

MO824A/MC859A – Tópicos em Otimização Combinatória
Primeiro semestre de 2022

Atividade 8

Entrega: 1o de julho de 2022 até 23:59

Prof. Fábio Luiz Usberti (fusberty@ic.unicamp.br)

Prof. Celso Cavellucci (celsocv@ic.unicamp.br)

1 Objetivo

O objetivo desta atividade encontra-se na análise comparativa de três metaheurísticas (GRASP, Busca Tabú e Algoritmo Genético) para o problema de maximização de uma função binária quadrática (“quadratic binary function” – QBF) com restrição de mochila.

2 Problema MAX-QBF

Uma função binária quadrática (QBF) é uma função $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser expressa como uma soma de termos quadráticos:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, n$) são os coeficientes da função f . Em notação matricial, uma QBF pode ser expressa como:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & x_1 & (2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 + 4x_3^2 \end{aligned}$$

O problema de maximização de uma função binária quadrática (MAX-QBF) pode ser expresso como:

$$Z = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) ,$$

O MAX-QBF é um problema NP-difícil [1], mesmo que nenhuma restrição adicional seja imposta sobre as variáveis binárias \mathbf{x} . No entanto, se os coeficientes a_{ij} forem todos não-negativos, o problema torna-se trivial, uma vez que $x_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) é uma solução ótima.

3 Problema MAX-QBF com mochila

Uma variante do problema MAX-QBF é definida a seguir:

Problema MAX-KQBF (“Maximum knapsack quadratic binary function”): Considere uma capacidade $W \in \mathbb{R}$ e um peso $w_i \in \mathbb{R}$ associado a cada variável x_i . Deseja-se maximizar uma função binária quadrática tal que a soma dos pesos das variáveis que pertencem à solução não exceda a capacidade W . Este problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i \leq W \\ & x_i \in \mathbb{B} \quad \forall i = \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Onde $a_{ij}, w_i, W \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, n$) são parâmetros do problema.

4 Requisitos da atividade

Esta atividade consiste na análise comparativa de desempenho entre as metaheurísticas GRASP, Busca Tabú e Algoritmo Genético. Para a análise deverão ser utilizados gráficos *ttt-plots* e *performance profiles*. As três metodologias que deverão ser comparadas são:

- *GRASP*: metaheurística GRASP desenvolvida na Atividade 4.
- *Tabu*: metaheurística Busca Tabú desenvolvida na Atividade 5.
- *AG*: metaheurística Algoritmo Genético desenvolvida na Atividade 6.

Para cada metaheurística, escolha pelos menos duas versões implementadas (por exemplo, versão padrão e alguma versão modificada) para a realização da análise comparativa com as demais metaheurísticas.

O relatório deve apresentar:

- Descrição das metodologias utilizadas na avaliação comparativa. Em particular, descreva os métodos construtivos, evolutivos e de diversificação-intensificação adotados, e os valores utilizados para os parâmetros.
- Descrição dos conceitos envolvidos em um gráfico *ttt-plot* e a metodologia de construção desse gráfico.
- Gráficos *ttt-plot* comparando as metaheurísticas. Escolha pelo menos três pares (instância, valor alvo) e, para cada par, realize pelo menos 50 execuções por metaheurística para obter uma boa curva de distribuição de tempo.
- Discussão sobre o desempenho das metaheurísticas com base nos gráficos *ttt-plot*.
- Descrição dos conceitos envolvidos em um gráfico *performance profile* e a metodologia de construção desse gráfico.

- Gráfico *performance profile* comparando as metaheurísticas utilizando como métrica de comparação o valor da melhor solução obtida.
- Discussão sobre o desempenho das metodologias com base no gráfico *performance profile*.

O relatório deve apresentar uma tabela com os resultados dos testes computacionais comparando as metodologias. A tabela deve conter para cada instância a melhor solução obtida por cada metodologia.

Esta atividade exige a entrega de um relatório de aproximadamente dez páginas. Todos os resultados deverão ser analisados e discutidos. Suas conclusões devem estar sustentadas pelos resultados.

5 Instâncias

Testes computacionais devem ser realizados com um conjunto de sete instâncias disponíveis no ambiente ensino aberto. Os nomes das instâncias, suas dimensões e os intervalos nos quais os valores das soluções ótimas se encontram são fornecidos a seguir:

Instância	$ x $	MAX-KQBF (Z^*)
kqbf020	20	[80, 151]
kqbf040	40	[275, 429]
kqbf060	60	[446, 576]
kqbf080	80	[729, 1000]
kqbf100	100	[851, 1539]
kqbf200	200	[3597, 5826]
kqbf400	400	[10846, 16625]

6 Referências

1. Kochenberger, et al. The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey. **J Comb Optim** (2014). 28:58–81. DOI:10.1007/s10878-014-9734-0.
2. Michel Gendreau e Jean-Yves Potvin. Tabu Search. In: M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), **Handbook of Metaheuristics**, International Series in Operations Research & Management Science 146, DOI: 10.1007/978-1-4419-1665-5.
3. Manuel López-Ibáñez, Jérémie Dubois-Lacoste, Leslie Pérez Cáceres, Thomas Stützle, and Mauro Birattari. The irace package: Iterated Racing for Automatic Algorithm Configuration. **Operations Research Perspectives**, 3:43?58, 2016.
4. R. M. Aiex, M. G. C. Resende, and C. C. Ribeiro. ttpplots - a perl program to create time-to-target plots. AT&T Labs Research Technical Report (TD-6HT7EL), 2005.
5. E. D. Dolan and J. J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. **Mathematical Programming**, 91(2), 2002. DOI: 10.1007/s101070100263.