

Notação Projeto e Análise de Algoritmos

Felipe Cunha

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

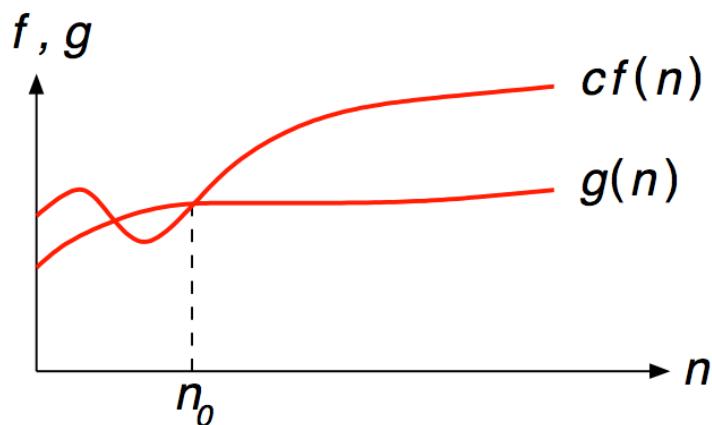
Comportamento Assintótico de Funções

- O parâmetro n fornece uma medida da dificuldade para se resolver o problema
- Para valores suficientemente pequenos de n , qualquer algoritmo custa pouco para ser executado, mesmo os ineficientes
- A escolha do algoritmo não é um problema crítico para problemas de tamanho pequeno
- Logo, a análise de algoritmos é realizada para valores grandes de n
- Estuda-se o comportamento assintótico das funções de custo (comportamento de suas funções de custo para valores grandes de n)
- Para entradas grandes o bastante, as constantes multiplicativas e os termos de mais baixa ordem de um tempo de execução podem ser ignorados

Dominação Assintótica

- A análise de um algoritmo geralmente conta com apenas algumas operações elementares
- A medida de custo ou medida de complexidade relata o crescimento assintótico da operação considerada
- **Definição:** Uma função $f(n)$ **domina assintoticamente** outra função $g(n)$ se existem duas constantes positivas c e n_0 tais que, para $n \geq n_0$, temos

$$|g(n)| \leq c \times |f(n)|$$



- Exemplo:
 - Sejam $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$
 - As funções $g(n)$ e $f(n)$ dominam assintoticamente uma a outra, já que
 - $|(n+1)^2| \leq 4|(n^2)|$ para $n \geq 1$ e
 - $|(n^2)| \leq |(n+1)^2|$ para $n \geq 0$

Como Medir o Custo de Execução de um Algoritmo?

- **Função de Custo ou Função de Complexidade**

- $T(n)$ = medida de custo necessário para executar um algoritmo para um problema de tamanho n
- Se $T(n)$ é uma medida da quantidade de tempo necessário para executar um algoritmo para um problema de tamanho n , então T é chamada função de complexidade de tempo de algoritmo
- Se $T(n)$ é uma medida da quantidade de memória necessária para executar um algoritmo para um problema de tamanho n , então T é chamada função de complexidade de espaço de algoritmo

Observação: TEMPO NÃO É TEMPO!

É importante ressaltar que a complexidade de tempo na realidade não representa tempo diretamente, mas o número de vezes que determinada operação considerada relevante é executada.

Custo Assintótico de Funções

- É interessante comparar algoritmos para valores grandes de n
- O custo assintótico de uma função $T(n)$ representa o limite do comportamento de custo quando n cresce
- Em geral, o custo aumenta com o tamanho n do problema

Observação:

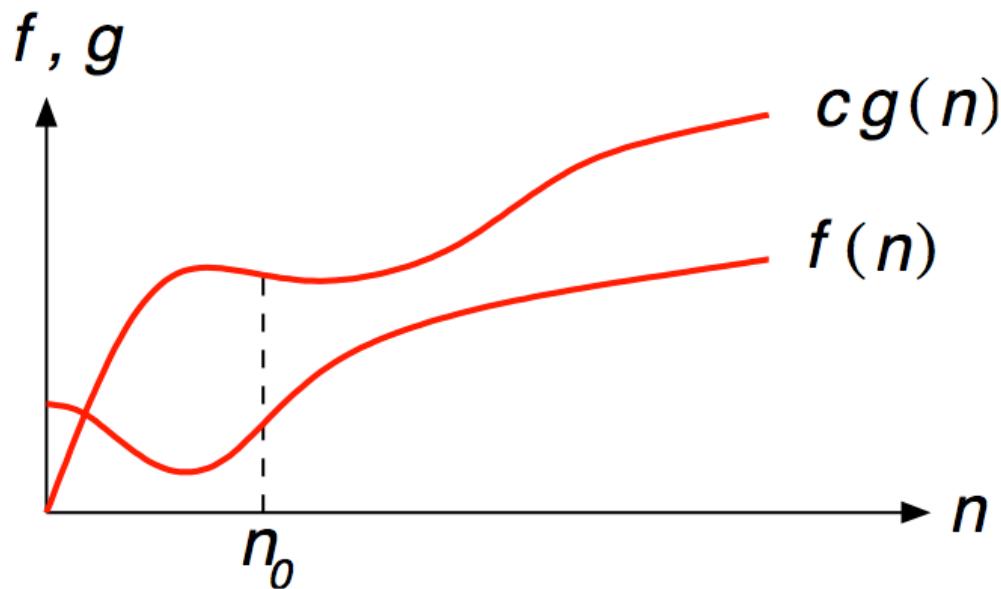
Para valores pequenos de n , mesmo um algoritmo ineficiente não custa muito para ser executado

Notação assintótica de funções

- Existem três notações principais na análise de assintótica de funções:
 - Notação O (“O” grande)
 - Notação Ω
 - Notação Θ

Notação O

- $f(n) = O(g(n))$



Notação O

- A notação O define um limite superior para a função, por um fator constante
- Escreve-se $f(n) = O(g(n))$, se existirem constantes positivas c e n_0 tais que para $n \geq n_0$, o valor de $f(n)$ é menor ou igual a $cg(n)$.
 - Pode-se dizer que $g(n)$ é um limite assintótico superior (em inglês, *asymptotically upper bound*) para $f(n)$

$$f(n) = O(g(n)), \exists c > 0 \text{ e } n_0 \mid 0 \leq f(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0$$

- Escrevemos $f(n) = O(g(n))$ para expressar que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$. Lê-se $f(n)$ é da ordem no máximo $g(n)$.
- Observe que a notação O define um conjunto de funções:

$$O(g(n)) = \{f : \aleph \rightarrow \Re^+ \mid \exists c > 0, n_0, 0 \leq f(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0\}$$

Notação O: Exemplos

- Seja $f(n) = (n + 1)^2$
 - Logo $f(n)$ é $O(n^2)$, quando $n_0 = 1$ e $c = 4$, já que
$$(n+1)^2 \leq 4n^2 \text{ para } n \geq 1$$
- Seja $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$. Mostre que $g(n)$ não é $O(n)$.
 - Sabemos que $f(n)$ é $O(n^2)$, pois para $n \geq 0$, $n \leq n^2$.
 - Suponha que existam constantes c e n_0 tais que para todo $n \geq n_0$, $n^2 \leq cn$.
 - Assim, $c \geq n$ para qualquer $n \geq n_0$.
 - No entanto, não existe uma constante c que possa ser maior ou igual a n para todo n .

Notação O: Exemplos

- Mostre que $g(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$ é $O(n^3)$
 - Basta mostrar que $3n^3 + 2n^2 + n \leq 6n^3$ para $n \geq 0$
 - A função $g(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$ é também $O(n^4)$, entretanto esta afirmação é mais fraca que dizer que $g(n)$ é $O(n^3)$
- Mostre que $h(n) = \log_5 n$ é $O(\log n)$
 - O $\log_b n$ difere do $\log_c n$ por uma constante que no caso é $\log_b c$
 - Como $n = c^{\log_c n}$, tomindo o logaritmo base b em ambos os lados da igualdade, temos que $\log_b n = \log_b c^{\log_c n} = \log_c n \times \log_b c$

Notação O

- Quando a notação O é usada para expressar o tempo de execução de um algoritmo no pior caso, está se definindo também o limite superior do tempo de execução desse algoritmo para todas as entradas
- Por exemplo, o algoritmo de ordenação por inserção é $O(n^2)$ no pior caso
 - Este limite se *aplica para qualquer entrada*

Notação O

- Tecnicamente é um abuso dizer que o tempo de execução do algoritmo de ordenação por inserção é $O(n^2)$ (i.e., sem especificar se é para o pior caso, melhor caso, ou caso médio)
 - O tempo de execução desse algoritmo depende de como os dados de entrada estão arranjados.
 - Se os dados de entrada já estiverem ordenados, este algoritmo tem um tempo de execução de $O(n)$, ou seja, o tempo de execução do algoritmo de ordenação por inserção no *melhor caso* é $O(n)$.
- O que se quer dizer quando se fala que “o tempo de execução é $O(n^2)$ ” é que no pior caso o tempo de execução é $O(n^2)$
 - ou seja, não importa como os dados de entrada estão arranjados, o tempo de execução em qualquer entrada é $O(n^2)$

Operações com a notação O

$$f(n) = O(f(n))$$

$$c \times O(f(n)) = O(f(n)) \quad c = \text{constante}$$

$$O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))$$

$$O(O(f(n))) = O(f(n))$$

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$$

$$O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$$

$$f(n)O(g(n)) = O(f(n)g(n))$$

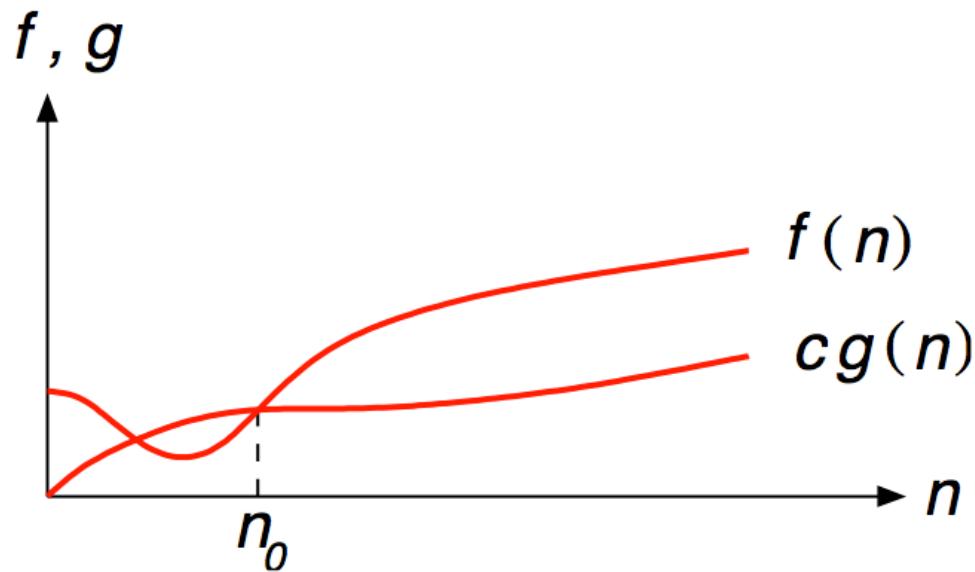
Operações com a notação O: Exemplos

- Regra da soma $O(f(n)) + O(g(n))$
 - Suponha três trechos cujos tempos de execução sejam $O(n)$, $O(n^2)$ e $O(n \log n)$
 - O tempo de execução dos dois primeiros trechos é $O(\max(n, n^2))$, que é $O(n^2)$
 - O tempo de execução de todos os três trechos é então $O(\max(n^2, \log n))$ que é $O(n^2)$
- O produto de $[\log n + k + O(1/n)]$ por $[n + O(\sqrt{n})]$ é

$$n \log n + kn + O(\sqrt{n} \log n)$$

Notação Ω

- $f(n) = \Omega(g(n))$



Notação Ω

- A notação Ω define um limite inferior para a função, por um fator constante
- Escreve-se $f(n) = \Omega(g(n))$, se existirem constantes positivas c e n_0 tais que para $n \geq n_0$, o valor de $f(n)$ é maior ou igual a $cg(n)$
 - Pode-se dizer que $g(n)$ é um limite assintótico inferior (em inglês, *asymptotically lower bound*) para $f(n)$

$$f(n) = \Omega(g(n)), \exists c > 0 \text{ e } n_0 \mid 0 \leq cg(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0$$

- Observe que a notação Ω define um conjunto de funções:

$$\Omega(g(n)) = \{f : \aleph \rightarrow \Re^+ \mid \exists c > 0, n_0, 0 \leq cg(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0\}$$

Notação Ω

- Quando a notação Ω é usada para expressar o tempo de execução de um algoritmo no melhor caso, está se definindo também o limite (inferior) do tempo de execução desse algoritmo para todas as entradas
- Por exemplo, o algoritmo de ordenação por inserção é $\Omega(n)$ no melhor caso
 - O tempo de execução do algoritmo de ordenação por inserção é $\Omega(n)$
- O que significa dizer que “o tempo de execução” (i.e., sem especificar se é para o pior caso, melhor caso, ou caso médio) é $\Omega(g(n))$?
 - O tempo de execução desse algoritmo é pelo menos uma constante vezes $g(n)$ para valores suficientemente grandes de n

Notação Ω : Exemplos

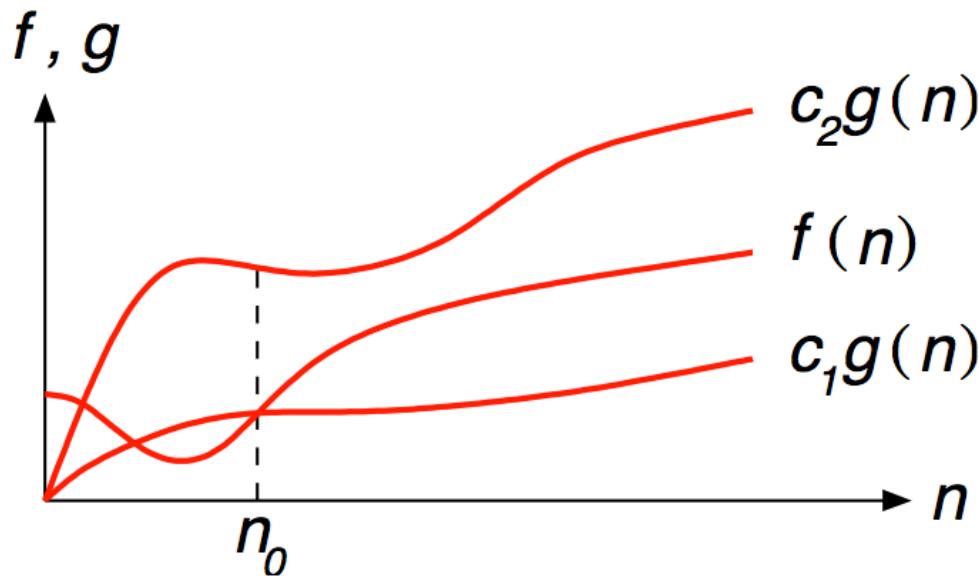
- Para mostrar que $f(n) = 3n^3 + 2n^2$ é $\Omega(n^3)$ basta fazer $c = 1$, e então $3n^3 + 2n^2 \geq n^3$ para $n \geq 0$

Notação Ω : Exemplos

- Para mostrar que $f(n) = 3n^3 + 2n^2$ é $\Omega(n^3)$ basta fazer $c = 1$, e então $3n^3 + 2n^2 \geq n^3$ para $n \geq 0$
- Seja $f(n) = n$ para n ímpar ($n \geq 1$) e $f(n) = n^2/10$ para n par ($n \geq 0$).
 - Neste caso $f(n)$ é $\Omega(n^2)$, bastando considerar $c = 1/10$ e $n = 0, 2, 4, 6, \dots$

Notação Θ

- $f(n) = \Theta(g(n))$

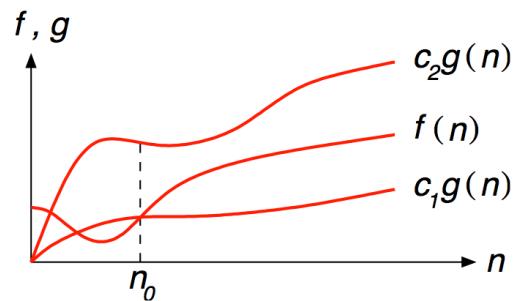


Notação Θ

- A notação Θ limita a função por fatores constantes
- Escreve-se $f(n) = \Theta(g(n))$, se existirem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que para $n \geq n_0$, o valor de $f(n)$ está sempre entre $c_1g(n)$ e $c_2g(n)$ inclusive
- Neste caso, pode-se dizer que $g(n)$ é um limite assintótico firme (em inglês, *asymptotically tight bound*) para $f(n)$

$$f(n) = \Theta(g(n)), \exists c_1 > 0, c_2 > 0 \text{ e } n_0 |$$

$$0 \leq c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n), \forall n \geq n_0$$



- Observe que a notação Θ define um conjunto de funções:

$$\Theta(g(n)) = \{f : \aleph \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c_1 > 0, c_2 > 0, n_0, 0 \leq c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n), \forall n \geq n_0\}$$

Notação Θ : Exemplo

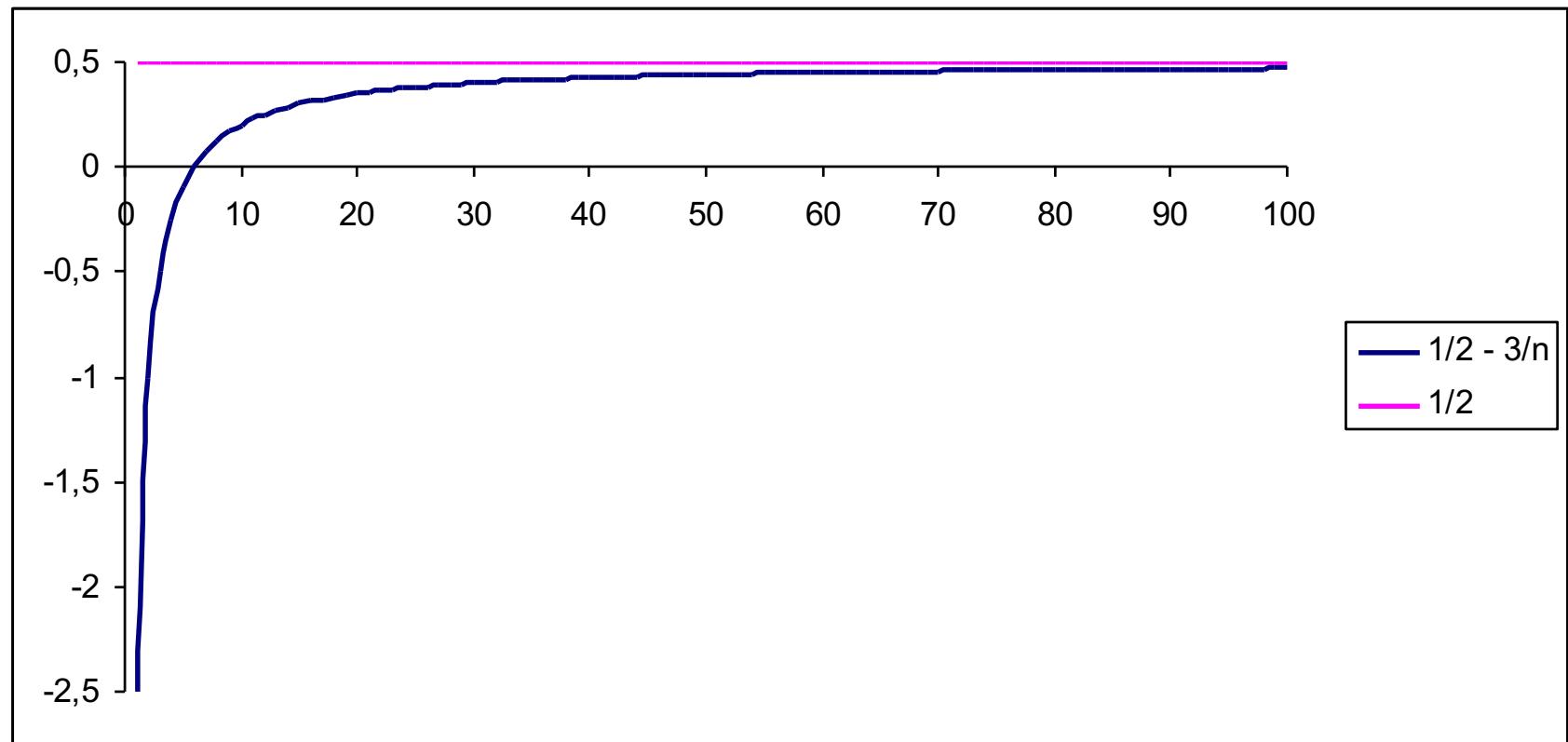
- Mostre que $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$
- Para provar esta afirmação, devemos achar constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $n_0 > 0$, tais que:

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

- para todo $n \geq n_0$
- Se dividirmos a expressão acima por n^2 temos:

$$c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$$

Notação Θ: Exemplo



Notação Θ : Exemplo

- A inequação mais a direita será sempre válida para qualquer valor de $n \geq 1$ ao escolhermos $c_2 \geq \frac{1}{2}$
- Da mesma forma, a inequação mais a esquerda será sempre válida para qualquer valor de $n \geq 7$ ao escolhermos $c_1 \leq \frac{1}{14}$
- Assim, ao escolhermos $c_1 = 1/14$ $c_2 = 1/2$ e $n_0 = 7$ podemos verificar que

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$$

- Note que existem outras escolhas para as constantes c_1 e c_2 , mas o fato importante é que a escolha existe
- Note também que a escolha destas constantes depende da função $\frac{1}{2}n^2 - 3n$
- Uma função diferente pertencente a $\Theta(n^2)$ irá provavelmente requerer outras constantes

Exercício

- Usando a definição formal de Θ , prove que $6n^3 \neq \Theta(n^2)$.

Notações: Propriedades

- Reflexividade:
 - $f(n) = O(f(n))$.
 - $f(n) = \Omega(f(n))$.
 - $f(n) = \Theta(f(n))$.
- Simetria:
 - $f(n) = \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) = \Theta(f(n))$.
- Simetria Transposta:
 - $f(n) = O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) = \Omega(f(n))$.
- Transitividade:
 - Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$, então $f(n) = O(h(n))$.
 - Se $f(n) = \Omega(g(n))$ e $g(n) = \Omega(h(n))$, então $f(n) = \Omega(h(n))$.
 - Se $f(n) = \Theta(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n))$, então $f(n) = \Theta(h(n))$.

Notações: Relações Úteis

- $\log_b n = O(\log_a n)$ [$a, b > 1$]
- $n^b = O(n^a)$ se $b \leq a$
- $b^n = O(a^n)$ se $b \leq a$
- $\log^b n = O(n^a)$
- $n^b = O(a^n)$ [$a > 1$]
- $n! = O(n^n)$
- $n! = \Omega(2^n)$
- $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$

Notações: Relações Úteis

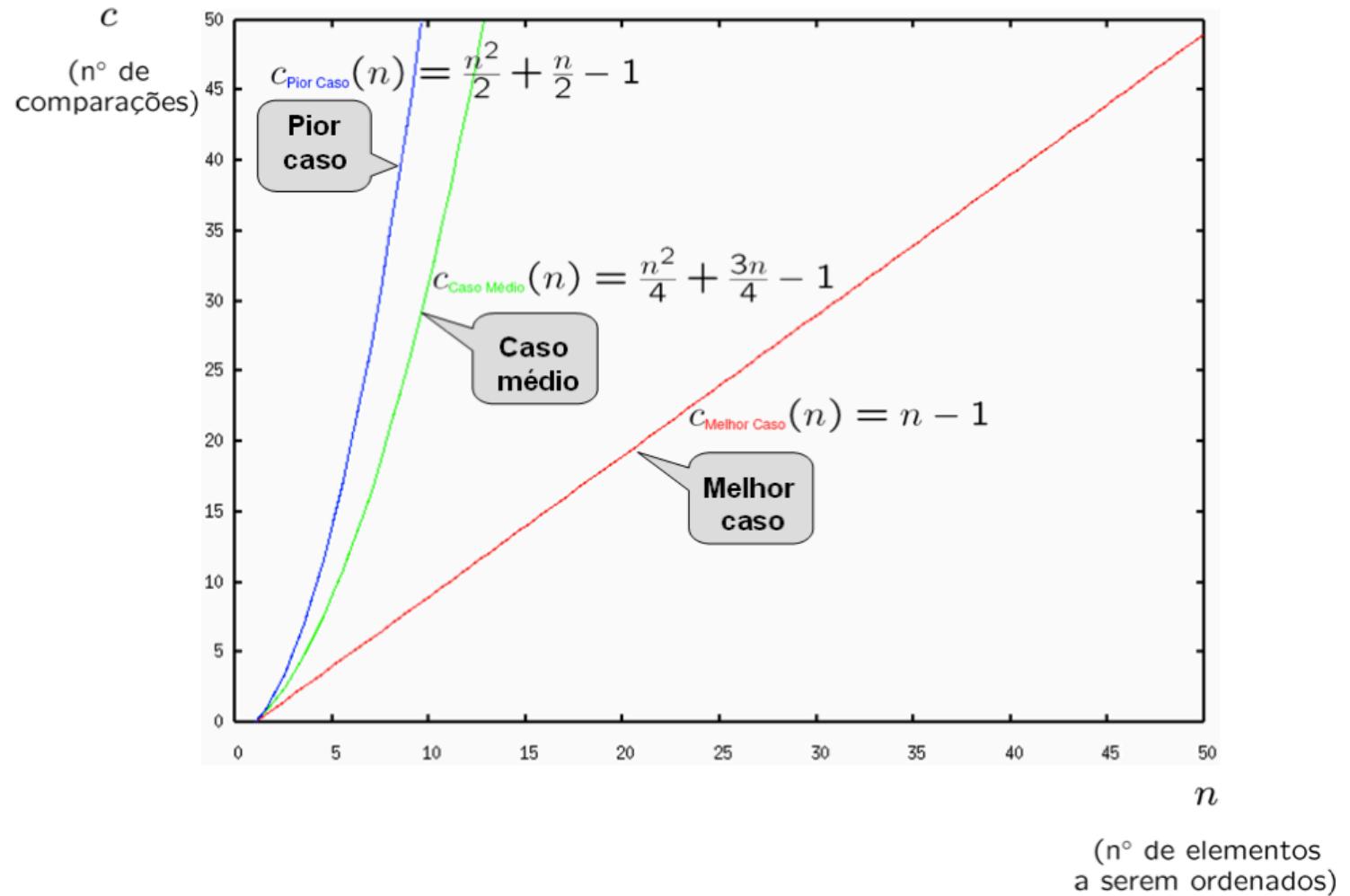
Quais as notações mais indicadas para expressar a complexidade de casos específicos de um algoritmo, do algoritmo de modo geral e da classe de algoritmos para o problema?

- **Casos específicos:**
 - o ideal é a notação Θ , por ser um limite assintótico firme.
 - A notação O também é aceitável e bastante comum na literatura.
 - Embora possa teoricamente ser usada, a notação Ω é mais fraca neste caso e deve ser evitada para casos específicos.
- **Algoritmo de forma geral:**
 - Se o algoritmo comporta-se de forma idêntica para qualquer entrada, a notação Θ é a mais precisa (lembre-se que $f(n)=\Theta(g(n)) \Rightarrow f(n)=O(g(n))$).
 - Se os casos melhor e pior são diferentes, a notação mais indicada é a O , já que estaremos interessados em um limite assintótico superior.
 - **O pior caso do algoritmo deve ser a base da análise.**
- **Para uma classe de algoritmos:**
 - Neste caso estamos interessados no limite inferior para o problema e a notação deve ser a Ω .

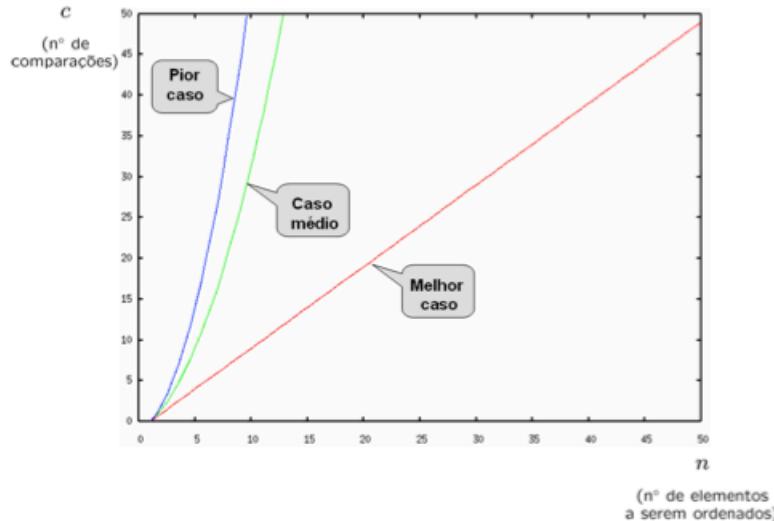
Limites do Algoritmo de Ordenação por Inserção

- O tempo de execução do algoritmo de ordenação por inserção está entre $\Omega(n)$ e $O(n^2)$
- Estes limites são assintoticamente os mais firmes possíveis
 - Por exemplo, o tempo de execução deste algoritmo não é $\Omega(n^2)$, pois o algoritmo executa em tempo $\Theta(n)$ quando a entrada já está ordenada

Funções de Custo (nº de comparações): Algoritmo de Ordenação por Inserção



Funções de Custo e Notações Assintóticas: Algoritmo de Ordenação por Inserção



Pior Caso:

$$c_{\text{Pior Caso}}(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1 = \Theta(n^2)$$

Caso Médio:

$$c_{\text{Caso Médio}}(n) = \frac{n^2}{4} + \frac{3n}{4} - 1 = \Theta(n^2)$$

Melhor caso:

$$c_{\text{Melhor Caso}}(n) = n - 1 = \Theta(n)$$

Indica a notação normalmente usada para esse caso.

Teorema

- Para quaisquer funções $f(n)$ e $g(n)$,

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

se e somente se, $f(n) = O(g(n))$, e

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

Mais sobre notação assintótica de funções

- Existem duas outras notações na análise assintótica de funções:
 - Notação o (“O” pequeno)
 - Notação ω
- Estas duas notações não são usadas normalmente, mas é importante saber seus conceitos e diferenças em relação às notações O e Ω , respectivamente

Notação o

- O limite assintótico superior definido pela notação O pode ser assintoticamente firme ou não
 - Por exemplo, o limite $2n^2 = O(n^2)$ é assintoticamente firme, mas o limite não é $2n = O(n^2)$
- A notação o é usada para definir um limite superior que não é assintoticamente firme
- Formalmente a notação o é definida como:
$$f(n) = o(g(n)), \text{ para qualquer } c > 0 \text{ e } n_0 \mid 0 \leq f(n) < cg(n), \forall n \geq n_0$$
- Exemplo, $2n = o(n^2)$ mas $2n^2 \neq o(n^2)$

Notação o

- As definições das notações O e o são similares
 - A diferença principal é que em $f(n) = o(g(n))$, a expressão $0 \leq f(n) < cg(n)$ é válida para todas constantes $c > 0$
- Intuitivamente, a função $f(n)$ tem um crescimento muito menor que $g(n)$ quando n tende para infinito.
 - Isto pode ser expresso da seguinte forma:
- Alguns autores usam este limite como a definição de o
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Notação ω

- Por analogia, a notação ω está relacionada com a notação Ω da mesma forma que a notação Θ está relacionada com a notação O
- Formalmente a notação ω é definida como:

$$f(n) = \omega(g(n)), \text{ para qualquer } c > 0 \text{ e } n_0 \mid 0 \leq cg(n) < f(n), \forall n \geq n_0$$

- Por exemplo, $\frac{n^2}{2} = \omega(n)$, mas $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$
- A relação $f(n) = \omega(g(n))$ implica em:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

se o limite existir!