Geometria Espacial

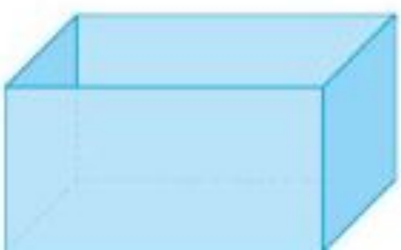
- Poliedros

Profº Lucas Müller

Superfície poliédrica fechada

Uma **superfície poliédrica fechada** é composta de um número finito (quatro ou mais) de superfícies poligonais planas, de modo que cada lado de uma dessas superfícies coincida com apenas um lado de alguma das outras superfícies.

É uma superfície poliédrica fechada.

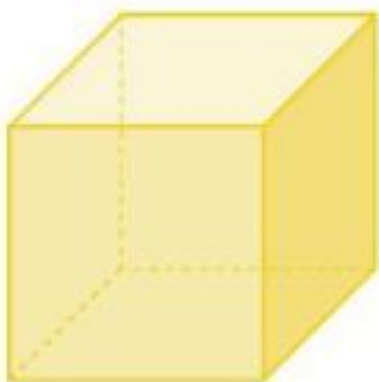


Não é uma superfície poliédrica fechada.

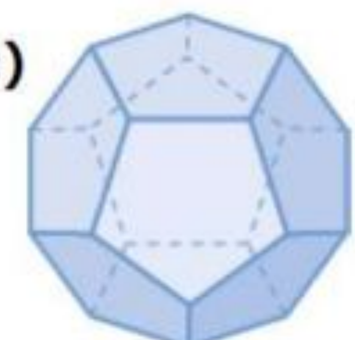
Poliedro

É chamado de **poliedro** o sólido geométrico formado pela reunião de uma superfície poliédrica fechada com todos os pontos do espaço delimitados por ela.

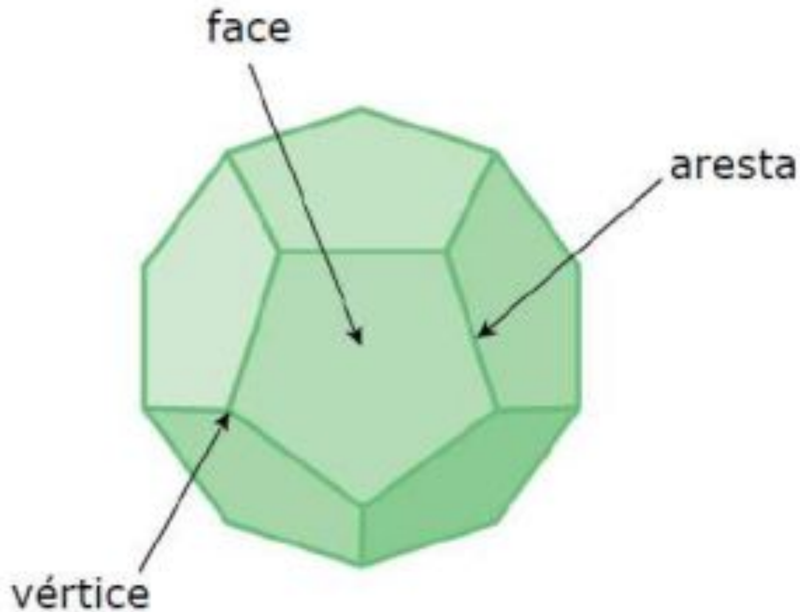
Exemplos

a) 

b) 

c) 

Elementos de um poliedro



Nomenclatura de um poliedro

$$\underbrace{\text{Poli}}_{\text{“várias”}}\,\underbrace{\text{edro}}_{\text{“face”}}$$

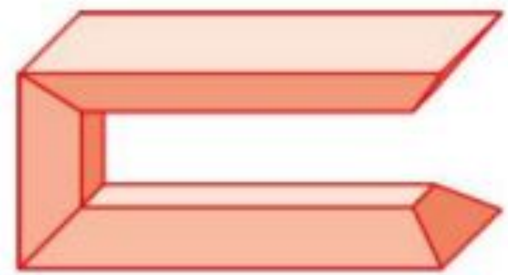
- Um poliedro costuma ser nomeado de acordo com seu número de faces.

Nomenclatura de um poliedro

Exemplos

a) hexaedro
- **6 faces**
- 8 vértices
- 12 arestas

b) tetradecaedro
- **14 faces**
- 16 vértices
- 28 arestas



c) dodecaedro
- **12 faces**
- 20 vértices
- 30 arestas

Nomes de poliedros estudados com maior frequência

Número de faces	4	5	6	7
Nome do poliedro	tetraedro	pentaedro	hexaedro	heptaedro

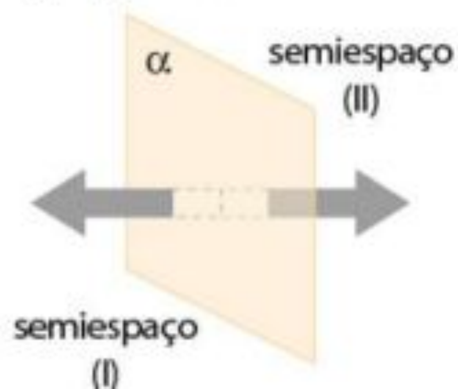
Número de faces	8	12	20
Nome do poliedro	octaedro	dodecaedro	icosaedro

Poliedro convexo e poliedro não convexo

Se cada plano que contém uma face de um poliedro posiciona as demais faces em um mesmo semiespaço, então o poliedro é **convexo**; caso contrário, é **não convexo** (ou **côncavo**).

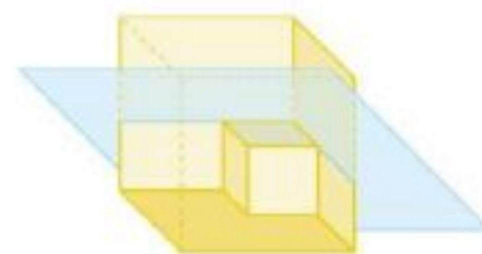
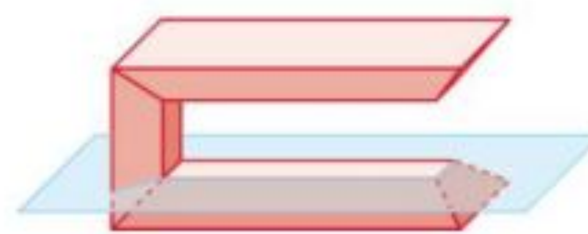
Observação:

Um plano α divide o espaço em dois **semiespaços** de mesma origem α.



Poliedro convexo e poliedro não convexo

Exemplos

Poliedros convexos	Poliedros não convexos
	
	

Relação de Euler

$$V + F - A = 2$$

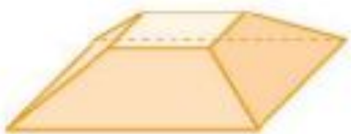
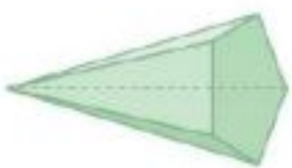
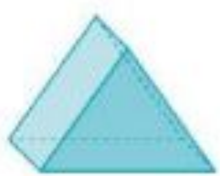
número de vértices

número de faces

número de arestas

Relação de Euler

Observe que a relação de Euler é válida para os poliedros abaixo.

Poliedro	*V*	*F*	*A*	*V* + *F*	*V* + *F* − 2
	8	6	12	14	12
	6	6	10	12	10
	6	5	9	11	9

Relação de Euler

Todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, mas nem sempre um poliedro que satisfaz essa relação é convexo.

Observe:

não convexo

$V = 24$

$F = 14$

$A = 36$

$24 + 14 - 2 = 36$

Exemplo 1:

Obter o número de arestas de um poliedro convexo que tem 6 faces e 8 vértices.

Como a relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos, tem-se:

$$V + F - 2 = A \Rightarrow A = 8 + 6 - 2 \Rightarrow A = 12$$

Portanto, esse poliedro convexo tem 12 arestas.

Exemplo 2:

Quantos vértices tem um poliedro convexo com 4 faces triangulares e 5 faces quadradas?

Número de faces do poliedro: $4 + 5 = 9$ faces

- 4 faces triangulares: $4 \times 3 = 12$ lados
- 5 faces quadradas: $5 \times 4 = 20$ lados

O número de arestas é dado por: $(12 + 20) \div 2 = 16$ arestas

(pois a ligação de duas faces consecutivas se dá sempre por uma única aresta)

Logo:

$$V + 9 - 2 = 16 \Rightarrow V = 9$$

Portanto, esse poliedro tem 9 vértices.

Exemplo 3:

Um poliedro euleriano (que atende à relação de Euler) de 7 vértices tem 5 vértices nos quais concorrem 4 arestas e 2 vértices nos quais concorrem 5 arestas. Quantas arestas e quantas faces tem esse poliedro?

- 5 vértices com 4 arestas: $5 \times 4 = 20$ arestas
- 2 vértices com 5 arestas: $2 \times 5 = 10$ arestas

O número de arestas é dado por: $(20 + 10) \div 2 =$ 15 arestas
(pois a ligação de duas faces consecutivas se dá sempre por uma única aresta)

Pela relação de Euler, obtemos:

$$V + F - 2 = A \Rightarrow 7 + F - 2 = 15 \Rightarrow F = 10$$

Logo, o poliedro tem 15 arestas e 10 faces.

Poliedros de Platão

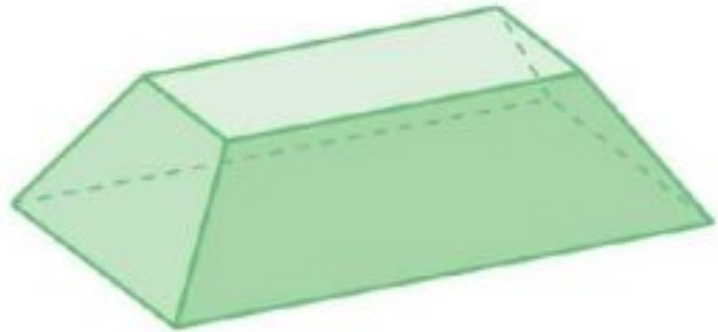
Um poliedro é chamado de poliedro de Platão se, e somente se:

- é convexo e, portanto, satisfaz a relação de Euler;
- todas as faces têm o mesmo número inteiro n de arestas;
- em todos os vértices concorre o mesmo número inteiro m de arestas.

Poliedros de Platão

Exemplo

a)



Esse poliedro é de Platão, pois:

- todas as faces têm 4 arestas;
- em todos os vértices concorrem 3 arestas;
- Ele é convexo, portanto a relação de Euler é válida:
  $8 + 6 - 2 = 12.$

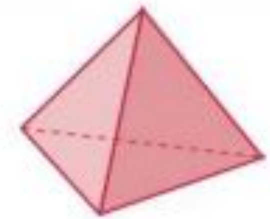
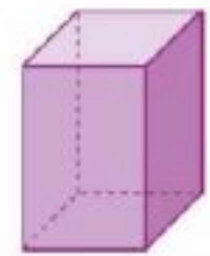
Poliedros de Platão

Exemplo

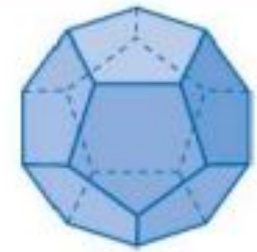
b)

Esse poliedro não é de Platão, pois, embora seja convexo e em todos os vértices concorra o mesmo número de arestas, nem todas as faces têm o mesmo número de arestas. Há faces quadrangulares, pentagonais e uma triangular.

As cinco classes de poliedros de Platão

Classe	Característica	Exemplo
Tetraedro	4 faces triangulares, e em cada vértice concorrem 3 arestas	
Hexaedro	6 faces quadrangulares, e em cada vértice concorrem 3 arestas	
Octaedro	8 faces triangulares, e em cada vértice concorrem 4 arestas	

As cinco classes de poliedros de Platão

Classe	Característica	Exemplo
Dodecaedro	12 faces pentagonais, e em cada vértice concorrem 3 arestas	
Icosaedro	20 faces triangulares, e em cada vértice concorrem 5 arestas	

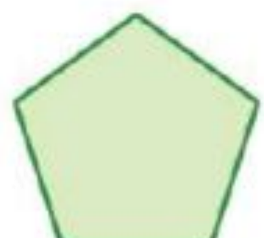
Poliedros regulares

Os **poliedros regulares** têm todas as faces poligonais regulares e congruentes entre si.

Observações:

- Uma superfície poligonal plana é regular se o polígono que a compõe é regular;

- Um polígono é regular se tem todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes.



pentágono regular

Poliedros regulares

Veja a seguir os cinco poliedros regulares.

tetraedro
regular

hexaedro
regular (cubo)

octaedro
regular

dodecaedro
regular

icosaedro
regular

Planificação da superfície de um poliedro

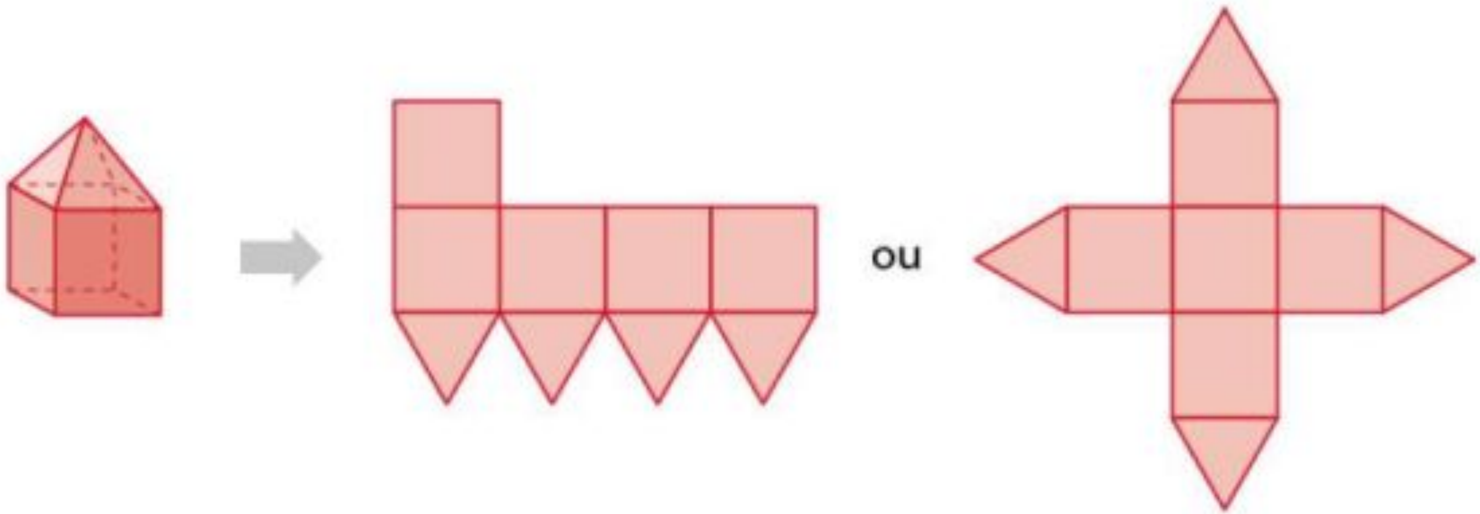
A superfície de um poliedro, que é formada por superfícies poligonais planas, pode ser projetada sobre um plano, de tal modo que cada uma das faces do poliedro tenha pelo menos um lado em comum com outra face.

Obtemos, assim, de uma figura plana, que costuma ser chamada de **molde do poliedro**, **planificação da superfície do poliedro** ou, simplesmente, **planificação do poliedro**.

As faces de um poliedro podem ser arranjadas de vários modos, desde que cada face esteja ligada a outra por pelo menos um de seus lados.

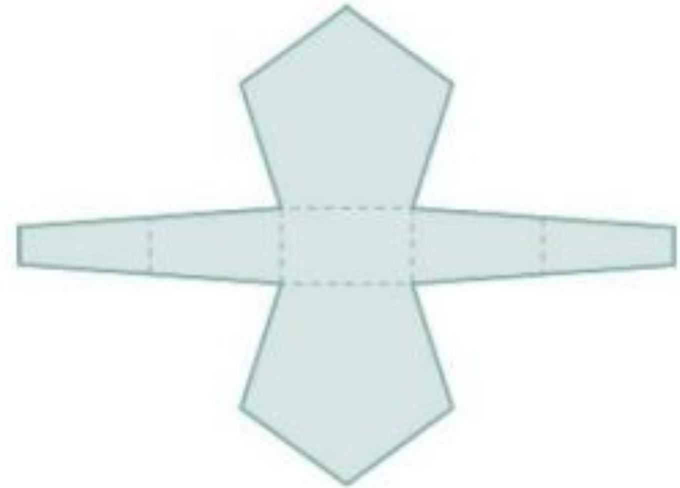
Planificação da superfície de um poliedro

Exemplo



Exercício 4:

Qual é o número de vértices do sólido obtido ao dobrarmos convenientemente as linhas tracejadas da figura ao lado?



O sólido obtido é um heptaedro, logo o número de faces é 7.

Como há 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais, o número de arestas é:

$$A = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2} = 15$$

Como vale a relação de Euler, temos:

$$V = 15 - 7 + 2 \implies V = 10$$