MO824A/MC859A – Tópicos em Otimização Combinatória
Primeiro semestre de 2022

Atividade 6
Entrega: ~~10 de junho~~ 17 de junho até 23:59

Prof. Fábio Luiz Usberti (fusberti@ic.unicamp.br)
Prof. Celso Cavellucci (celsocv@ic.unicamp.br)

---

1 Objetivo

O objetivo desta atividade consiste na implementação (em grupos de **dois** ou **três** alunos) de uma metaheurística fundamentada em "Algoritmo Genético" (*Genetic Algorithm*) para a solução de um problema de maximização de uma função binária quadrática ("quadractic binary function" – QBF).

2 Algoritmo Genético

Para esta atividade é essencial a leitura da seguinte referência:
Título: Genetic Algorithms
Autores: Colin R. Reeves
Capítulo 5 do livro: M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), Handbook of Metaheuristics, International Series in Operations Research & Management Science 146, DOI 10.1007/978-1-4419-1665-5 10.

3 Problema MAX-QBF

Uma função binária quadrática (QBF) é uma função $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser expressa como uma soma de termos quadráticos:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Onde $a_{ij} \in \mathbb{R} \ \ (i, j = 1, \ldots, n)$ são os coeficientes da função f. Em notação matricial, uma QBF pode ser expressa como:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & x_1 & (2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 + 4x_3^2 \end{aligned}$$

O problema de maximização de uma função binária quadrática (MAX-QBF) pode ser expresso como:

$$Z = \max_{\mathbf{x}} \ f(\mathbf{x}) \ ,$$

O MAX-QBF é um problema NP-difícil [1], mesmo que nenhuma restrição adicional seja imposta sobre as variáveis binárias $\mathbf{x}$. No entanto, se os coeficientes a_{ij} forem todos não-negativos, o problema torna-se trivial, uma vez que $x_i = 1 \ \ (i = 1, \ldots, n)$ é uma solução ótima.

4 Problema MAX-QBF com mochila

Uma variante do problema MAX-QBF é definida a seguir:

Problema MAX-KQBF ("Maximum knapsack quadractic binary function"): Considere uma capacidade $W \in \mathbb{R}$ e um peso $w_i \in \mathbb{R}$ associado a cada variável x_i. Deseja-se maximizar uma função binária quadrática tal que a soma dos pesos das variáveis que pertencem à solução não exceda a capacidade W. Este problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll}
Max & Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j & \\
s.a. & & \\
 & \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i \leqslant W & \\
 & x_i \in \mathbb{B} & \forall i = \{1, \ldots, n\}
\end{array}$$

Onde $a_{ij}, w_i, W \in \mathbb{R} \ \ (i, j = 1, \ldots, n)$ são parâmetros do problema.

5 Requisitos da atividade

Esta atividade envolve a implementação de uma metaheurística fundamentada em Algoritmo Genético como um método de solução para o MAX-KQBF. Para esta atividade você pode utilizar como base o Framework de Algoritmo Genético em Java, disponível no ensino aberto, desenvolvido pelos docentes desta disciplina.

Para esta atividade é necessário a implementação de pelo menos duas *estratégias evolutivas alternativas* discutidas em aula:

1. *Latin hypercube*
2. *Stochastic universal selection*
3. *Uniform crossover*
4. *Adaptive mutation*
5. *Steady-state*
6. *Diversity maintenance*

A atividade exige a entrega do código fonte e de um relatório (até 5 páginas) descrevendo brevemente as seguintes informações sobre a metaheurística desenvolvida:

- Descrição do problema: variáveis de decisão e modelo matemático.
- Metodologia: codificação de uma solução, geração da população inicial, método de seleção de indivíduos, método de recombinação ("crossover"), método de mutação, critérios de parada, estratégias evolutivas alternativas.
- Resultados: tabela de resultados e discussão.

Devem ser avaliados dois tamanhos de população, duas taxas de mutação e três estratégias evolutivas (padrão e duas alternativas). Desse modo, uma sugestão de possíveis configurações são:

1. `PADRÃO`: Algoritmo Genético com tamanho de população P_1, taxa de mutação M_1 e construção aleatória da população.
2. `PADRÃO+POP`: Algoritmo Genético `PADRÃO` mas com tamanho de população P_2.
3. `PADRÃO+MUT`: Algoritmo Genético `PADRÃO` mas com taxa de mutação M_2.
4. `PADRÃO+EVOL1`: Algoritmo Genético `PADRÃO` mas com estratégia evolutiva alternativa 1.
5. `PADRÃO+EVOL2`: Algoritmo Genético `PADRÃO` mas com estratégia evolutiva alternativa 2.

Procure organizar os resultados em uma tabela, avaliando qual a estratégia obteve o melhor desempenho.

6 Instâncias

Testes computacionais devem ser realizados com um conjunto de sete instâncias disponíveis no ambiente ensino aberto. Adote um tempo de execução para cada instância de 30 minutos. Os nomes das instâncias, suas dimensões e os intervalos nos quais os valores das soluções ótimas se encontram são fornecidos a seguir:

Instância	$\|\mathbf{x}\|$	MAX-KQBF (Z^*)
kqbf020	20	$[80, 151]$
kqbf040	40	$[275, 429]$
kqbf060	60	$[446, 576]$
kqbf080	80	$[729, 1000]$
kqbf100	100	$[851, 1539]$
kqbf200	200	$[3597, 5826]$
kqbf400	400	$[10846, 16625]$

7 Referências

1. Kochenberger, et al. The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey. **J Comb Optim** (2014). 28:58–81. DOI:10.1007/s10878-014-9734-0.
2. Colin R. Reeves. Genetic Algorithms. In: M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), **Handbook of Metaheuristics**, International Series in Operations Research & Management Science 146, DOI: 10.1007/978-1-4419-1665-5.