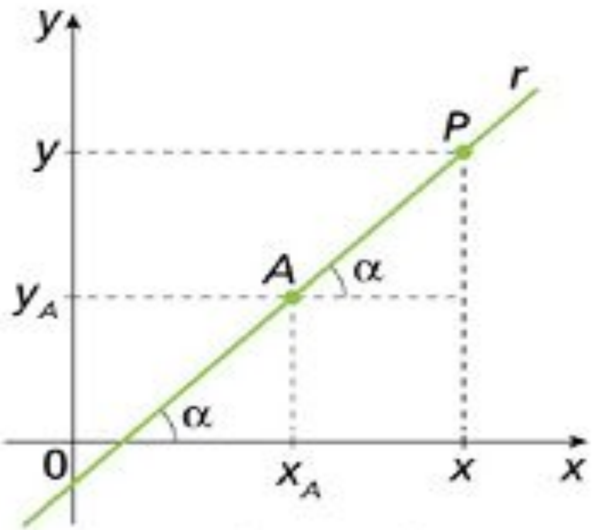
Geometria Analítica:
A Reta

- Equação da reta a partir de m e $A(x_A, y_A)$;
- Equação reduzida da reta;
- Equação segmentária da reta;
- Equação paramétrica da reta.

Profº Lucas Müller

Equação da reta de coeficiente angular m e que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$

Considere o ponto $P(x, y)$ na reta r não paralela ao eixo y, sendo $P \neq A$ e $m = tg\alpha$.



Como $m = tg\alpha$, então: $m = \frac{y-y_A}{x-x_A}$.

Portanto, a equação de uma reta que passa por $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

Exemplo 1:

Determine a equação geral da reta r que intercepta o eixo y no ponto $P(0,1)$ e o eixo x com uma inclinação de $150°$.

Coeficiente angular: $m = tg150° = -tg30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; como $P(0,1)$ pertence à reta r, temos:

$$y - y_P = m(x - x_P) \Longrightarrow y - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 0)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sqrt{3}x + 3y - 3 = 0}$$

Portanto, a equação geral da reta r é: $\sqrt{3}x + 3y - 3 = 0$.

Exemplo 2:

Sabendo que a inclinação da reta que passa pelos pontos $A(k, 2)$ e $B(-1, 3)$ é $45°$, determinar o valor de k e a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B.

O coeficiente angular é: $m = tg45° \Longrightarrow m = 1$

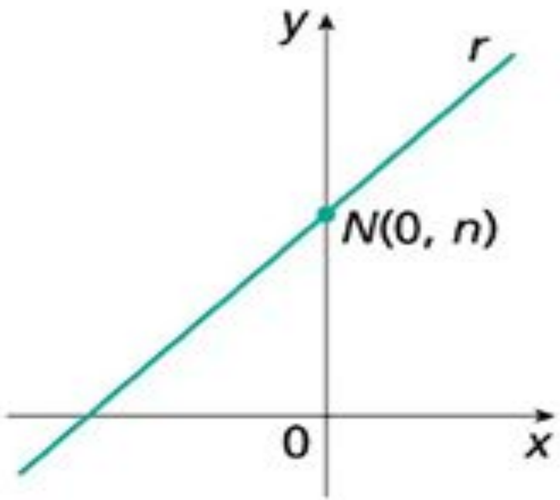
Portanto: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Longrightarrow 1 = \dfrac{3-2}{-1-k} \Longrightarrow \boxed{k = -2}$

A reta tem coeficiente angular $m = 1$ e passa por $A(-2,2)$. Assim:

$$y - 2 = 1(x + 2) \Longrightarrow \boxed{x - y + 4 = 0}$$

Portanto, $x - y + 4 = 0$ é a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B.

Equação reduzida da reta



$$y - y_N = m(x - x_N)$$

$$y - n = m(x - 0)$$

$$y - n = mx$$

$$\boxed{y = mx + n}$$

Equação reduzida da reta

$$y = mx + n$$

Função afim

$$y = ax + b$$

Coeficiente angular

Coeficiente linear

Exemplo 3:

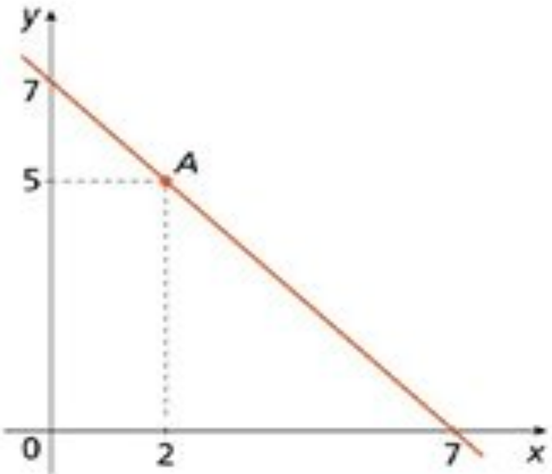
Escreva na forma reduzida a equação da reta que passa pelo ponto $A(2,5)$ e tem coeficiente angular $m = -1$.

Como $m = -1$ e $A(2,5)$, temos:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Longrightarrow y - 5 = -1(x - 2)$$

$$\Longrightarrow y - 5 = -x + 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = -x + 7}$$



Portanto, a equação reduzida da reta que passa pelo ponto $A(2,5)$ e tem coeficiente angular $m = -1$ é: $y = -x + 7$.

Exemplo 4:

Determinar os coeficientes linear e angular da reta de equação $6x - 5y - 30 = 0$.

Para determinar os coeficientes linear e angular da reta, isolamos y em : $6x - 5y - 30 = 0$.

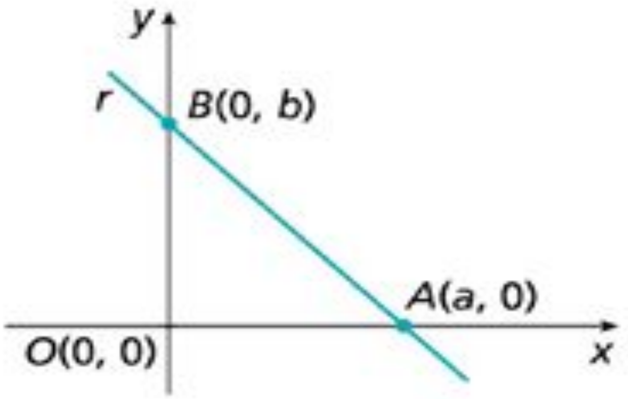
Assim: $$6x - 5y - 30 = 0 \Rightarrow -5y = -6x + 30$$
$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{6}{5}x - 6}$$

Comparando a equação acima com a equação reduzida da reta, temos o coeficiente linear -6 e o coeficiente angular $\frac{6}{5}$.

Equação segmentária da reta

A equação geral da reta r é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies bx + ay = ab$$



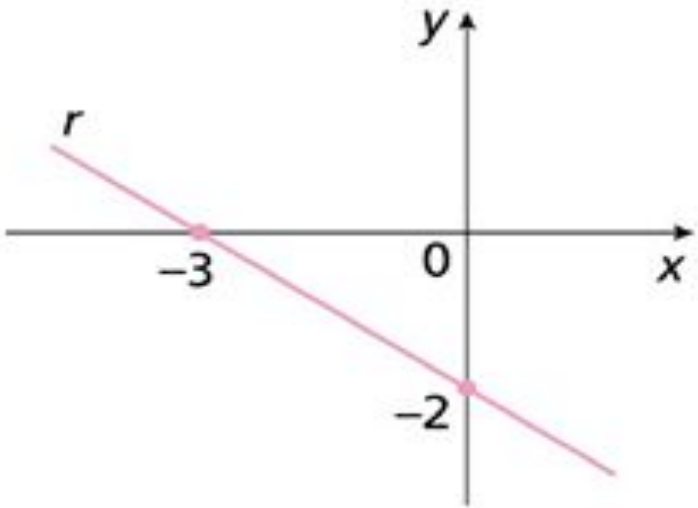
Dividindo os dois membros da equação por ab, obtemos:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

A equação é $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ denominada **equação segmentária da reta**.

Exemplo 5:

Determine a equação segmentária da reta r representada abaixo.



Como a reta r intercepta o eixo x em $(-3{,}0)$ e o eixo y em $(0,-2)$, temos:

$$\Longrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Longrightarrow \quad \Longrightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$$

Portanto, $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$ é a equação segmentária da reta.

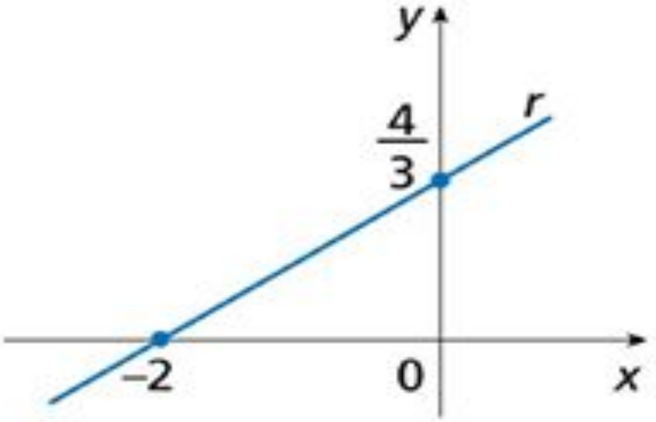
Exemplo 6:

Determine a equação segmentária da reta r cuja equação geral é $2x - 3y + 4 = 0$.

$$2x - 3y + 4 = 0 \Longrightarrow 2x - 3y = -4$$

$$\Longrightarrow \frac{2x}{-4} - \frac{3y}{-4} = \frac{-4}{-4}$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$$



Portanto, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$ é a equação segmentária da reta.

Equações paramétricas da reta

Equações paramétricas são aquelas que não relacionam diretamente as coordenadas x e y. Essas equações são dadas em função de uma terceira variável, t, camada **parâmeto**, em que f e g são funções afins.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

são denominadas **equações paramétricas da reta**.

Exemplo 7:

Determinar a equação geral da reta r definida por:

$$\begin{cases} x = 2t + 4 & \text{(I)} \\ y = t - 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando t na equação (II): $t = y + 3$ (III)

Substituindo (III) na equação (I):

$$x = 2(y + 3) + 4$$

$$x = 2y + 6 + 4$$

$$x - 2y - 10 = 0$$

Portanto, $x - 2y - 10 = 0$ é a equação geral da reta r.

Exemplo 8:

Considere a reta r cuja equação geral é $3x - 2y - 6 = 0$.

Determine um par de equações paramétricas da reta r.

Isolando x na equação: $3x = 2y + 6 \implies x = \dfrac{2y + 6}{3}$

$$\implies x = 2\left(\frac{y}{3} + 1\right)$$

Considere que $\frac{y}{3} + 1 = t$.

Portanto, um par de equações paramétricas da reta r são:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 3 \end{cases}$$