Geometria Analítica: O Ponto

- Sistema cartesiano ortogonal;
- Distância entre dois pontos.

Professor: Lucas Müller

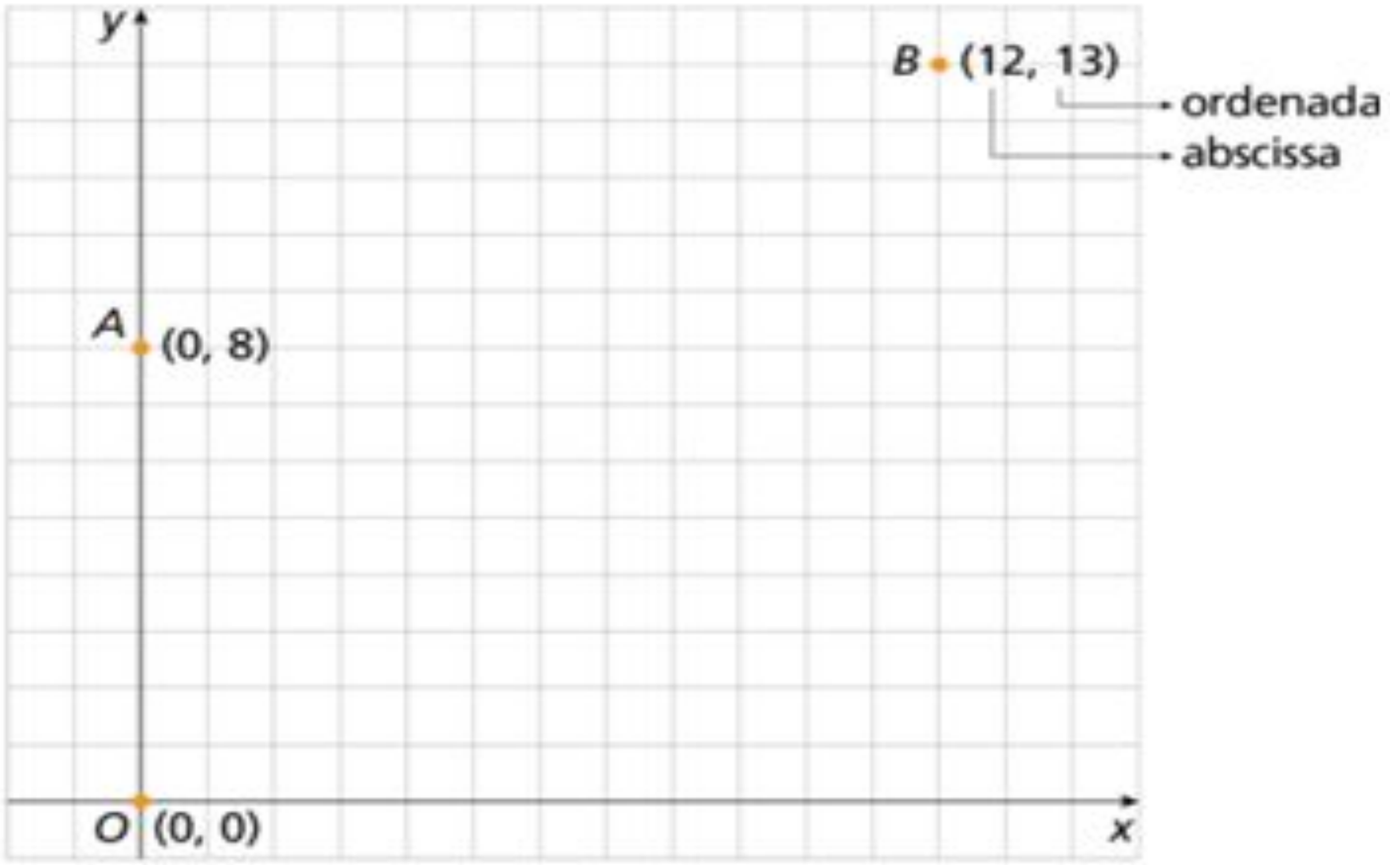
Sistema cartesiano ortogonal

O **sistema cartesiano ortogonal** é formado por dois eixos perpendiculares entre si. O eixo x (horizontal) é o eixo das **abscissas**, e o eixo y (vertical) é o eixo das **ordenadas**.

Os eixos se cruzam no ponto O $(0,0)$, denominado **origem** das coordenadas do plano cartesiano.

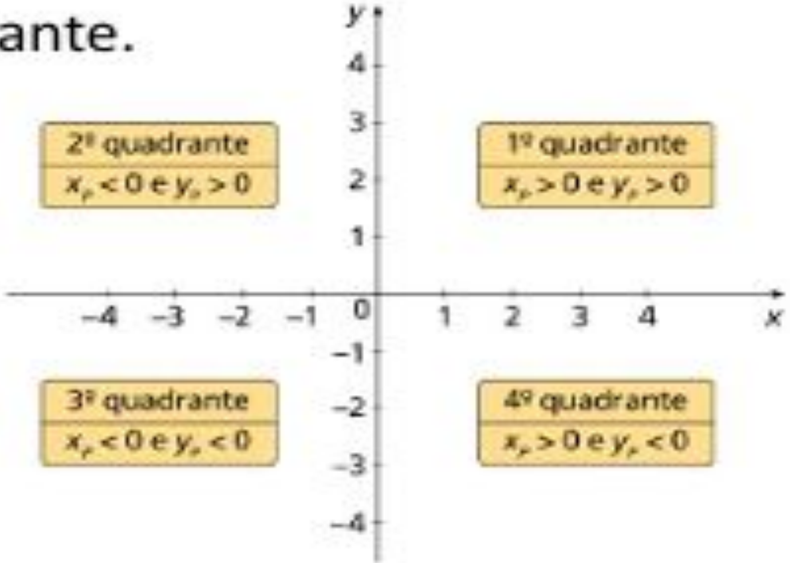
Podemos localizar qualquer ponto P do plano cartesiano por meio de um único par ordenado (x_p, y_p) de números reais.

Reciprocamente, dado um par ordenado (x_p, y_p) de números reais, associa-se a ele um único ponto P pertencente ao plano.


y
B (12, 13)
ordenada
abscissa
A (0, 8)
O (0, 0)
x

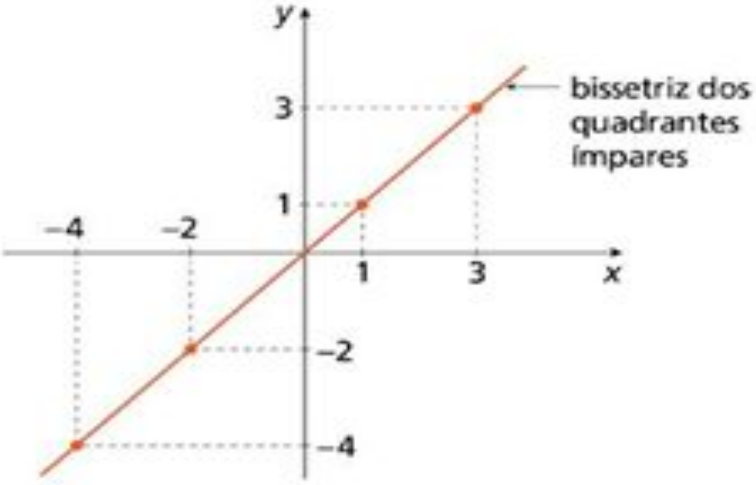
Quadrantes

Os eixos do plano cartesiano dividem esse plano em quatro quadrantes, numerados no sentido anti-horário. A figura abaixo indica essa numeração e as condições para que um ponto P pertença ao quadrante.

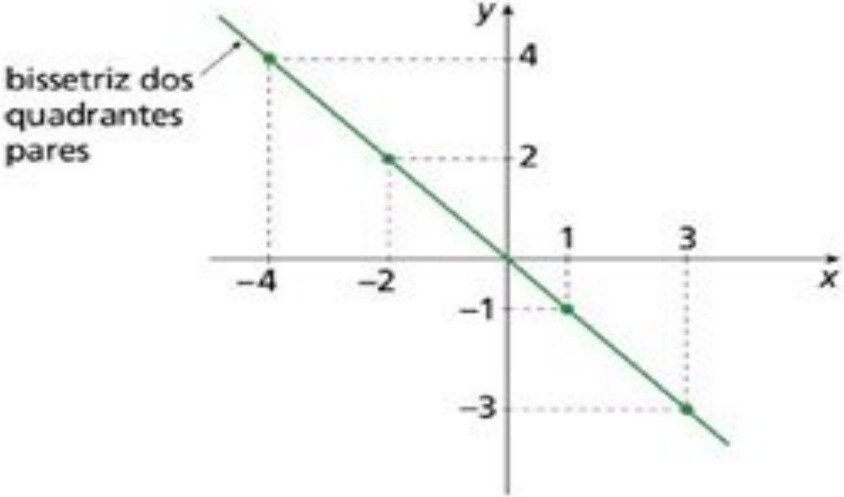


Quadrantes

No plano cartesiano, a bissetriz do 1º e do 3º quadrante é chamada de **bissetriz dos quadrantes ímpares**.

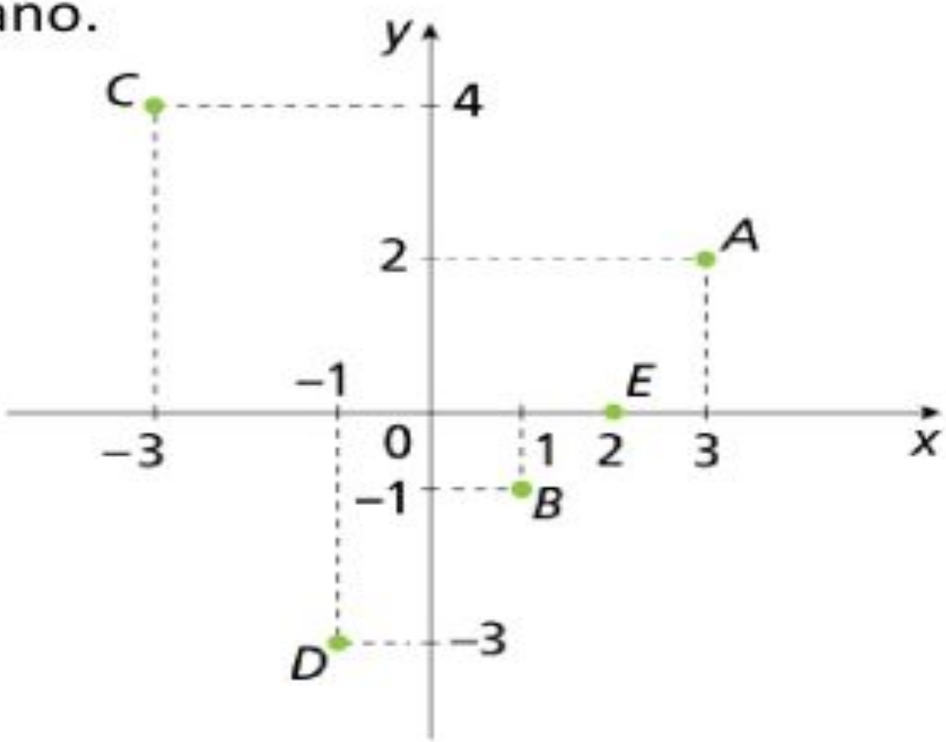


Já a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes pares**.



Exemplo 1:

Determine as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano.



- ponto A: $(3, 2)$
- ponto B: $(1, -1)$
- ponto C: $(-3, 4)$
- ponto D: $(-1, -3)$
- ponto E: $(2, 0)$

Exemplo 2:

Determinar o valor real de b, de modo que o ponto $B(4, b-4)$ pertença ao eixo das abscissas.

Se o ponto B pertence ao eixo das abscissas, então:

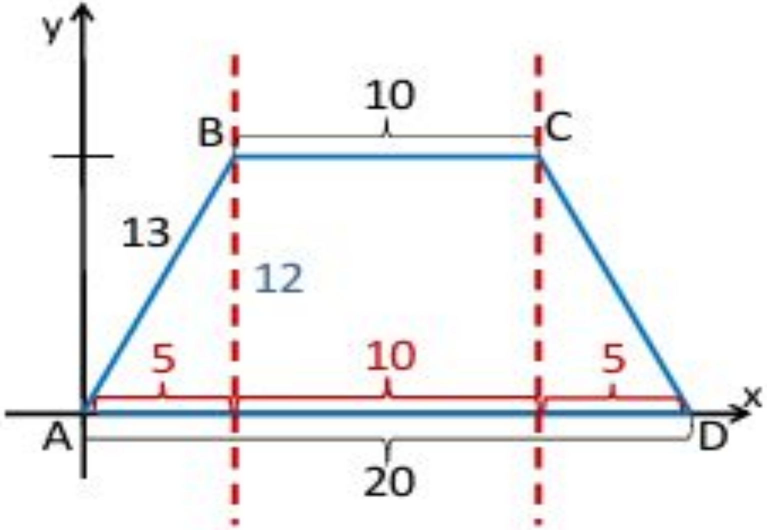
$$y_B = 0$$

Assim:

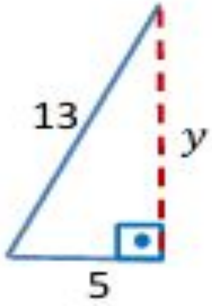
$$b - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Exemplo 3:

Determine as coordenadas dos vértices A, B, C e D do trapézio isósceles abaixo.



- ponto A: $(0,0)$
- ponto D: $(20,0)$



$$13^2 = y^2 + 5^2$$
$$169 = y^2 + 25$$
$$y^2 = 169 - 25$$
$$y = \sqrt{144} \Rightarrow y = 12$$

- ponto B: $(5,12)$
- ponto C: $(15,12)$

Distância entre dois pontos

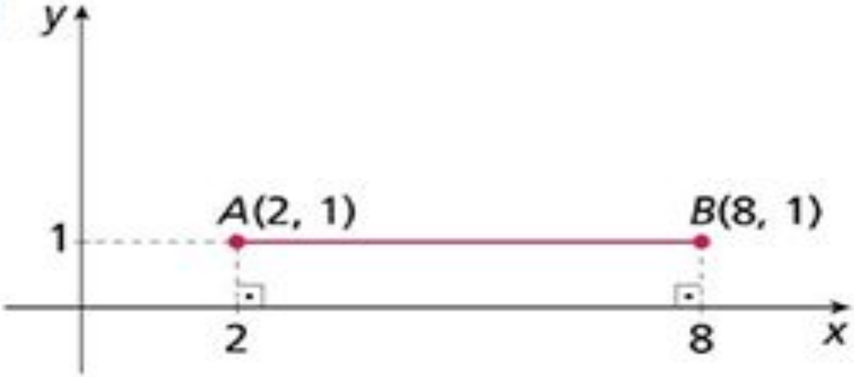
Em muitas situações do cotidiano, precisamos conhecer a distância entre dois pontos.

Vamos considerar dois pontos, A e B, sendo a distância entre eles dada por $d_{A,B}$, que é a medida do segmento $\overline{AB}$ de origem A e extremidade B.

Distância entre dois pontos

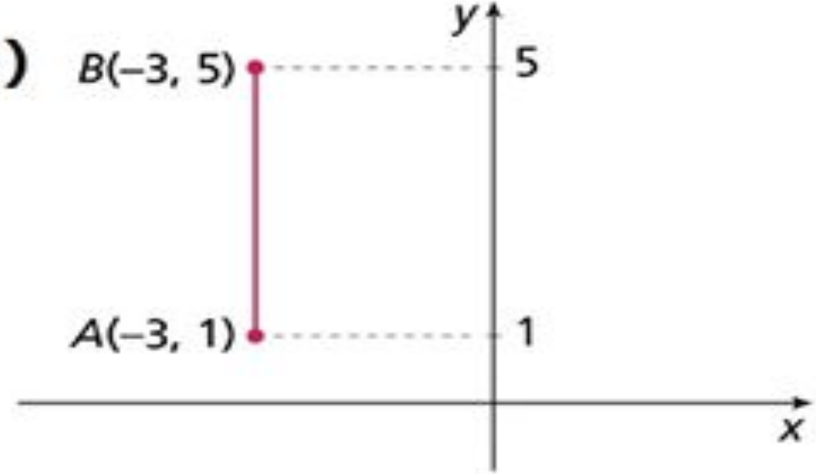
Observe nos exemplos a seguir como calcular essa distância.

a)



$$d_{A,B} = 8 - 2 = 6$$

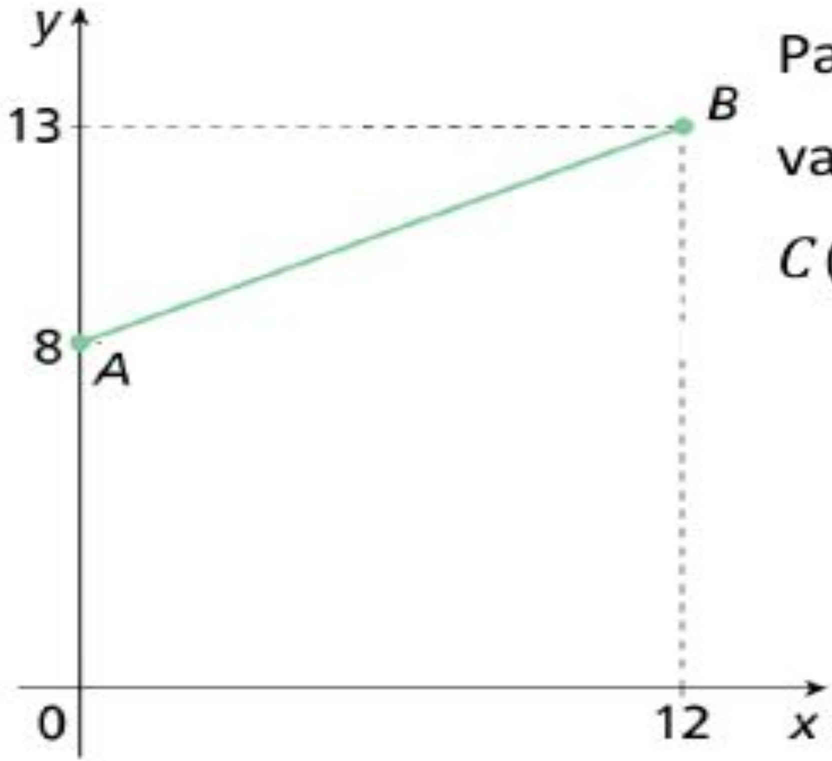
b)



$$d_{A,B} = 5 - 1 = 4$$

Distância entre dois pontos

c)



Para calcular essa distância, vamos observar o ponto auxiliar $C(12, 8)$ no plano cartesiano.

Distância do ponto A ao C:

$$d_{A,C} = 12 \text{ Km}$$

Distância do ponto B ao C:

$$d_{B,C} = 5 \text{ Km}$$

Distância do ponto A ao B:

$$d_{A,B} = d \text{ Km}$$

Distância entre dois pontos

Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(d_{A,B})^2 = (d_{A,C})^2 + (d_{B,C})^2$$

$$d^2 = 12^2 + 5^2$$

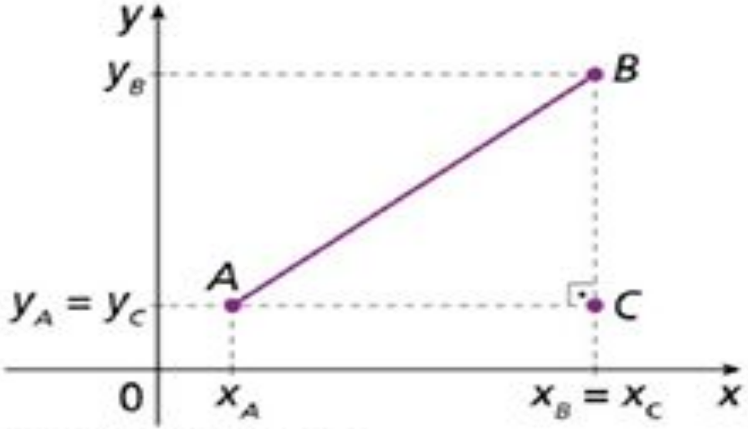
$$d^2 = 169 \Longrightarrow d = 13 \text{ ou } d = -13$$

A distância entre dois pontos, por definição, é um número não negativo; então: $d = 13$ km.

Distância entre dois pontos

Vamos determinar a distância $d_{A,B}$ entre dois pontos quaisquer $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Para isso, vamos representá-los no plano cartesiano ao lado. Também representamos um ponto auxiliar C,



de modo a formar um triângulo ABC, retângulo em C.

Pelo teorema de Pitágoras: $\left(d_{A,B}\right)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

Sabemos que $AC = |x_B - x_A|$ e que $BC = |y_B - y_A|$.

Como $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ e $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$, temos: $\left(d_{A,B}\right)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

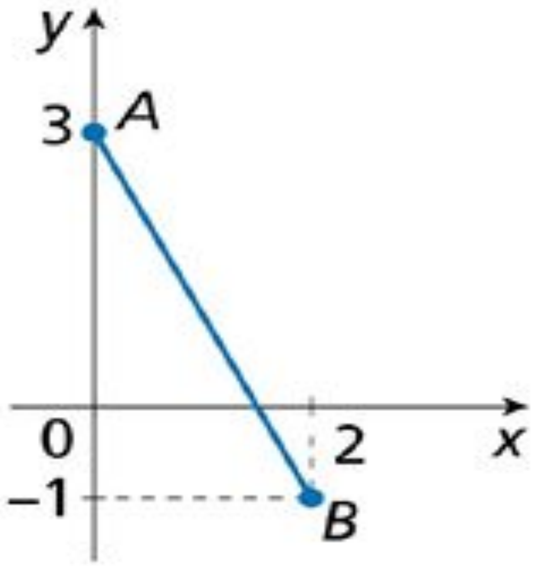
Distância entre dois pontos

Portanto, a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano é dada por:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemplo 4:

Calcular a distância entre os pontos $A(0,3)$ e $B(2,-1)$.



Como $A(0,3)$ e $B(2,-1)$, então:

$$x_A = 0,\, y_A = 3,\, x_B = 2 \text{ e } y_B = -1.$$

Substituindo esses valores em

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \text{ temos:}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-3)^2}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{4+16}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{20} \implies \boxed{d_{A,B} = 2\sqrt{5}}$$

Exemplo 5:

Determinar m para que a distância entre A e B seja 5 unidades, dados os pontos $A(-2, m)$ e $B(1,3)$.

Como a distância entre A e B é 5 unidades, temos:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

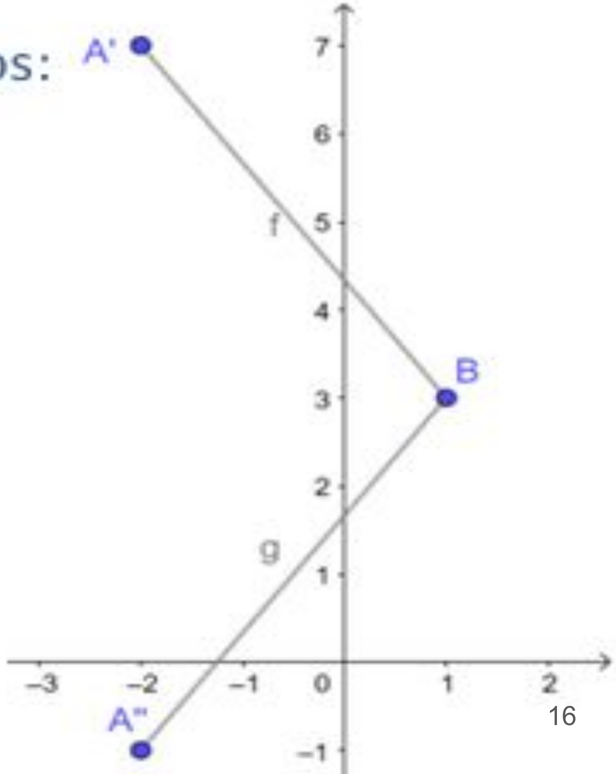
$$(5)^2 = \big(1 - (-2)\big)^2 + (3 - m)^2$$

$$25 = (3)^2 + (3 - m)^2$$

$$25 = 9 + (3)^2 - 2.(3).(m) + (m)^2$$

$$\boxed{m^2 - 6m - 7 = 0}$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos dois valores de m: $m = 7$ ou $m = -1$.



Exemplo 6:

Determinar o ponto $C(m, 2m)$, que é equidistante dos pontos

$A(-7, 0)$ e $B(3, 0)$.

Como o ponto C é equidistante dos pontos A e B, então a distância

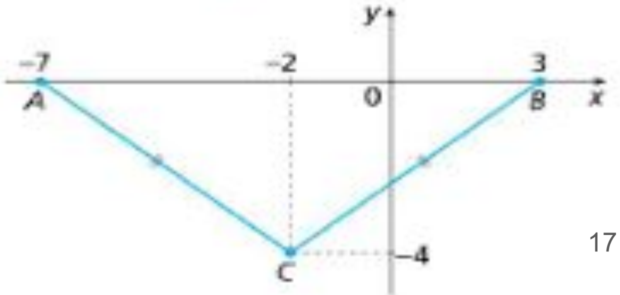
entre C e A é a mesma que entre C e B. Assim: $d_{A,C} = d_{B,C}$

$$\cancel{\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}} = \cancel{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}$$

$$\big(m - (-7)\big)^2 + (2m - 0)^2 = (m - 3)^2 + (2m - 0)^2$$

$$\cancel{m^2} + 14m + 49 + \cancel{4m^2} = \cancel{m^2} - 6m + 9 + \cancel{4m^2}$$

$$14m + 6m = 9 - 49 \Rightarrow \boxed{m = -2}$$



Substituindo $m = -2$, obtemos $C(-2, -4)$.

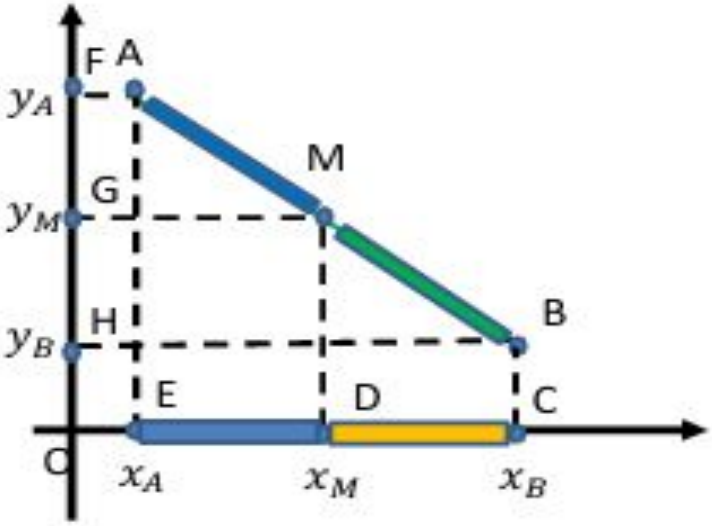
Observe a representação gráfica:

Geometria Analítica:
O Ponto

- Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta;
- Coordenadas do baricentro de um triângulo;
- Condição de alinhamento de três pontos.

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Pelo teorema de Tales: $AM = MB \Rightarrow ED = DC$



$$x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$x_M + x_M = x_B + x_A$$

$$2x_M = x_B + x_A$$

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}$$

Analogamente: $\boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$

$$\boxed{M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

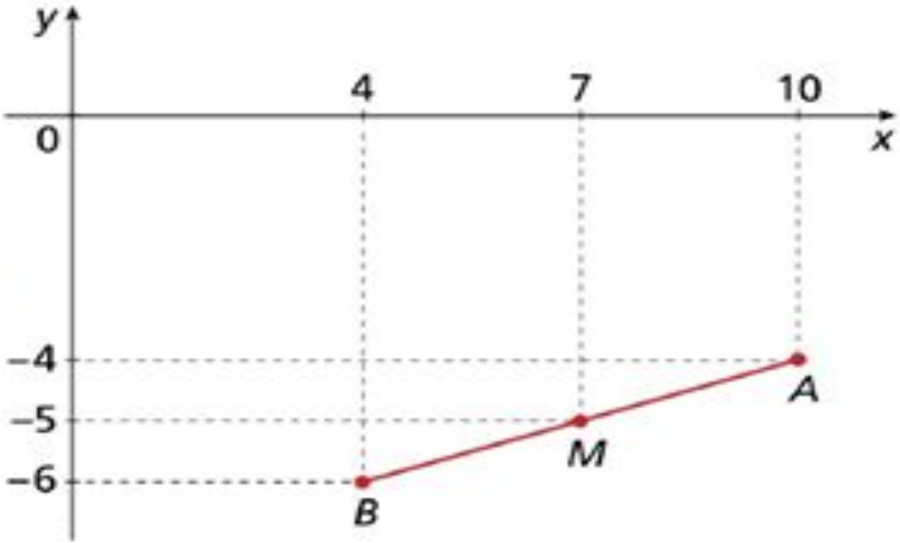
Exemplo 1:

Calcule as coordenadas do porto médio do segmento $\overline{AB}$, sendo $A(10, -4)$ e $B(4, -6)$.

As coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ podem ser dadas por:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + (-6)}{2} = -5$$



Logo, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M(7, -5)$.

Exemplo 2:

Determine o comprimento da mediana $\overline{AM}$ do triângulo cujos vértices são $A(2,3), B(4,-2)$ e $C(0,-6)$.

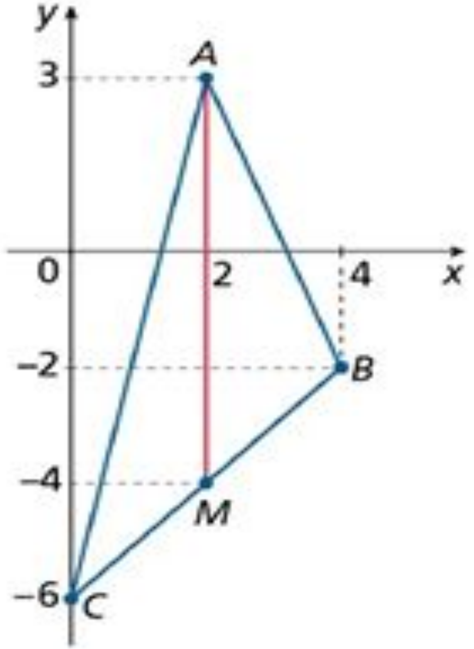
Calculando as coordenadas, temos:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-6+(-2)}{2} = -4$$

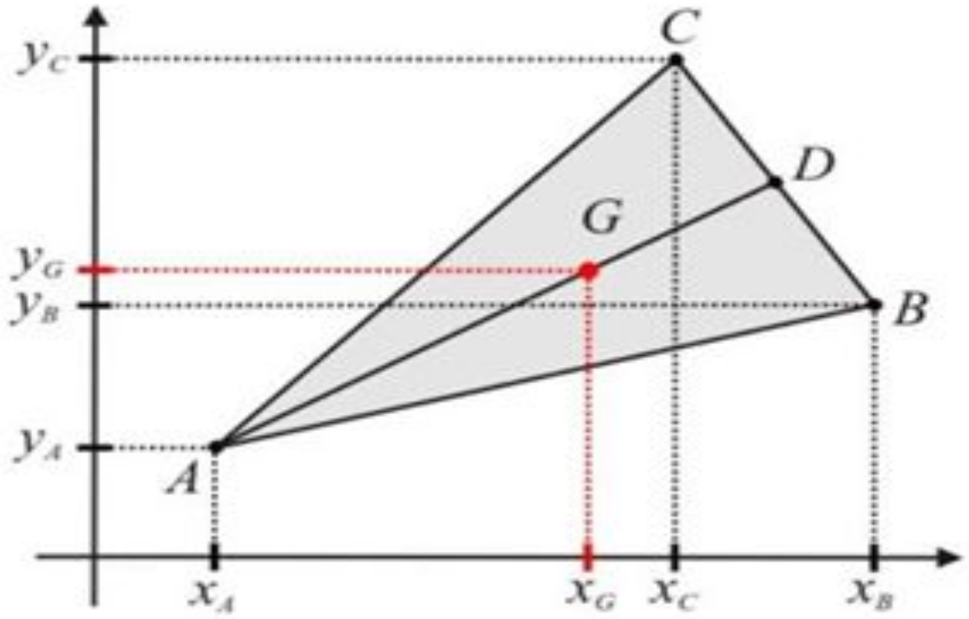
Logo: $M(2,-4)$.

Agora, calculando o comprimento da mediana, temos: $d_{A,M} = \sqrt{(2-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{49} = 7$



Portanto o comprimento da mediada $\overline{AM}$ é 7 u.c.

Coordenadas do baricentro de um triângulo



Coordenadas do baricentro de um triângulo

O ponto médio de um segmento é dado pela semi-soma de suas coordenadas. Assim, as coordenadas do ponto médio do segmento BC são dadas por:

$$x_d = \frac{x_b + x_c}{2}, \quad y_d = \frac{y_b + y_c}{2} \qquad (1)$$

Como o ponto G divide uma mediana numa razão de $2:1$, temos a relação referente à mediana ao lado BC:

$$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1} \qquad (2)$$

Coordenadas do baricentro de um triângulo

Coordenada da abscissa

Considerando as abscissas dos pontos A, G e D e a relação (2), temos que:

$$\frac{x_g - x_a}{x_d - x_g} = \frac{2}{1}$$

$$x_g - x_a = 2 \cdot (x_d - x_g)$$

$$x_g - x_a = 2x_d - 2x_g$$

$$3x_g = x_a + 2x_d \quad (3)$$

Coordenadas do baricentro de um triângulo

Substituindo a relação (1) em (3), obtemos:

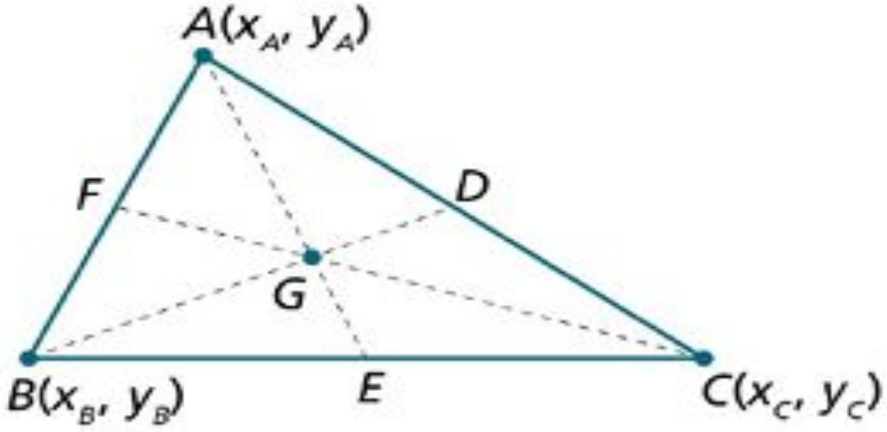
$$3x_g = x_a + 2\left(\frac{x_b + x_c}{2}\right) \Longrightarrow 3x_g = x_a + x_b + x_c$$

$$\boxed{x_g = \frac{x_a + x_b + x_c}{3}}$$

Analogamente ao que fizemos para encontrar a coordenada da abscissa do baricentro, fazemos para a ordenada:

$$\boxed{y_g = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}}$$

Coordenadas do baricentro de um triângulo



Portanto, o baricentro G é dado por:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Exemplo 3:

Calcular as coordenadas do baricentro do triângulo de vértices

$A(3,1), B(2,6)$e $C(4,2)$.

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{3+2+4}{3} = 4$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1+6+2}{3} = 3$$

Logo, as coordenadas do baricentro são: $(3,3)$.

Exemplo 4:

Os pontos $A(1,5), B(2,8)$ e $C(x,y)$ são vértices de um triângulo cujo baricentro é o ponto $G(4,2)$. Determine as coordenadas do vértice C.

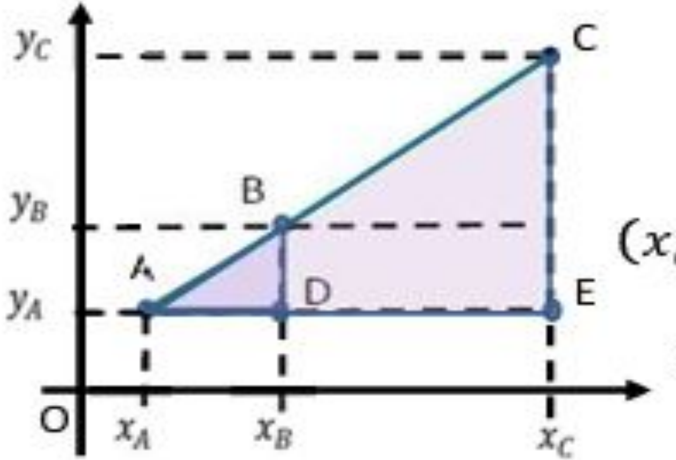
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Longrightarrow 4 = \frac{1+2+x}{3} \Longrightarrow 12 = 1 + 2 + x$$
$$\Longrightarrow \boxed{x = 9}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Longrightarrow 2 = \frac{8+5+y}{3} \Longrightarrow 6 = 8 + 5 + y$$
$$\Longrightarrow \boxed{y = -7}$$

Portanto, as coordenadas do vértice são: $(9, -7)$.

Condição de alinhamento de três pontos

Os triângulos ACE e ABD são semelhantes. Então, para $(x_B - x_A) \neq 0$ e $(y_B - y_A) \neq 0$:



$$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} \Longrightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}$$

$$(x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A) - (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) = 0$$

$$x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A - \\ -(x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A) = 0$$

$$x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + \cancel{x_A y_A} - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C - \cancel{x_A y_A} = 0$$

$$x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C = 0$$

Condição de alinhamento de três pontos

$$x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C = 0$$

Multiplicando ambos os membros por -1 e reordenando:

$$-x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B + x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C = 0$$

$$\boxed{x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C = 0}$$

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C = 0$$

<u>Conclusão:</u> resolva o determinante. Se o determinante for igual a zero, os pontos estão alinhados.

Exemplo 5:

Verifique se os pontos $A(3,2)$, $B(4,1)$ e $C(1,4)$ são colineares.

Vamos calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 16 + 2 - 1 - 8 - 12$$

$$= +21 - 21 = 0$$

É importante observar que, se $D = 0$, os pontos são colineares e, se $D \neq 0$, os pontos são vértices de um triângulo.

Exemplo 6:

Determine os valores de k para que os pontos $A(k,7)$, $B(2,-3)$ e $C(k,1)$ sejam os vértices de um triângulo.

Para que os pontos A, B e C sejam vértices de um triângulo, eles não podem estar alinhados. Assim:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} k & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3k + 7k + 2 - (-3k) - k - 14 \neq 0$$

$$6k - 12 \neq 0 \Longrightarrow k \neq 2$$

Logo: $k \neq 2$.