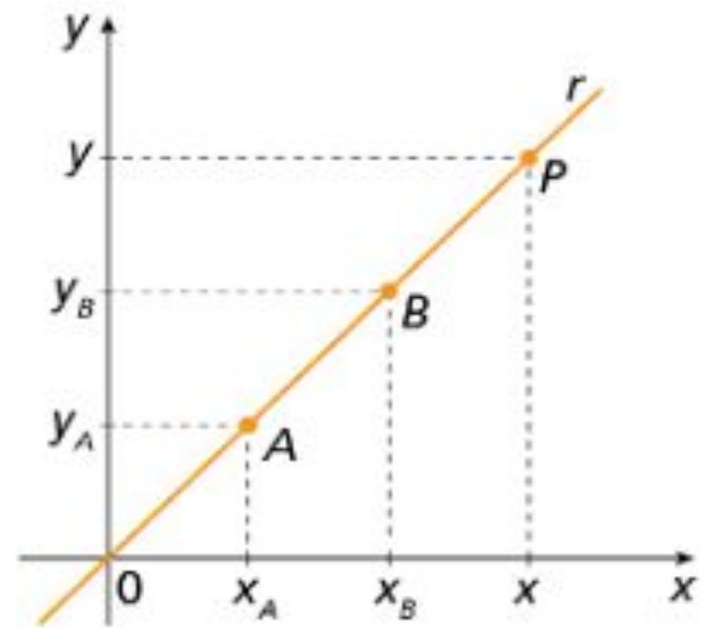
Geometria Analítica: A Reta

- Equação geral da reta;
- Inclinação e coeficiente angular da reta.

Prof° Lucas Müller

Equação geral da reta

Pela condição de alinhamento entre três pontos:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

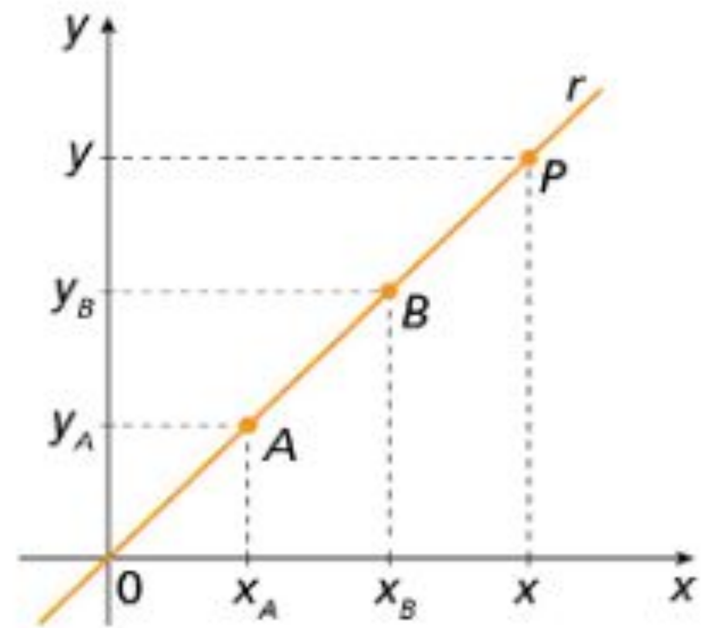
$$xy_A + x_By + x_Ay_B - (x_By_A + x_Ay + xy_B) = 0$$

$$\boldsymbol{xy_A + x_By + x_Ay_B - x_By_A - x_Ay - xy_B = 0}$$

$$x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + x_Ay_B - x_By_A = 0$$

Equação geral da reta

Pela condição de alinhamento entre três pontos:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$xy_A + x_By + x_Ay_B - (x_By_A + x_Ay + xy_B) = 0$$

$$\boldsymbol{xy_A + x_By + x_Ay_B - x_By_A - x_Ay - xy_B = 0}$$

$$x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + x_Ay_B - x_By_A = 0$$

Equação geral da reta

Casos particulares:

Se um dos coeficientes da equação geral da reta

$$ax + by + c = 0$$

é igual a zero, a reta apresenta uma propriedade especial.

Temos três casos:

Equação geral da reta

1º Caso: $\boldsymbol{a = 0}$ $\quad ax + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c} = 0$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

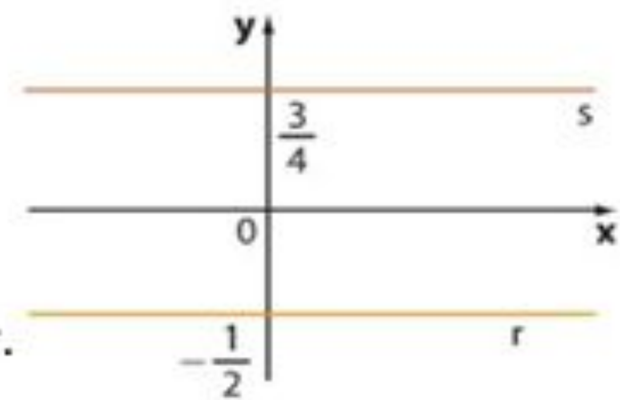
$$\boldsymbol{a = 0} \Leftrightarrow y_A - y_B = 0 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y_A = y_B}}$$

Dois pontos distintos dessa reta possuem a mesma ordenada.

Desse modo, se a equação não tem termo em x, a reta é paralela ao eixo x.

$4y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{4}$ é uma equação da reta **s**.

$2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$ é uma equação da reta **r**.



Equação geral da reta

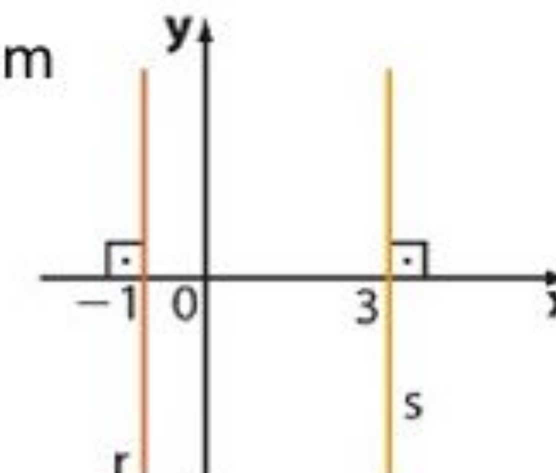
2º Caso: $\boldsymbol{b = 0}$ $\quad \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c} = 0$

$$(y_A - y_B)x + (\boldsymbol{x_B - x_A})y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

$$\boldsymbol{b = 0} \Leftrightarrow \; x_B - x_A = 0 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x_A = x_B}}$$

Dois pontos distintos dessa reta possuem a mesma abscissa.

Desse modo, se a equação não tem termo em y, a reta é paralela ao eixo y.



$2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ é uma equação da reta **r**.

$-x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ é uma equação da reta **s**.

Equação geral da reta

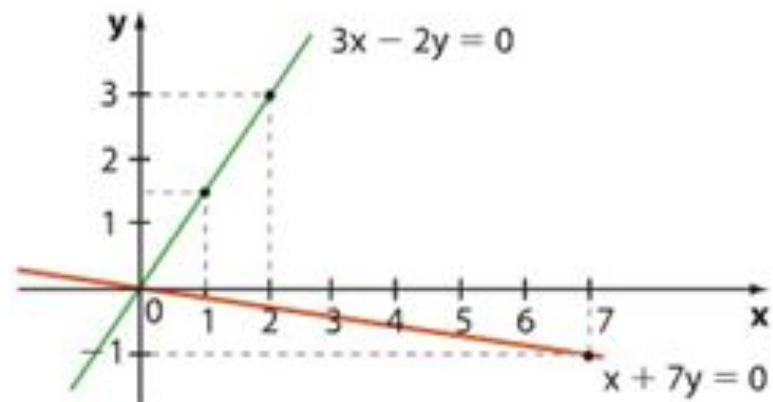
<u>3º Caso: $c = 0$</u> $\quad \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c} = 0$

$$\boxed{\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y = 0}$$

Nesse caso, para todo $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*$, o par ordenado $(0,0)$ satisfaz a equação, ou seja, $a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = 0$.

Desse modo, se a equação não tem termo independente, a reta passa pela origem.

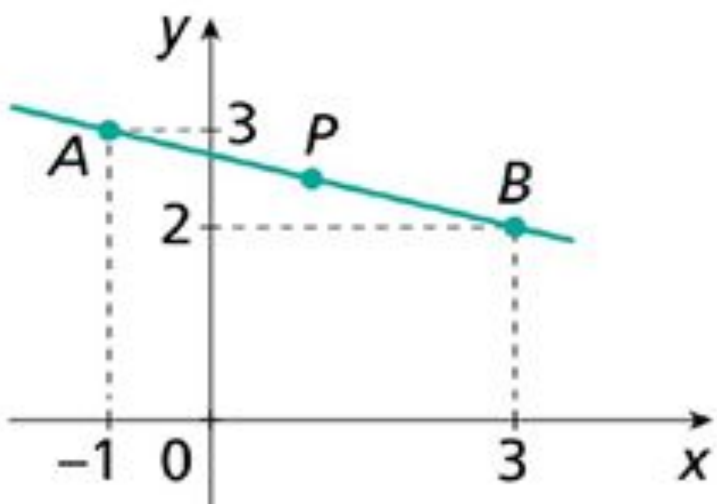
As retas de equações $3x - 2y = 0$ e $x + 7y = 0$ passam pelo ponto $(0,0)$.



Exemplo 1:

Obter a equação geral da reta r que passa pelos pontos $A(-1,3)$ e $B(3,2)$.

Considere um ponto $P(x, y)$ pertencente à reta r. Ele está alinhado com os pontos A e B.



Exemplo 1:

Pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow 3x + 3y - 2 - 9 + y - 2x = 0$$

$$\Longrightarrow x + 4y - 11 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é:

$x + 4y - 11 = 0.$

Exemplo 2:

Verifique se o ponto $P(3,2)$ pertence à reta s, cuja equação é $x - 3y + 3 = 0$.

Para que o ponto $P(3,2)$ pertence à reta s, suas coordenadas devem satisfazer a equação dessa reta.

Substituindo x por 3 e y por 2 na equação $x - 3y + 3 = 0$, temos:

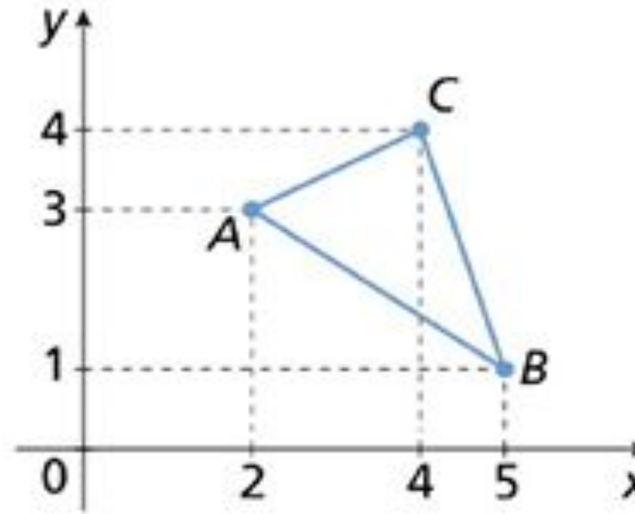
$$(3) - 3(2) + 3 = 0$$
$$3 - 6 + 3 = 0$$
$$0 = 0$$

Portanto, o ponto P pertence à reta s.

Exemplo 3:

Os pontos $A(2,3)$, $B(2,3)$ e $C(4,4)$ são vértices de um triângulo. Determinar as equações das retas suportes dos lados desse triângulo. (Dado: as retas suportes dos lados de um triângulo são retas que contém os lados do triângulo)

Exemplo 3:



Equação da reta suporte do lado $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overline{AB}:\ 2x + 3y - 13 = 0}$$

Equação da reta suporte do lado $\overline{AC}$:

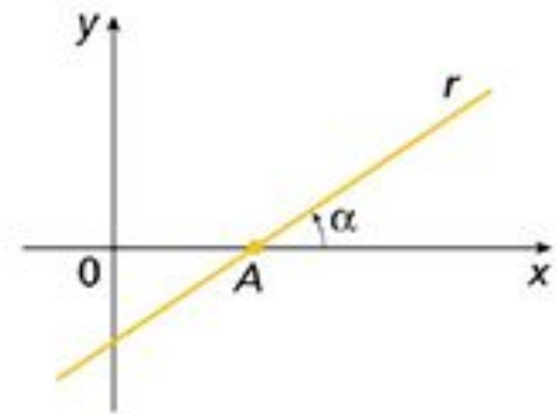
$$\overline{AC} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{\overline{AC}:\ -x + 2y - 4 = 0}$$

Equação da reta suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{\overline{BC}: -3x - y + 16 = 0}$$

Inclinação e coeficiente angular de uma reta

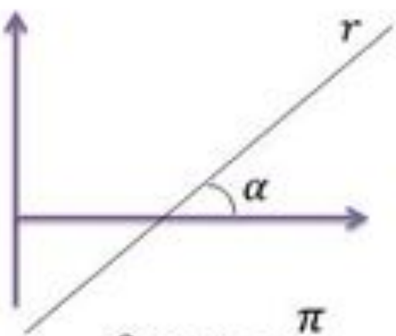
A medida α do ângulo indicado ao lado é chamada de inclinação da reta e é medida a partir do eixo x no sentido anti-horário $(0° \leq \alpha < 180°)$



Inclinação e coeficiente angular de uma reta

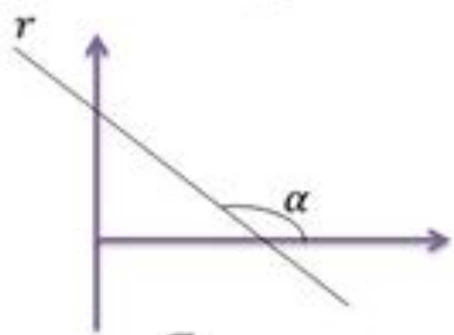
Chamamos de **coeficiente angular** ou **declividade** de uma reta não perpendicular ao eixo x o número real m expresso pela tangente trigonométrica de sua inclinação, ou seja: $\boxed{m = tg\alpha}$

Possibilidades para o ângulo α:



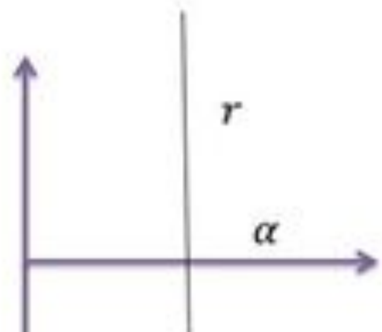
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow m > 0$$



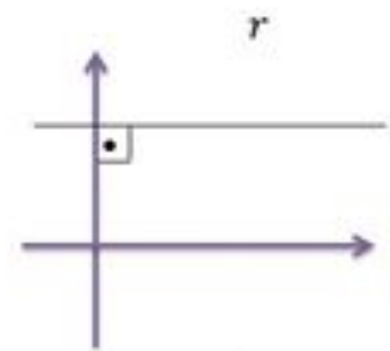
$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\Rightarrow m < 0$$



$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow tg\frac{\pi}{2}$ não definida

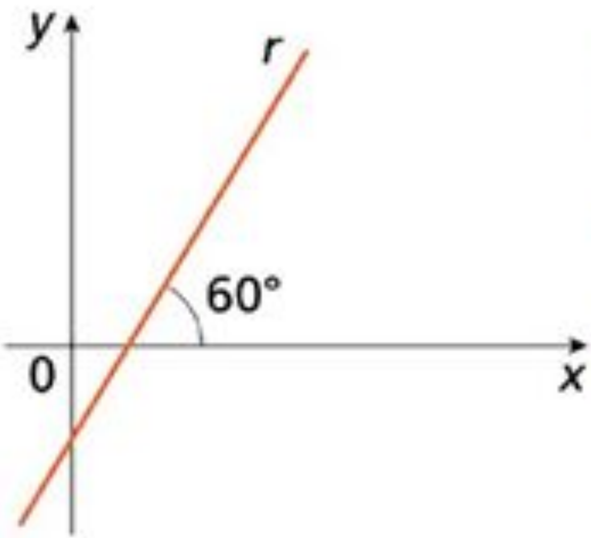


$$\alpha = 0$$

$$\Rightarrow m = tg0 = 0$$

Exemplo 4:

Determine o coeficiente angular m da reta representada abaixo:



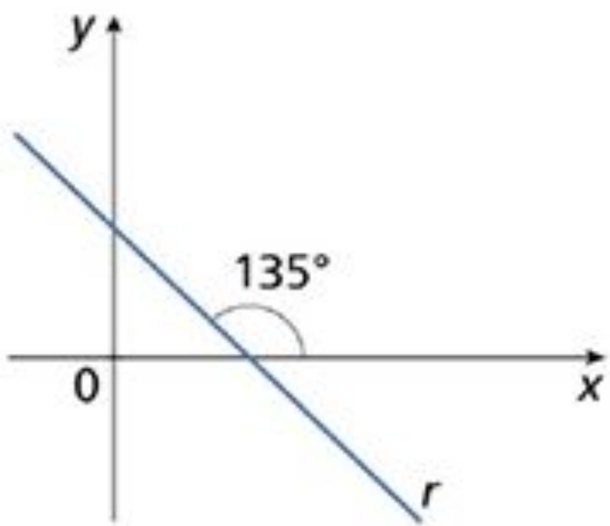
O valor de m é determinada pela $tg\,\alpha$.

Logo: $\alpha = 60° \Longrightarrow\ m = tg\,60° \Longrightarrow m = \sqrt{3}$

Assim, o coeficiente angular é: $\sqrt{3}$.

Exemplo 5:

Determine o coeficiente angular m da reta representada abaixo:



O valor de m é determinada pela $tg\,\alpha$.

Logo: $\alpha = 135° \Longrightarrow \; m = tg\,135°$

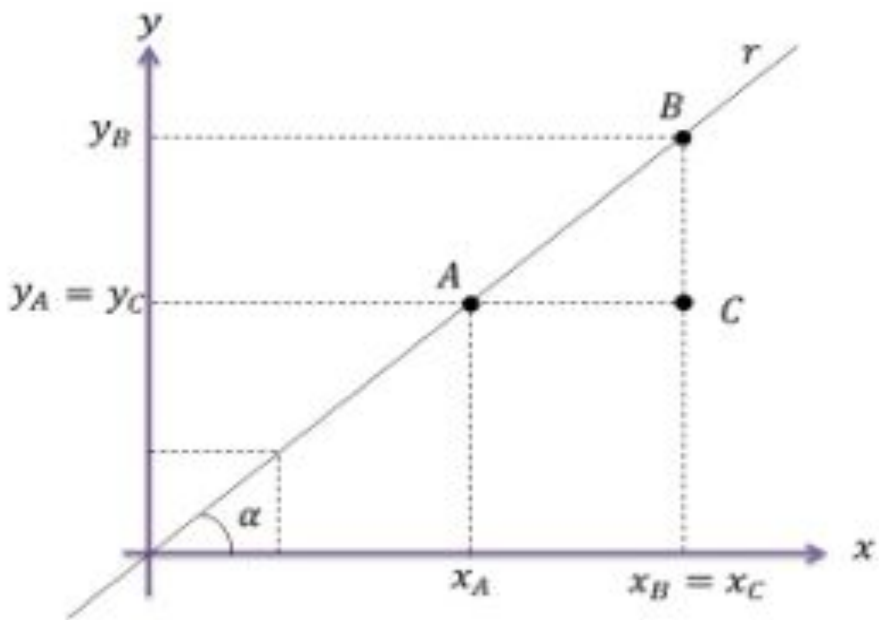
$$\Longrightarrow \; m = -tg\,45°$$

$$\Longrightarrow m = -1$$

Assim, o coeficiente angular é: -1.

Inclinação e coeficiente angular de uma reta

Se α não é conhecido: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$



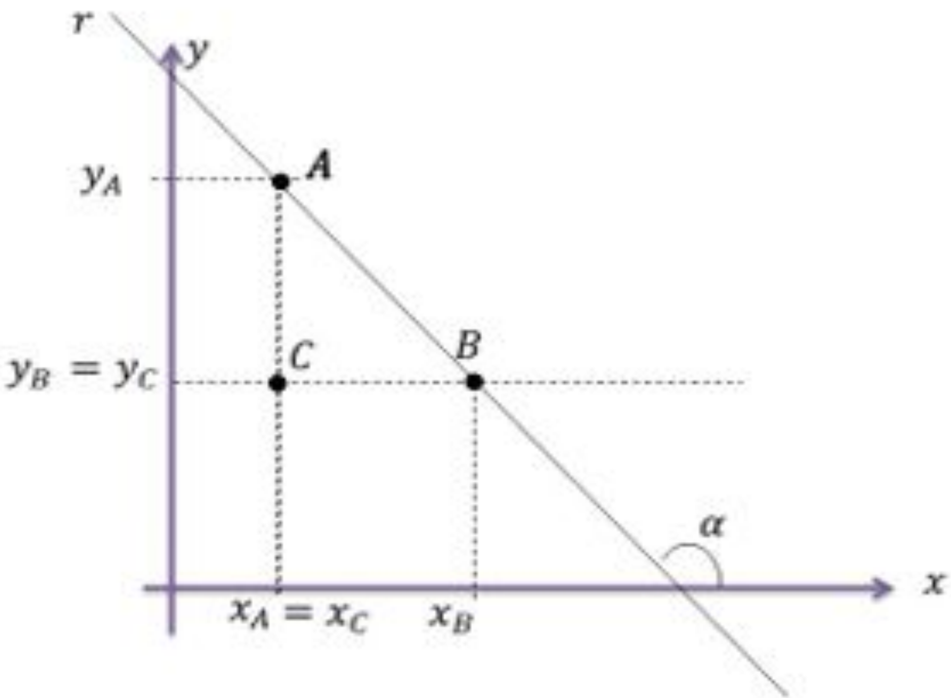
Do triângulo ABC:

$$m = tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Inclinação e coeficiente angular de uma reta

Se α não é conhecido: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$



Do triângulo ABC:

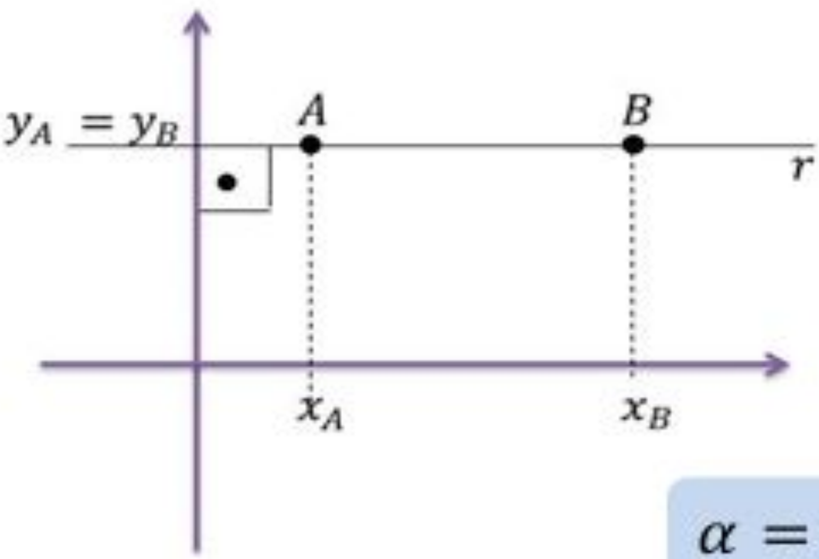
$$m = tg\alpha = -tg(\pi - \alpha)$$

$$m = -\frac{(y_A - y_B)}{x_B - x_A}$$

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Inclinação e coeficiente angular de uma reta

Se α não é conhecido: $\alpha = 0$



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$y_A = y_B \text{ e } x_B \neq x_A$$

$$m = \frac{0}{x_B - x_A} = 0$$

$$\alpha = 0 \Longrightarrow y_B = y_A \text{ e } x_B \neq x_A \Longrightarrow m = 0$$

Exemplo 6:

Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(3,2)$ e $B(5,7)$.

O coeficiente angular é:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-2}{5-3} = \frac{5}{2}$$

Logo, o coeficiente angular é $\frac{5}{2}$.

Exemplo 7:

Dados os pontos $A(k, 2)$ e $B(2, 5)$ de uma reta, e seu coeficiente angular $m = 1$, determine o valor de k.

Da relação de coeficiente angular, tem-se:

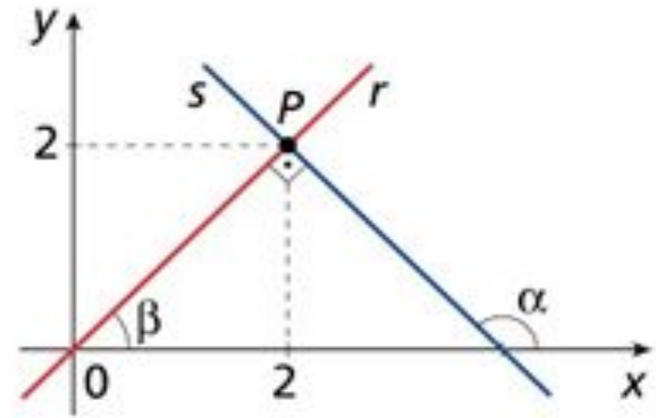
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Longrightarrow 1 = \frac{5-2}{2-k} \Longrightarrow 2 - k = 5 - 2$$

$$\Longrightarrow k = -1$$

Logo, $k = -1$.

Exemplo 8:

Calcular o valor de $m_r \cdot m_s$ sabendo que m_r e m_s correspondem, respectivamente, ao coeficiente angular das retas r e s apresentadas na figura.



Coeficiente angular da reta r:

$$m_r = \frac{y_P - y_0}{x_P - x_0} = \frac{2-0}{2-0} = 1$$

Note que: $m_r = tg\beta = 1 \Longrightarrow \beta = 45°$

Pela propriedade do ângulo externo, temos:

$$\alpha = \beta + 90° \Longrightarrow \alpha = 45° + 90° \Longrightarrow \alpha = 135°$$

Então: $m_s = tg135° = -1$

Portanto: $m_r \cdot m_s = 1 \cdot (-1) = -1$