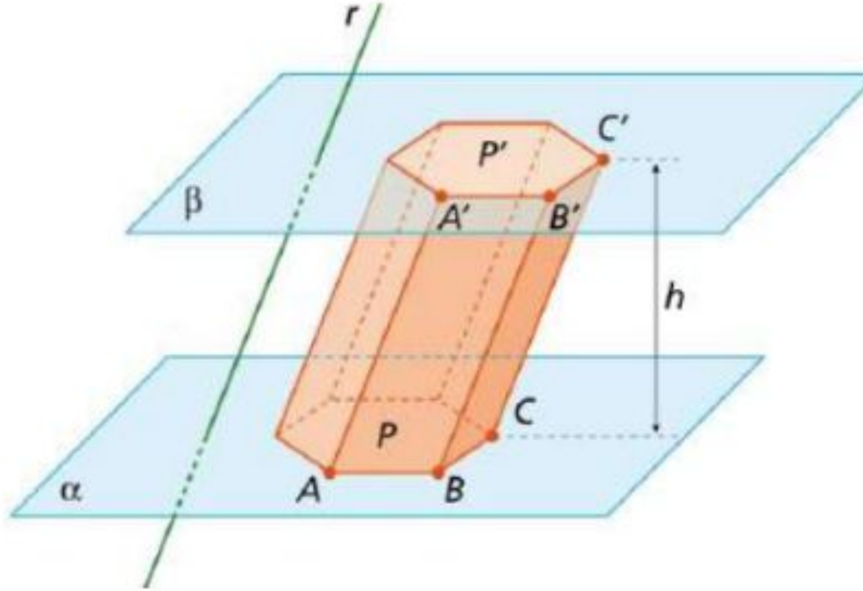
Geometria Espacial

- Prismas

Profº Lucas Müller

Prismas

Vamos considerar dois planos paralelos, α e β, uma região poligonal P contida em α e uma reta r que intercepta os planos α e β.

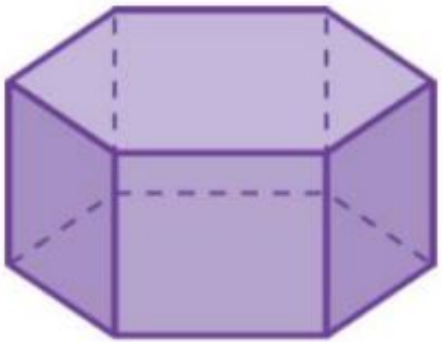


Chama-se **prisma** o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a r tais que uma de suas extremidades é um ponto da região P e a outra extremidade é um ponto no plano β.

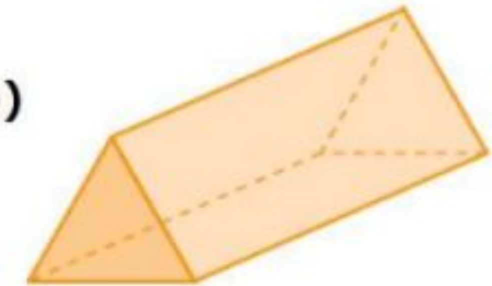
Prismas

Exemplos

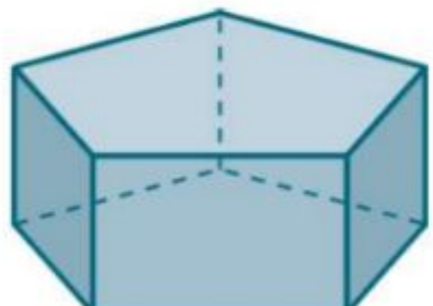
a)



b)

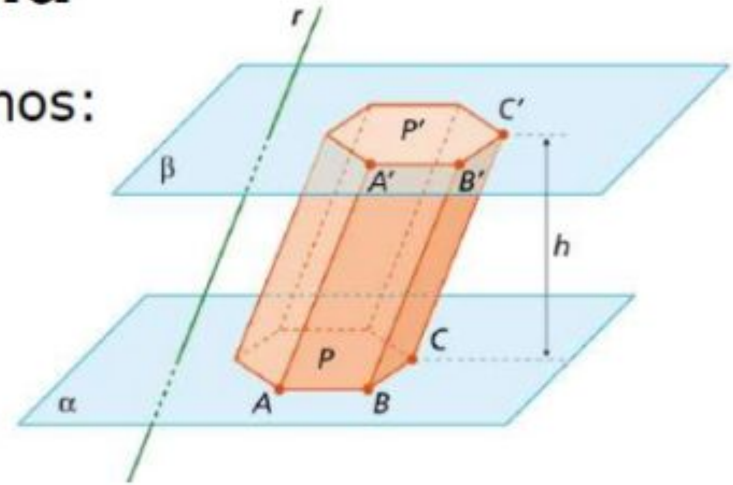


c)



Elementos de um prisma

Considerando o prisma ao lado, temos:



- **bases**: são as regiões poligonais P e P', congruentes e situadas em planos paralelos (α e β, respectivamente);
- **faces laterais**: as regiões poligonais $AA'BB'$, $BB'CC'$ etc.;
- **arestas das bases**: os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ etc.;
- **arestas laterais**: os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ etc.;
- **altura do prisma**: a distância h entre os planos das bases (α e β).

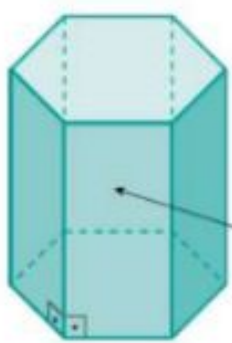
Classificação dos prismas

1º critério

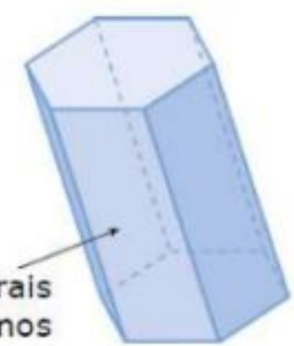
Consideramos a inclinação da reta *r* em relação aos planos α e β que contêm as bases:

- se a reta *r* é perpendicular aos planos α e $\beta \rightarrow$ **prisma reto**

- se a reta *r* **não** é perpendicular aos planos α e $\beta \rightarrow$ **prisma oblíquo**



prisma reto



prisma oblíquo

Classificação dos prismas

2º critério

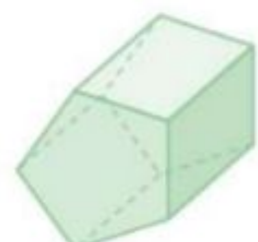
Consideramos o polígono que determina as bases:

- se esse polígono é um triângulo
  → **prisma triangular**

- se é um quadrilátero
  → **prisma quadrangular**

- se é um pentágono
  → **prisma pentagonal**,

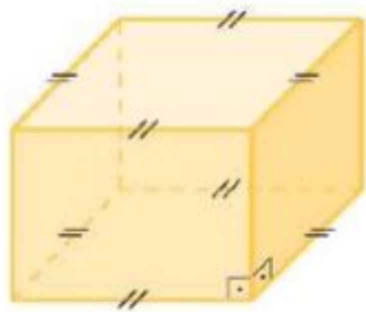
e assim por diante.



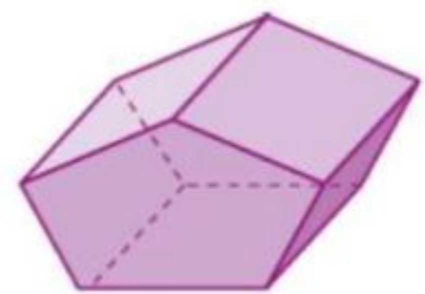
Prisma regular

Um prisma é **regular** se, e somente se, é reto e suas bases são superfícies poligonais regulares.

Exemplos



Este prisma é regular, pois ele é reto e as suas bases são quadradas.

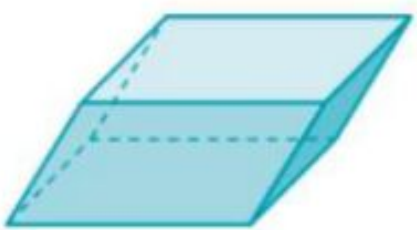


Este prisma **não** é regular, pois as suas bases não são polígonos regulares.

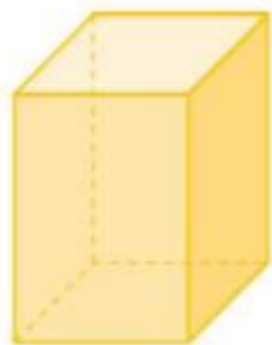
Paralelepípedo

Entre os prismas quadrangulares, aqueles que têm bases em forma de paralelogramos são chamados de paralelepípedos. Esses prismas podem ser retos ou oblíquos.

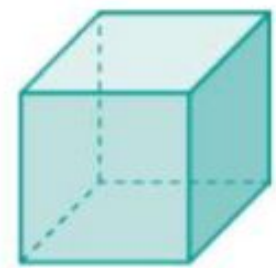
Exemplos



Paralelepípedo oblíquo



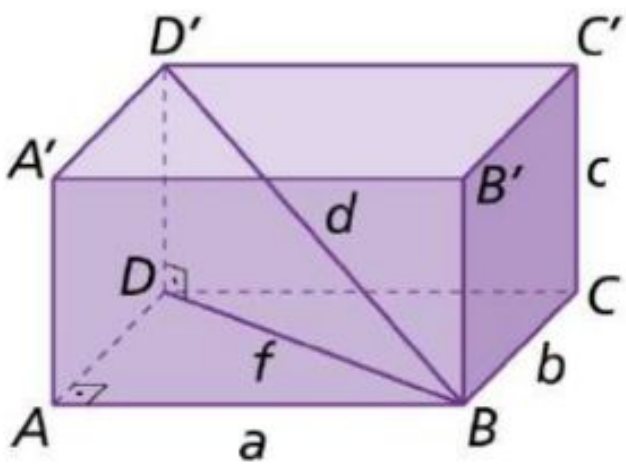
Paralelepípedo reto-retângulo ou bloco retangular



cubo

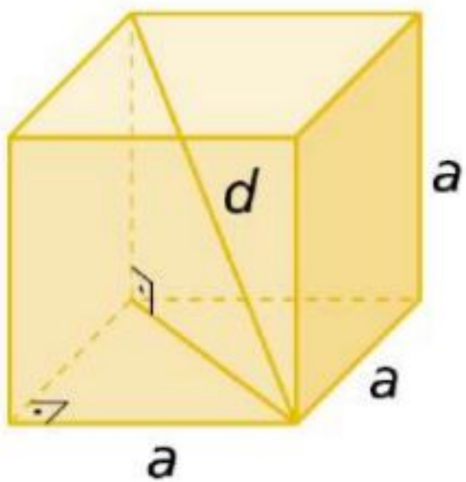
Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

Diagonal de um paralelepípedo é todo segmento cujas extremidades são vértices desse paralelepípedo que não pertencem a uma mesma face.



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

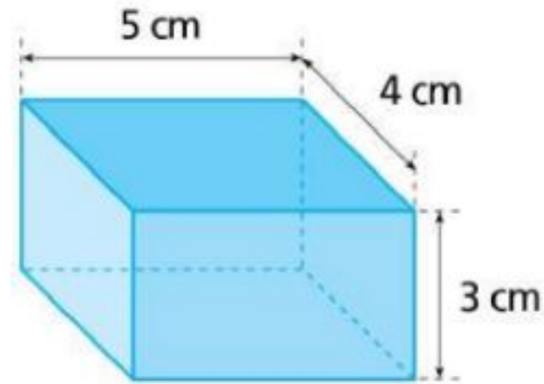
Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo



$$d = a\sqrt{3}$$

Exercício 1:

Calcule o valor da diagonal do paralelepípedo ao lado.



Sabemos que: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

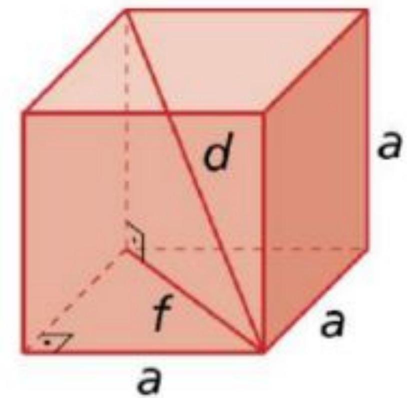
Substituindo a, b e c, respectivamente, por 3,4 e 5, temos:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \Rightarrow d = \sqrt{50} \Rightarrow \boxed{d = 5\sqrt{2}}$$

Logo, a diagonal mede $5\sqrt{2}\,cm.$

Exercício 2:

Calcule a medida da aresta de um cubo cuja diagonal excede em $\sqrt{2}$ cm a diagonal da base.



Sendo d a medida da diagonal do cubo e f a medida da diagonal da base, tem-se, pelos dados do problema:

$$d = f + \sqrt{2} \quad \Rightarrow d - f = \sqrt{2}$$

Também tem-se: $f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}$

Por se tratar de um cubo, sabemos que: $d = a\sqrt{3}$

Assim: $d - f = \sqrt{2} \quad \Rightarrow a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{2}$

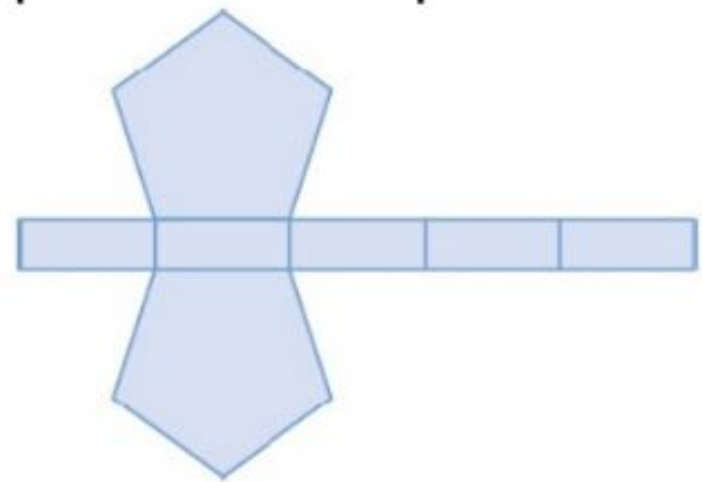
$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} + 2}{3 - 2}$$

Portanto: $a = (2 + \sqrt{6})\ cm.$

Representações planas de prismas

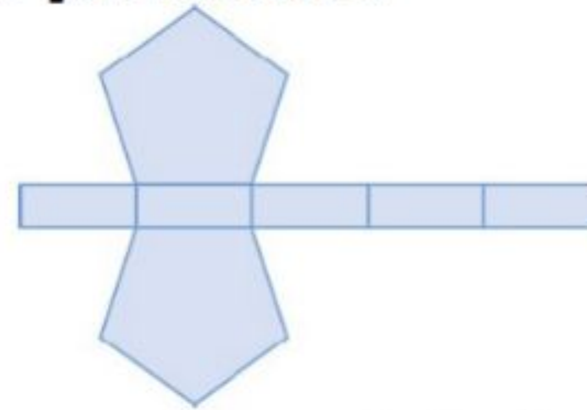
Observe, a seguir, a planificação da superfície de um prisma.

Por meio dela, identificamos muitas características desse prisma. Veja:



- tem 7 faces, já que a planificação de sua superfície apresenta 7 regiões poligonais;
- tem bases pentagonais, pois faces pentagonais não podem ser faces laterais de um prisma, que devem ser necessariamente quadriláteros;

Representações planas de prismas



- tem 5 faces laterais (ou faces retangulares), já que as pentagonais são bases;
- tem 10 vértices, uma vez que cada base contém metade dos vértices do prisma;
- é um prisma reto, pois suas faces laterais são retangulares;
- tem altura igual ao comprimento de uma aresta lateral, já que é reto.

Área da superfície de um prisma

Área da base (A_{base}): área da face que é base;

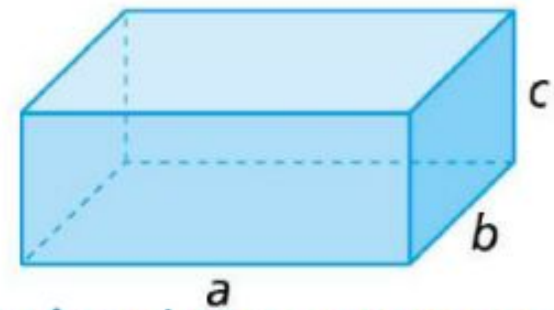
Área lateral ($A_{lateral}$): soma das áreas das faces laterais;

Área total (A_{total}): soma da área lateral com as áreas das duas bases, ou seja:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

Exercício 3:

Calcular a área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c (medidas dadas em uma mesma unidade).



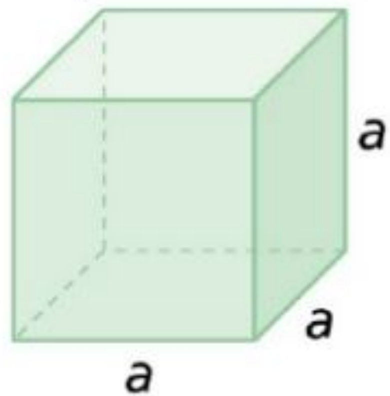
Nesse caso, quaisquer pares de faces paralelas podem ser bases do prisma.

Assim, a área total é a soma das áreas de seis retângulos congruentes dois a dois:

$$A_{total} = 2ab + 2ac + 2bc \quad \Rightarrow \boxed{A_{total} = 2(ab + ac + bc)}$$

Exercício 4:

Calcular a área total da superfície de um cubo de aresta a.

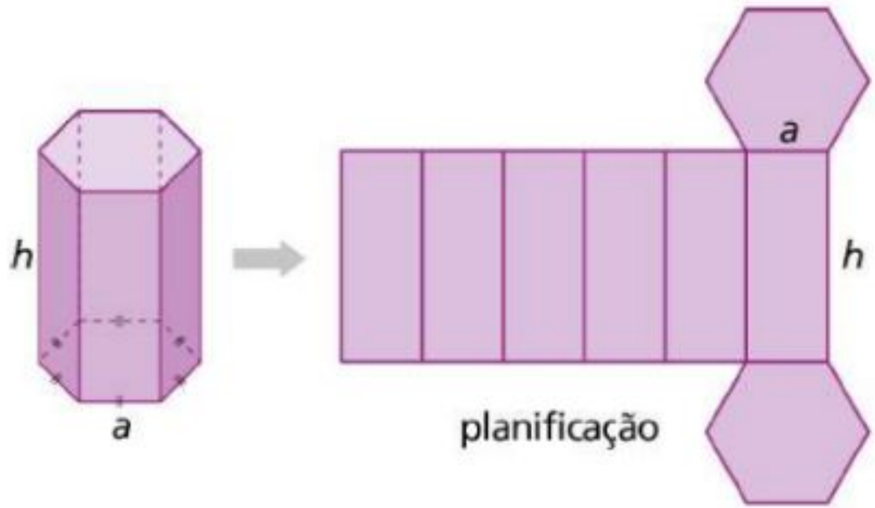


Como o cubo é um paralelepípedo reto-retângulo de arestas congruentes, tem-se:

$$A_{total} = 2aa + 2aa + 2aa \Rightarrow \boxed{A_{total} = 6a^2}$$

Exercício 5:

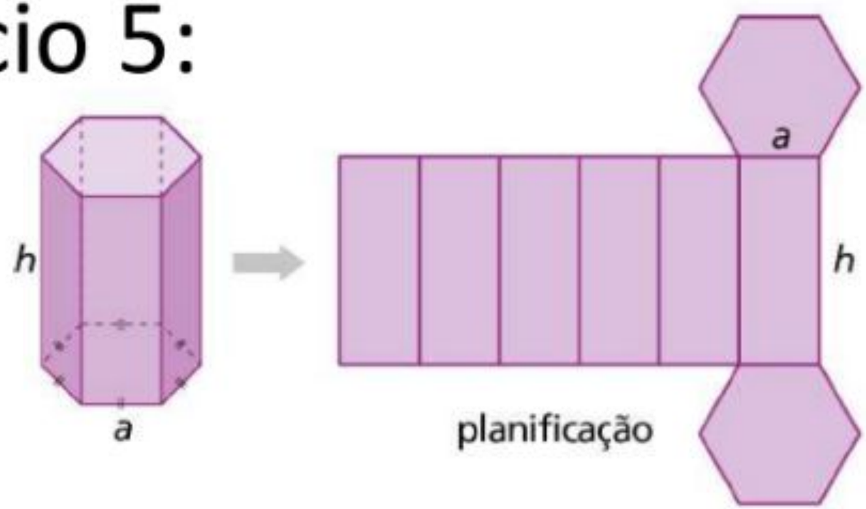
Calcular a área total da superfície do prisma hexagonal regular abaixo.



Como visto, um prisma regular é um prisma reto e, portanto, suas faces laterais são retangulares e congruentes, de dimensões a e h.

Assim, a área lateral é dada por: $A_{lateral} = 6 \cdot a \cdot h$

Exercício 5:



A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado a.

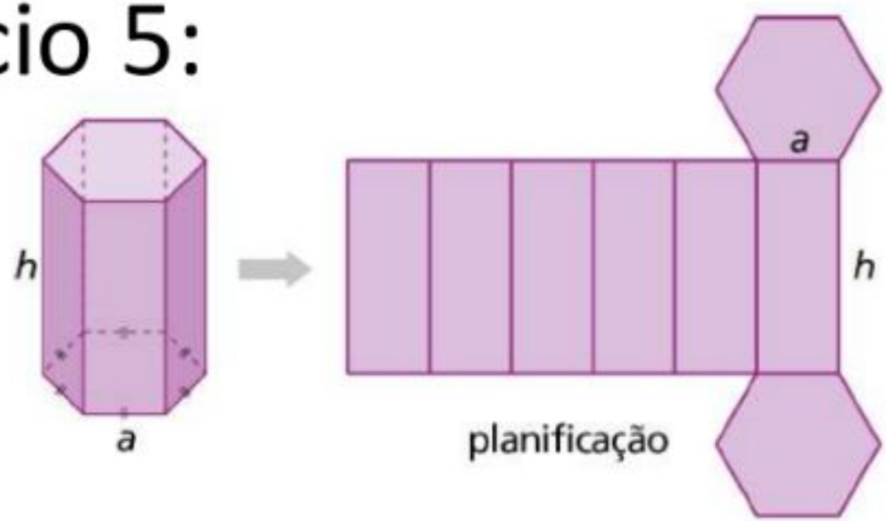
Sabemos que um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros.

A área de um triângulo equilátero de lado l é dada por: $A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Assim, a área de um hexágono regular de lado l é dada por:

$$A = 6 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{3l^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Exercício 5:



Portanto, a área da base do prisma é dada por: $A_{base} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

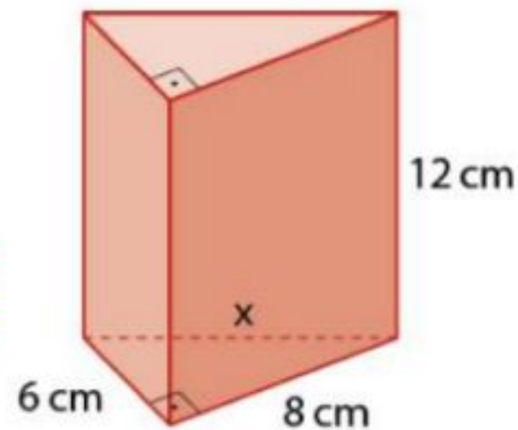
Logo, a área total da superfície desse prisma hexagonal é:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 6ah + 2 \cdot \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$= 6ah + 3a^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{A_{total} = 3a\left(2h + a\sqrt{3}\right)}$$

Exercício 6:

Determinar a área total da superfície de um prisma triangular reto, de altura 12 cm, sabendo que as arestas da base formam um triângulo retângulo de catetos que medem 6 cm e 8 cm.



O prisma tem base triangular. Assim:

$$A_{base} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

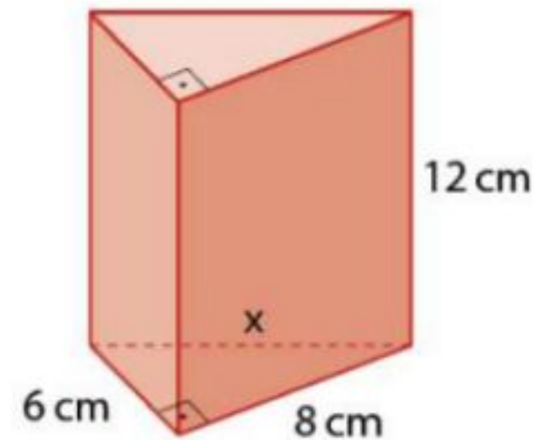
A área lateral é dada pela soma das áreas das faces retangulares que compõem a superfície lateral.

Calculando a medida da hipotenusa do triângulo retângulo da base, tem-se:

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \Longrightarrow x = 10$$

Portanto: $A_{lateral} = 6 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = 288$

Exercício 6:



Logo, a área total é dada por:

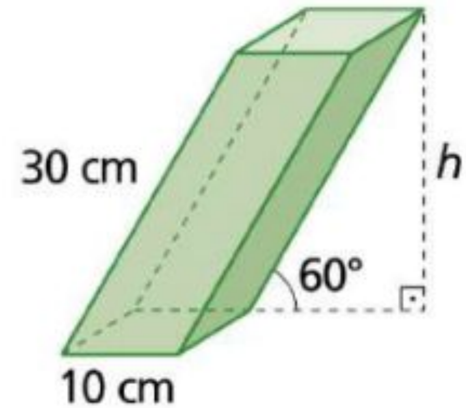
$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$A_{total} = 288 + 2 \cdot 24 = 336$$

Portanto, a área total da superfície do prisma é de 336 cm².

Exercício 7:

Determinar a área total da superfície do prisma oblíquo de base quadrada representado ao lado, sabendo que as faces laterais são congruentes.



O prisma tem base quadrada. Assim:

$$A_{base} = 10^2 \Rightarrow A_{base} = 100$$

Para calcular a área de uma das faces laterais, vamos obter a altura h.

$$sen60° = \frac{h}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{30} \Longrightarrow h = 15\sqrt{3}$$

Assim:

$$A_{lateral} = 4 \cdot \underbrace{\left(10 \cdot 15\sqrt{3}\right)}_{\text{área do paralelogramo}} = 600\sqrt{3}$$

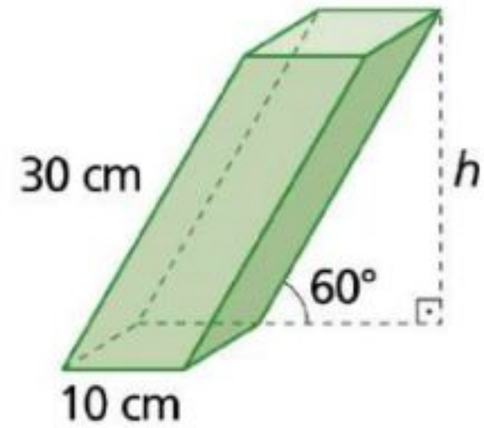
Exercício 7:

Logo:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$A_{total} = 600\sqrt{3} + 2 \cdot 100$$

$$A_{total} = 200(1 + 3\sqrt{3})$$



Portanto, a área total da superfície do prisma é $200(1 + 3\sqrt{3})$ cm².

Volume de um prisma

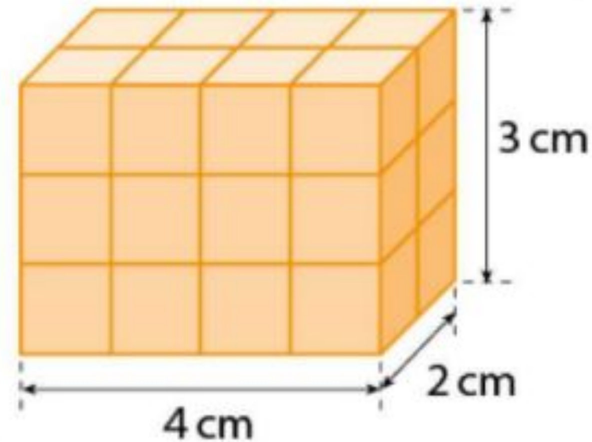
O **volume** de um prisma corresponde a um único número real V positivo obtido pela comparação da porção do espaço ocupado pelo prisma com a porção do espaço ocupado por uma unidade de medida de volume.

- A unidade de medida de volume que usualmente consideramos é o volume de um cubo unitário (aresta 1 u), sendo u certa unidade de comprimento. O volume desse cubo unitário é 1 u^3.
- Se a aresta do cubo unitário mede 1 m $\rightarrow V = 1\ m^3$
- Se a aresta do cubo unitário mede 1 mm $\rightarrow V = 1\ mm^3$

Volume de um prisma

Exemplo

Vamos calcular quantas vezes o cubo unitário de aresta 1 cm cabe em um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 4 cm, 2 cm e 3 cm



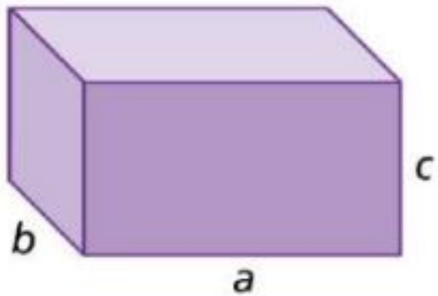
Analisando a figura, observamos que o paralelepípedo é formado por $4 \cdot 2 = 8$ cubos unitários na base e tem 3 camadas iguais à camada da base.

Logo, tem $3 \cdot 8 = 24$ cubos unitários no total.

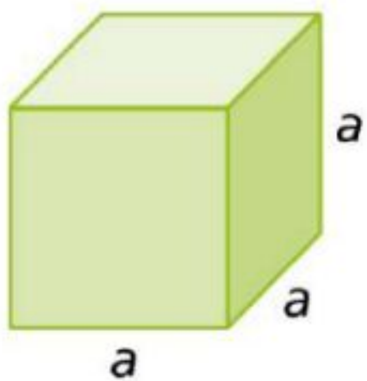
Portanto, o paralelepípedo é formado por $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ cubos de $1\ cm^3$ de volume.

Dizemos, então, que o volume dele é $24\ cm^3$.

Volume de um paralelepípedo reto-retângulo



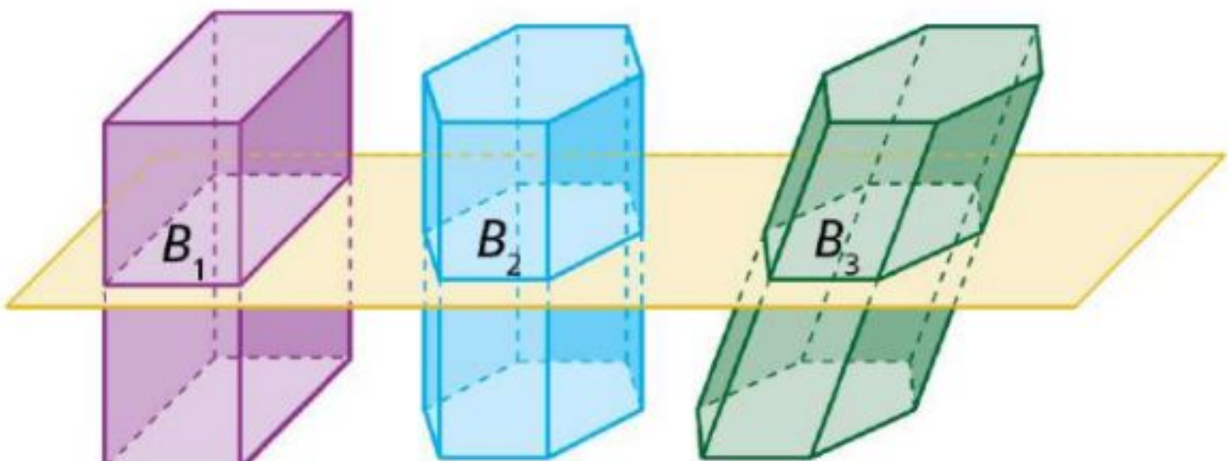
$$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c$$



$$V_{\text{cubo}} = a^3$$

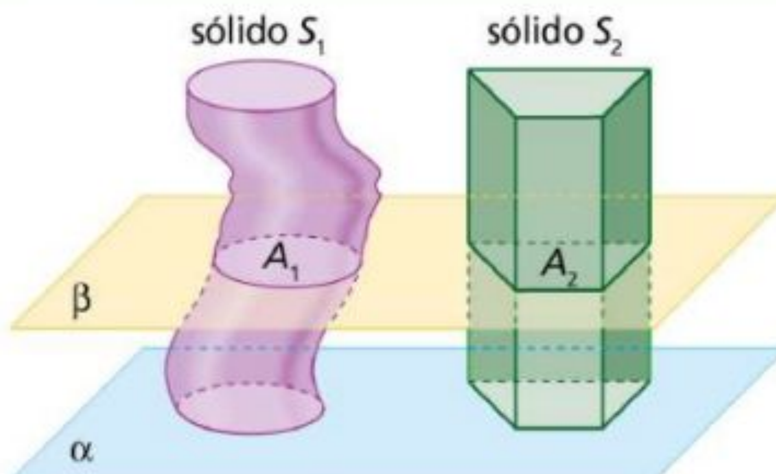
Secção transversal de um prisma

Um plano intercepta um sólido através de uma superfície chamada de **secção plana**. Quando a secção plana é paralela à base do prisma, ela é denominada **secção transversal**.



Princípio de Cavalieri

Dois sólidos, S_1 e S_2, apoiados num plano α e contidos num mesmo semiespaço, terão o mesmo volume V se todo plano β, paralelo a α, secciona os dois sólidos de modo que as secções sejam regiões planas de mesma área (A).

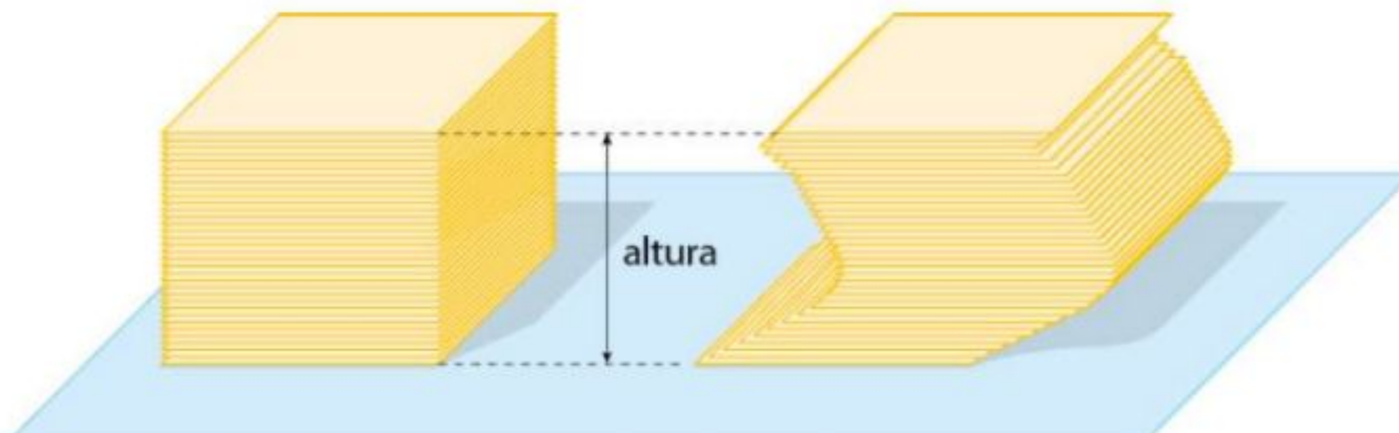


$A_1 = A_2$

Princípio de Cavalieri

Exemplo

Sobre uma mesa, formamos uma pilha com certa quantidade de cartões retangulares idênticos. A seguir, modificamos a forma da pilha sem retirar nem pôr cartão algum. Veja a ilustração de uma possível situação desse tipo.



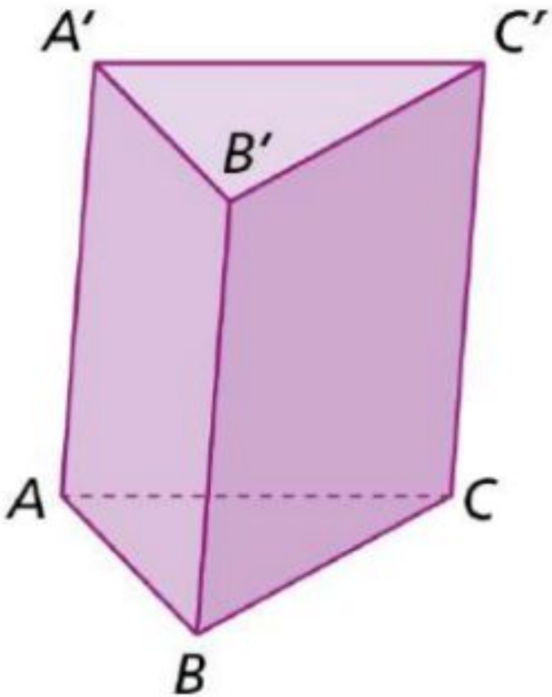
Princípio de Cavalieri

Exemplo

Observando as pilhas, é possível notar que:

- a altura das duas pilhas é a mesma, pois têm a mesma quantidade de cartões idênticos;
- os cartões das duas pilhas ficam à mesma altura da mesa e têm a mesma área, pois são idênticos;
- a segunda pilha tem o mesmo volume da primeira, já que é formada pelos mesmos cartões e, portanto, ocupa a mesma porção do espaço.

Volume de um prisma qualquer



$$V_{\text{prisma}} = \text{área da base x altura}$$

Exercício 8:

Deseja-se cimentar um quintal de formato quadrado, com lados medindo 8 m, com 4 cm de espessura de massa de cimento. Qual é o volume necessário de massa para revestir essa área?

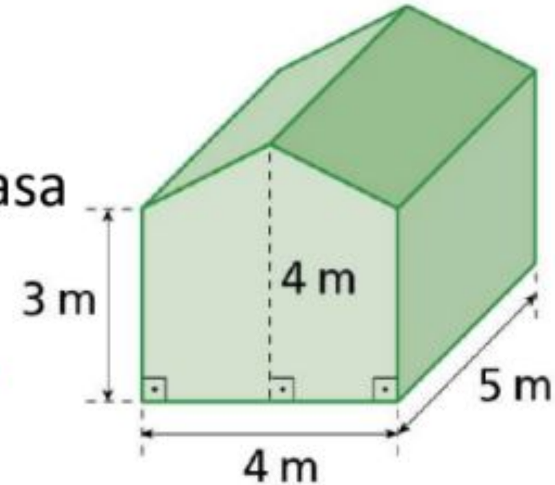
A camada de cimento terá a forma de um paralelepípedo reto-retângulo de base quadrada, com 8 m de aresta e altura de 4 cm. Como a espessura do revestimento é de 4 cm ou 0,04 m, o volume de massa é dado por:

$$V = 8 \cdot 8 \cdot 0{,}04 \Rightarrow V = 64 \cdot 0{,}04 \Rightarrow V = 2{,}56$$

Logo, são necessários 2,56 m^3 de massa para o revestimento.

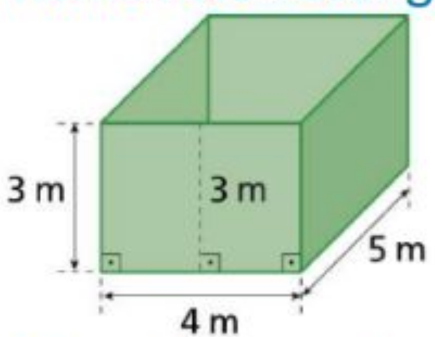
Exercício 9:

Calcular o volume de ar contido em uma casa que tem a forma do prisma ao lado.



Vamos decompor a figura da casa em dois prismas.

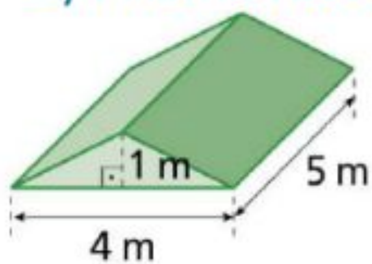
1) Prisma reto-retângulo



$$V_1 = A_{base} \cdot altura$$

$$V_1 = 4 \cdot 5 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{V_1 = 60}$$

2) Prisma reto de base triangular



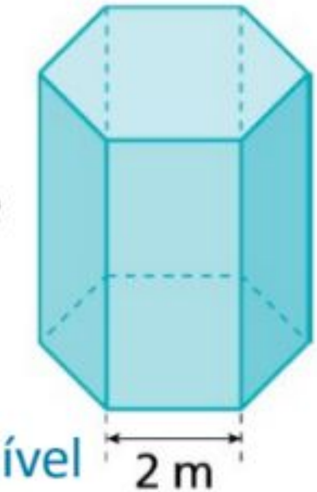
$$V_2 = A_{base} \cdot altura$$

$$V_2 = \frac{4 \cdot 1}{2} \cdot 5 \Rightarrow \boxed{V_2 = 10}$$

Logo, o volume total de ar contido na casa é dado por $V_1 + V_2$, ou seja, 70 m^3.

Exercício 10:

Um reservatório de água tem a forma do prisma hexagonal regular da figura ao lado e está cheio. Se forem consumidos $3000\sqrt{3}$ litros, quanto baixará, em metros, o nível da água desse reservatório?

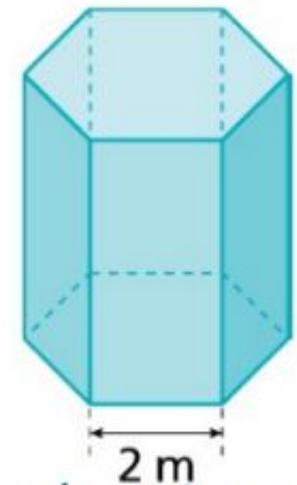


Vamos representar por x, em metros, quanto baixará o nível da água no reservatório, se forem consumidos os litros indicados.

Os $3000\sqrt{3}$ litros consumidos ocupam o volume de um prisma hexagonal regular de mesma base do prisma da figura e altura de x metros.

Exercício 10:

A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado 2 m, cuja área é dada por:



$$A_{base} = \frac{3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_{base} = 6\sqrt{3}$$

Com esse dado, podemos calcular o volume da parte do prisma correspondente aos $3000\sqrt{3}$ litros:

$$V = A_{base} \cdot x = 6\sqrt{3}x$$

Como $3000\sqrt{3}$ litros = $3\sqrt{3}$ m^3, temos: $6\sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 0{,}5$

Portanto, o nível da água baixará 0,5 metro.