Progressões Aritméticas e Geométricas

Professor Müller

Objetivos da Aula

- Definir e identificar uma progressão aritmética (PA) e uma progressão geométrica (PG).
- Calcular termos gerais.
- Determinar a soma dos termos.
- Aplicar conceitos em problemas envolvendo matrizes e determinantes.

O que é uma PA?

Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado a uma constante r (razão).

Exemplo: $2, 5, 8, 11, \ldots$ (razão $r = 3$)

Fórmula do Termo Geral da PA

Fórmula

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Dedução do Termo Geral da PA

Seja uma PA com primeiro termo a_1 e razão r.

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Assim, o termo geral da PA é:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Exemplo - Termo Geral da PA

Considere $a_1 = 2$ e $r = 3$. Qual é o $10^{\underline{o}}$ termo da PA?

Exemplo - Termo Geral da PA

Considere $a_1 = 2$ e $r = 3$. Qual é o $10^{\underline{o}}$ termo da PA?

$$a_{10} = 2 + (10 - 1) \cdot 3 = 2 + 27 = 29$$

Soma dos termos da PA

Fórmula da Soma dos n primeiros termos

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ou

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

Soma dos Termos da PA

A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)r\right)$$

Exemplo: Considere a PA: 3, 7, 11, 15, ...

- $a_1 = 3,\ r = 4,\ n = 10$

Calcule S_{10}:

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left(2 \times 3 + (10-1) \times 4\right) = 5 \times (6 + 36) = 5 \times 42 = 210$$

Dedução da Soma dos Termos da PA

Considere a soma dos n primeiros termos de uma PA:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Reescrevendo a soma em ordem inversa:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$$

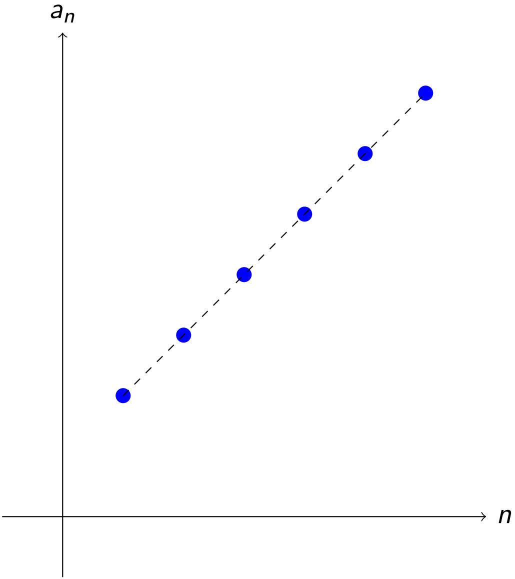
Somando termo a termo:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$$

Portanto,

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

Gráfico de uma PA



Somatório em uma PA

A soma dos n primeiros termos de uma PA também pode ser escrita com notação de somatório:

Notação de somatório

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} [a_1 + (i-1)r]$$

Isso permite manipulações mais avançadas em provas matemáticas.

Demonstre: Soma da PA via somatório

Prove que:

$$\sum_{i=1}^{n}[a_1 + (i-1)r] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}[a_1 + (i-1)r] &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + \sum_{i=1}^{n}(i-1)r \\
&= na_1 + r \cdot \sum_{i=1}^{n}(i-1) \\
&= na_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]
\end{aligned}$$

Problema 1: Pontuação em Jogo

Um jogador marca 10 pontos no primeiro nível de um jogo, e a cada novo nível marca 5 pontos a mais que no anterior. Quantos pontos ele fará no 8º nível?

Problema 1: Pontuação em Jogo

Um jogador marca 10 pontos no primeiro nível de um jogo, e a cada novo nível marca 5 pontos a mais que no anterior. Quantos pontos ele fará no 8º nível?

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 10 + (8-1) \cdot 5 = 10 + 35 = 45$$

Resposta: No 8º nível, o jogador fará **45 pontos**.

Problema 2: Parcelamento Crescente

Um produto será pago em 6 parcelas, com valor inicial de R$ 200,00 e aumento fixo de R$ 50,00 por parcela. Qual será o valor da última parcela?

Problema 2: Parcelamento Crescente

Um produto será pago em 6 parcelas, com valor inicial de R$ 200,00 e aumento fixo de R$ 50,00 por parcela. Qual será o valor da última parcela?

$$a_6 = 200 + (6 - 1) \cdot 50 = 200 + 250 = 450$$

Resposta: A última parcela será de **R$ 450,00**.

Problema 3: Distância em Corrida

Um corredor percorre 2 km no primeiro dia de treino, aumentando 1,5 km a cada novo dia. Qual será a distância no 10º dia?

Problema 3: Distância em Corrida

Um corredor percorre 2 km no primeiro dia de treino, aumentando 1,5 km a cada novo dia. Qual será a distância no 10º dia?

$$a_{10} = 2 + (10 - 1) \cdot 1{,}5 = 2 + 13{,}5 = 15{,}5$$

Resposta: No 10º dia, ele correrá **15,5 km**.

Problema 4: Economia Mensal

Um estudante começa a economizar R$ 50,00 no primeiro mês e aumenta o valor em R$ 20,00 a cada mês. Quanto ele terá economizado ao final de 6 meses?

Problema 4: Economia Mensal

Um estudante começa a economizar R$ 50,00 no primeiro mês e aumenta o valor em R$ 20,00 a cada mês. Quanto ele terá economizado ao final de 6 meses?

$$S_6 = \frac{6}{2}[2 \cdot 50 + (6-1) \cdot 20] = 3[100 + 100] = 3 \cdot 200 = 600$$

Resposta: Ele terá economizado **R$ 600,00**.

Problema 5: Produção Industrial

Uma máquina fabrica 100 peças no primeiro dia e aumenta a produção em 10 peças por dia. Quantas peças terá produzido ao final de 7 dias?

Problema 5: Produção Industrial

Uma máquina fabrica 100 peças no primeiro dia e aumenta a produção em 10 peças por dia. Quantas peças terá produzido ao final de 7 dias?

$$S_7 = \frac{7}{2}[2 \cdot 100 + (7-1) \cdot 10] = \frac{7}{2}[200 + 60] = \frac{7}{2} \cdot 260 = 910$$

Resposta: A produção total será de **910 peças**.

Problema 6: Leitura de Páginas

Um aluno lê 5 páginas no primeiro dia e aumenta a leitura em 3 páginas a cada dia. Quantas páginas ele terá lido em 8 dias?

Problema 6: Leitura de Páginas

Um aluno lê 5 páginas no primeiro dia e aumenta a leitura em 3 páginas a cada dia. Quantas páginas ele terá lido em 8 dias?

$$S_8 = \frac{8}{2}[2 \cdot 5 + (8-1) \cdot 3] = 4[10 + 21] = 4 \cdot 31 = 124$$

Resposta: Ele terá lido **124 páginas** em 8 dias.

O que é uma PG?

Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência onde cada termo, a partir do segundo, é o anterior multiplicado por uma constante q (razão). Exemplo: $3, 6, 12, 24, \ldots$ (razão $q = 2$)

Fórmula do Termo Geral da PG

Fórmula

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Dedução do Termo Geral da PG

Seja uma PG com primeiro termo a_1 e razão q.

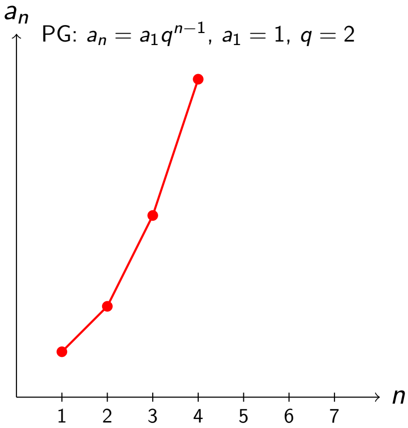
$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Logo, o termo geral da PG é:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Gráfico compacto dos primeiros termos de uma PG



Observação: para manter o gráfico compacto, os valores foram limitados.

Exemplo - Termo Geral da PG

Considere $a_1 = 3$ e $q = 2$. Qual é o $5^{\underline{o}}$ termo da PG?

Exemplo - Termo Geral da PG

Considere $a_1 = 3$ e $q = 2$. Qual é o $5^{\underline{o}}$ termo da PG?

$$a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

Soma dos termos de uma PG finita

Fórmula da Soma dos n primeiros termos (PG)

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

Soma dos Termos da PG

A soma dos n primeiros termos de uma PG (com $q \neq 1$) é:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exemplo: Considere a PG: 2, 6, 18, 54, ...

- $a_1 = 2,\ q = 3,\ n = 5$

Calcule S_5:

$$S_5 = 2 \cdot \frac{1 - 3^5}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{1 - 243}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{-242}{-2} = 2 \times 121 = 242$$

Dedução da Soma dos Termos da PG

Considere a soma dos n primeiros termos de uma PG:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

Multiplicando ambos os lados por q:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n$$

Subtraindo as duas expressões:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1}$$

Somatório em uma PG

A soma dos termos de uma PG pode ser escrita como:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1}$$

Prove que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_1 q^i = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Demonstre: Soma da PG via multiplicação e subtração

Prove que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Solução: Considere:

$$\begin{aligned}
S &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \\
qS &= q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \\
S - qS &= (1 + q + \cdots + q^{n-1}) - (q + q^2 + \cdots + q^n) \\
&= 1 - q^n \\
S(1 - q) &= 1 - q^n \\
S &= \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{q^n - 1}{q - 1}
\end{aligned}$$

Problema 1: Crescimento de Bactérias

Uma colônia de bactérias dobra de tamanho a cada hora. Se havia 500 bactérias inicialmente, quantas haverá após 6 horas?

Problema 1: Crescimento de Bactérias

Uma colônia de bactérias dobra de tamanho a cada hora. Se havia 500 bactérias inicialmente, quantas haverá após 6 horas?

Solução:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 500 \cdot 2^{6-1} = 500 \cdot 32 = 16000$$

Após 6 horas, haverá **16.000 bactérias**.

Problema 2: Espelhos Inclinados

Um raio de luz reflete entre dois espelhos paralelos e sua intensidade diminui a cada reflexão pela metade. Se a intensidade inicial é 128 lux, quantas lux terá após 5 reflexões?

Problema 2: Espelhos Inclinados

Um raio de luz reflete entre dois espelhos paralelos e sua intensidade diminui a cada reflexão pela metade. Se a intensidade inicial é 128 lux, quantas lux terá após 5 reflexões?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 128 \cdot \frac{1}{32} = 4$$

Resposta: Após 5 reflexões, a intensidade será de **4 lux**.

Problema 3: Valor Futuro de um Investimento

Você investe R$ 1.000,00 com rendimento de 20% ao mês. Qual será o valor no 4º mês?

Problema 3: Valor Futuro de um Investimento

Você investe R$ 1.000,00 com rendimento de 20% ao mês. Qual será o valor no 4º mês?

$$a_n = 1000 \cdot (1{,}2)^{4-1} = 1000 \cdot 1{,}728 = 1.728$$

Resposta: No 4º mês, o valor será de **R$ 1.728,00**.

Problema 4: Pingos de Água

Uma torneira pinga 1 gota no primeiro minuto, 2 no segundo, 4 no terceiro, e assim por diante, dobrando o número de gotas. Quantas gotas cairão nos primeiros 10 minutos?

Problema 4: Pingos de Água

Uma torneira pinga 1 gota no primeiro minuto, 2 no segundo, 4 no terceiro, e assim por diante, dobrando o número de gotas. Quantas gotas cairão nos primeiros 10 minutos?

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{1024 - 1}{1} = 1023$$

Resposta: 1023 gotas cairão em 10 minutos.

Problema 5: Recompensa em Moedas

Um rei promete pagar a um servo com moedas de ouro: 1 no primeiro dia, 3 no segundo, 9 no terceiro, e assim por diante, triplicando a cada dia. Quantas moedas o servo receberá após 6 dias?

Problema 5: Recompensa em Moedas

Um rei promete pagar a um servo com moedas de ouro: 1 no primeiro dia, 3 no segundo, 9 no terceiro, e assim por diante, triplicando a cada dia. Quantas moedas o servo receberá após 6 dias?

$$S_6 = 1 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{2} = \frac{728}{2} = 364$$

Resposta: O servo receberá **364 moedas de ouro**.

Problema 6: Valor Acumulado de Aplicação

Você aplica R$ 500,00 e todo mês aplica mais R$ 500,00, com rendimento de 10% (aplicações formam PG). Qual o valor acumulado após 4 meses?

Problema 6: Valor Acumulado de Aplicação

Você aplica R$ 500,00 e todo mês aplica mais R$ 500,00, com rendimento de 10% (aplicações formam PG). Qual o valor acumulado após 4 meses?

$$S_4 = 500 \cdot \frac{(1{,}1)^4 - 1}{1{,}1 - 1} = 500 \cdot \frac{1{,}4641 - 1}{0{,}1} = 500 \cdot \frac{0{,}4641}{0{,}1} = 500 \cdot 4{,}641 = 2320{,}50$$

Resposta: Valor acumulado de **R$ 2.320,50**.

Exemplo com Matrizes e PA

Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

onde os termos a_i formam uma PA de razão 2 e $a_1 = 1$.
Determine o determinante de A.

Exemplo com Matrizes e PA

Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

onde os termos a_i formam uma PA de razão 2 e $a_1 = 1$.
Determine o determinante de A.

Solução

- $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
- $\det(A) = 1 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 7 - 15 = -8$

Exemplo com Matrizes e PG

Considere a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

onde os termos b_i formam uma PG de razão 2 e $b_1 = 1$.
Determine o determinante de B.

Exemplo com Matrizes e PG

Considere a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

onde os termos b_i formam uma PG de razão 2 e $b_1 = 1$.
Determine o determinante de B.

Solução

- $b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = 4,\ b_4 = 8$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$
- $\det(B) = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 8 - 8 = 0$

Exemplo Integrado: Determinante, Logaritmo e Somatório

Considere a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} \log_2 2 & \log_2 4 \\ \log_2 8 & \log_2 16 \end{bmatrix}$$

1. **Calcule o determinante de** M

Exemplo Integrado: Determinante, Logaritmo e Somatório

Considere a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} \log_2 2 & \log_2 4 \\ \log_2 8 & \log_2 16 \end{bmatrix}$$

1. Calcule o determinante de M

$\det(M) = (\log_2 2)(\log_2 16) - (\log_2 4)(\log_2 8) = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$

2. Considere $a_i = \log_2(2^i)$**. Calcule:** $\sum_{i=1}^{4} a_i$

Exemplo Integrado: Determinante, Logaritmo e Somatório

Considere a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} \log_2 2 & \log_2 4 \\ \log_2 8 & \log_2 16 \end{bmatrix}$$

1. Calcule o determinante de M

$\det(M) = (\log_2 2)(\log_2 16) - (\log_2 4)(\log_2 8) = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$

2. Considere $a_i = \log_2(2^i)$**. Calcule:** $\sum_{i=1}^{4} a_i$

$$\sum_{i=1}^{4} \log_2(2^i) = \sum_{i=1}^{4} i = 10$$

Conclusão: relação entre logaritmos, somatórios e álgebra matricial.

Problema Integrado

Enunciado:
Uma população bacteriana cresce em PA: no primeiro dia, há $a_1 = x$ bactérias, aumentando r bactérias por dia durante n dias.
Simultaneamente, uma substância química cresce em PG, começando com $b_1 = y$ mg e razão q, também por n dias.
Deseja-se calcular a seguinte expressão:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(a_1 + (i-1)r) + y \cdot q^{i-1}\right]$$

Ou seja: a soma do total diário das bactérias e da substância.

...

Começamos dividindo o somatório:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(a_1+(i-1)r)+y\cdot q^{i-1}\right]=\sum_{i=1}^{n}(a_1+(i-1)r)+\sum_{i=1}^{n}y\cdot q^{i-1}$$

...

Começamos dividindo o somatório:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(a_1+(i-1)r)+y\cdot q^{i-1}\right]=\sum_{i=1}^{n}(a_1+(i-1)r)+\sum_{i=1}^{n}y\cdot q^{i-1}$$

1º Termo: Soma da PA (forma expandida)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_1+(i-1)r)=na_1+r\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

Sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\sum_{j=0}^{n-1}j=\frac{(n-1)n}{2}$$

...

Logo:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_1 + (i-1)r) = na_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

...

Logo:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_1 + (i-1)r) = na_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

2º Termo: Soma da PG com fator constante y

$$\sum_{i=1}^{n} y \cdot q^{i-1} = y \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = y \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad (\text{para } q \neq 1)$$

Logo:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_1 + (i-1)r) = na_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

2º Termo: Soma da PG com fator constante y

$$\sum_{i=1}^{n} y \cdot q^{i-1} = y \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = y \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad (\text{para } q \neq 1)$$

Expressão Final Algébrica:

$$\boxed{S = na_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2} + y \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Resultado 100% algébrico em função de a_1, r, y, q, n.

Exercícios Propostos - PA

1. Demonstre que a soma dos n primeiros termos de uma PA de razão r é:

$$\sum_{i=1}^{n}[a_1 + (i-1)r] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

2. Prove que os termos da diagonal principal da matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$ formam uma PA se $a_{ii} = a_1 + (i-1)r$

Exercícios Propostos - PG

1. Prove que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

usando multiplicação e subtração de somatórios.

2. Dado que $a_1 = 1$ e $q = 2$, forme a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

e calcule o determinante.

Desafio Final

Crie uma PA e uma PG de 4 termos cada, de modo que a soma da PA seja igual ao produto dos termos da PG.

- Justifique os valores escolhidos.
- Prove a igualdade com cálculos.