

M 矩陣的直積

給定任兩個矩陣 A 和 B ，我們可以得到兩個矩陣的直積，或稱為克羅內克乘積 $A \otimes B$ ，其定義如下

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

當 A 是一 $m \times n$ 矩陣和 B 是一 $p \times r$ 矩陣時， $A \otimes B$ 會是一 $mp \times nr$ 矩陣，而且此一乘積是不可交換的。

舉些例子：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 & 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 6 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 7 & 2 \cdot 6 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 & 4 \cdot 0 & 4 \cdot 5 & 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 6 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 7 & 4 \cdot 6 & 4 \cdot 3 & 4 \cdot 7 \\ 1 \cdot 0 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 & 0 \cdot 5 & 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 6 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 7 & 0 \cdot 6 & 0 \cdot 3 & 0 \cdot 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 & 10 & 4 \\ 6 & 3 & 7 & 12 & 6 & 14 \\ 0 & 15 & 6 & 0 & 20 & 8 \\ 18 & 9 & 21 & 24 & 12 & 28 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 0 & 1 \times 5 & 2 \times 0 & 2 \times 5 \\ 1 \times 6 & 1 \times 7 & 2 \times 6 & 2 \times 7 \\ 3 \times 0 & 3 \times 5 & 4 \times 0 & 4 \times 5 \\ 3 \times 6 & 3 \times 7 & 4 \times 6 & 4 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 & -9 & -6 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & 7 \\ 2 & 8 & -8 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -9 & -6 & 5 & -32 & 36 & 24 & -20 & 56 & -63 & -42 & 35 \\ 1 & -3 & -4 & 7 & -4 & 12 & 16 & -28 & 7 & -21 & -28 & 49 \\ 2 & 8 & -8 & -3 & -8 & -32 & 32 & 12 & 14 & 56 & -56 & -21 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & -4 & -8 & 20 & 4 & 7 & 14 & -35 & -7 \\ -16 & 18 & 12 & -10 & 24 & -27 & -18 & 15 & 24 & -27 & -18 & 15 \\ -2 & 6 & 8 & -14 & 3 & -9 & -12 & 21 & 3 & -9 & -12 & 21 \\ -4 & -16 & 16 & 6 & 6 & 24 & -24 & -9 & 6 & 24 & -24 & -9 \\ -2 & -4 & 10 & 2 & 3 & 6 & -15 & -3 & 3 & 6 & -15 & -3 \end{bmatrix}$$

輸入

輸入整數不會超過 ± 65535
 兩矩陣大小不會超過 20×20

每組測資第一行四個數字 $a \ b \ c \ d$
 代表第一個矩陣有 a 列 b 行
 第二個矩陣有 c 列 d 行

接下來 a 列，每列 b 個數字
 c 列，每列 d 個數字

每個數字以空白隔開。每組測資有 2 個矩陣，請把他們兩個矩陣的直積，或稱為克羅內克乘積 $A \otimes B$ 的結果輸出。
 每個輸入的測試檔案，只有一筆測試資料。

輸出

當 A 是一 $m \times n$ 矩陣和 B 是一 $p \times r$ 矩陣時， $A \otimes B$ 會是一 $mp \times nr$ 矩陣，輸出矩陣，每個數字以空白隔開。

範例輸入輸出

範例輸入 I

```
1 | 2 2 2 2
2 | 1 2
3 | 3 1
4 | 0 3
5 | 2 1
```

範例輸出 I

1		0	3	0	6
2		2	1	4	2
3		0	9	0	3
4		6	3	2	1

範例輸入 II

1		3	2	2	3
2		1	2		
3		3	4		
4		1	0		
5		0	5	2	
6		6	3	7	

範例輸出 II

1		0	5	2	0	10	4
2		6	3	7	12	6	14
3		0	15	6	0	20	8
4		18	9	21	24	12	28
5		0	5	2	0	0	0
6		6	3	7	0	0	0

範例輸入 III

1		2	2	2	2
2		1	2		
3		3	4		
4		0	5		
5		6	7		

範例輸出 III

1		0	5	0	10
2		6	7	12	14
3		0	15	0	20
4		18	21	24	28

範例輸入 IV

1	2	3	4	4
2	1	-4	7	
3	-2	3	3	
4	8	-9	-6	5
5	1	-3	-4	7
6	2	8	-8	-3
7	1	2	-5	-1

範例輸出 IV

1	8	-9	-6	5	-32	36	24	-20	56	-63	-42	35
2	1	-3	-4	7	-4	12	16	-28	7	-21	-28	49
3	2	8	-8	-3	-8	-32	32	12	14	56	-56	-21
4	1	2	-5	-1	-4	-8	20	4	7	14	-35	-7
5	-16	18	12	-10	24	-27	-18	15	24	-27	-18	15
6	-2	6	8	-14	3	-9	-12	21	3	-9	-12	21
7	-4	-16	16	6	6	24	-24	-9	6	24	-24	-9
8	-2	-4	10	2	3	6	-15	-3	3	6	-15	-3

