Função Tangente: Teoria, Gráficos, Identidades e Aplicações

Prof. Lucas Müller

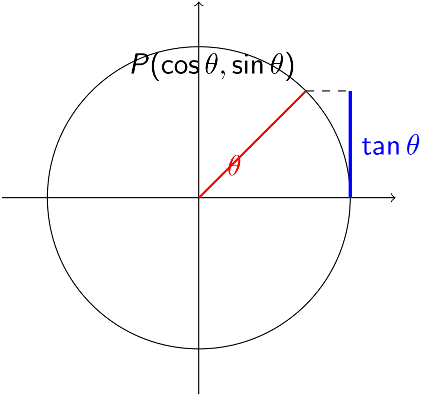
29 de setembro de 2025

Objetivos da aula

- Entender a definição de $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
- Explorar domínio, imagem e periodicidade.
- Compreender o comportamento no círculo unitário e os assíntotas verticais.
- Aprender transformações (amplitude não existe, mas período e fase sim).
- Resolver equações trigonométricas envolvendo tangente.
- Aplicar em problemas de ângulos de inclinação, óptica e física.

Definição no círculo unitário

- Para um ângulo θ, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.
- Geometricamente: comprimento do segmento tangente no ponto $x = 1$.

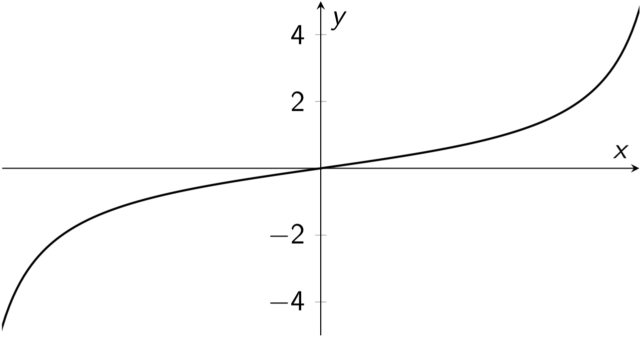


Domínio e imagem

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \tan x$$

- Domínio: todos os reais, exceto onde $\cos x = 0$.
- Zeros: $x = k\pi$.
- Imagem: $\mathbb{R}$ (todos os números reais).
- Período: π (não 2π como o seno/cosseno).

Gráfico padrão de $y = \tan x$



- Assíntotas verticais em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Crescente em todo intervalo do domínio.

Propriedades da função tangente

Paridade e periodicidade

$$\tan(-x) = -\tan x \quad \text{(função ímpar)}, \qquad \tan(x+\pi) = \tan x.$$

Identidade fundamental

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

Série de Taylor de $\tan x$ em 0

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad (|x| < \tfrac{\pi}{2})$$

- Útil para aproximações numéricas.
- Convergência apenas no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

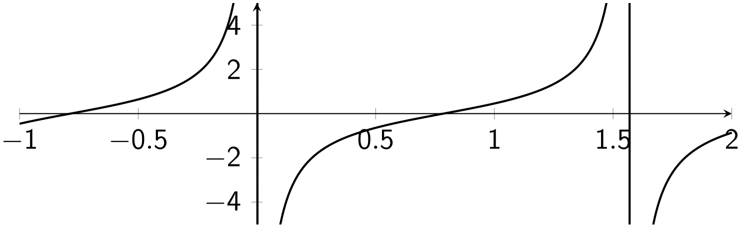
Transformações: forma geral

$$y = A \tan\left(B(x - C)\right) + D$$

- A: estica ou comprime verticalmente (mas não define amplitude — a função é ilimitada).
- Período: $T = \frac{\pi}{|B|}$.
- Deslocamento horizontal: C.
- Deslocamento vertical: D (muda o ponto de cruzamento com o eixo central).

Exemplo: $y = \tan(2x - \frac{\pi}{2})$

- Período: $T = \frac{\pi}{2}$ (metade do padrão).
- Deslocamento de fase: $C = \frac{\pi}{4}$ (direita).



Resolvendo $\tan x = a$

- $\tan x = a \Rightarrow x = \arctan a + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$.
- Sempre haverá infinitas soluções, separadas de π.
- Importante: $\arctan a$ retorna solução no intervalo principal $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Exemplo: $\tan x = 1$

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Portanto:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Soluções no intervalo $[0, 2\pi)$:

$$x = \frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}.$$

Aplicações: inclinação de retas

Em geometria analítica:

$$m = \tan \theta$$

onde m é o coeficiente angular da reta e θ é o ângulo com o eixo x.

- Se $m > 0$, reta crescente; se $m < 0$, reta decrescente.
- Útil em topografia e engenharia civil para calcular rampas.

Aplicações: física

- Ângulo de inclinação de planos inclinados.
- Propagação de luz: Lei de Snell pode ser expressa em termos de tan para pequenas inclinações.
- Fórmulas de atrito estático: $\tan \theta = \mu_s$ no ângulo limite.

Exercícios — copie no caderno

1. Esboce o gráfico de $y = \tan x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.
2. Determine as soluções de $\tan x = \sqrt{3}$ no intervalo $[0, 2\pi)$.
3. Encontre todas as soluções de $\tan(2x) = 1$.
4. Mostre que $\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x$.
5. Prove a identidade $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Soluções — itens principais

2. $\tan x = \sqrt{3}$

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

No intervalo $[0, 2\pi)$: $x = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

3. $\tan(2x) = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$. Escolher k para soluções no intervalo desejado.

Dicas e erros comuns

- Nunca esqueça as assíntotas ao esboçar o gráfico.
- Ao resolver equações, não perca soluções fora do intervalo principal.
- Lembre-se que o período é π, não 2π.
- Para transformações, identifique corretamente B e calcule $T = \frac{\pi}{B}$.

Conclusão

- A função tangente liga ângulos a razões de inclinação — aplicação direta em geometria e física.
- Tem período menor (π), comportamento ilimitado e assíntotas verticais.
- Dominar equações trigonométricas com tangente é essencial para trigonometria avançada.

Prof. Lucas Müller — Bons estudos!