorrentes | |
|---|---|---|---|
| **Coincidentes** | **Distintas** | **Não perpendiculares** | **Perpendiculares** |
|  |  |  |  |
| $r: 3x + y - 3 = 0$<br>$s: 6x + 2y - 6 = 0$ | $r: x + y - 2 = 0$<br>$s: x + y - 4 = 0$ | $r: 2x + y - 6 = 0$<br>$s: -2x + y + 1 = 0$ | $r: x + y - 5 = 0$<br>$s: -x + y = 0$ |

# Retas paralelas




As retas $r$ e $s$ são **paralelas distintas** se, e somente se:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$




As retas $r$ e $s$ são **paralelas coincidentes** se, e somente se:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s$$

# Exemplo 1:

Determine a posição da reta $r$, de equação $x + 2y - 6 = 0$,

em relação à reta $s$, de equação $3x + 6y - 5 = 0$.

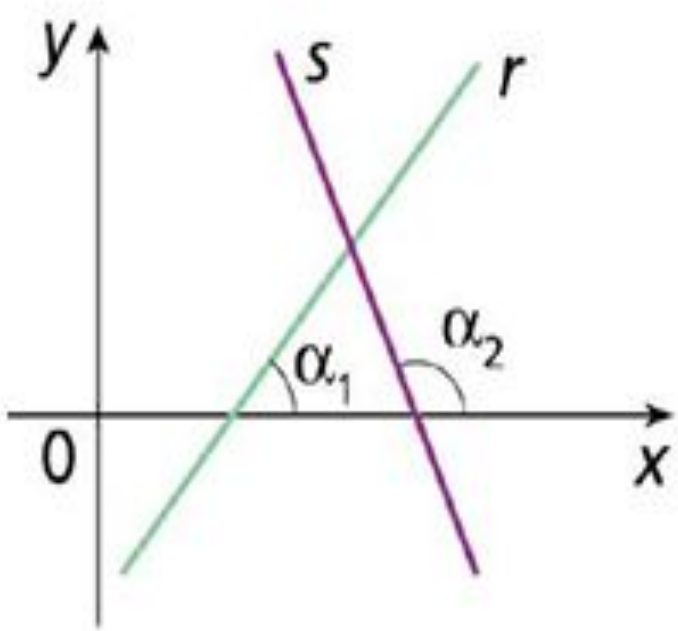
Para obter os coeficientes angular e linear de $r$ e $s$, usamos a equação na forma reduzida.

Para a reta $r$, temos: $x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3 \begin{cases} m_r = -\frac{1}{2} \\ n_r = 3 \end{cases}$

Para a reta $s$, temos: $3x + 6y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6} \begin{cases} m_s = -\frac{1}{2} \\ n_s = \frac{5}{6} \end{cases}$

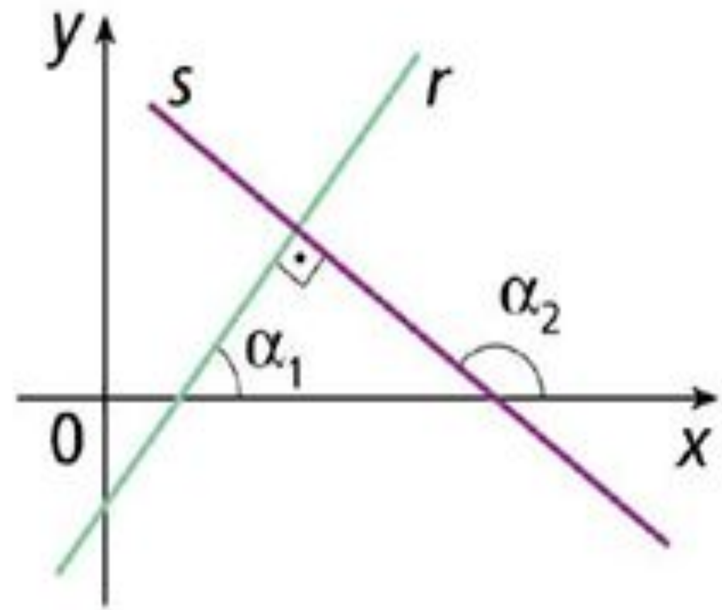
Como $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, então as retas $r$ e $s$ são paralelas distintas.

# Retas concorrentes




As retas $r$ e $s$ são **concorrentes** se, e somente se:

$$m_r \neq m_s$$




As retas $r$ e $s$ são **concorrentes perpendiculares** se, e somente se:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

# Exemplo 2:

Dadas as retas $r$ e $s$, de equações $2x + 3y - 6 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$. Verifique se elas são perpendiculares.

Para a reta $r$, temos: $2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$

Para a reta $s$, temos: $3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = \frac{3}{2}$

Como $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, temos: $m_r \cdot m_s = -1$, portanto, $r \perp s$.

# Exemplo 3:

Dado o ponto $P(2,1)$, obter a equação reduzida da reta $s$ que passa por $P$ e é paralela à reta $r$ de equação $2x - y + 7 = 0$.

Para que as retas $r$ e $s$ sejam paralelas, é necessário que seus coeficientes angulares sejam iguais.

Assim: $m_r = m_s = 2$

Como o ponto $P(2,1)$ pertence à reta $s$, temos:

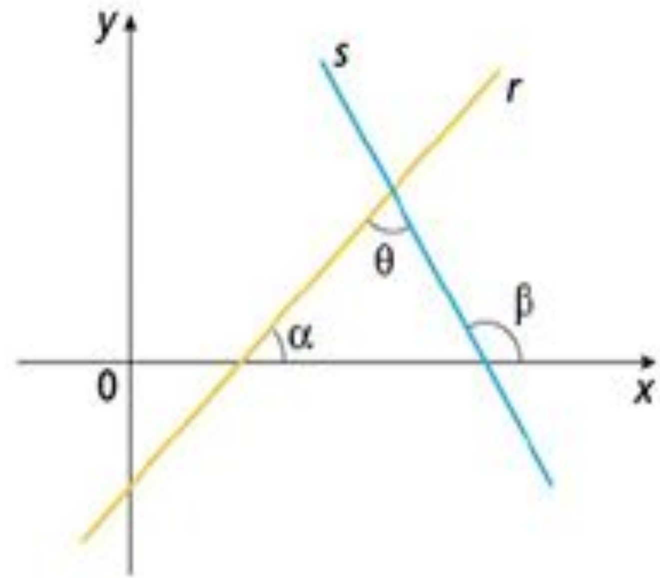
$$y = m_s \cdot x + n_s \Rightarrow 1 = 2 \cdot 2 + n_s \Rightarrow n_s = -3$$

Portanto, a equação da reta $s$, paralela à reta $r$, é: $y = 2x - 3$.

# Retas concorrentes e o ângulo formado entre elas

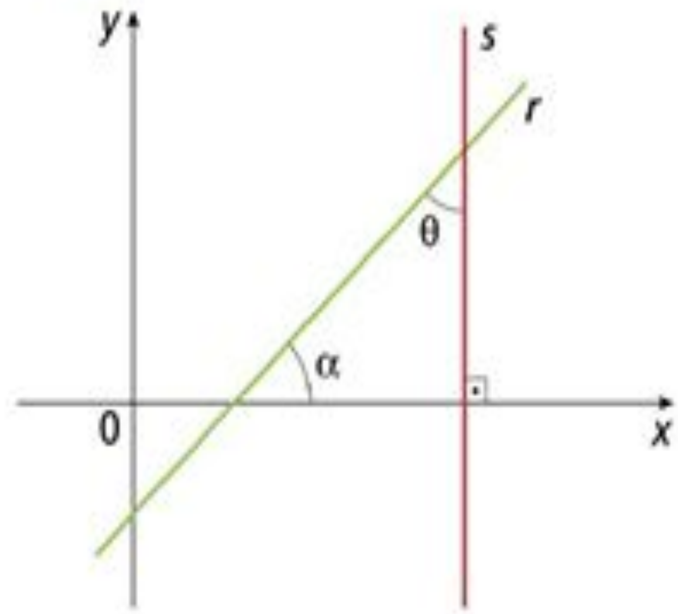
Admitindo que nenhuma das retas seja perpendicular ao eixo $x$, temos:

$$tg\theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right|$$




Se uma das retas for vertical e a outra não horizontal, teremos:

$$tg\theta = \left|\frac{1}{m_r}\right|$$

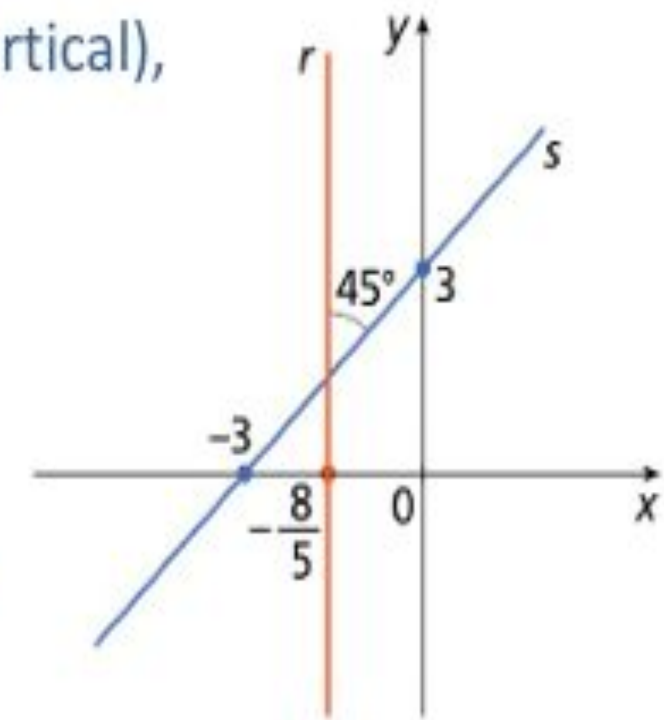


# Exemplo 4:

Dadas as retas $r$ e $s$, de equações $5x + 8 = 0$ e $y = x + 3$, respectivamente. Determine o ângulo agudo formado entre elas.

Como $r$ é perpendicular ao eixo $x$ (reta vertical), temos:

$$tg\theta = \left|\frac{1}{m_s}\right|$$




Como $m_s = 1$, temos:

$$tg\theta = \left|\frac{1}{1}\right| \Rightarrow tg\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45°$$

Portanto, o ângulo formado pelas retas $r$ e $s$ mede 45°.

# Exemplo 5:

O ângulo formado entre as retas $t$ e $u$ mede $45°$ e o coeficiente angular de $t$ é $m_t = 3/2$. Determine o coeficiente angular $m_u$ da reta $u$.

$$tg\theta = \left|\frac{m_u - m_t}{1 + m_u \cdot m_t}\right| \Rightarrow tg45° = \left|\frac{m_u - \frac{3}{2}}{1 + m_u \cdot \frac{3}{2}}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{2m_u - 3}{2 + 3m_u}\right|$$

Para $\frac{2m_u - 3}{2 + 3m_u} = 1$, temos: $m_u = -5$

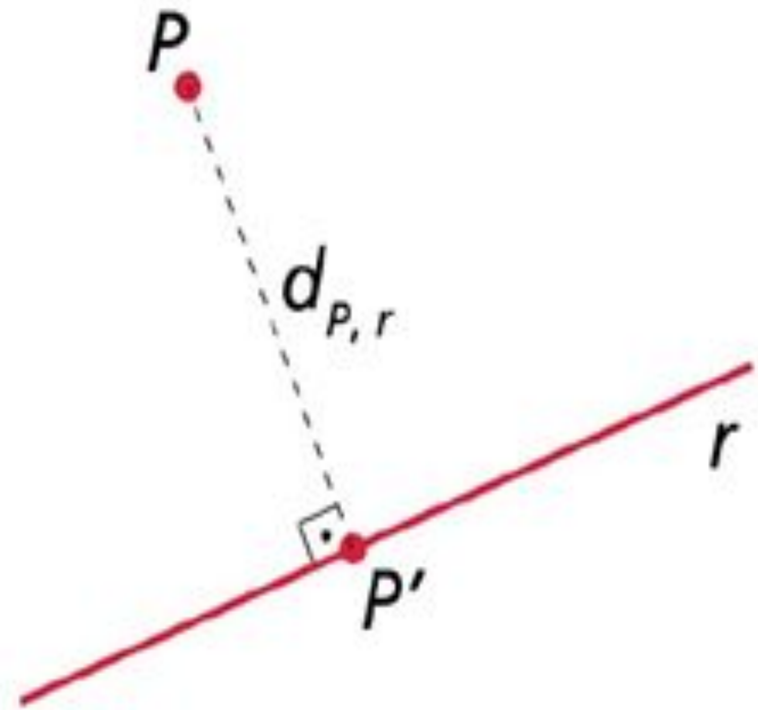
Para $\frac{2m_u - 3}{2 + 3m_u} = -1$ , temos: $m_u = \frac{1}{5}$

Portanto: $m_u = -5$ ou $m_u = \frac{1}{5}$.

# Distância entre ponto e reta

## Cálculo da distância entre um ponto e uma reta

Como você já viu, a distância de um ponto $P$ a uma reta $r$ é a distância entre $P$ e sua projeção $P'$ sobre $r$.



# Exemplo:

Calcule a distância entre o ponto $A(-2,5)$ e a reta $r$ de equação $2x + y + 1 = 0$.

Observe que, conhecendo a equação de $r$, devemos encontrar a equação da reta $s$ que passa por $A$ e é perpendicular a $r$.

Sendo $A'(x,y)$ o ponto onde as retas $r$ e $s$ se interceptam, então, para resolver o problema, basta calcular a distância entre $A$ e $A'$.

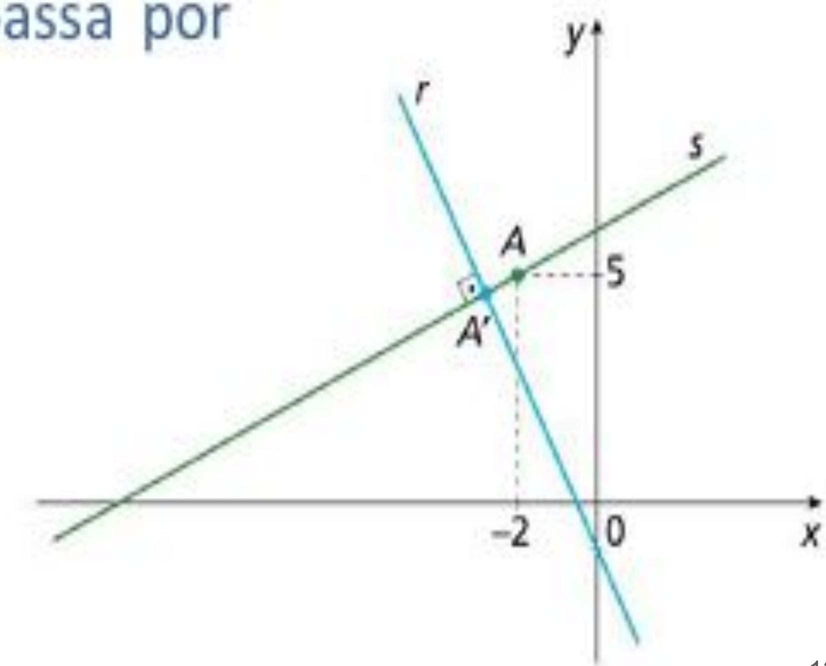
# Exemplo:

Considere o coeficiente angular da reta $r: 2x + y + 1 = 0$

$$y = -2x - 1 \Rightarrow m_r = -2$$

Para $r \perp s$, temos: $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow (-2) \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \frac{1}{2}$

Portanto, a equação da reta $s$ que passa por $A(-2,5)$ é:




$$y - y_A = m_s(x - x_A)$$

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$\boxed{s: x - 2y + 12 = 0}$$

# Exemplo:

Como $A' = r \cap s$, devemos resolver o sistema formado pelas equações das retas $r$ e $s$ e obter as coordenadas de $A'$.

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - 2y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{14}{5} \ e \ y = \frac{23}{5}$$

Portanto $A' = \left(-\frac{14}{5}, \frac{23}{5}\right)$.

Como $d_{A,r} = d_{A,A'}$, temos:

$$d_{A,r} = \sqrt{\left(-\frac{14}{5} + 2\right)^2 + \left(\frac{23}{5} - 5\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Logo, a distância entre o ponto $A$ e a reta $r$ é $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

# Fórmula da distância entre ponto e reta

Seja o ponto $P(x_P, y_P)$ e a reta $r$: $ax + by + c = 0$. A distância entre $P$ e $r$ é dada por:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

# Exemplo:

Calcule a distância entre o ponto $A(-2, 5)$ e a reta $r$ de equação $2x + y + 1 = 0$.

$$d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(2)(-2) + (1)(5) + (1)|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{|-4 + 5 + 1|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

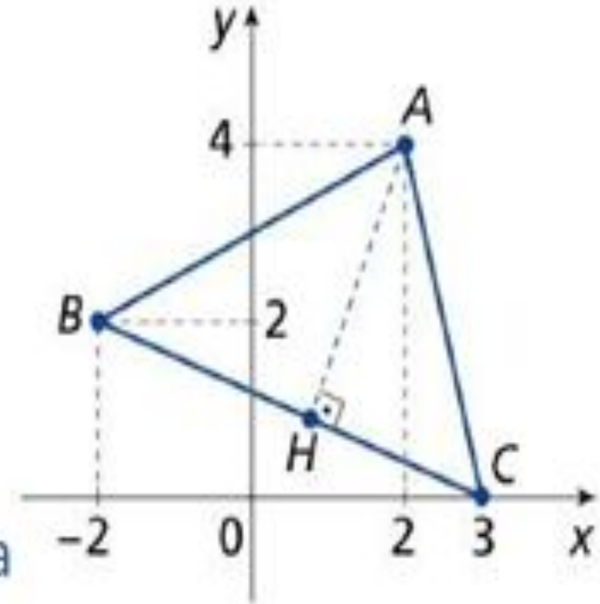
# Exemplo 6:

Dado o triângulo de vértices $A(2,4)$, $B(-2,2)$ e $C(3,0)$, determine a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

Equação da reta suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{BC}: 2x + 5y - 6 = 0}$$

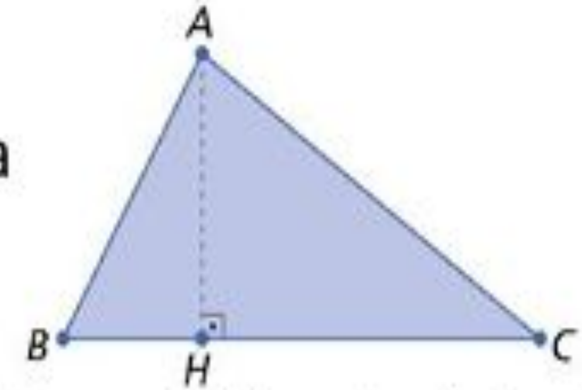



A medida da altura procurada é a distância entre o ponto $\boldsymbol{A(2,4)}$ e a reta $\overline{BC}$.

$$d_{A,\overline{BC}} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + (-6)|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|18|}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29}$$

# Área do triângulo: uma aplicação da Geometria analítica

Considere o triângulo ABC indicado na figura ao lado.




Pela geometria plana, sabemos que a área desse triângulo é dada por:

$$A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

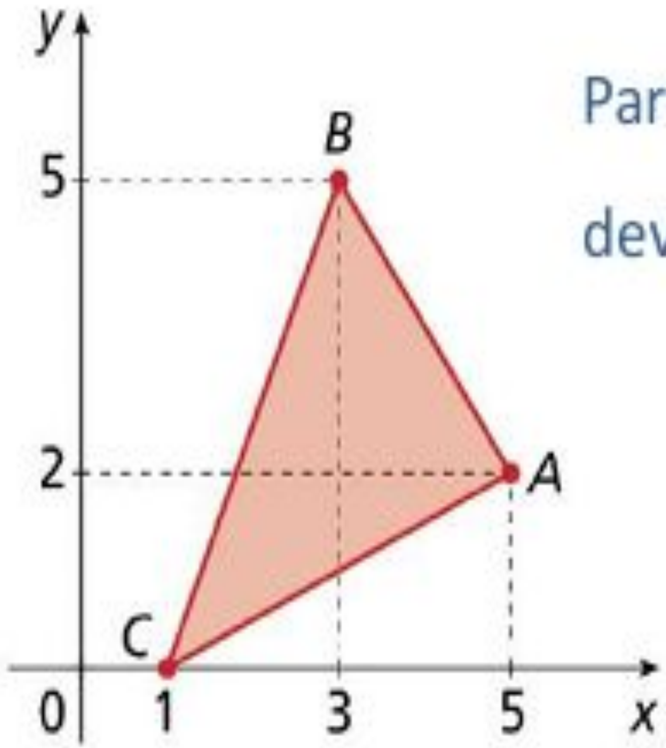
Pela geometria analítica, escrevemos essa fórmula da seguinte maneira:

$$A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r}$$

Observe que, nesse caso, $r$ é a reta suporte do lado $\overline{BC}$ do triângulo.

# Exemplo:

Os pontos $A(5,2)$, $B(3,5)$ e $C(1,0)$ são vértices do triângulo $ABC$ representado abaixo. Calcule a área desse triângulo.




Para calcular a área desse triângulo, devemos determinar a medida do lado $\overline{BC}$.

$$d_{B,C} = \sqrt{(1-3)^2 + (0-5)^2}$$

$$d_{B,C} = \sqrt{4+25}$$

$$d_{B,C} = \sqrt{29}$$

# Exemplo:

Agora, vamos determinar a equação da reta $r$ suporte do lado $\overline{BC}$.

$$\overline{BC} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{BC}: 5x - 2y - 5 = 0}$$

A distância do vértice $\boldsymbol{A(5,2)}$ à reta $r$ suporte do lado $\overline{BC}$ é dada por:

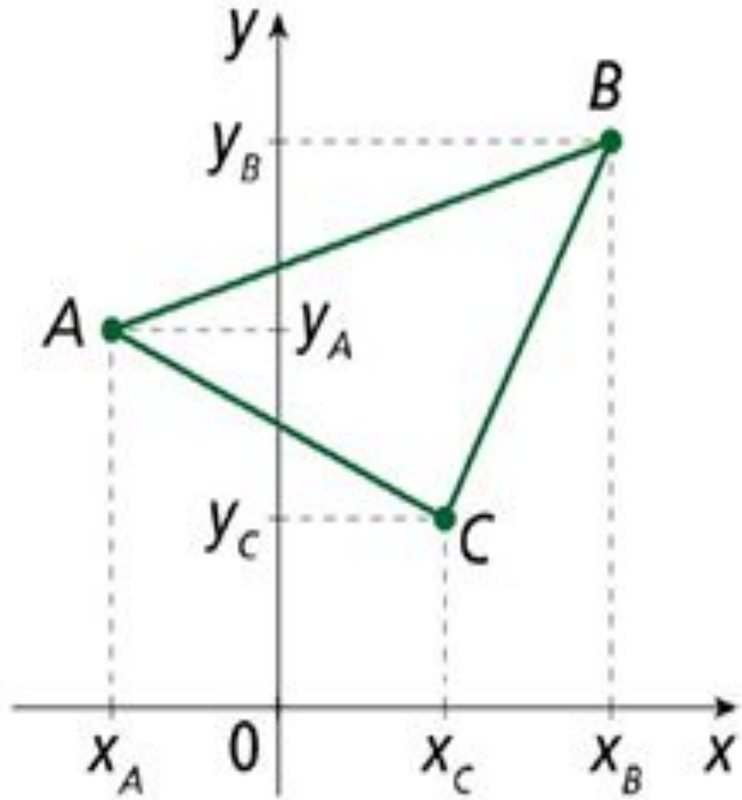
$$d_{A,r} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + (-5)|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{29}}$$

Utilizando os dados obtidos, vamos calcular a área do triângulo:

$$A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r} \Rightarrow A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{16}{\sqrt{29}} = 8$$

Portanto, a área do triângulo é 8 unidades de área.

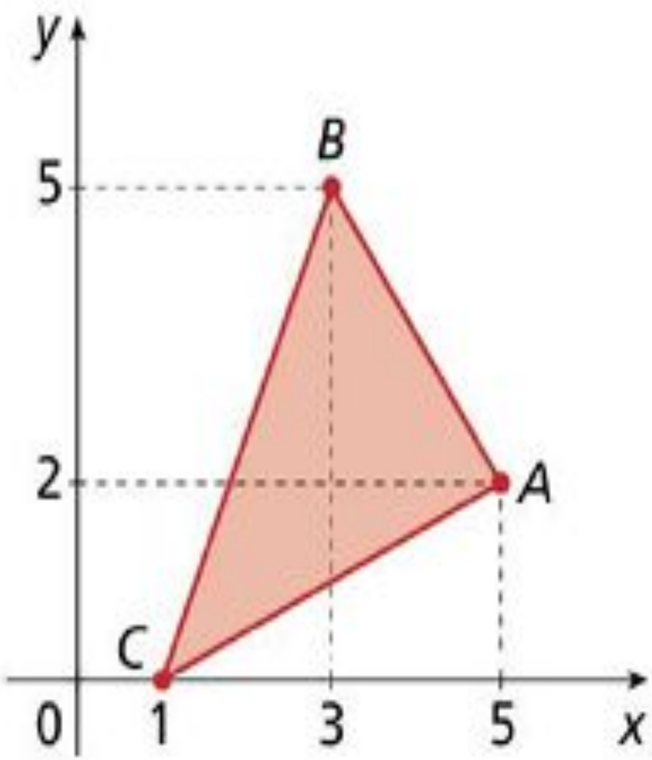
# Fórmula da área do triângulo




$$A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot |D|, com\ D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

# Exemplo:

Os pontos $A(5,2)$, $B(3,5)$ e $C(1,0)$ são vértices do triângulo $ABC$ representado abaixo. Calcule a área desse triângulo.




$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = 25 + 2 - 0 - 5 - 6 = 16$$

$$A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |16|$$

$$A_{triângulo} = 8$$

Portanto, a área do triângulo é 8 unidades de área.