2023

CUATERNIONES

email:  alu0101317496@ull.edu.es

Robótica Computacional

LUCAS HERNANDEZ ABREU

ÍNDICE

[Introducción a los cuaterniones 2](#_Toc125123846)

[Operaciones 2](#_Toc125123847)

[Adición 2](#_Toc125123848)

[Producto 2](#_Toc125123849)

[Conjugado 3](#_Toc125123850)

[Cociente 3](#_Toc125123851)

[Exponenciación 3](#_Toc125123852)

# Introducción a los cuaterniones

Los cuaterniones son una extensión de los números reales, similar a la de los números complejos. Los números complejos responden a la inserción del parámetro , más, los cuaterniones, responden a la siguiente operación:

De esta forma también podemos especificar una matriz que contenga la multiplicación de los cuaterniones.

Imagen que contiene luz, colgando, teclado

Descripción generada automáticamente

Multiplicación de Cayley

Los elementos, y son los componentes de la base de los cuaterniones considerado como un -espacio vectorial de dimensión 4.

# Operaciones

Como todo espacio vectorial, los cuaterniones también tienen definidos un conjunto de operaciones.

## Adición

Supongamos dos cuaterniones:

La adición se define como:

La adición es conmutativa.

## Producto

El producto se realiza componente a componente, y en su forma completa se define como:

El producto es asociativo NO conmutativo.

Una forma reducida de representar el producto sería la siguiente:

## Conjugado

El conjugado de un cuaternión está dado por  . Es decir, esta operación convierte la agregación de los componentes en una sustración de los mismos, lo que supone la transposición de su representación matricial.

El valor absoluto del cuaternión viene dado por:

## Cociente

El inverso multiplicativo de un cuaternión , distinto de 0, está dado por:

Usando la forma del inverso es posible escribir dos cocientes de cuaterniones como:

## Exponenciación

La exponenciación de cuaterniones tiene similitud con la de los números complejos, estando también relacionada con las funciones trigonométricas. Dado un cuaternión su exponenciación es:

# Aplicación

Los cuaterniones son ampliamente utilizados en diferentes sectores a parte de las matemáticas, por ejemplo: la robótica, la animación, la creación de videojuegos, espacios tridimensionales o la cuántica.

Nosotros nos centraremos en la rotación espacial de los cuaterniones en específico.

## Cuaterniones y rotación en el espacio

Para explicar la rotación en el espacio vamos a centrarnos en el ejemplo concreto de expresar analíticamente la rotación alrededor del eje de con un ángulo de 90º.

El vector debe tener un papel fundamental. Si miramos la matriz de multiplicación y comprobamos la multiplicación de i por la izquierda: e .

Al parecer la función es la respuesta a la pregunta. En el plano esa función rota 90º. Pero en el resto del espacio, nos damos cuenta de que y . Por linealidad, vemos que hace girar el plano 90º, cosa que no queremos. El punto debe permanecer inmóvil.

La fórmula que nos daría la rotación sobre un eje de un ángulo envía un punto a es:

, donde

Desglosemos un ejemplo para luego pasar al código:

Consideremos una rotación sobre el eje , con un ángulo de 120º, radianes. Calculemos la imagen del vector j. Puesto que el vector no es unitario, lo dividimos por su norma y obtenemos:

Ahora enviamos el punto j en :

Del mismo modo hallaríamos que y .

## Cinemática Directa y cuaterniones

Una vez entendidos los cuaterniones pasemos a la robótica y la cinemática directa. Para resolver el problema de la cinemática directa de un robot aplicaremos el siguiente esquema:

* Punto : Punto al que le aplicaremos el giro.
* Eje : Eje de giro.
* Ángulo : Ángulo de giro.

Imagen en blanco y negro

Descripción generada automáticamente con confianza baja

Para resolver la cinemática directa tendremos que construir dos cuaterniones:

Una vez se obtengan los cuaterniones, tan sólo habrá que realizar la siguiente operación para conseguir el punto en el nuevo sistema:

## Ejemplos

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Diagrama

Descripción generada automáticamente

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

# Implementación

Para la implementación he escogido el lenguaje de programación Rust.

Rust es un lenguaje que tuvo su primera salida estable en 2015, tipado fuerte, una *standard library* bastante amplia y fuertes pasos en la programación funcional.