

Identidades Trigonométricas — Teoria e Exemplos

Prof. Lucas Müller

29 de setembro de 2025

Objetivos da aula

- Relembrar as razões trigonométricas fundamentais.
- Apresentar as principais identidades trigonométricas.
- Mostrar exemplos de simplificação de expressões.
- Resolver equações trigonométricas simples usando identidades.
- Aplicar em problemas práticos e exercícios.

Identidade fundamental

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- Base de todas as outras identidades.
- Pode ser reescrita como:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

- Dividindo por $\cos^2 x$:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

- Dividindo por $\sin^2 x$:

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Exemplo

Verifique que $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1$.

Resolução

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1.$$

Funções pares e ímpares

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x$$

Exemplo

Simplifique $\sin(-30^\circ) + \cos(-60^\circ)$.

$$\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}, \quad \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow 0.$$

Identidades de ângulos complementares

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Exemplo

$$\cos 20^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \sin 70^\circ.$$

Identidades de soma e diferença

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

Exemplo

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Ângulo duplo

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Exemplo

Se $\cos x = \frac{3}{5}$ e x está no 1º quadrante:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \left(\frac{9}{25} \right) - 1 = -\frac{7}{25}.$$

Transformações produto-soma

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

Exemplo

Simplifique $\sin x \cos x$:

$$\sin x \cos x = \frac{\sin(2x) + \sin(0)}{2} = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Exercícios — copie no caderno

- ① Prove que $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ usando $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- ② Simplifique $\frac{1-\cos 2x}{\sin x}$.
- ③ Escreva $\cos 105^\circ$ usando soma ou diferença de ângulos notáveis.
- ④ Mostre que $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- ⑤ Resolva $\sin 2x = \sqrt{3}/2$ no intervalo $[0, 2\pi)$.

Conclusão

- Identidades são ferramentas poderosas para simplificar expressões.
- Permitem resolver equações trigonométricas complexas.
- Devem ser dominadas para facilitar cálculo de ângulos e aplicações em física.

Prof. Lucas Müller — Bons estudos!