Universidade Federal de Campina Grande – UFCG
Unidade Acadêmica de Matemática - UAMat

Cálculo Diferencial e Integral II
Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira

Nome: ______________________________ **Nota:** ______

Obs.: Enviar o arquivo PDF das soluções da prova para o email "denilsonufcg@gmail.com"até as 18h30min do dia 28/04/2021. Assine seu nome em todas as páginas. Não serão aceitas as provas entregue depois deste horário.

Segunda Avaliação

Questão 1.

(2 pontos) Calcular a integral imprópria:

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2+1}dx$$

Questão 2.

(2 pontos) **A questão seguinte é um contra exemplo de que** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **pode não ser igual a** $\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx$**.**

Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}dx$$

diverge e, conclua que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}dx$$

diverge. Depois mostre que

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} \frac{2x}{x^2+1}dx = 0.$$

Questão 3.

(2 pontos) Uma placa plana triangular isósceles com base de 8 pés e altura de 4 pés está submersa verticalmente, com base virada para cima a 2 pés abaixo da superfície de uma piscina. Determinar a força exercida pela água contra um lado da placa. Use que o peso específico da água da piscina é $w = 62,4$ lb/pé^3.

Questão 4.

(2 pontos) Calcule os seguinte limites de sequências:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3+7n^3}{n^3+4}$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n}$.

Questão 5.

(2 pontos)

(a) Justifique a divergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n}$$

(a) Use o teste da integral para determinar se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+9}$$

converge ou diverge. Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas.

(1) $$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2+1}\,dx = 2\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\lim_{R\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x \Big|_1^R\right]$$

$$= 2\lim_{R\to\infty}\left[\operatorname{arctg} R - \operatorname{arctg} 1\right]$$

$$= 2\lim_{R\to\infty}\left[\operatorname{arctg} R - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 2\left[\lim_{R\to\infty}(\operatorname{arctg} R) - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

(2) $$\int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^R$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left[\ln(R^2+1) - \ln 1\right]$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \ln(R^2+1) = +\infty.$$ (Diverge)

Sendo $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

com $$\int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^0 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

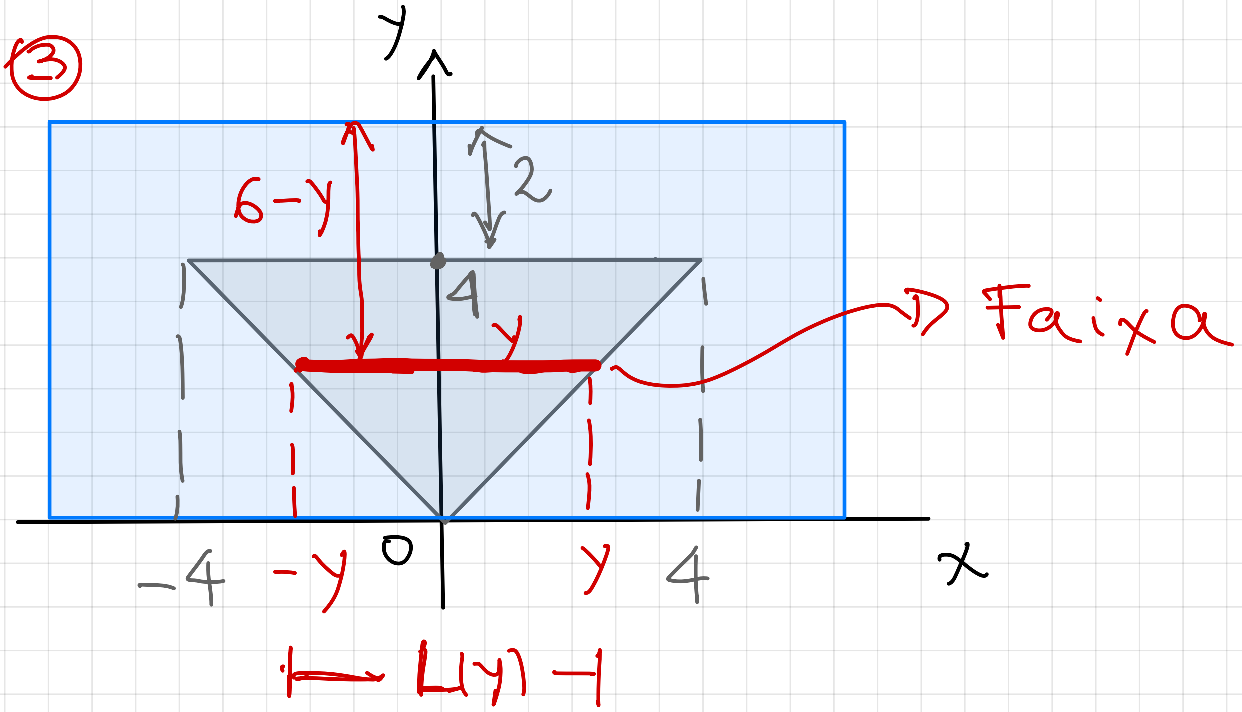
$$= \lim_{R\to-\infty} \ln(R^2+1) = +\infty$$

Logo
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = +\infty \quad \text{(Diverge)}$$

Sendo $f(x) := \frac{2x}{x^2+1}$ uma função ímpar, segue que

$$\int_{-b}^{b} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = 0.$$

③



$$F = \int_0^4 w.(\text{profundidade da faixa})\, L(y)\, dy$$

sendo $w = 62,4$, tem-se

$$F = \int_{-4}^{4} 62,4.(6-y)\,2y\,dy = 124,8\int_0^4 (6-y)y\,dy$$

$$F = 124{,}8 \cdot \int_0^4 (6y - y^2)\, dy$$

$$= 124{,}8 \cdot \left[3y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^4$$

$$= 124{,}8 \cdot \left[3 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} \right]$$

$$= 124{,}8 \left[48 - \frac{64}{3} \right]$$

$$= 124{,}8 \cdot \frac{80}{3}$$

$$= 3328 \text{ lb}$$

4 a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3+7n^3}{n^3+4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3\left(\frac{3}{n^3}+7\right)}{n^3\left(1+\frac{4}{n^3}\right)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{3}{n^3}+7}{1+\frac{4}{n^3}} = \frac{0+7}{1+0}$$

$$= 7$$

(b) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$

$= \sqrt{e^2} = e.$

(5)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n}$ Diverge, pois

seu termo geral $a_n = \frac{2n+3}{n}$

satisfaz $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{n} = 2 \ (\neq 0)$

e uma condição necessária para que a série $\sum a_n$ seja convergente é $\lim a_n = 0$.

(b) Defina $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$ e note que f é contínua, pois é uma função racional, é decrescente para $x \geq 3$ pois

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+9}\right)' = \frac{x'(x^2+9) - x(x^2+9)'}{(x^2+9)^2}$$

$$= \frac{x^2+9 - x.2x}{(x^2+9)^2}$$

$$= \frac{-x^2+9}{(x^2+9)^2} \leq 0 \iff -x^2+9 \leq 0$$

$$\iff 9 \leq x^2 \iff |x| \geq 3$$

Sendo $x \geq 0$, devemos ter $x \geq 3$ para que $f'(x) \leq 0$.

Agora, vamos mostrar que a integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+9}\,dx \quad \text{Diverge}$$

De fato

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+9}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^{R} \frac{x}{x^2+9}\,dx$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(x^2+9)\Big|_1^R$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\left[\ln(R^2+9) - \ln 10\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[+\infty - 10\right] = +\infty.$$

Pelo teste da Integral, a série numérica

$$\sum \frac{n}{n^2+9} \quad \text{Diverge.}$$