Geometria Espacial

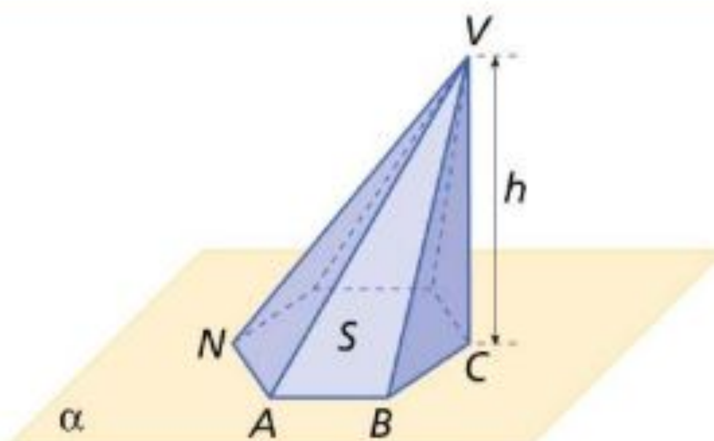
- Pirâmides

Profº Lucas Müller

Pirâmides

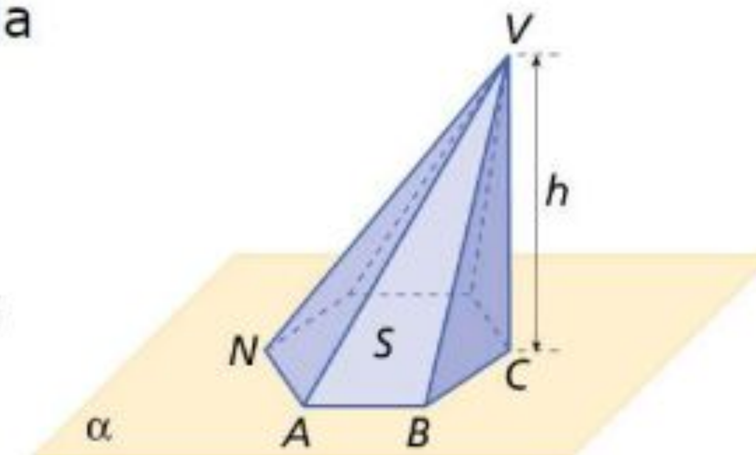
Vamos considerar um plano α, uma região poligonal convexa S contida em α e um ponto V fora de α.

Chama-se **pirâmide** o poliedro formado por todos os segmentos de reta cujas extremidades são o ponto V e um ponto da região S.



Elementos de uma pirâmide

Considerando a pirâmide desenhada ao lado, temos:

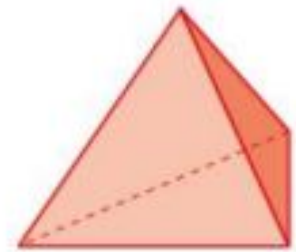


- **base**: a região poligonal S;
- **vértice da pirâmide**: o ponto V;
- **faces laterais**: as superfícies triangulares AVB, BVC, ..., NVA;
- **arestas da base**: os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... , $\overline{NA}$;
- **arestas laterais**: os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, ... , $\overline{VN}$;
- **altura da pirâmide**: a distância h entre o vértice V e o plano α.

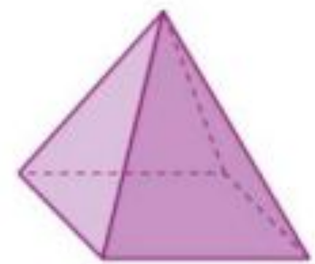
Classificação das pirâmides

Consideramos o número de arestas da base:

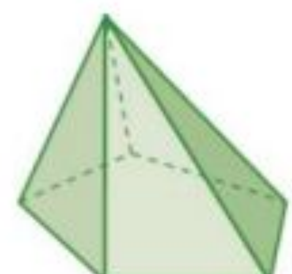
- se a base tem 3 arestas
  pirâmide triangular



- se a base tem 4 arestas
  pirâmide quadrangular

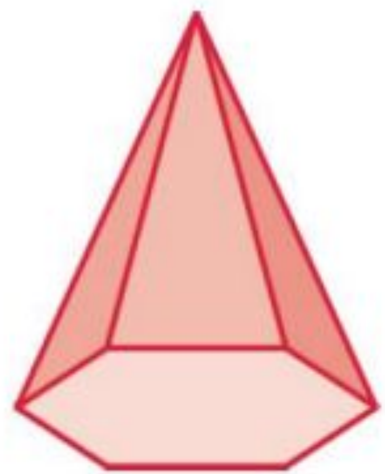


- se a base tem 5 arestas
  pirâmide pentagonal,
  e assim por diante.



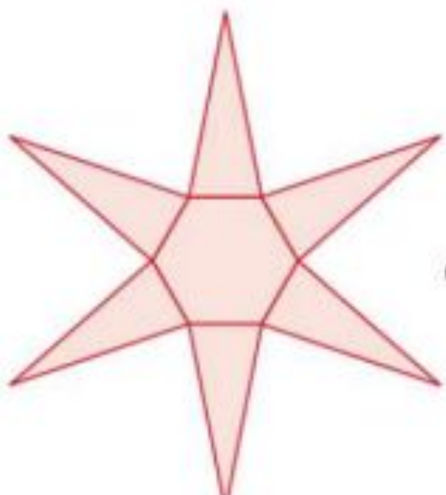
Representações planas de pirâmides

Até aqui, representamos pirâmides em perspectiva, como a ilustrada abaixo.



Representações planas de pirâmides

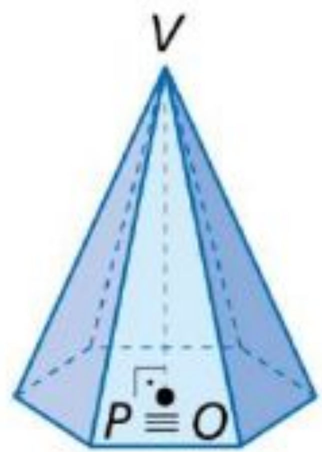
Como os demais poliedros, uma pirâmide também pode ser representada por meio de planificações de sua superfície. Em um plano, é possível justapor as faces de uma pirâmide de diferentes modos, desde que cada uma das faces tenha pelo menos uma aresta em comum com outra. Observe:



ou

Pirâmide regular

Uma pirâmide cuja base é uma superfície poligonal regular e cuja projeção ortogonal P do vértice sobre o plano da base coincide com o centro O do polígono de base é chamada de **pirâmide regular**.



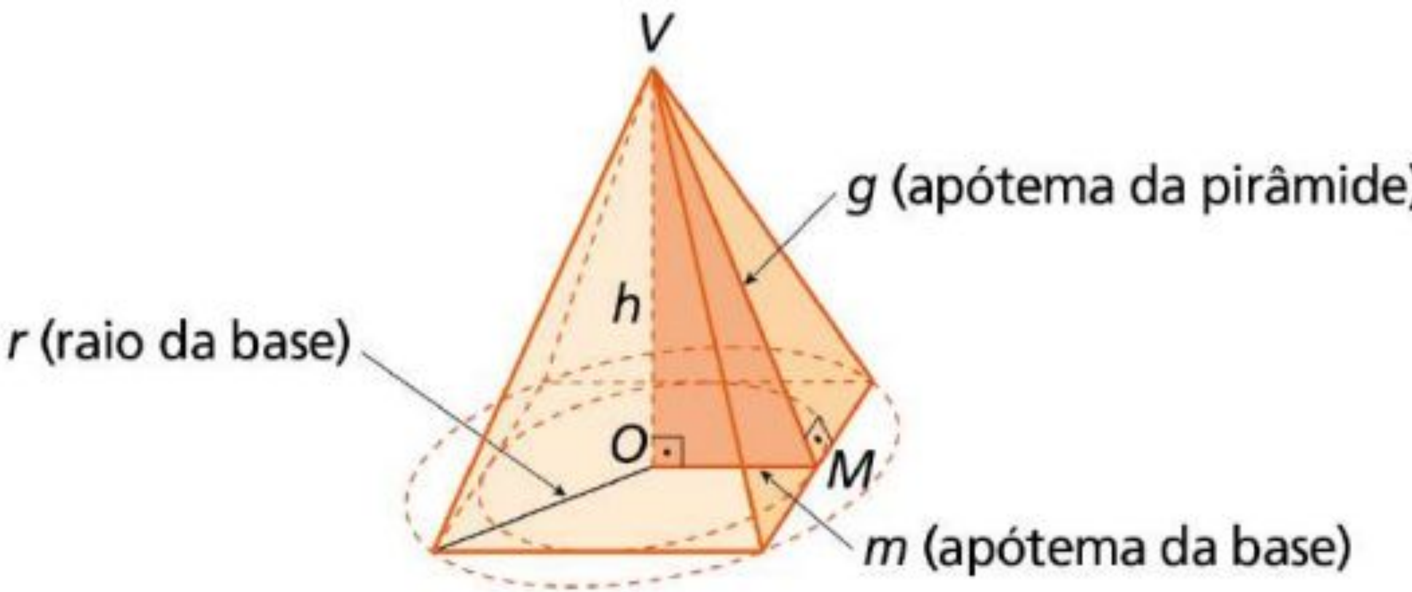
pirâmide reta

Pirâmide regular

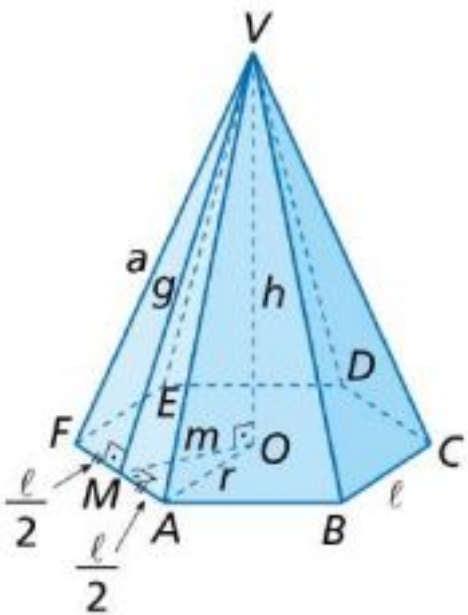
Observações:

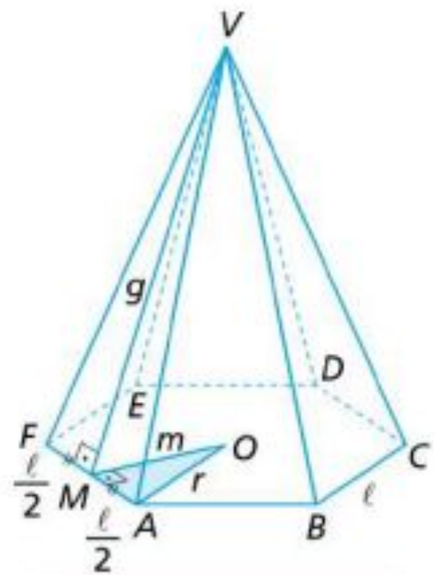
- O centro de um polígono regular coincide com o centro da circunferência circunscrita a esse polígono.
- As faces de uma pirâmide regular são determinadas por triângulos isósceles congruentes. Um importante exemplo desse tipo de pirâmide regular é o **tetraedro regular**.

Elementos das pirâmides regulares

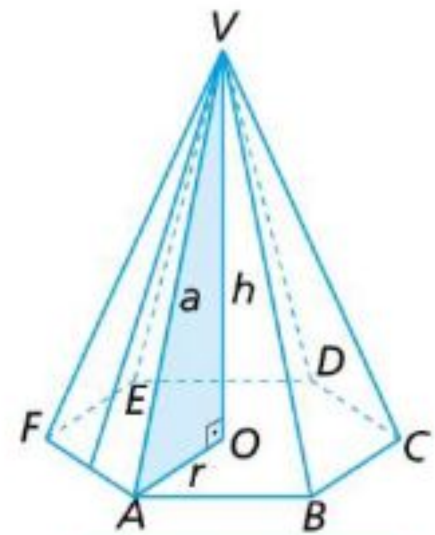


Relações métricas entre os elementos de uma pirâmide regular



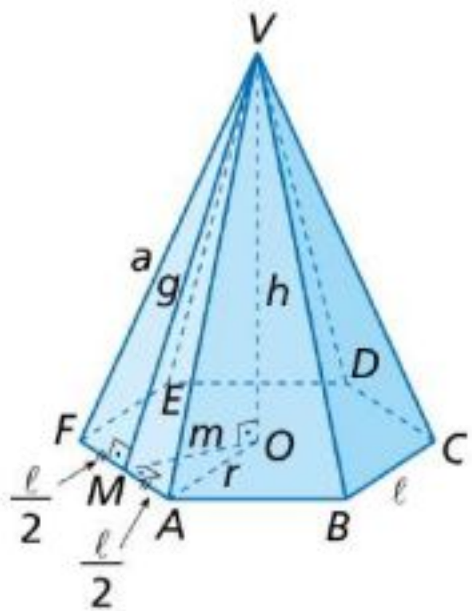


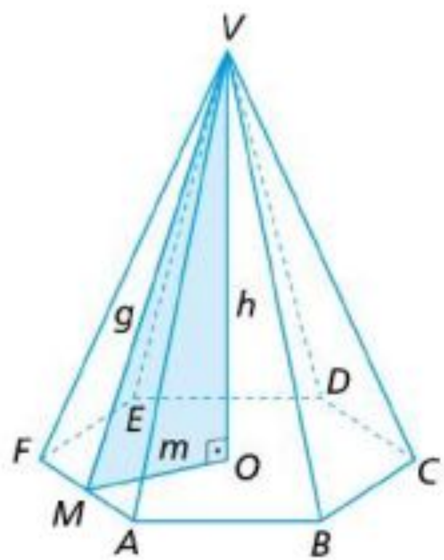
$$\boxed{r^2 = m^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$



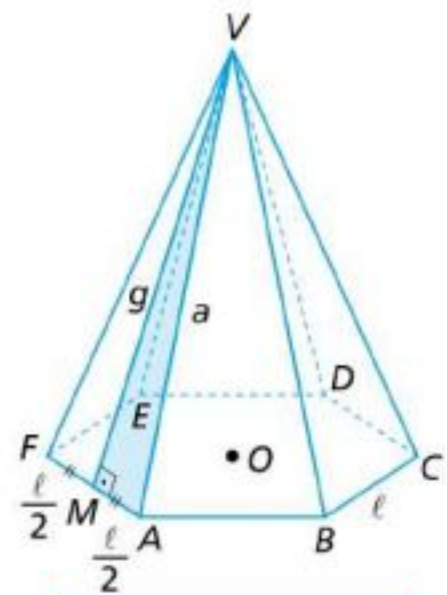
$$\boxed{a^2 = h^2 + r^2}$$

Relações métricas entre os elementos de uma pirâmide regular



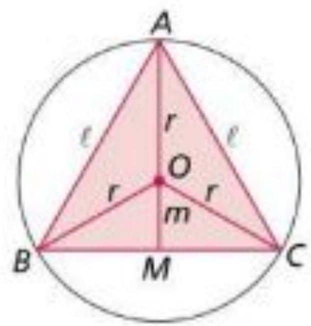


$$\boxed{g^2 = h^2 + m^2}$$

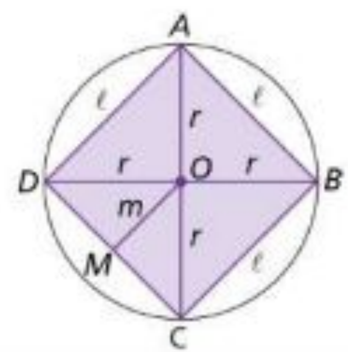


$$\boxed{a^2 = g^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

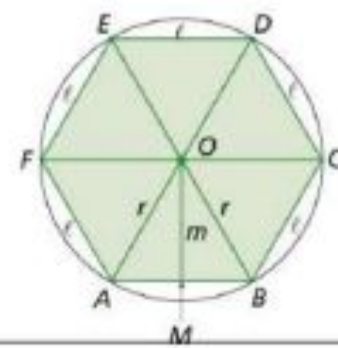
Relação entre as medidas da aresta da base e as do apótema da base de algumas pirâmides regulares

Base	Figura	Relação
Triângulo equilátero		$m = \frac{r}{2}$ ou $m = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

Relação entre as medidas da aresta da base e as do apótema da base de algumas pirâmides regulares

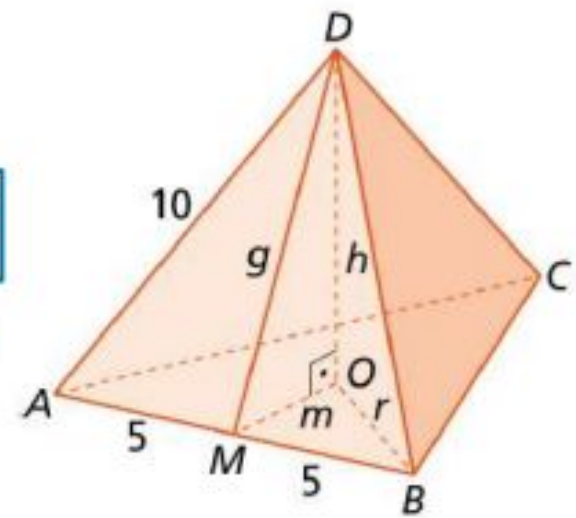
Base	Figura	Relação
Quadrado		$m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ ou $m = \frac{l}{2}$

Relação entre as medidas da aresta da base e as do apótema da base de algumas pirâmides regulares

Base	Figura	Relação
Hexágono regular		$m = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$ ou $m = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$

Exemplo 1:

Um tetraedro regular tem arestas medindo 10 cm. Calcular a medida do apótema da pirâmide (g), a medida do apótema da base (m) e a altura da pirâmide (h).



No $\triangle\, DMA$, tem-se:

$$10^2 = g^2 + 5^2 \;\Rightarrow g^2 = 75 \;\Rightarrow \boxed{g = 5\sqrt{3}}$$

Como a superfície da base é triângulo equilátero, vem:

$$m = \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \boxed{m = \frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

Agora, no $\triangle\, DMO$, tem-se:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Longrightarrow 75 = h^2 + \frac{25}{3} \Longrightarrow \; h^2 = \frac{200}{3} \Longrightarrow \boxed{h = \frac{10\sqrt{2}}{3}}$$

Área da superfície de uma pirâmide

Área da base (A_{base}): área da superfície poligonal que forma a base;

Área lateral ($A_{lateral}$): soma das áreas das faces laterais (superfícies triangulares);

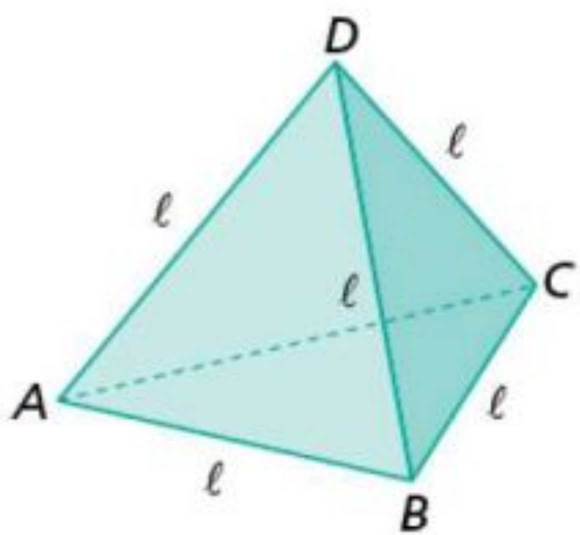
Área total (A_{total}): soma da área lateral com a área da base, ou seja:

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

Área da superfície de uma pirâmide

Observação:

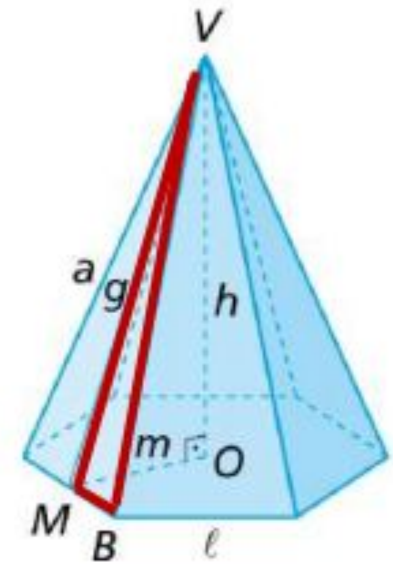
Se a pirâmide for um tetraedro regular, sua área total, em função da medida ℓ da aresta, será dada por:



$$A_{\text{total}} = \ell^2\sqrt{3}$$

Exemplo 2:

Determinar a área da superfície de uma pirâmide regular hexagonal sabendo que a aresta da base mede l e a aresta lateral mede a.



A base da pirâmide é uma superfície hexagonal regular de lado l. Portanto, a área da base é dada por:

$$A_{base} = \frac{3l^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Como a pirâmide é regular, as faces laterais são formadas por triângulos isósceles e congruentes, que nesse caso têm base l e altura g.

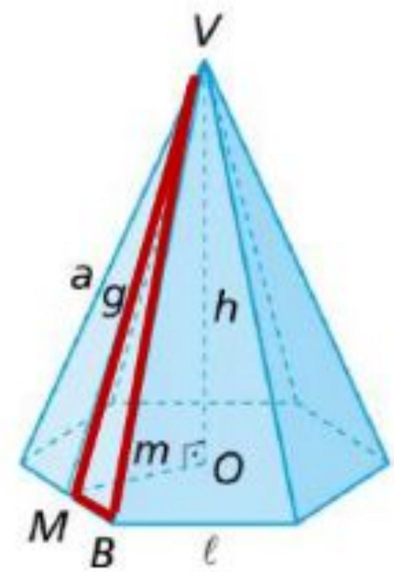
No triângulo retângulo VMB, tem-se:

Exemplo 2:

No triângulo retângulo VMB, tem-se:

$$a^2 = g^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 - \frac{l^2}{4} = g^2 \Rightarrow \frac{4a^2 - l^2}{4} = g^2$$

$$\Rightarrow \; g = \frac{\sqrt{4a^2 - l^2}}{2}$$



Dessa forma:

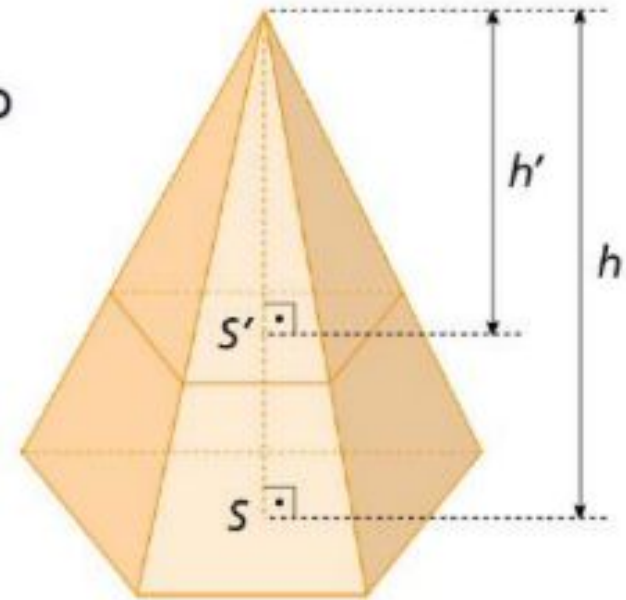
$$A_{lateral} = 6 \cdot \frac{l \cdot g}{2} = 3 \cdot l \cdot g = 3l \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - l^2}}{2} = \frac{3l\sqrt{4a^2 - l^2}}{2}$$

Portanto: $A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$

$$A_{total} = \frac{3l^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3l\sqrt{4a^2 - l^2}}{2} = \boxed{\frac{3l \cdot \left(l\sqrt{3} + \sqrt{4a^2 - l^2}\right)}{2}}$$

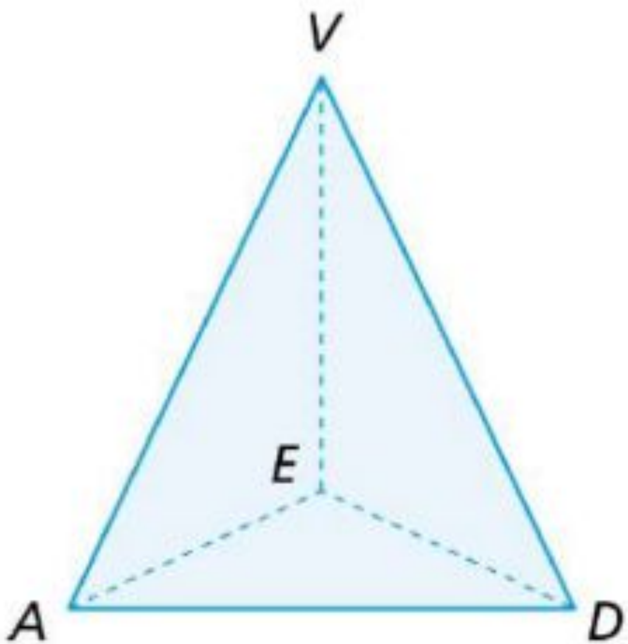
Propriedades das pirâmides

1ª propriedade: A razão entre a área S' de uma secção transversal de uma pirâmide feita a uma altura h' em relação ao vértice e a área S da base dessa pirâmide de altura h é: $\dfrac{S'}{S} = \left(\dfrac{h'}{h}\right)^2$



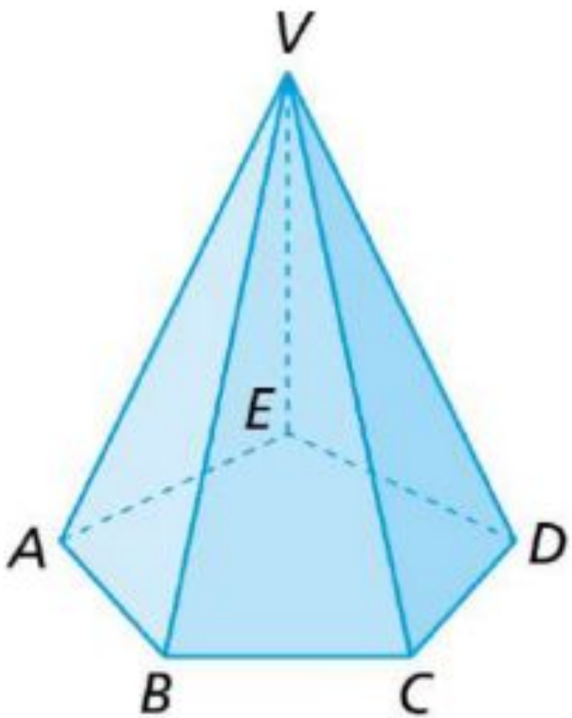
2ª propriedade: Se duas pirâmides têm mesma altura e mesma área de base, elas têm o mesmo volume.

Volume de uma pirâmide de base triangular



$$V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$$

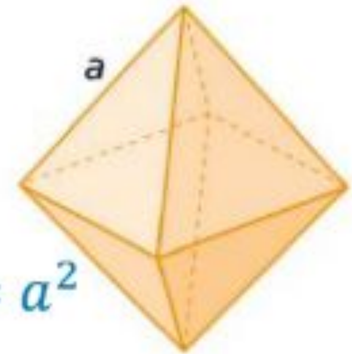
Volume de uma pirâmide qualquer



$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \text{área da base x altura}$$

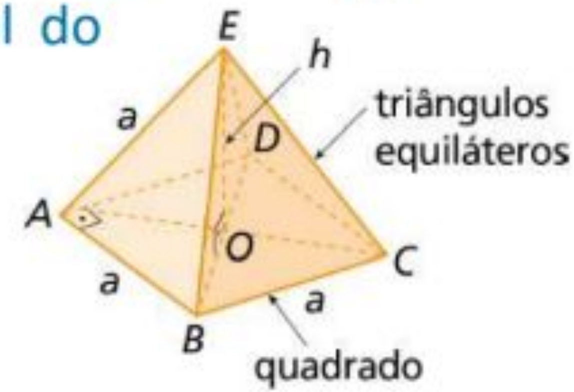
Exemplo 3:

Calcular o volume do octaedro regular de aresta a.



Observe que o sólido é formado por duas pirâmides quadrangulares regulares cuja área da base é: $A_{base} = a^2$

OB é igual à metade da medida da diagonal do quadrado da base.



Portanto: $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

No triângulo retângulo BOE, tem-se:

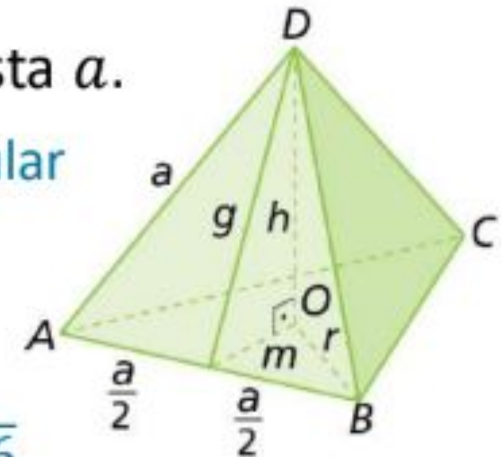
$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Logo, o volume do octaedro é:

$$V_{octaedro} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}}$$

Exemplo 4:

Calcular o volume do tetraedro regular de aresta a.



A área da base é a área de uma superfície triangular equilátera de lado a. Logo:

$$A_{base} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

A altura h é tal que:

$$h^2 = g^2 - m^2 \Rightarrow \quad h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

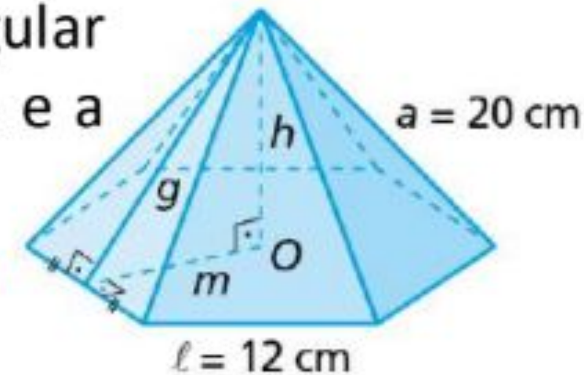
Assim:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \quad \Rightarrow V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{tetraedro} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}}$$

Exemplo 5:

Determine o volume de uma pirâmide regular hexagonal cuja aresta da base mede 12 cm e a aresta lateral mede 20 cm.



Primeiro, vamos calcular a medida g do apótema da pirâmide.

$$a^2 = g^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow 20^2 = g^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \Rightarrow 400 = g^2 + 36$$

$$\Rightarrow g = \sqrt{364} \Rightarrow \boxed{g = 2\sqrt{91}}$$

Agora, vamos determinar a medida m do apótema da base.

Como a base é um hexágono regular, temos:

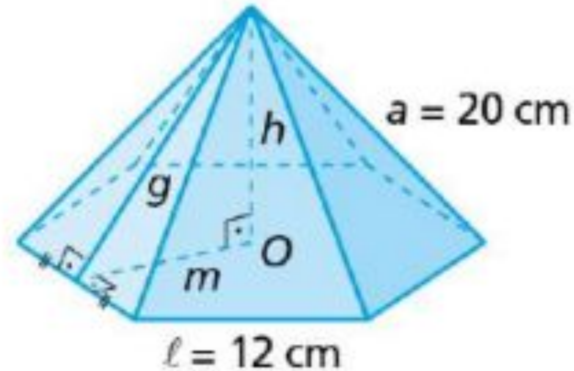
$$m = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{m = 6\sqrt{3}}$$

Exemplo 5:

Cálculo da altura h da pirâmide:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{91}\right)^2 = h^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow h^2 = 256 \Rightarrow h = 16$$



Cálculo da área da base:

$$A_{base} = \frac{3 \cdot 12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{base} = 216\sqrt{3}$$

Cálculo do volume da pirâmide:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 216\sqrt{3} \cdot 16$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{pirâmide} = 1152\sqrt{3}\ cm^3}$$