Função Cosseno: Teoria, Gráficos, Identidades e Aplicações

Prof. Lucas Müller

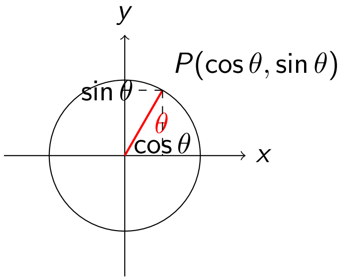
29 de setembro de 2025

Objetivos da aula

- Compreender a definição da função cosseno a partir do círculo unitário.
- Explorar propriedades: período, simetria, máximos/mínimos, valores notáveis.
- Aprender transformações (amplitude, período, fase, deslocamento vertical).
- Resolver equações trigonométricas envolvendo cosseno.
- Ver aplicações físicas e exercícios resolvidos.

Círculo unitário — definição geométrica

- Ponto sobre o círculo unitário: $P(\cos\theta, \sin\theta)$.
- Por definição geométrica, $\cos\theta$ é a coordenada x do ponto obtido girando θ radianos a partir do eixo x positivo.
- Relação fundamental: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.



Definição formal e domínio

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], \qquad f(x) = \cos x$$

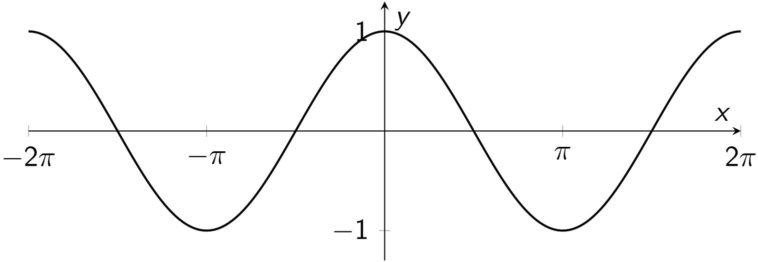
- Domínio: $\mathbb{R}$ (toda linha real).
- Imagem (contradomínio efetivo): $[-1, 1]$.
- Periodicidade: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ (período fundamental 2π).
- Simetria: função **par**, $\cos(-x) = \cos x$.

Valores notáveis — tabela

θ	graus	$\cos\theta$
0	0°	1
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	0
π	180°	-1
$\frac{3\pi}{2}$	270°	0
2π	360°	1

Dica: memorize os valores do triângulo 30–60–90 e 45–45–90 — são as bases para resolver muitos exercícios.

Gráfico padrão de $y = \cos x$



- Picos em $x = 2k\pi$ (valor 1), vales em $x = \pi + 2k\pi$ (valor -1).
- Zeros em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Propriedades e identidades importantes

Identidades fundamentais

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$
$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{(paridade)},$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{(periodicidade)}.$$

Fórmulas essenciais

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Série de Taylor (expansão centrada em 0)

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

- Útil para aproximações quando x é pequeno (métodos numéricos).
- Converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

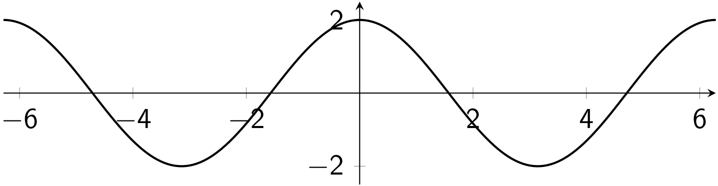
Transformações: forma geral

$$y = A\cos\big(B(x - C)\big) + D$$

- Amplitude: $|A|$ (variação em torno do eixo central).
- Período: $T = \dfrac{2\pi}{|B|}$.
- Fase (deslocamento horizontal): C (direita se $C > 0$).
- Deslocamento vertical: D (eixo central em $y = D$).

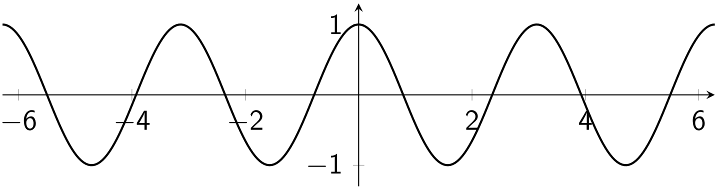
Exemplo: amplitude — $y = 2\cos x$

- Amplitude: $|A| = 2$ (varia entre -2 e 2).
- Período: 2π.
- Esboço: mesma forma, dobrada em y.



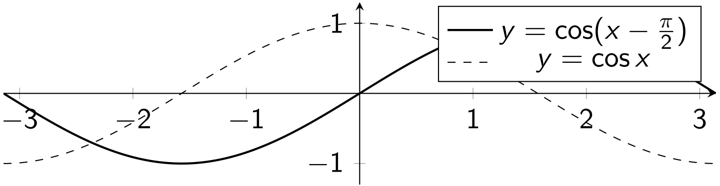
Exemplo: período — $y = \cos(2x)$

- Período: $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ — duas oscilações em 2π.
- Amplitude: 1.



Exemplo: deslocamento de fase — $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

- Deslocamento de fase: $C = \frac{\pi}{2}$ (move o gráfico $\frac{\pi}{2}$ para a direita).
- Note: $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ — relação entre cosseno e seno por fase.



Exemplo combinado — extrair parâmetros

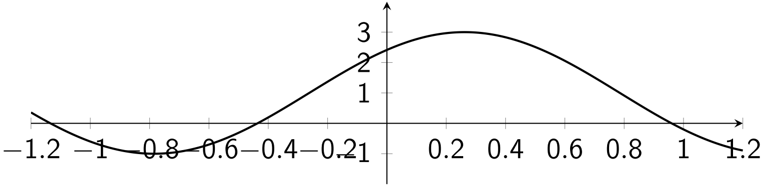
Considere $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

- Amplitude: $|A| = 2$.
- $B = 3 \Rightarrow$ Período: $T = \dfrac{2\pi}{3}$.
- Fase: $C = \dfrac{\pi}{12}$ (ver passo abaixo).

$$2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right) + 1$$

O deslocamento horizontal é $\frac{\pi}{12}$ para a direita (pois $3(x - C) = 3x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow C = \frac{\pi}{12}$).

Gráfico — $y = 2\cos(3x - \frac{\pi}{4}) + 1$



Como resolver $\cos x = a$

- Se $|a| > 1$: sem solução real.
- Se $|a| \leq 1$: existem soluções infinitas, escritas em forma geral:

$$x = \pm \arccos(a) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

- Interprete geometricamente: encontre pontos do círculo unitário com projeção x-igual a a.

Exemplo: resolver $\cos x = \frac{1}{2}$ em $[0, 2\pi)$

$$\arccos\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Soluções em $[0, 2\pi)$:

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

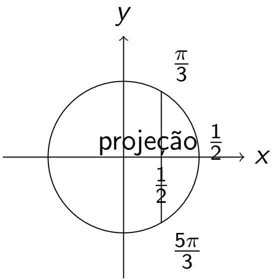
Forma geral:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Função inversa arccos

- $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ — por convenção principal.
- $\cos(\arccos y) = y$ para $y \in [-1, 1]$.
- $\arccos(\cos x) = x$ apenas se $x \in [0, \pi]$; caso contrário, a composição projeta para o intervalo principal.

Geometria das soluções — ilustração



Aplicações: Movimento Harmônico Simples

Posição do MHS:

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

- X_0: amplitude, ω: frequência angular, φ: fase inicial.
- Energia, velocidade e aceleração têm formas trigonométricas (derivadas).
- Exemplo rápido: se $x(t) = 3\cos(2t)$, então $v(t) = -6\sin(2t)$.

Aplicações: ondas e sinais

- Corrente alternada: $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$.
- Em processamento de sinais, senóides formam a base da série de Fourier.
- Atenção: amostragem de sinais sinusoidais exige respeitar Nyquist — senóides podem se "dobrar" (aliasing).

Identidades úteis para manipulação

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Essas identidades são essenciais para resolver integrais e simplificar expressões trigonométricas.

Exercícios — copie no caderno

1. Esboce $y = \cos x - 2$. Identifique amplitude, período e eixo central.
2. Determine amplitude e período de $y = -3\cos(2x)$. Esboce.
3. Resolva $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ em $[0, 2\pi)$.
4. Ache todas as soluções de $\cos(3x) = \frac{1}{2}$.
5. Prove que $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

Soluções — 1 e 2

1. $y = \cos x - 2$
   - Amplitude: 1 (mesma amplitude da cossenoide).
   - Eixo central: $y = -2$ (deslocamento vertical).
   - Varia entre -3 e -1.

2. $y = -3\cos(2x)$
   - Amplitude: $|-3| = 3$.
   - Período: $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.
   - O sinal negativo inverte a onda (picos viram vales).

Soluções — 3 e 4

3. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ em $[0, 2\pi)$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},$$

portanto soluções: $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$.

4. $\cos(3x) = \frac{1}{2}$
Primeiro: $3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Assim,

$$x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se pedirem no intervalo $[0, 2\pi)$, liste os k que dão x nesse intervalo.

Dicas para prova e erros comuns

- Sempre verifique o domínio quando usar arccos.
- Ao transformar $A\cos(B(x - C)) + D$ em forma canônica, dividir corretamente o termo de fase por B.
- Não confundir deslocamento de fase com deslocamento vertical.
- Use identidades soma-produto para integrar ou simplificar produtos de cossenos.

Conclusão rápida

- A função cosseno é central na trigonometria e em muitas aplicações físicas/engenheiras.
- Domine valores notáveis, identidades e transformações — isso resolve a maioria dos exercícios.
- Pratique: resolva equações trigonométricas e esboce muitos gráficos.

Prof. Lucas Müller — Bons estudos!