

1. Principios básicos

1.1. Ejercicio 1

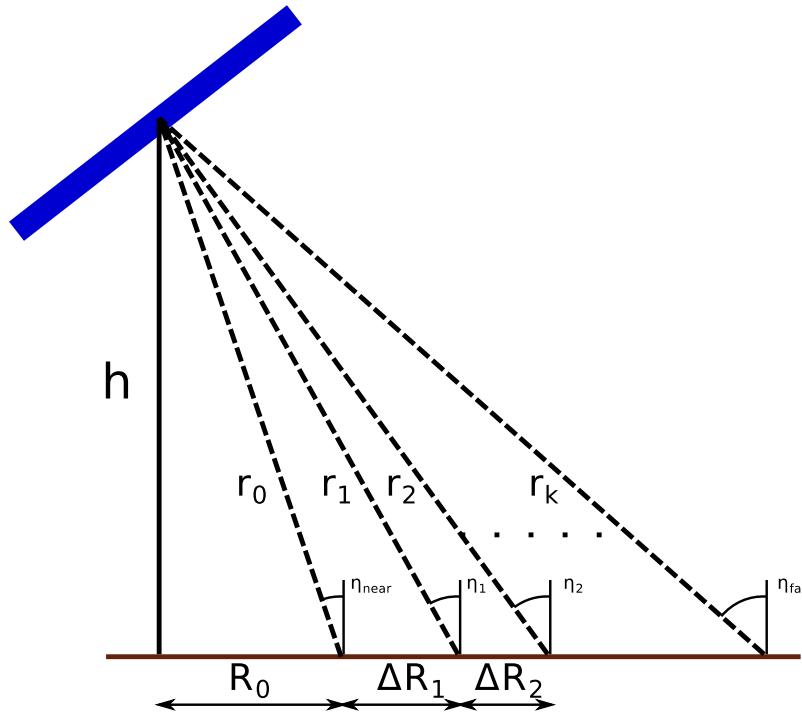


Figura 1: γ -rangos

$$R_n = \sin(\eta_n)r_n$$

$$\Delta R_n = R_n - R_{n-1}$$

$$\Delta R_n = \sin(\eta_n)r_n - \sin(\eta_{n-1})r_{n-1}$$

$$r_k = \frac{kcT_s}{2}$$

$$\gamma - rango_k = r_k = \frac{h}{\cos(\eta_k)}$$

$$\eta_k = \cos^{-1}\left(\frac{h}{r_k}\right)$$

Para poder graficar η_k y ΔR_k , necesitamos primero calcular r_o . Sabiendo que:

$$F_s = 50 \cdot 10^6$$

$$T_s = \frac{1}{F_s} = 50 \cdot 10^{-6}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 5375m \\
 \eta_0 &= \eta_{near} = 18,24 \\
 c &= 299,792,458 \frac{m}{s}
 \end{aligned}$$

Podemos calcular r_0 como $\frac{h}{\cos(\eta_0)}$ que resulta en

$$r_0 \approx 5659$$

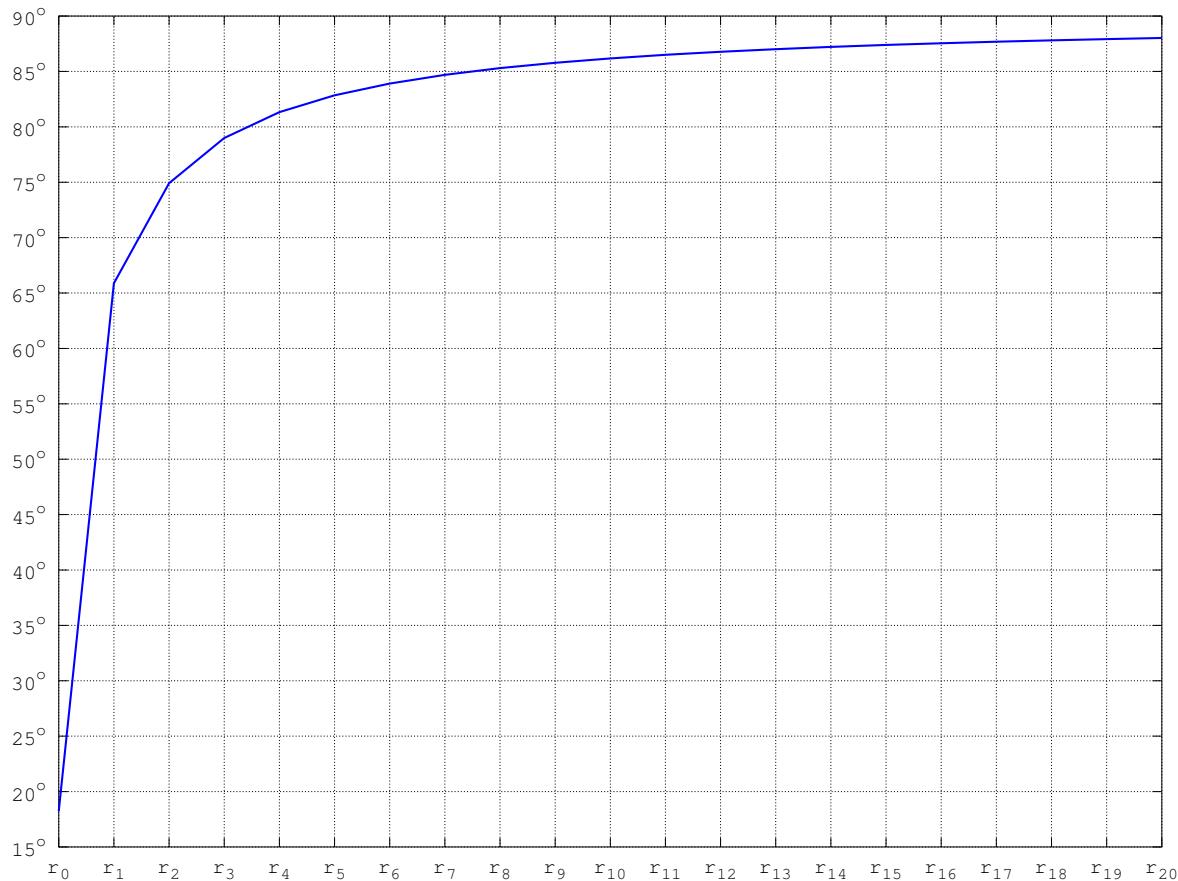
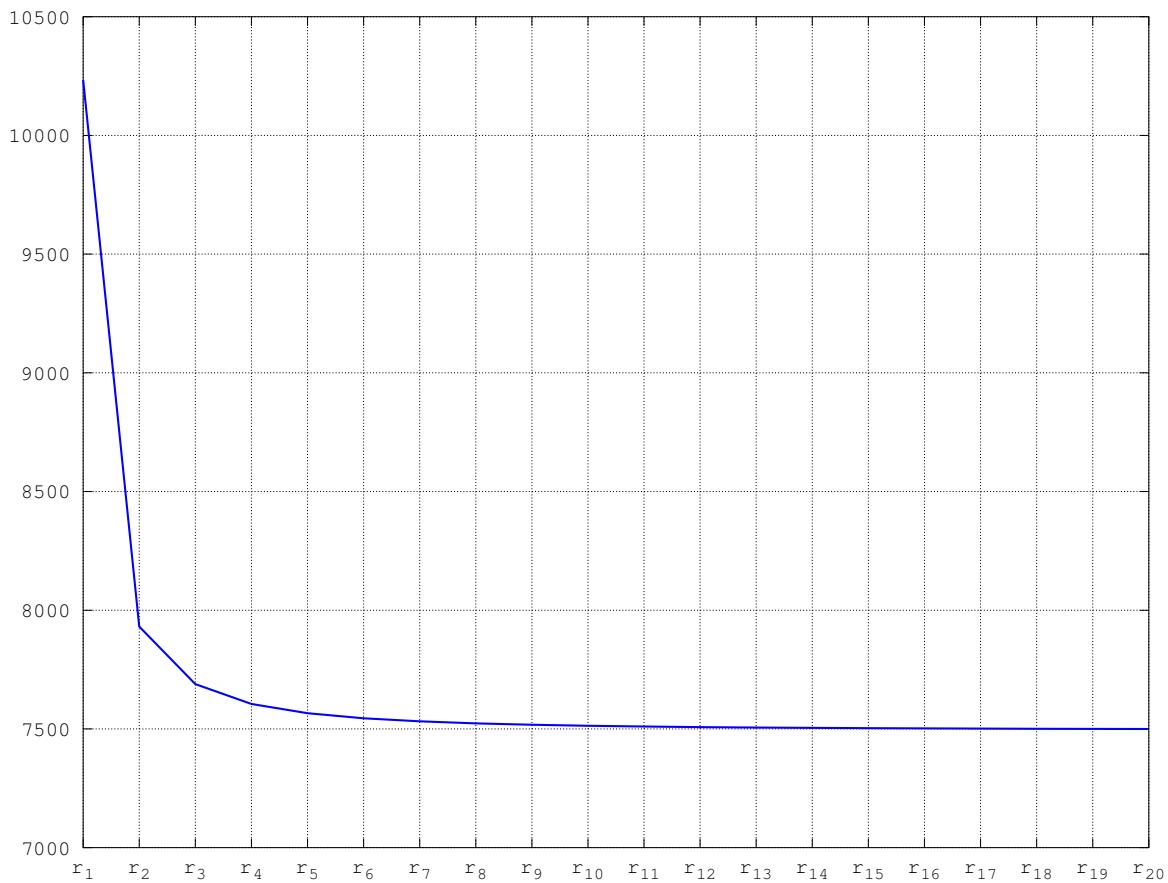


Figura 2: η en función del rango r_k

Figura 3: ΔR en función del rango r_k



2. Parte analógica

2.1. Ejercicio 2

La señal chirp se define como

$$\text{chirp}(t) = e^{j\theta(t)}$$

donde $\theta(t)$ es una función cuadrática del tiempo con forma

$$\theta(t) = k_1 t^2 + k_2 t$$

La frecuencia instantánea de la chirp es entonces:

$$f_{\text{inst}}(t) = 2k_1 t + k_2$$

Como la chirp barre frecuencias que van desde -20Mhz hasta 20Mhz en $10\mu s$:

$$f_{\text{inst}}(0) = 2k_1 0 + k_2 = k_2 = -20\text{Mhz}$$

Y al final

$$\begin{aligned} f_{\text{inst}}(10\mu s) &= 2k_1 10\mu s + k_2 = 20\text{Mhz} \\ 2k_1 10\mu s - 20\text{Mhz} &= 20\text{Mhz} \\ k_1 &= \frac{40\text{Mhz}}{2 10\mu s} \\ k_1 &= 2 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fase instantánea es

$$f_{\text{inst}}(t) = 4 \cdot 10^{12} t^2 - 20 \cdot 10^6 t$$

En la figura 4 se puede ver el resultado de graficar las partes real e imaginarias de la chirp junto con la fase instantánea en función del tiempo.

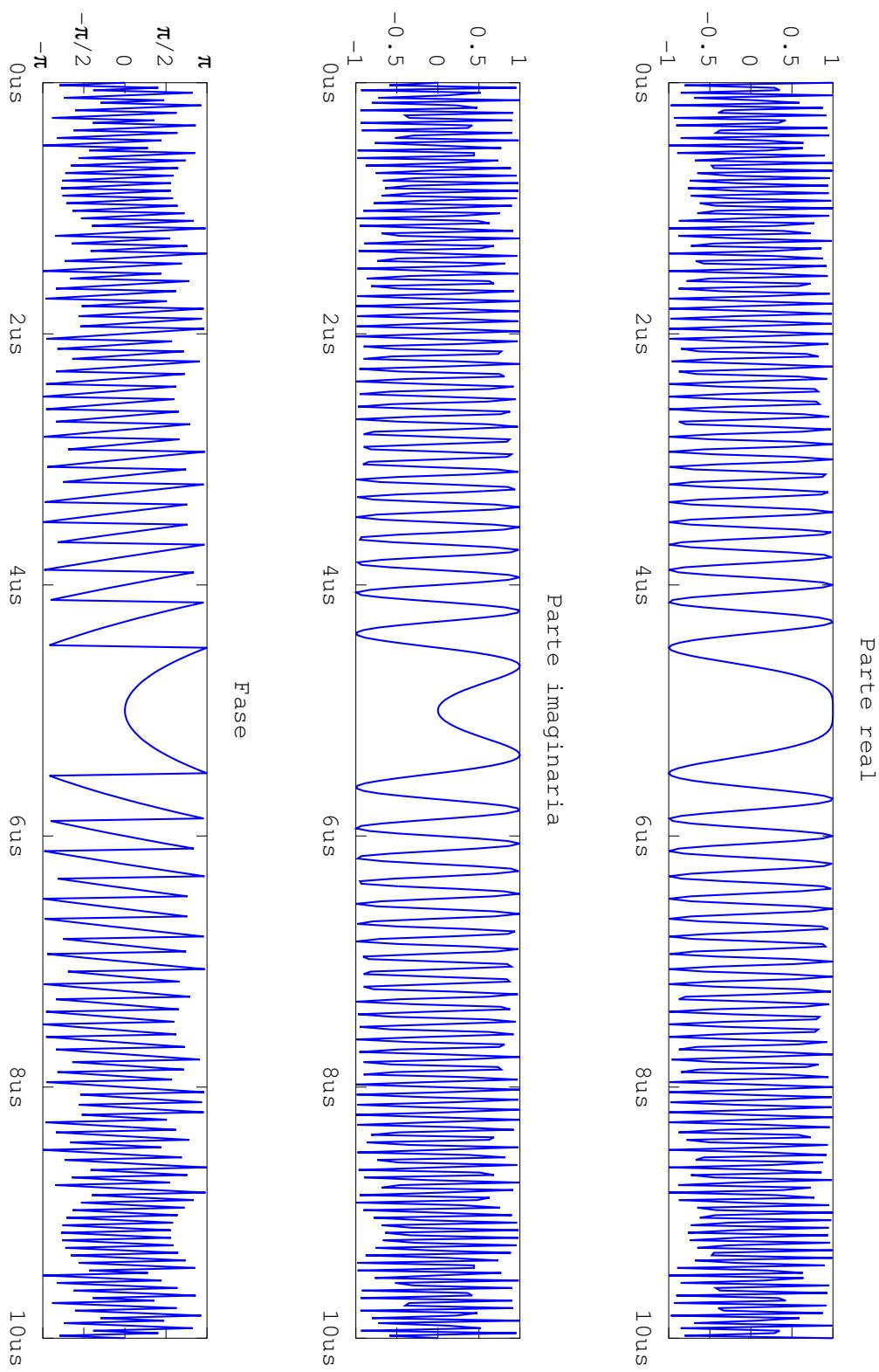


Figura 4: Chirp emitida por el SARAT (no modulada)

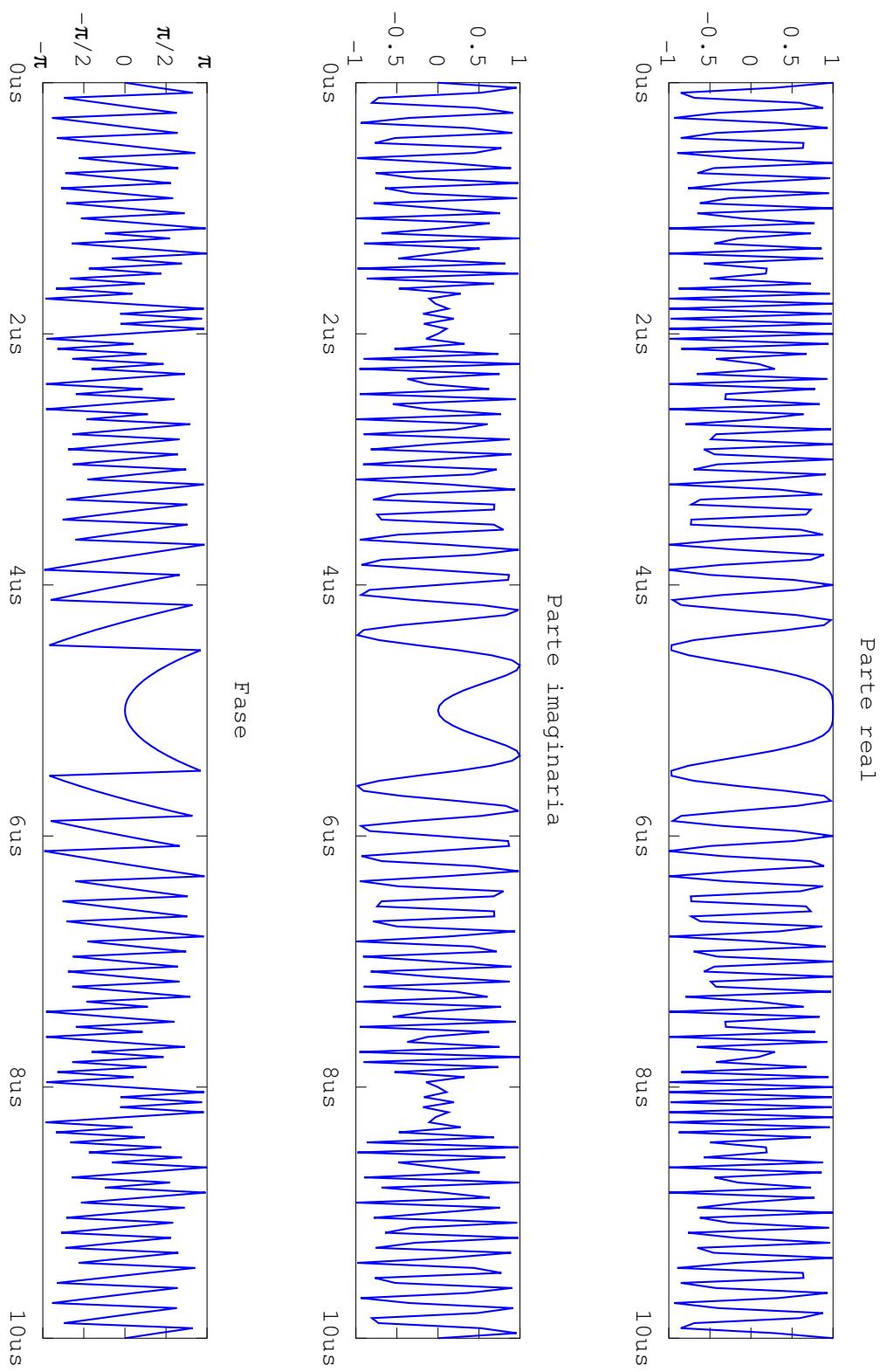


Figura 5: Chirp emitida por el SARAT (no modulada) submuestreada

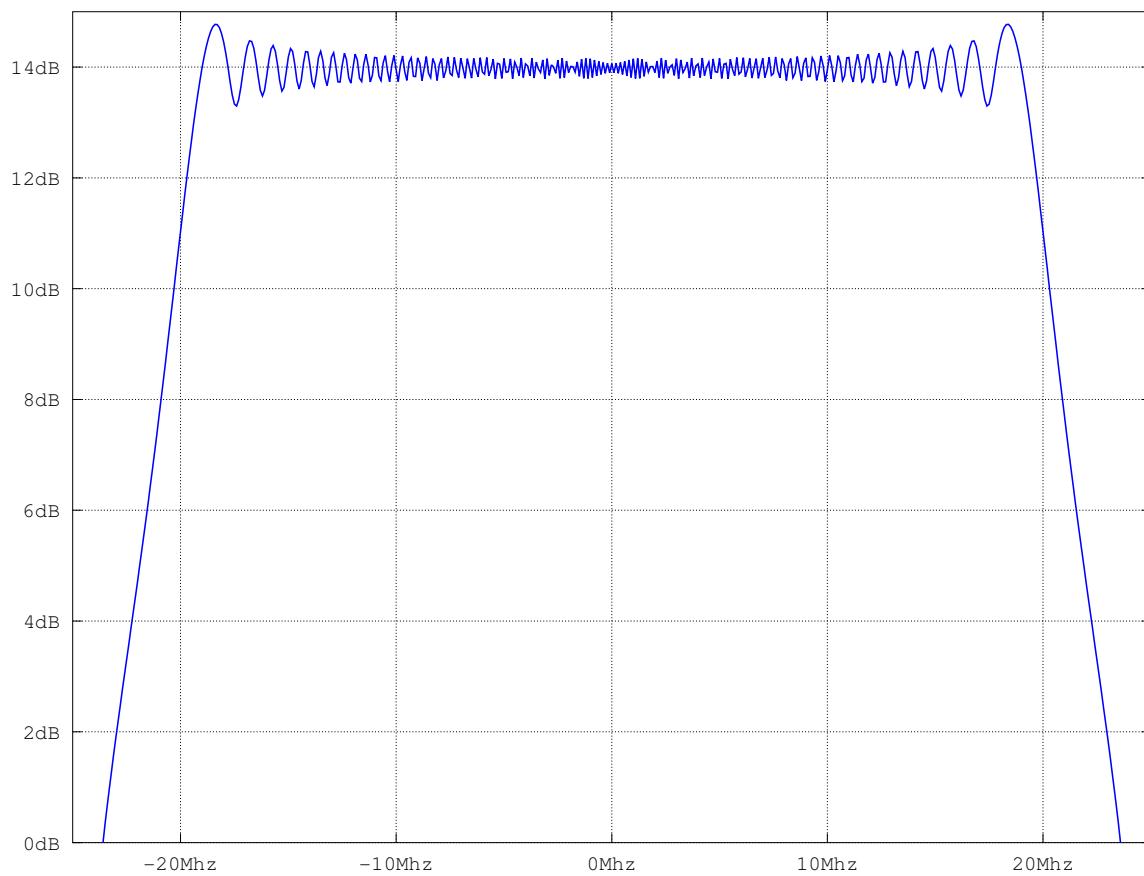


Figura 6: Espectro de la Chirp emitida por el SARAT (no modulada)

La chirp tiene una frecuencia máxima de 20Mhz y por Nyquist la mínima frecuencia de muestreo que podemos usar es 40Mhz, si no se satisface el criterio de Nyquist se producen resultados como el de la figura 5.

2.2. Ejercicio 3

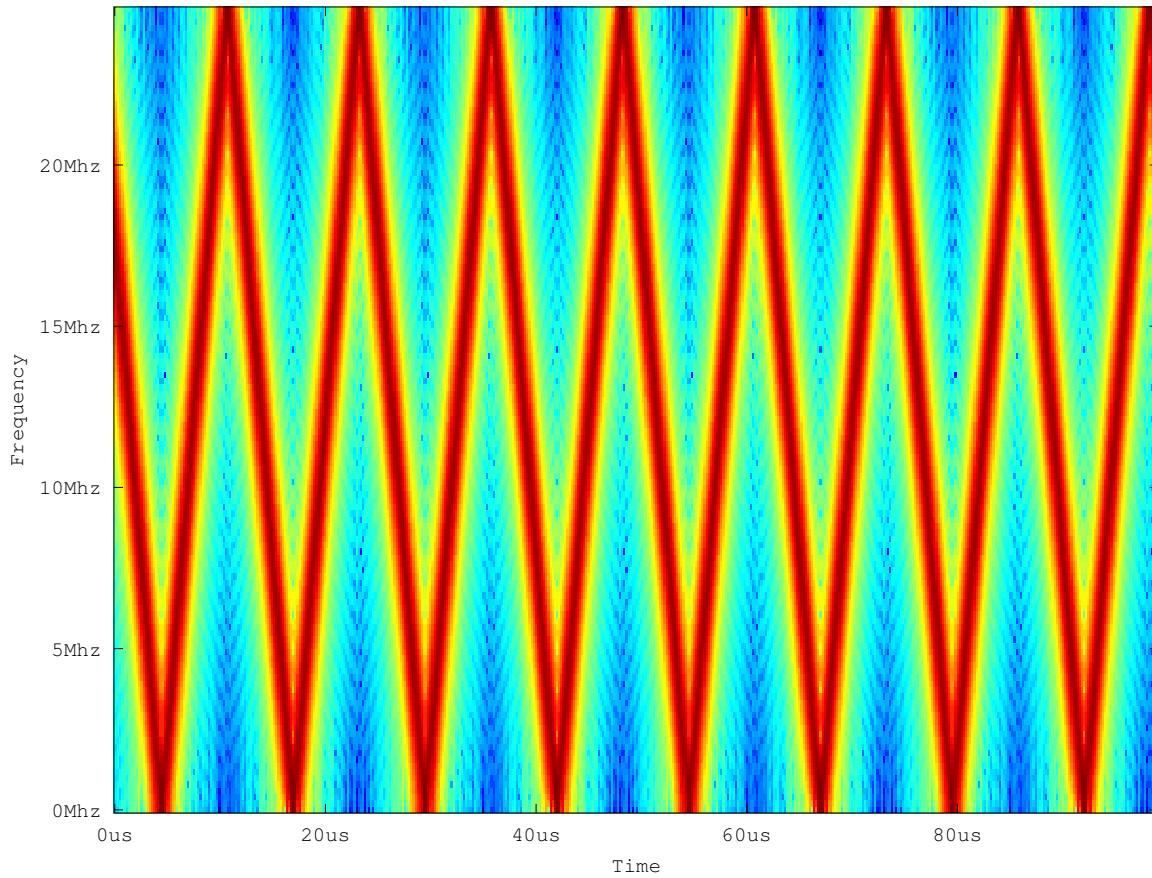


Figura 7: Espectrograma de la Chirp emitida por el SARAT (no modulada)

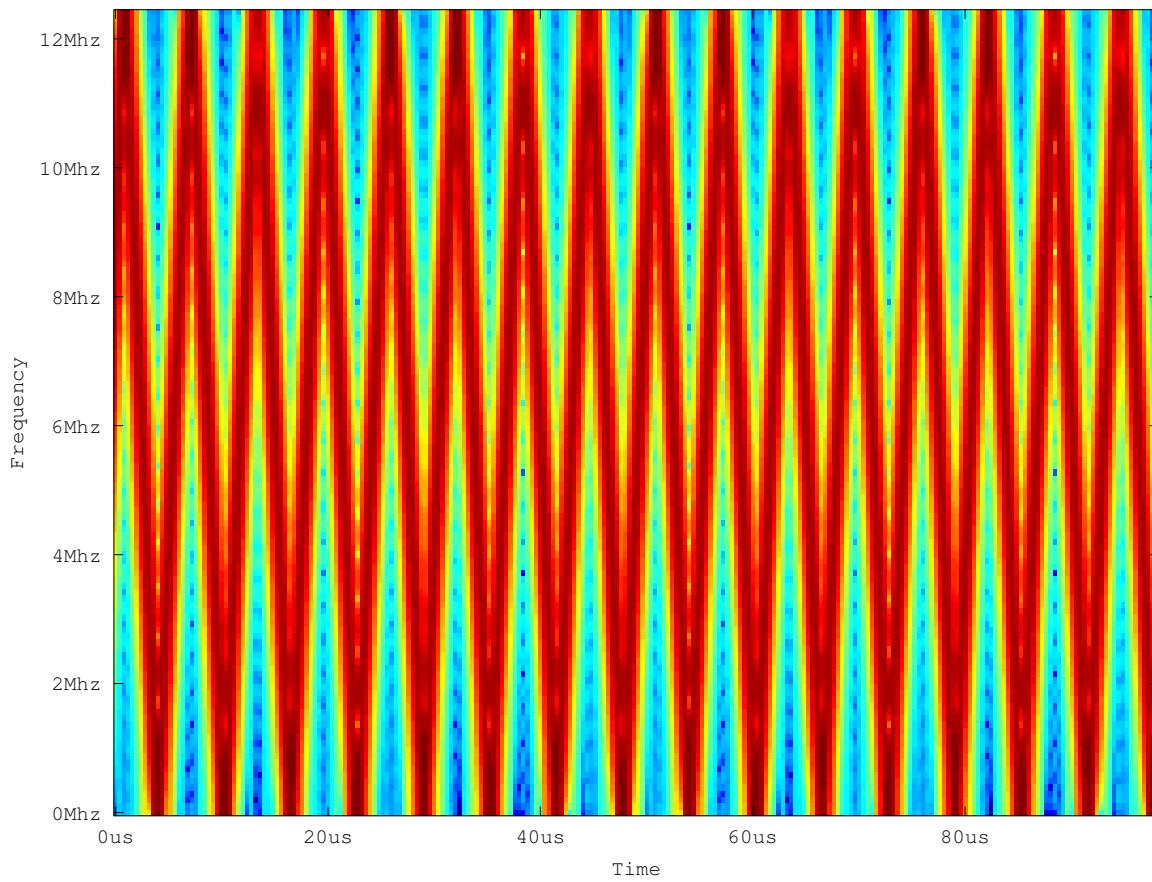


Figura 8: Espectrograma de la Chirp emitida por el SARAT (no modulada) submuestreada

El uso de diferentes tipos de ventana altera los contenidos de frecuencia de la señal original. En las figura 9 se muestra una comparación de aplicar diferentes tipos de ventanas a las primeras 100 muestras de la chirp generada en puntos anteriores y en la figura 10 se muestran los resultados de utilizar cada una de estas ventanas al espectrograma.

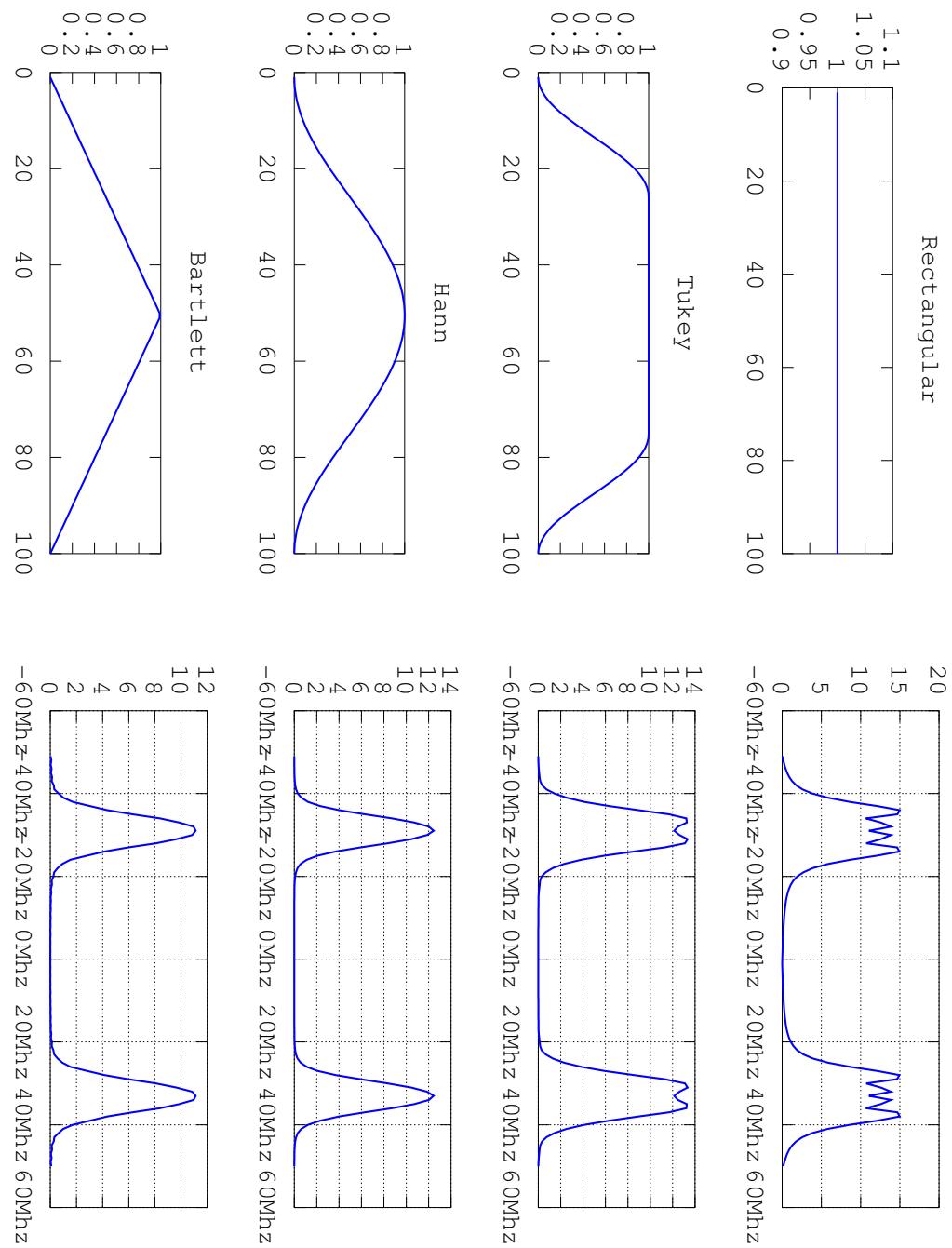


Figura 9: Comparación de diferentes tipos de ventanas

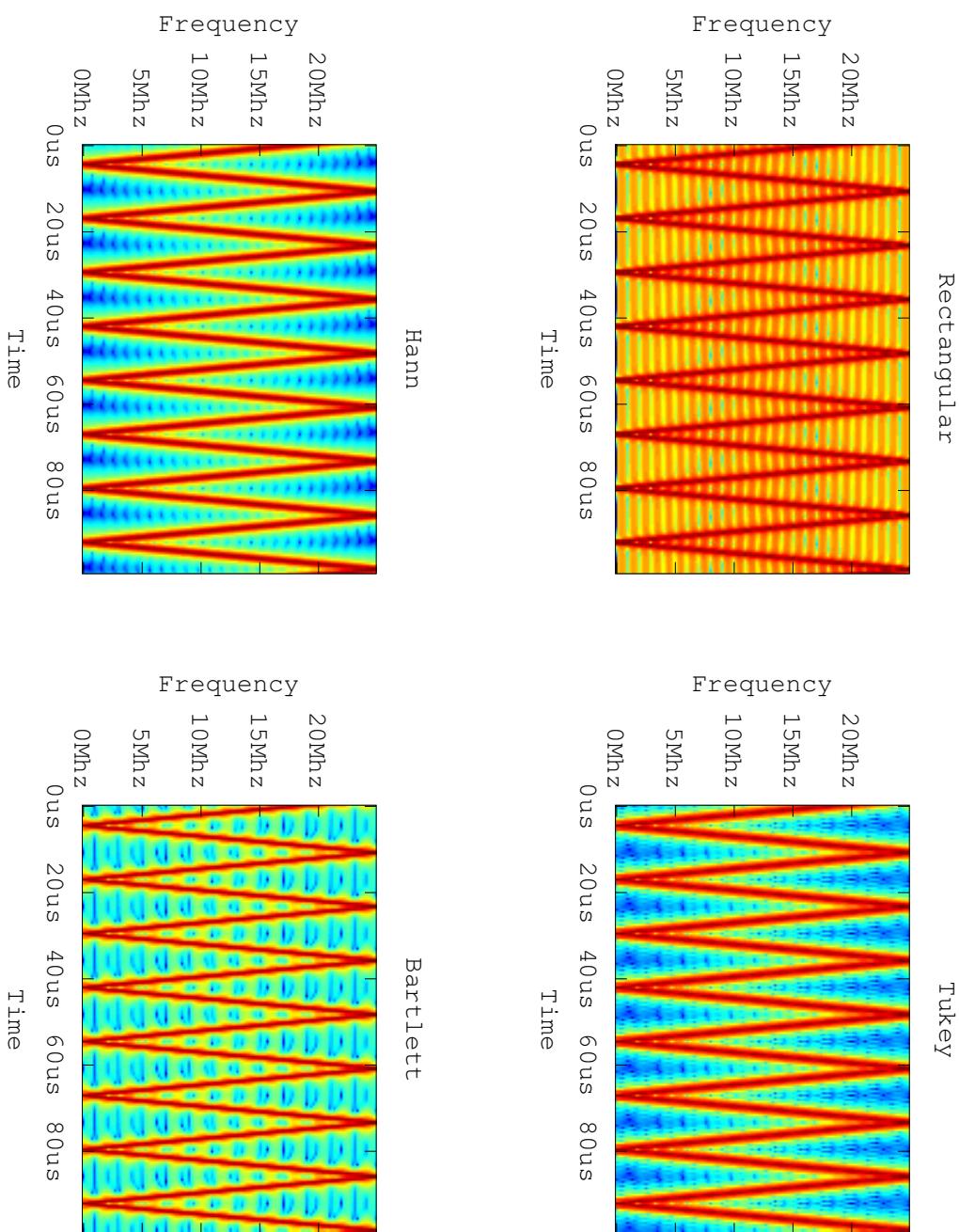


Figura 10: Comparación de diferentes tipos de ventanas (espectrogramas)

2.3. Ejercicio 4

La chirp está definida como:

$$\text{chirp}(t) = e^{j\phi(t)}$$

Donde $\phi(t)$ es la fase en función del tiempo. Como ya se mostró en el punto 2, la frecuencia instantánea $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$ de la chirp (figura 11) es

$$f_{\text{inst}}(t) = 2k_1 t + k_2$$

Donde k_2 es la frecuencia inicial y $2k_1$ es el incremento de frecuencia por unidad de tiempo.

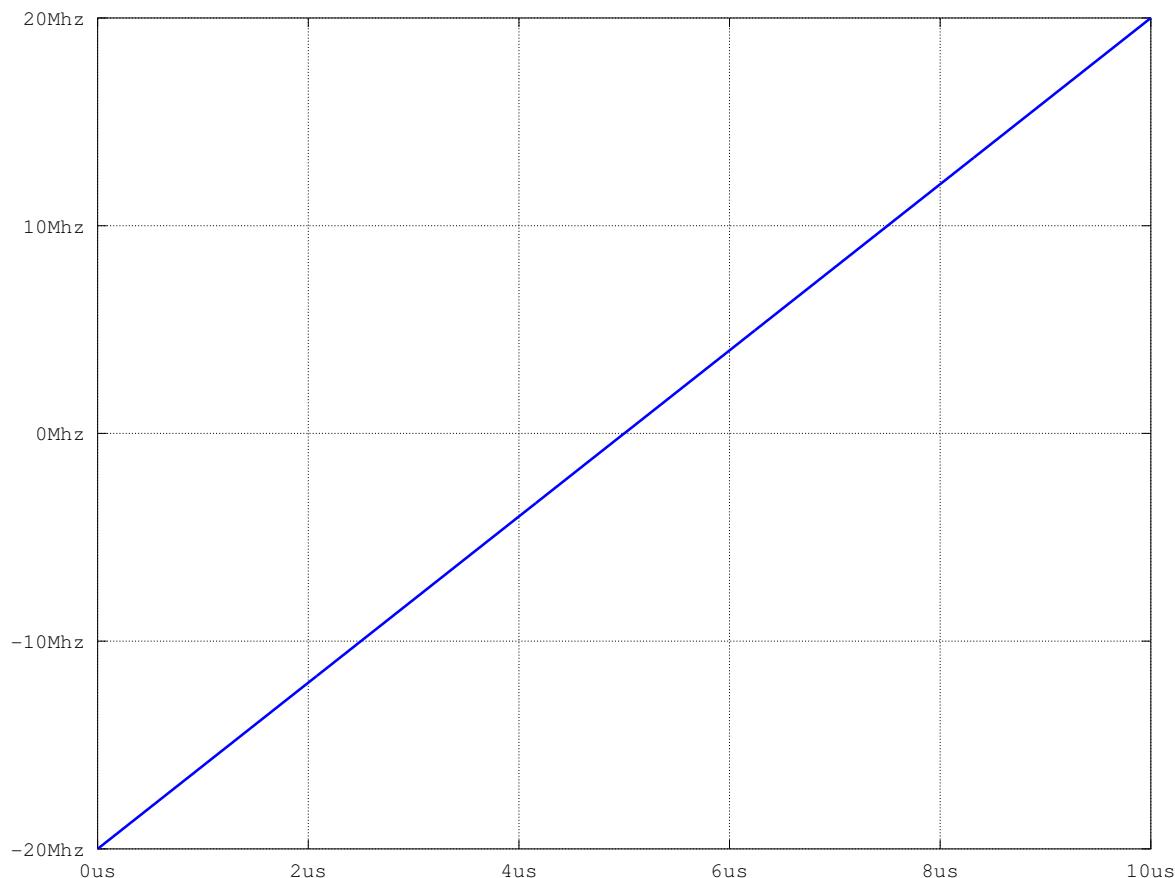


Figura 11: Frecuencia instantánea de la chirp

2.3.1. TODO ancho de banda formalmente

2.4. Ejercicio 5

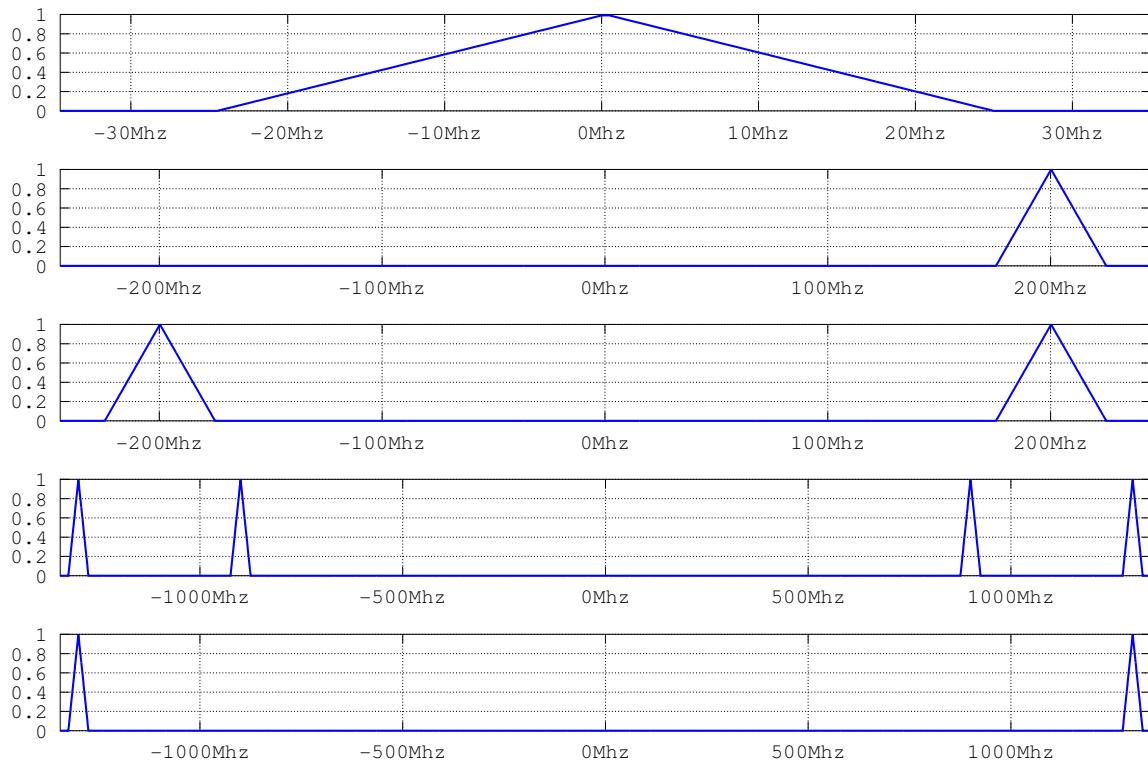


Figura 12: Espectro de las señales en las diferentes fases del modulador

2.5. Ejercicio 6

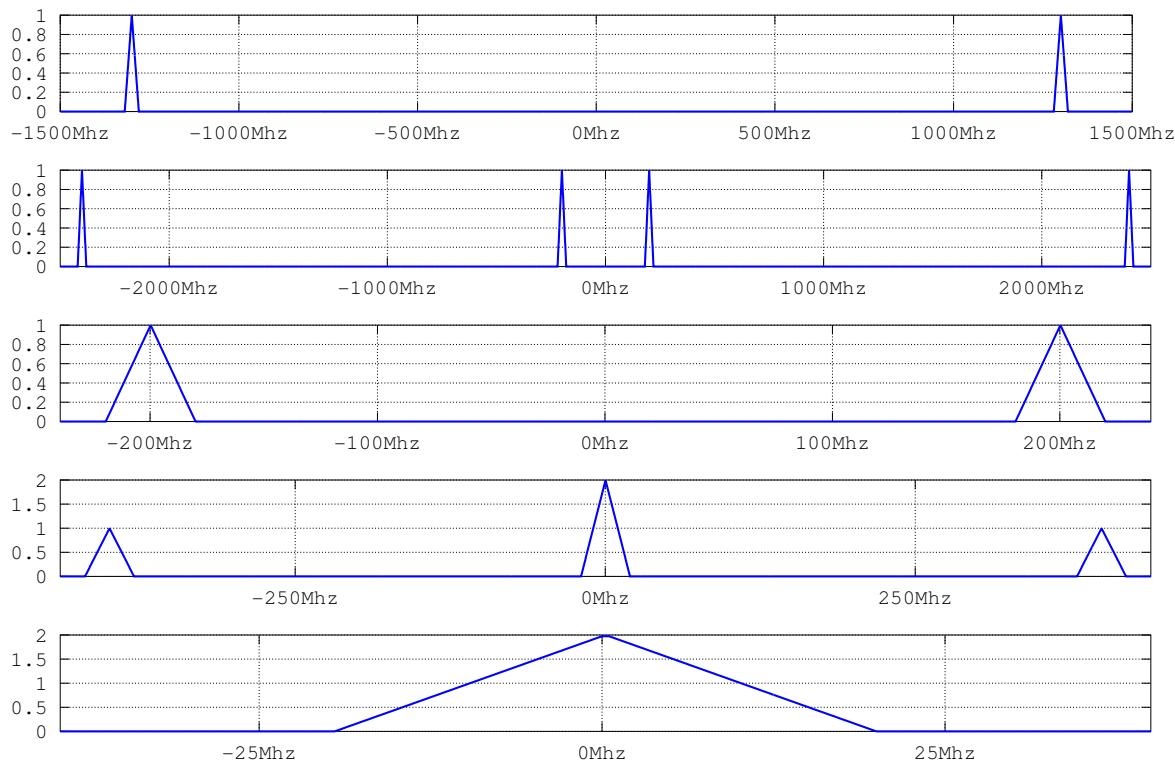


Figura 13: Espectro de las señales en las diferentes fases del demodulador

2.6. Ejercicio 7

Las señales $I(t)$ y $Q(t)$, no son mas que las partes real e imaginaria de la chirp emitida por el SARAT. El modulador lo que hace es desplazar el espectro de la chirp hasta los 1300Mhz (la modula) y luego la emite. Esta señal es reflejada por el suelo y vuelve al radar. Como estamos considerando que la señal al viajar hasta el suelo, rebotar y volver está pasando por un sistema LTI que solo introduce un retardo o un cambio de fase, la señal que recibe el radar es la misma que emitió, solo que con algún cambio de fase. Luego se pasa la señal a una banda intermedia de 200Mhz y por último es multiplicada por un coseno de 200Mhz en el caso de $I(t)$ o por un seno de la misma frecuencia para el caso de $Q(t)$.

2.6.1. TODO redondeame lo

2.7. Ejercicio 8

Tanto el modulador como el demodulador son sistemas LTI. Como consideramos el mundo fuera del SARAT como un sistema LTI, entonces todo el sistema en su totalidad es LTI.

3. Parte digital

3.1. Ejercicio 9

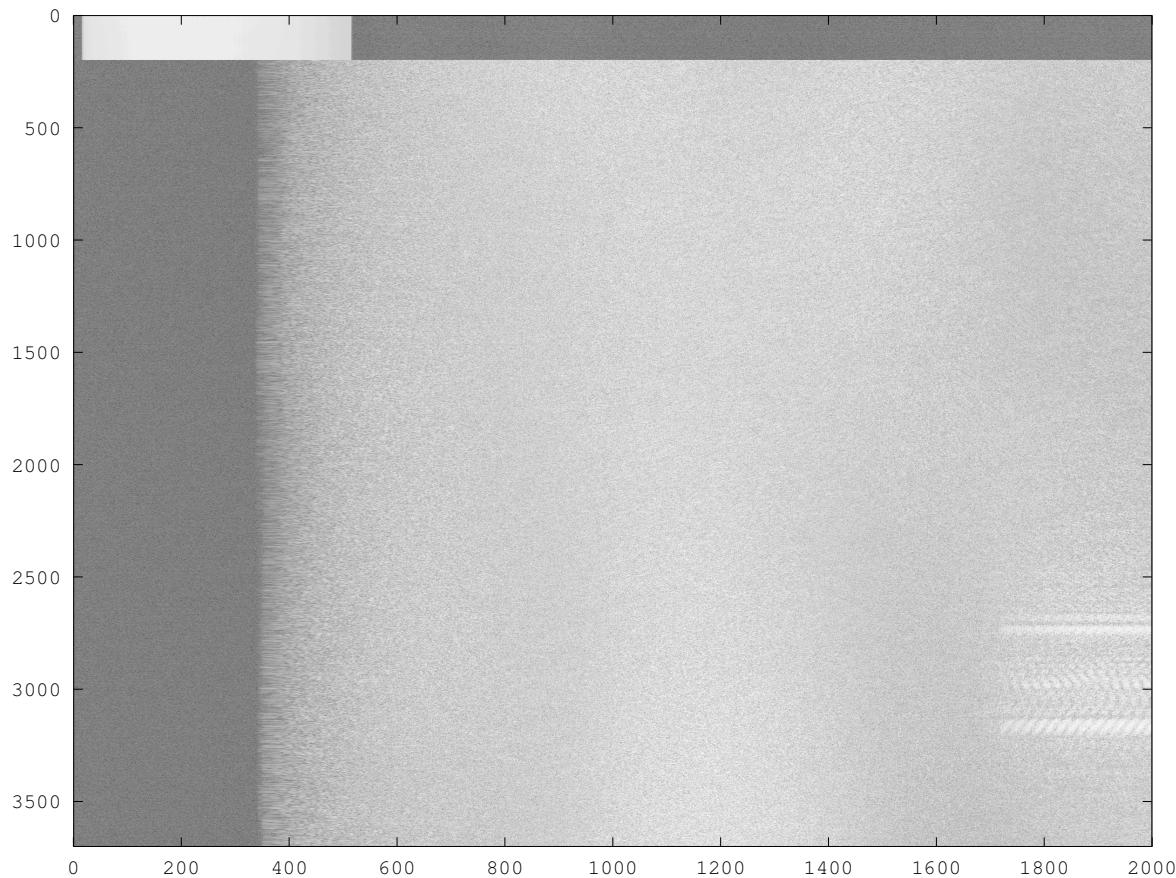


Figura 14: Datos crudos del SARAT (subset)

Podemos ver en la figura 14, que la ventana de recepción (ancho total de la imagen) dura 9000 muestras y que en cada línea (exceptuando las primeras 200) hay una región muy oscura al inicio de aproximadamente 350 muestras. Las primeras 200 líneas contienen solamente un muestreo de la chirp emitida por el SARAT. La duración de esta chirp es de 500 muestras o $10\mu s$. Entonces conociendo esta equivalencia entre cantidad de muestras y tiempo, podemos calcular que la ventana de adquisición dura $180\mu s$. Si hacemos el cálculo teórico vemos que, primero, estamos tomando muestras a 50Mhz y que la cantidad de muestras horizontales es de 9000, entonces $\frac{9000}{50 \cdot 10^6} = 180 \cdot 10^{-6}$, y segundo para el rango $r_0 = 5659m$ y considerando que las ondas viajan a la velocidad de la luz y deben viajar de ida y vuelta, la onda tarda en viajar unos $37,75\mu s$.

3.2. Ejercicio 10

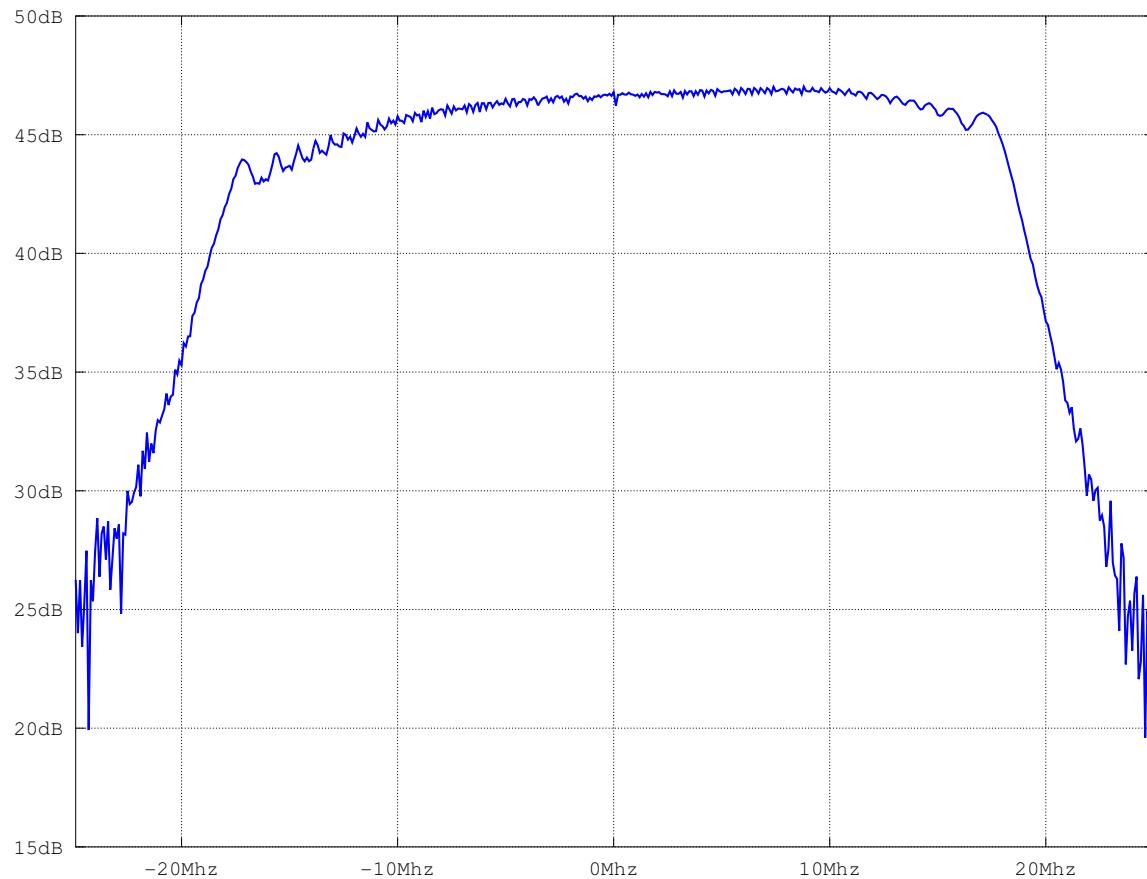


Figura 15: Chirp real del SARAT (espectro)

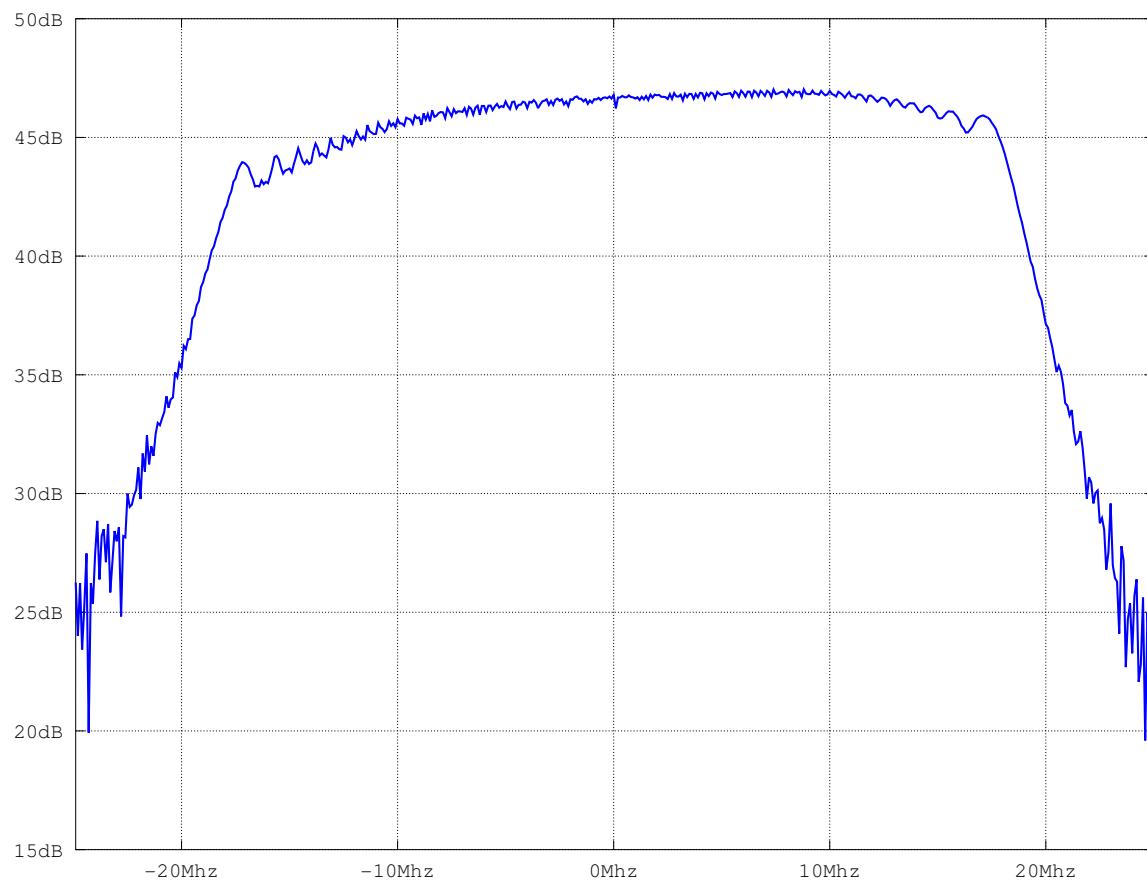


Figura 16: Chirp real del SARAT (ancho de banda)

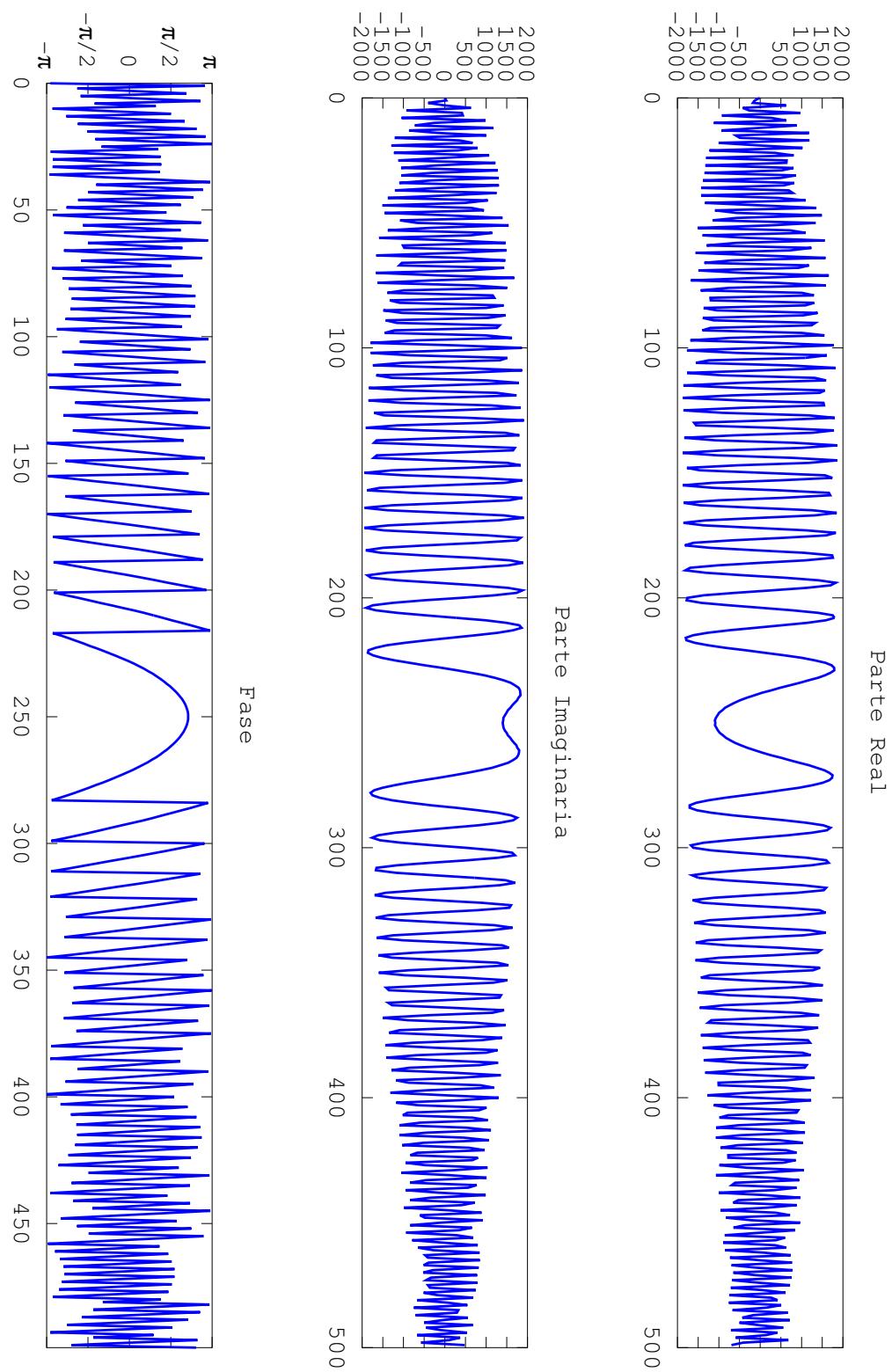


Figura 17: Chirp real del SARAT

3.3. Ejercicio 11

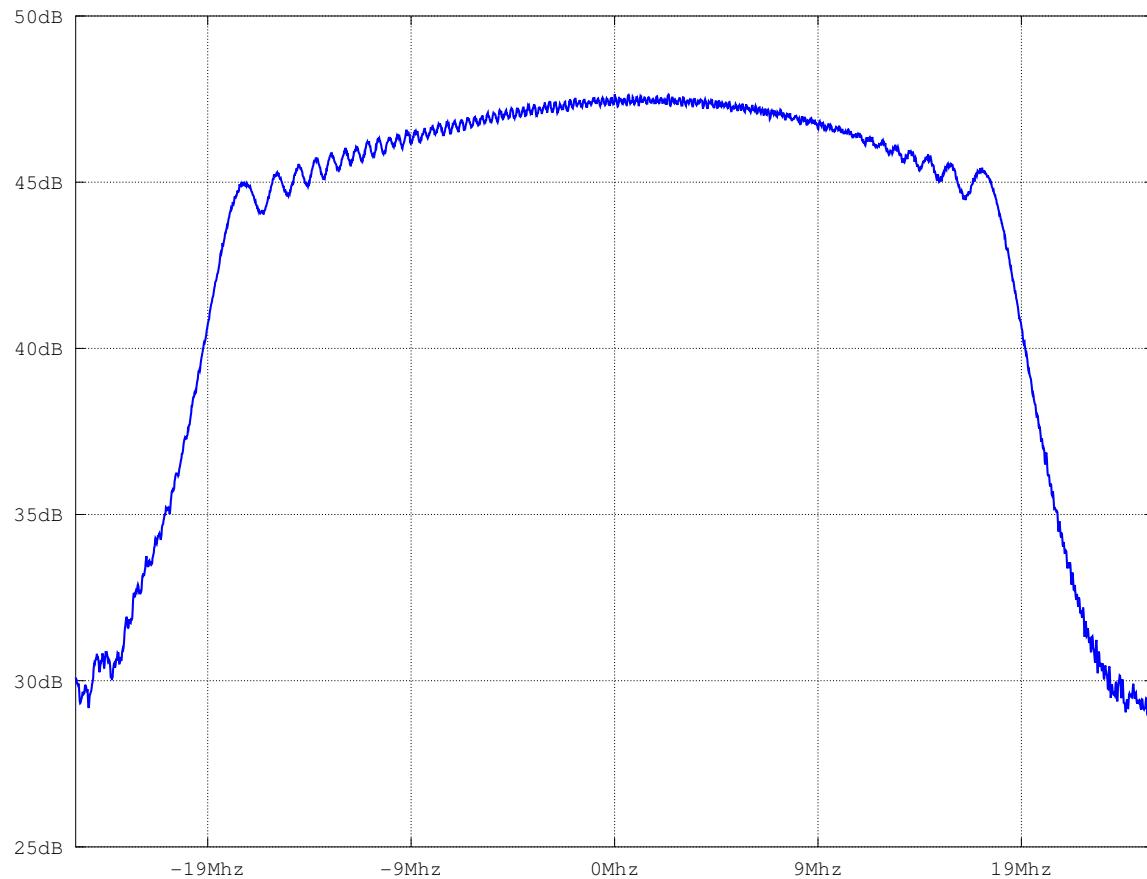


Figura 18: Modulo del espectro en rango

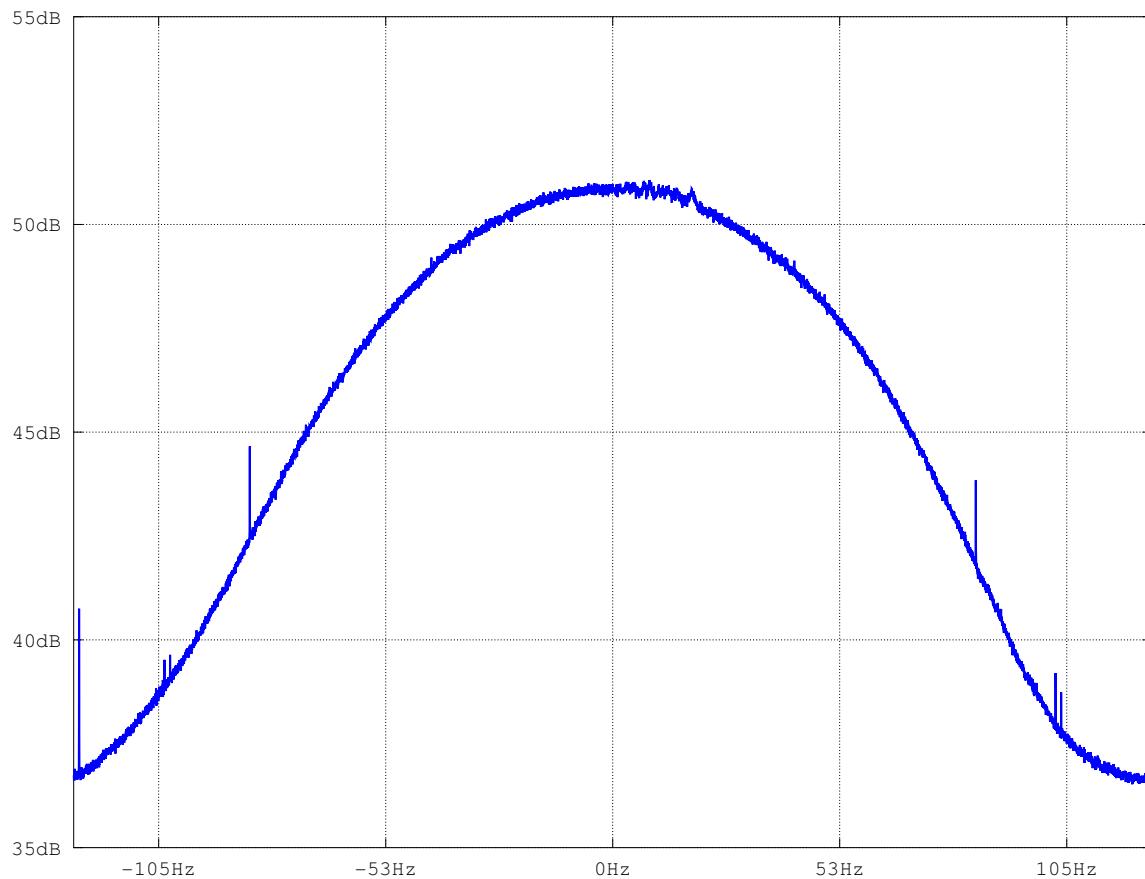


Figura 19: Modulo del espectro en azimuth

3.4. Ejercicio 12

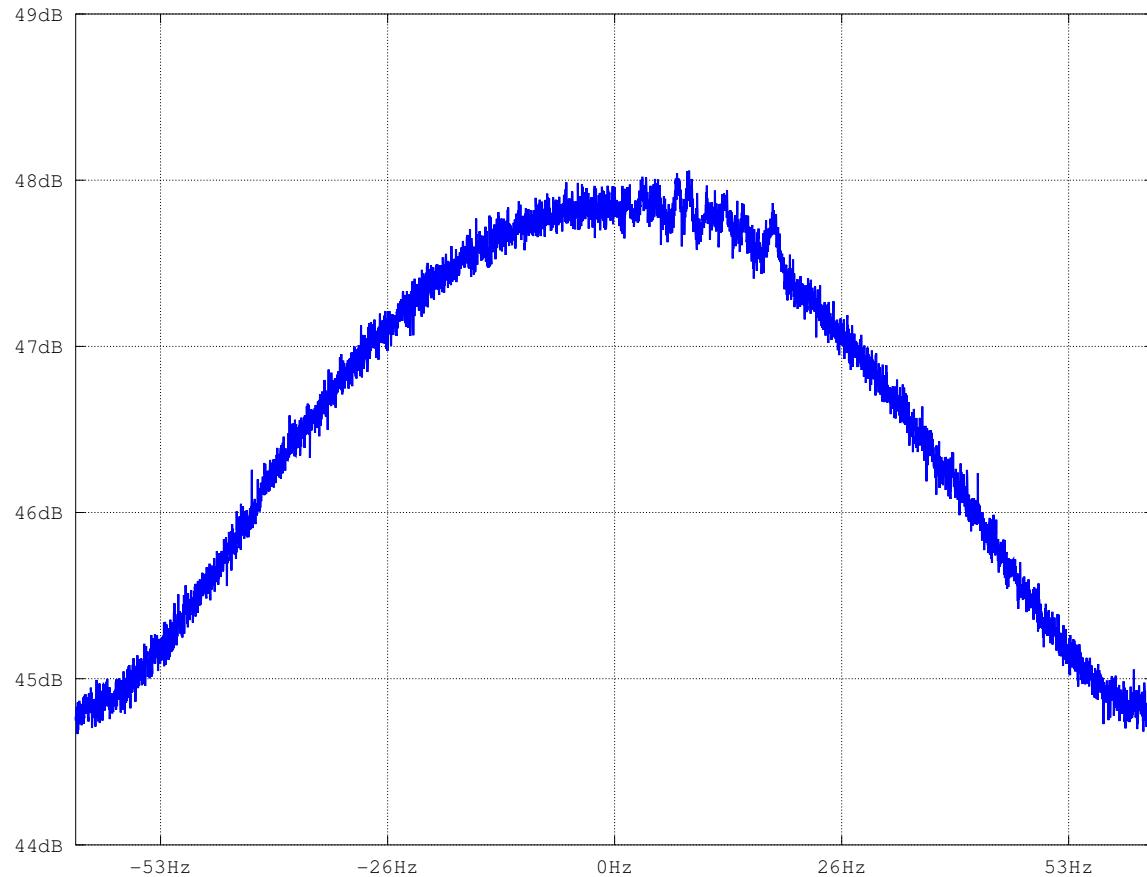


Figura 20: Modulo del espectro en azimuth (medio PRF)



4. Compresión del pulso

4.1. Ejercicio 13

La correlación no es una operación conmutativa. La relación entre la correlación de dos funciones con su transformada de Fourier es la siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x[n] \star y[n]](\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \star y[n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y^*[k-n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^*[k-n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{l=-\infty}^{\infty} y^*[l] e^{-j\Omega(k-l)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\Omega k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} y^*[l] e^{j\Omega l} \\ &= X(\Omega) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} y[l] e^{-j\Omega l} \right)^* \\ &= X(\Omega) (Y(\Omega))^* \\ &= X(\Omega) Y^*(\Omega)\end{aligned}$$

Entonces, por ejemplo si tenemos una $X(\Omega)$ real y una $Y(\Omega)$ imaginaria, no es lo mismo

$$x[n] \star y[n] = X(\Omega) Y^*(\Omega) = X(\Omega) (-1) Y(\Omega)$$

que

$$y[n] \star x[n] = Y(\Omega) X^*(\Omega) = Y(\Omega) X(\Omega)$$

No obstante, si lo que nos interesa es el módulo de la transformada, es decir

$$|\mathcal{F}[x[n] \star y[n]](\Omega)|$$

se puede ver a simple vista que la operación es conmutativa, puesto que

$$|X(\Omega) Y^*(\Omega)| = |X^*(\Omega) Y(\Omega)|$$

4.2. Ejercicio 14

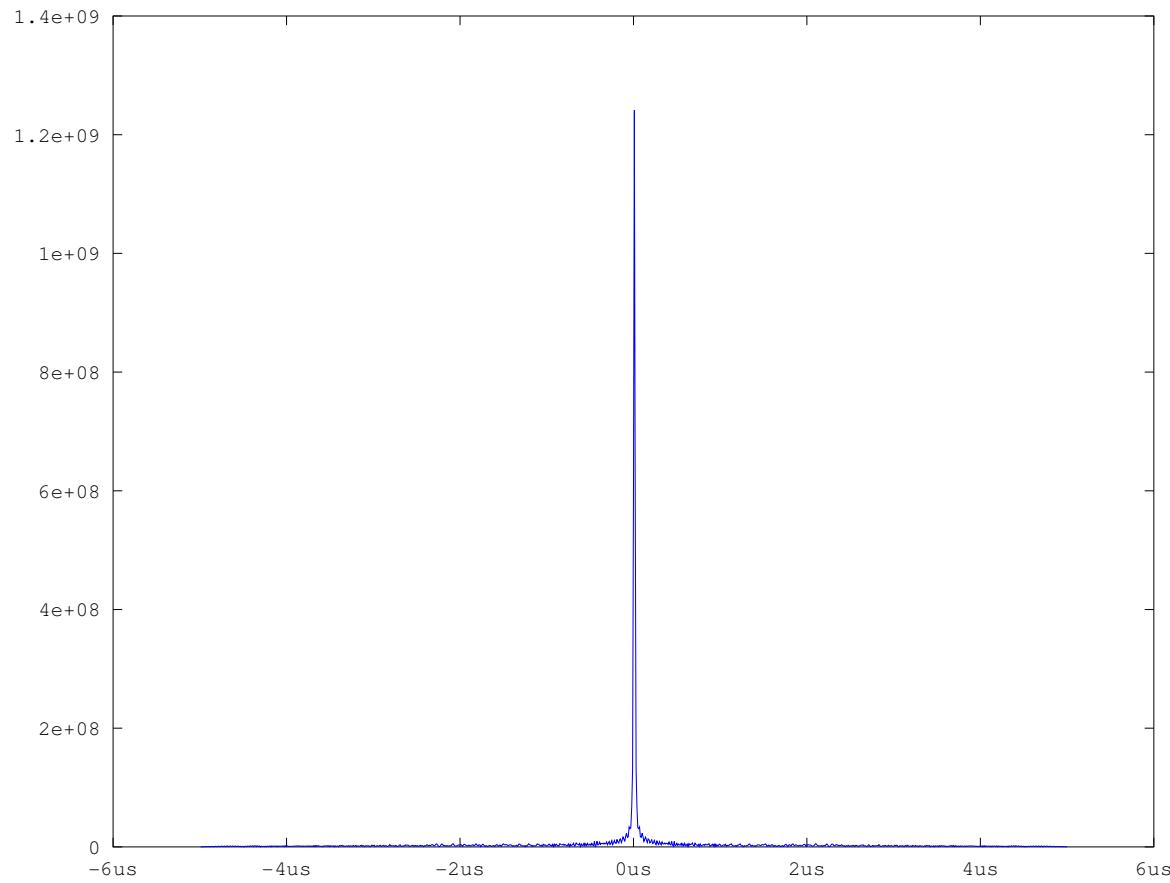


Figura 21: Autocorrelación de la chirp del SARAT

5. Compresión en rango

5.1. Ejercicio 17

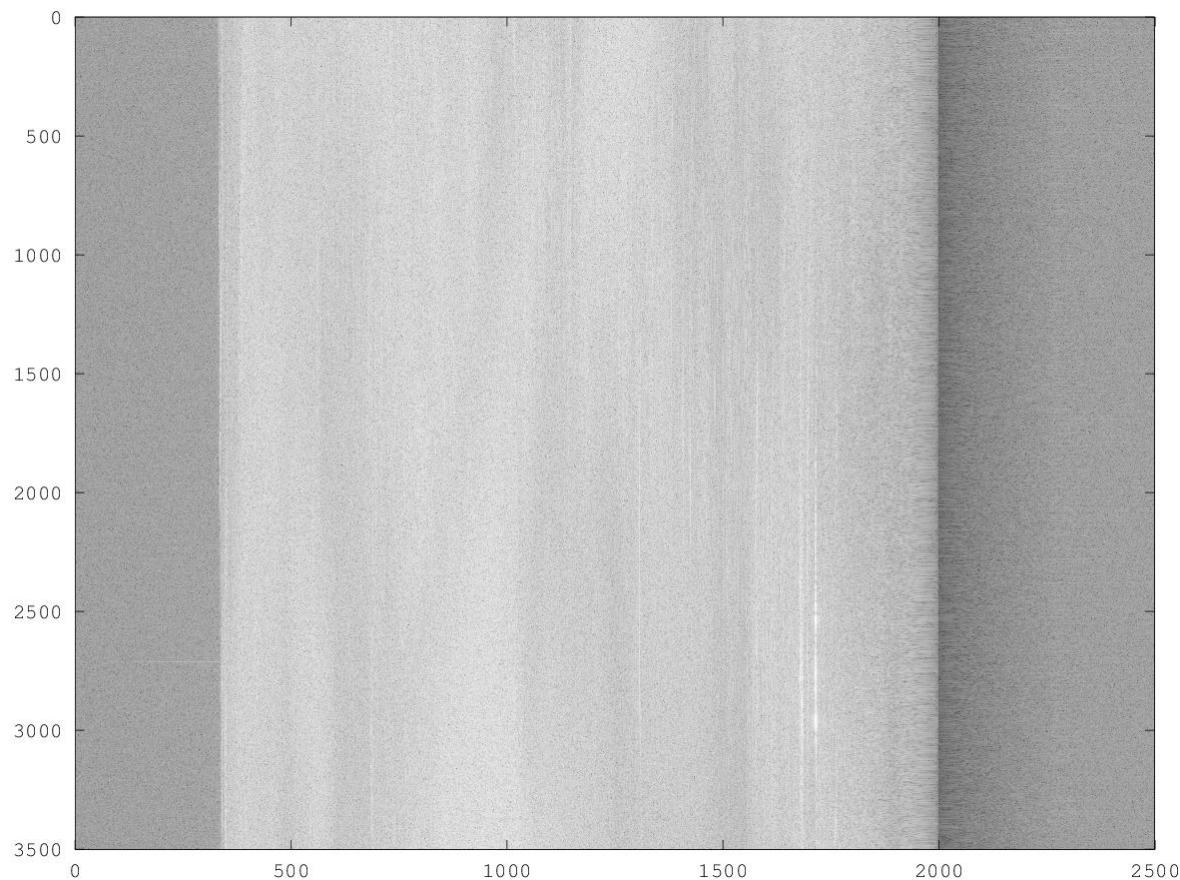


Figura 22: Compresión en rango

6. Compresión en azimuth

6.1. Opcional 1

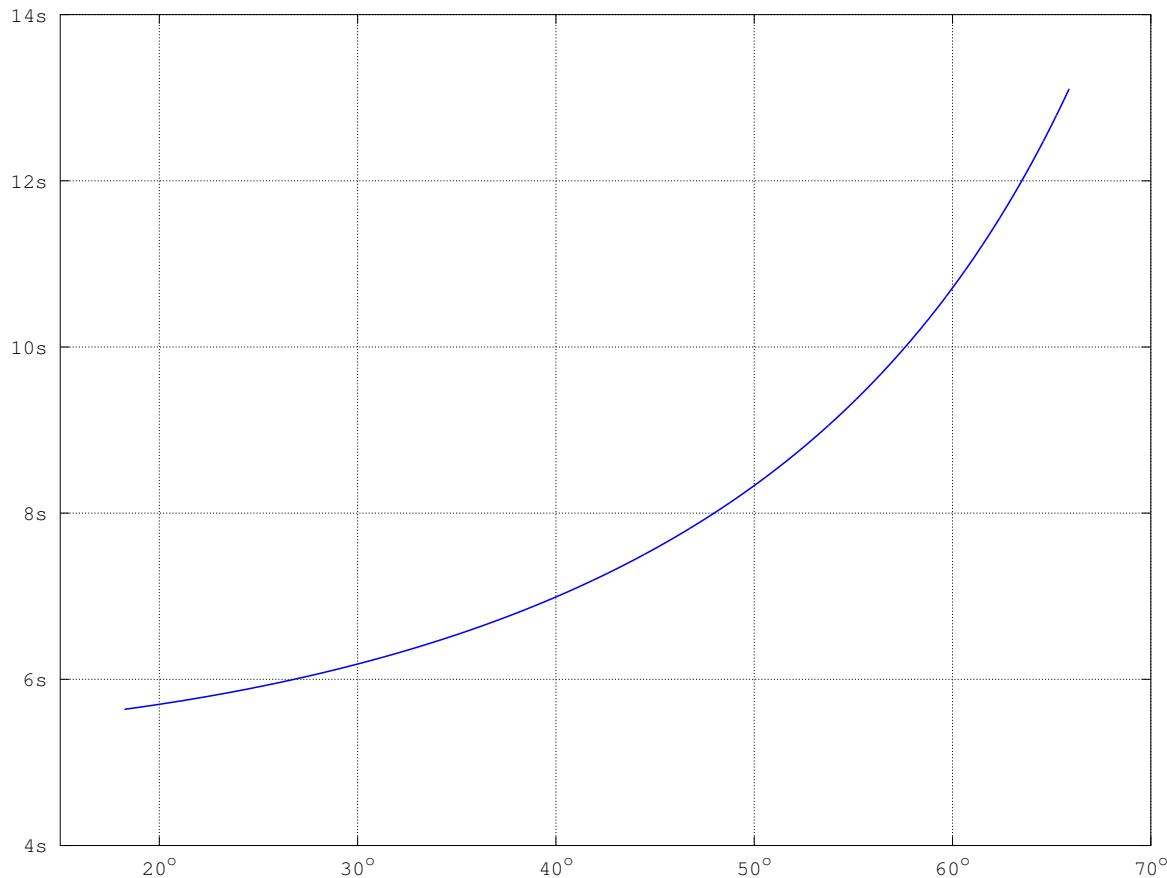


Figura 23: Datos crudos del SARAT (subset)

6.2. Ejercicio 18

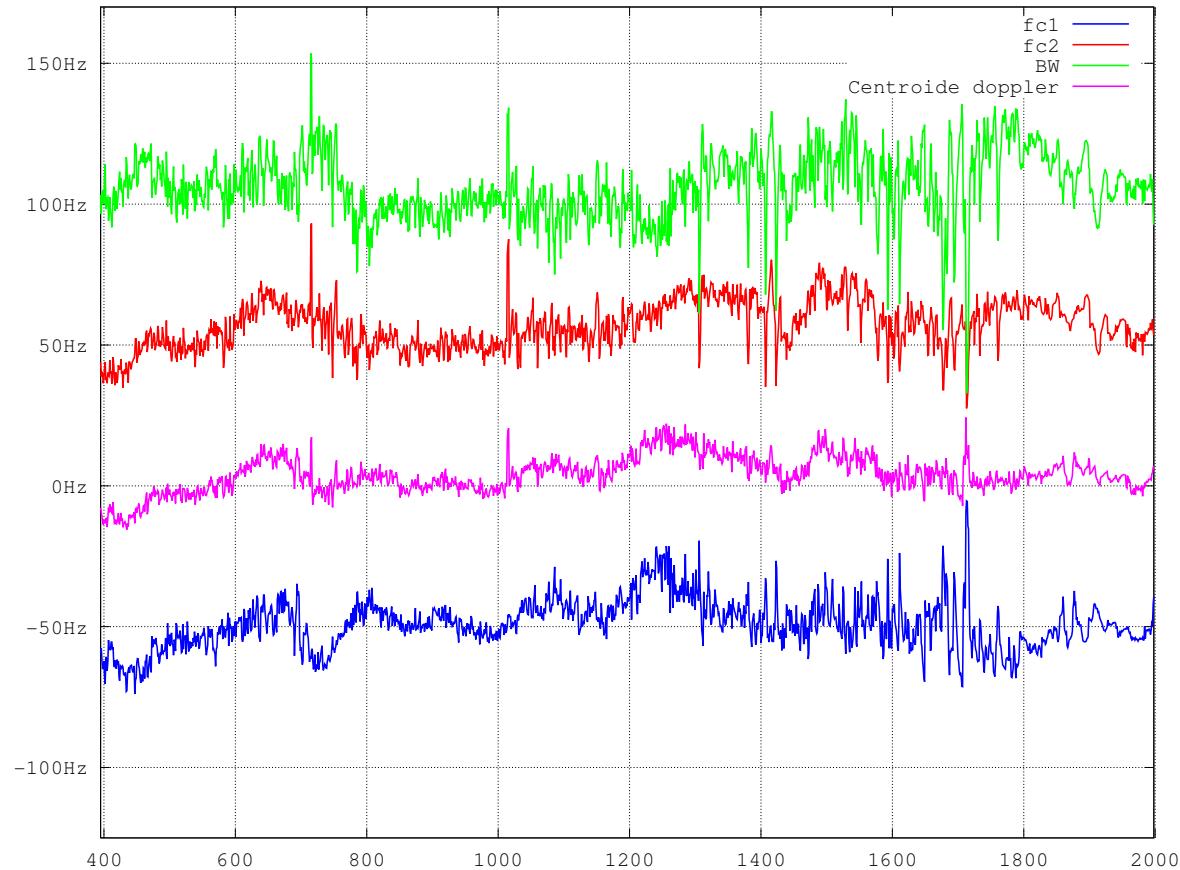


Figura 24: Frecuencias de corte en azimuth y ancho de banda

6.3. Ejercicio 19

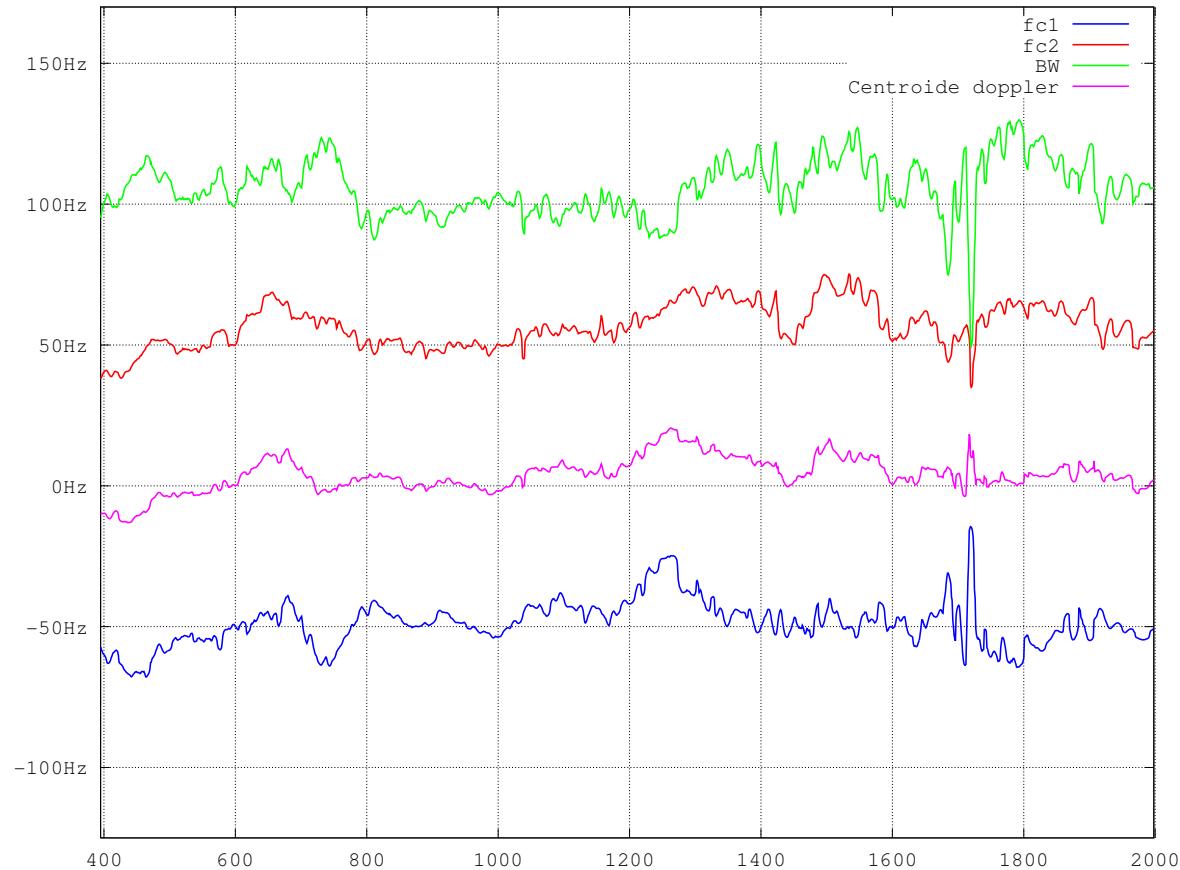


Figura 25: Frecuencias de corte en azimuth y ancho de banda (segunda estimación)

6.4. Ejercicio 22

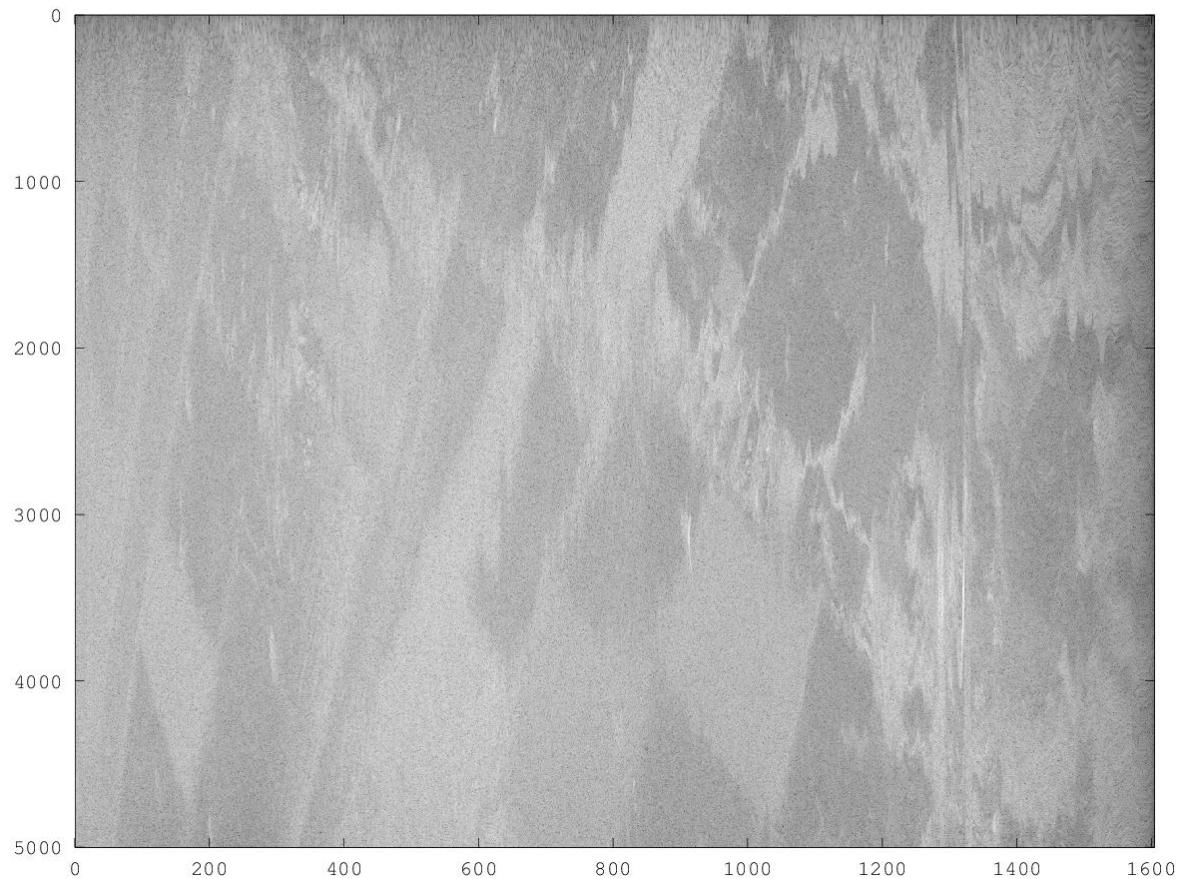


Figura 26: Imagen comprimida en azimuth

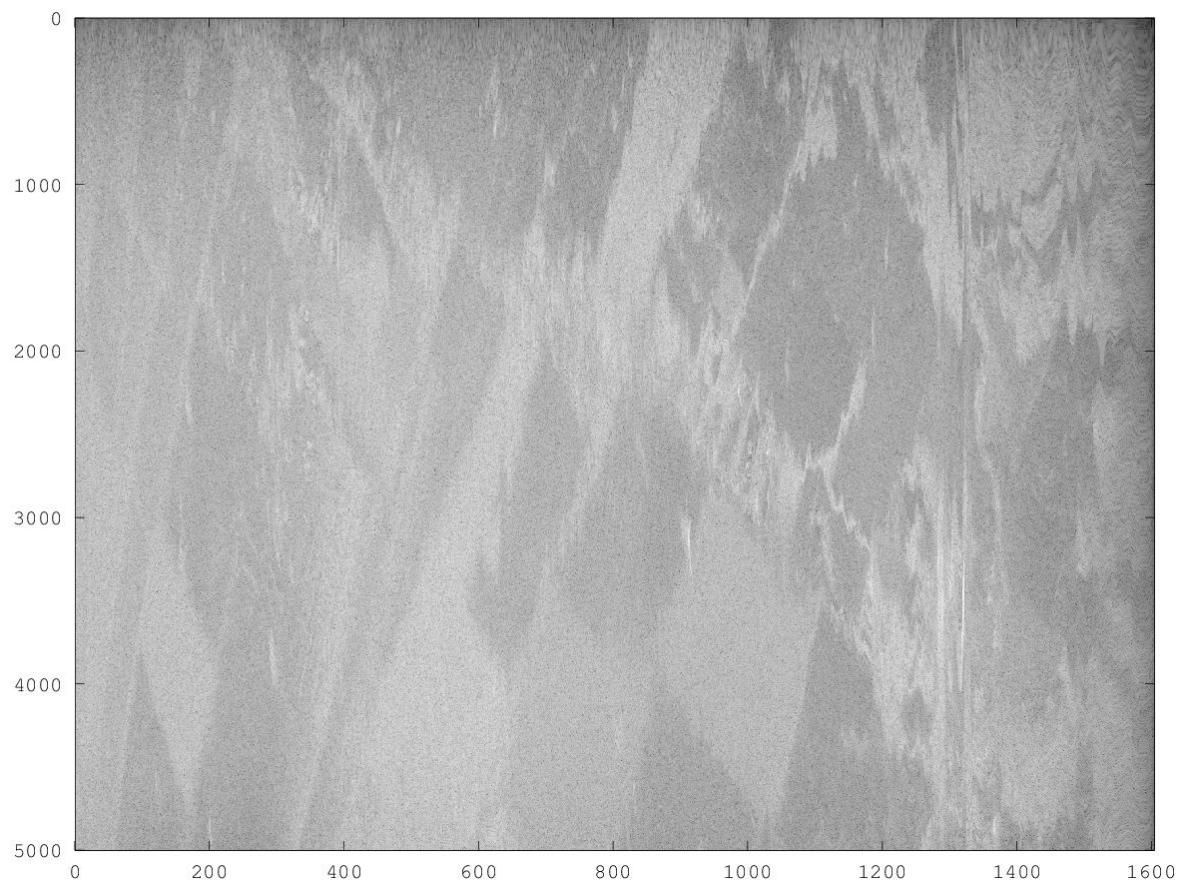


Figura 27: Imagen comprimida en azimuth (con ventaneo en la chirp)

6.5. Opcional 2

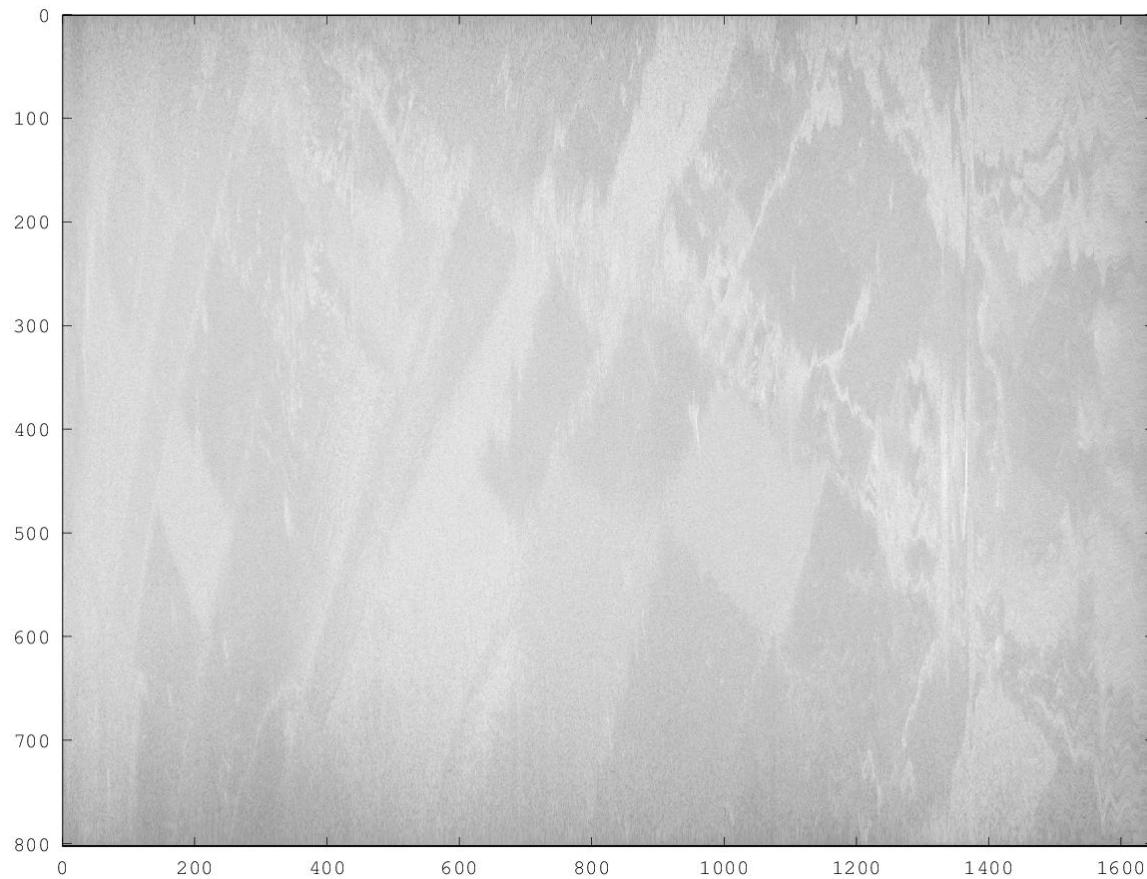


Figura 28: Imagen comprimida en azimuth promediado

7. Algoritmo de compresión