Universidade Federal de Campina Grande – UFCG
Unidade Acadêmica de Matemática - UAMat

Cálculo Diferencial e Integral II
Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira

Nome: ______________________________ **Nota:** ______

Obs.: Enviar o arquivo PDF das soluções da prova para o email "denilsonufcg@gmail.com"até as 16h30min do dia 22/03/2021. Assine seu nome em todas as páginas. Não serão aceitas as provas entregue depois deste horário.

Primeira Avaliação

Questão 1.

(2 pontos) Use as técnicas de integração trigonométricas para calcular:

$(a)\ \displaystyle\int sen^3(x)dx;$

$(b)\ \displaystyle\int sen(5x)cos(2x)dx.$

Questão 2.

(2 pontos) Use a técnida de decomposição em frações parciais para calcular a seguinte primitiva:

$$\int \frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}dx$$

Questão 3.

(2 pontos) Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da área limitada pelas curvas $y = \sqrt{2x}$ e $y = x$ no primeiro quadrante.

Questão 4.

(2 pontos) Determine a área da superfície obtida pela revolução da curva $y = \sqrt{x}$, entre $x = 0$ e $x = 2$ em torno do eixo x.

Questão 5.

(2 pontos) Determine o comprimento da curva $y = x^{3/2}$ no intervalo de $0 \leq x \leq 4$.

Q 1

(a) $\int sen^3 x\, dx = \int sen^2 x \cdot sen x\, dx$

$= \int (1 - \cos^2 x)\, sen x\, dx$

$u = \cos x \Rightarrow du = -sen x\, dx$

$\int sen^3 x\, dx = -\int (1 - u^2)\, du$

$= -u + \frac{u^3}{3} + c = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c.$

(b) $\int sen(5x)\cos(2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\int [\, sen(5-2)x + sen(5+2)x \,]\, dx$

$= \frac{1}{2}\int (sen\, 3x + sen\, 7x)\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 7x}{7} \right]$

$= -\frac{\cos 3x}{6} - \frac{\cos 7x}{14} + c$

Q2) $\int \frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}\,dx$

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}$$

$$\frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{(A+B)x + 2B - A}{(x+2)(x-1)}$$

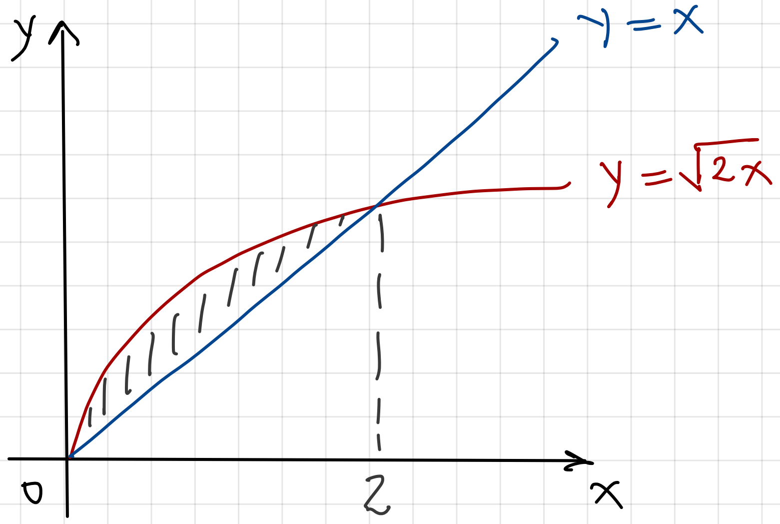
$$\begin{cases} A+B = 8 \\ -A + 2B = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 3B = 15 \\ B = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 8 - B \\ = 8 - 5 \\ A = 3 \end{array}$$

Portanto

$$\int \frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-1}\right) dx$$

$$= 3\ln|x+2| + 5\ln|x-1| + C.$$

Q3.



Pontos de interseção

$$\sqrt{2x} = x$$

$$2x = x^2$$

$$2 = x \quad \text{ou} \quad 0 = x$$

$$\text{Volume} = \pi \int_0^2 \left[(\sqrt{2x})^2 - x^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^2 (2x - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \pi \left[4 - \frac{8}{3} \right] = \frac{4\pi}{3}$$

Q4.

Área da Superfície $= 2\pi \int_0^2 y\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}\,dy$,

onde $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Tem-se $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donde

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4x} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1} = \sqrt{\frac{1}{4x}+1} = \frac{\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{x}}$$

e $y\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1} = \cancel{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+4x}}{2\cancel{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{1+4x}}{2}$. Assim

$$\text{Área da superfície} = 2\pi \int_0^2 \frac{\sqrt{1+4x}}{2}\,dx$$

$$= \pi \int_0^2 \sqrt{1+4x}\,dx$$

Fazendo $u = 1+4x$, temos

$$du = 4\,dx$$

P/ $x = 2 \Rightarrow u = 1+4.2 = 9$

P/ $x = 0 \Rightarrow u = 1+4.0 = 1$

Logo

$$\text{Área da superfície} = \frac{\pi}{4}\int_1^9 \sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^9$$

$$= \frac{\pi}{6}\sqrt{u^3}\Big|_1^9 = \frac{\pi}{6}.\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{1^3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}[27-1] = \frac{26\pi}{6} = \frac{13\pi}{3}$$

Q5) Comprimento da curva $y = x^{3/2}$ no intervalo $0 \leq x \leq 4$:

Tem-se $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{9}{4}x$. Logo

$$\text{Comprimento da curva} = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4+9x}\,dx$$

Fazendo $u = 4+9x$, temos

$$du = 9\,dx \Rightarrow \frac{1}{9}du = dx$$

e

P/ $x = 4 \Rightarrow u = 4+9.4 = 40$

P/ $x = 0 \Rightarrow u = 4+9.0 = 4$

$$\text{Comprimento da curva} = \frac{1}{2}\int_4^{40} \sqrt{u}\cdot\frac{1}{9}du$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{u=4}^{u=40} = \frac{1}{27}\left[\sqrt{40^3}-\sqrt{4^3}\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left[8\sqrt{10^3}-8\right] = \frac{8}{27}\left[\sqrt{1000}-1\right]$$