Universidad de Buenos Aires Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Departamento de Computación

Metodos Numericos 1C 2021

Trabajo Práctico 1: Análisis de Métodos de Rankeo

Grupo 16

Integrante	LU	Correo electrónico
Cantini Budden, Sebastian	576/19	sebascantini@gmail.com
Seisdedos, Jose Luis	797/19	jlse is dedos 11@gmail.com
Kruger, Lucas Ivan	799/19	lucaskruger10@gmail.com

Resumen:

En el presente informe hemos comparado tres métodos de ranking deportivo tomando en cuenta sus ventajas y desventajas desde miradas tanto cualitativas como cuantitativas. Estos métodos son el Colley Matrix Method (CMM), Winning Percentage (WP), y método de Massey. Los deportes elegidos fueron dos: Basketball (datos de partidos de la NBA 2015-2016) y Futbol (datos de partidos de la Super Liga Argentina 2019-2020). Hicimos gráficos y tablas para la correcta visualización de la información y facilitar la contrastación de los resultados. Además de analizar las diferencias en los listados dados por cada método, vimos como estos afrontan casos particulares como el empate. El desarrollo del algoritmo para cada método fue en C++, utilizando la teoría dada por la materia.

Palabras Clave

Colley Matrix Method, ranking, rating, estadística deportiva

I. INTRODUCCIÓN TEÓRICA:

Hoy en día la industria del deporte es una de las más importantes, involucrando a muchas empresas, deportistas y fanáticos que están detrás del fenómeno deportivo. Esto hace que sea importante saber cuáles equipos tienen más probabilidad de ganar el siguiente juego y ordenarlos sobre tablas en base a éstos. (Por ejemplo para una campaña publicitaria). A estas tablas se las denomina ranking y a la probabilidad de ganar que las acompaña rating. Este rating es un puntaje determinado a partir de un cierto método.

Tal y como comenta Wesley N. Colley [7] acerca del fútbol americano en su investigación, en un principio los rankings no eran verificables ni replicables, y podían dar lugar a sesgos relacionados con el fanatismo, historia, etc. Con la llegada de la computación estos mejoraron al perder los sesgos mencionados anteriormente y solo basarse en datos, pero aún así no se podía saber cuál era el algoritmo utilizado. Todos estos problemas llevan a una desconfianza de parte de las empresas y fanáticos hacia estos datos.

Hoy en día hay diferentes algoritmos respaldados matemáticamente y que nos pueden ayudar con este problema, en particular vamos a proponer tres: CMM, WP y el MM. Estos serán contrastados junto con los rankings oficiales de cada deporte.

El winning percentage o WP es un sistema que busca estimar la probabilidad de que un equipo gane tomando el promedio de victorias como rating. Si bien es un buen estimador no toma en cuenta la probabilidad de que otro equipo gane, así como no se ajusta bien a la diferencia de partidos jugados. La ecuación para calcular el rating de un equipo está dada por:

$$R_i = \frac{w_i}{w_i + l_i} \tag{1}$$

Donde R_i es el rating del equipo i, w_i los partidos ganados por el equipo i y l_i los partidos perdidos por el equipo i. También hay casos donde los equipos pueden llegar a tener 0% o 100% de probabilidad en caso de no ganar ningun partido o ganar todos los partidos respectivamente.

El Colley Matrix Method (CMM) se basa en la Regla de Laplace de sucesos, solo utiliza el historial de partidos de los equipos. Esta regla nos propone un mejor estimador que el de wp siendo este

$$R_i = \frac{w_i + 1}{w_i + l_i + 2} \tag{2}$$

Reformulando el problema con sistemas de ecuaciones lineales podemos obtener el ranking deseado. Tomando la notación de Govan [6], tenemos

$$\Gamma = 1, ..., i, ..., T \tag{3}$$

conjunto de equipos. Por cada equipo $i \in \Gamma$ tomamos como n_i al total de partidos jugados por i, w_i su número de victorias y l_i sus derrotas. Además dados dos equipos $i, j \in \Gamma$ $i \neq j$ llamamos n_{ij} al número de partidos entre i y j. Este sistema nos propone resolver el sistema:

$$Cx = b (4)$$

donde

$$C = \begin{cases} -n_{ij} & \text{si } i \neq j \\ 2 + n_i & \text{si } i = j \end{cases}$$
 (5)

У

$$b_i = 1 + \frac{(w_i - l_i)}{2} \tag{6}$$

Los resultados obtenidos son la probabilidad de victoria en el próximo partido. Esta probabilidad nunca puede ser 0% o 100%. Y tiene en cuenta si la cantidad de partidos de cada equipo.

Cabe destacar que los dos sistemas anteriores no tienen en cuenta el empate y la suma de la probabilidad de ganar de dos equipos no es 100%.

El tercer método es el **Massey Method** o MM. El concepto en este método de rankeo es que la diferencia en ratings de dos equipos debe ser igual a la diferencia en el puntaje de su competencia.

Dado

$$\Gamma = 1, \dots, i, \dots, T \tag{7}$$

conjunto de equipos. Por cada equipo $i \in \Gamma$ tomamos como n_i al total de partidos jugados por el equipo i. Además dados dos equipos $i, j \in \Gamma$ $i \neq j$ llamamos n_{ij} al número de partidos entre i y j.

La ecuación fundamental para este método es:

$$Mr = p \tag{8}$$

donde

$$M = \begin{cases} -n_{ij} & \text{si } i \neq j \\ n_i & \text{si } i = j \end{cases}$$
 (9)

En (8), M es la matriz de Massey, r es el vector rating que desconocemos, y p es un vector de acumulación de diferencias de puntaje. Como este sistema lineal no tiene solución única, una de las filas de la matriz de massey debe ser reemplazada por todos numeros uno (1) excepto por un 0 en el final. La solución de este sistema de ecuaciones lineales va a ser el vector de ratings.

II. DESARROLLO

A. Implementación de los Métodos

Implementamos los tres algoritmos en C++. Estas funciones tienen de parámetro un archivo .dat donde los primeros dos números representan la cantidad de equipos y partidos en la competencia y a partir de la segunda línea los datos relevantes de cada partido (Fecha, ID de A, puntaje de A, ID de B, puntaje de B). Se retorna en un archivo .out los resultados del algoritmo ordenados por ID de forma ascendente. Para realizar este sort, definimos un vector donde iremos guardando las claves de los equipos. Tanto en CMM como en MM se resuelve el sistema una vez pulido con una función auxiliar "resolver" que resuelve la matriz utilizando el método de eliminación gaussiana.

B. Colley Matrix Method (CMM)

Es importante notar que la matriz de CMM es simétrica y también estrictamente diagonal dominante. Esto se puede ver fácil ya que al sumar todos los n_{ij} obtenemos el mismo valor que n_i y en la diagonal tenemos $n_i + 2$. Con esta propiedad podemos garantizar que esta matriz tiene solución única usando el método de eliminación Gaussiana sin necesidad de realizar permutación alguna. Inicializamos en 0 una matriz ya ampliada de $n \times n + 1$ (siendo n la cantidad de equipos) y dos vectores para victorias/derrotas. Armamos la matriz de colley poniendo "2" en la diagonal. Seguidamente, vamos recorriendo partido a partido el archivo de entrada, restando "1" en las posiciones de la matriz donde se cruzan los equipos que jugaron, y sumando "1" en la diagonal en la fila correspondiente de cada equipo. También sumamos "1" al vector de victorias o derrotas según corresponda para los dos equipos enfrentándose. Finalmente, colocamos en la columna n+1 el resultado de hacer la suma entre "1" y el cociente de la suma de las victorias y derrotas y "2" para cada equipo. La complejidad de este algoritmo es $\mathcal{O}(m+n3)$ (m cantidad de partidos, n cantidad de equipos).

Este método permite, a diferencia de WP, calcular los ratings de los equipos en relación a los demás. Por ésta razón esperamos que este método funcione muy bien en el torneo de NBA ya que los equipos se separan en categorías y esto ocasiona inevitablemente que haya equipos que no jueguen contra otros. Es importante notar, que CMM no toma en cuenta naturalmente a los empates. Sin embargo mientras que no nos encontramos con empates en los partidos de la NBA, si hay empates en los partidos seleccionados de la superliga. Aquí tuvimos que tomar

una decisión respecto de cómo afectaran los empates durante la implementación. Podíamos hacer un método similar a WP donde un empate es considerado como una derrota ya que no es una victoria, o podíamos mantener la matriz (5) y la ecuación (6). En este caso la matriz se actualiza aumentando la cantidad de partidos jugados por los equipos, pero la ecuación se ve inafectada. Esto hará que un empate genere un efecto diferente a una victoria o una derrota. Nosotros optamos por utilizar la segunda adaptación.

C. Winning Percentage (WP)

Este fue el mas fácil de implementar. Utilizamos una tabla de hash en vez de un diccionario para optimizar en tiempo el algoritmo y mapear a los equipos con sus respectivas cantidad de victorias y partidos totales. Luego a medida que se lee el archivo de entrada, vamos sumando los valores en cada equipo correspondiente y finalmente dividimos las victorias por partidos totales (1). La complejidad de este algoritmo es $\mathcal{O}(n)$. Conjeturamos que este algoritmo tiene un problema ya que no tiene en cuenta la diferencia de nivel entre los equipos, como lo hace CMM.

D. Método de Massey (MM)

Inicializamos en 0 una matriz ampliada de $n \times n + 1$ (siendo $n = \sharp equipos$) y la armamos poniendo en la diagonal donde se cruza el equipo A la cantidad de partidos jugados para ese A, y donde se cruzan dos equipos distintos la negación de los partidos jugados entre sí. El procedimiento de armar la matriz es idéntico a Colley excepto para la columna n+1. Allí introducimos la sumatoria de la diferencia del puntaje de cada equipo para todos los partidos. Este método así como está planteado otorgaría una ventaja considerable a los equipos agresivos. Dicho esto, al ir armando el algoritmo conjeturamos que en casos donde puede llegar a haber una brecha importante entre puntajes como NBA, se produzca un salto fuerte en el cálculo del rating. Esto lo analizaremos en la próxima sección con mas detalle.

E. Experiencias al Programar

 Para Colley anteriormente no teníamos separadas las victorias y derrotas en vectores, sino que íbamos sumando y restando en cada partido 0,5. Ésto a simple vista no nos trajo problemas pero surgió en el grupo una discusión sobre que pasaría si en la matriz hay un número entero suficientemente grande (o chico) tal que la operación no compute la suma/resta. Por esta razón optamos por cambiar el algoritmo y asegurarnos que no ocurran errores de aritmética finita.

• Al implementar massey hicimos dos algoritmos, el primero trataba de resolver el problema usando una matriz tan larga como cantidad de partidos de entrada, realizando multiplicación de matrices y trasponiéndolas tal como explica [5]. Ésto nos llevó a un problema grave de memoria que causaba que la computadora se congele. Por lo tanto, decidimos hacer una implementación más eficiente, siguiendo lo mostrado en la ecuación (9).

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN:

A. Análisis Cuantitativo

Corroboramos nuestro código corriendo el archivo metnum.py adjuntado junto a la carpeta del TP1. Esto sirvió para CMM, para el caso de MM tomamos como referencia ejemplos dados en [5]. La linea promedio de los puntos presentados en Fig.1. entre CMM y WP es la linea punteada de color verde, como se puede ver es muy similar a la linea roja (la cual plantea una situacion donde ambos sistemas son identicos). Esto implica que los metodos de evaluacion son muy similares.

B. Análisis Cualitativo

Compararemos en el contexto de NBA y la Superliga Argentina las diferencias entre el método WP y CMM tal como está planteado en el enunciado y luego estudiaremos MM.

C. NBA

Elegimos los datos brindados por la cátedra del torneo de NBA 2015-2016. Este torneo separa a los treinta equipos en dos categorías, llamadas conferencias, donde los ocho con mejores rankings de cada una pasan a la siguiente etapa. Este deporte utiliza WP como metodo principal de rankeo, con algunas adaptaciones como la mencionada anteriormente. Nosotros analizaremos todos los equipos en conjunto para ver si los rankings se verian afectados cuando se comparan con los otros métodos.

1) CMM vs WP: CMM y WP no tienen mucha diferencia como se puede observar en Fig.1. Ambos métodos tienen un listado muy similar con excepción de unos casos particulares. También se nota que hay mucha correlación entre ambos métodos. Los puntos son los distintos equipos y están posicionados en relacion a cuanto rating le otorga cada sistema. Sin embargo, aunque sean muy similares, cada sistema evalúa de diferente manera, y en algunos casos esto tiene efecto

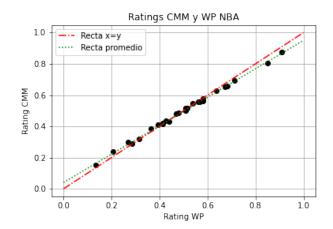


Fig. 1. Rating ortogado por los sistemas de CMM y WP de cada equipo.

	NBA:		Ranking		De
Cada Equipo	MP	étodo Equipo	СММ	Equipo	ММ
Golden State	0.909091	Golden State	0.874063	San Antonio	11.229600
San Antonio	0.850746	San Antonio	0.803976	Golden State	10.299500
Cleveland	0.712121	Cleveland	0.692428	Oklahoma	6.468820
Toronto	0.681818	Toronto	0.659347	Cleveland	5.755390
Oklahoma	0.671642	Oklahoma	0.655552	Toronto	3.929610
Clippers	0.636364	Clippers	0.629708	Clippers	3.714010
Memphis	0.582090	Miami	0.577367	Boston	3.536280
Boston	0.582090	Boston	0.565690	Atlanta	3.205980
Miami	0.582090	Memphis	0.563176	Charlotte	2.085570
Atlanta	0.567164	Atlanta	0.558822	Indiana	1.762330
Charlotte	0.560606	Charlotte	0.558224	Utah	1.124330
Indiana	0.537313	Indiana	0.547962	Miami	1.049530
Portland	0.514706	Chicago	0.516007	Portland	0.658536
Chicago	0.507692	Portland	0.515941	Detroit	0.224708
Houston	0.507463	Houston	0.511327	Houston	-0.388489
Dallas	0.507463	Dallas	0.502178	Dallas	-0.411843

Fig. 2. Datos sacados de los datos entregados por la catedra y los metodos.

en los resultados de ranking. Como se puede ver en Fig.2., en CMM, Chicago obtiene un ranking mas alto que Portland, dándole un puesto mas alto, en caso de WP es lo opuesto.

Tambien se puede observar en Fig.2. que Memphis, Boston y Miami fueron otorgados el mismo puntaje por WP. En ese caso es dificil determinar quien debería quedar arriba del otro. En un caso particular como este la NBA toma algunas variables adicionales en

consideracion, como los puntos totales que hicieron en la division, o el resultado de los enfrentamientos entre ambos equipos. Como CMM toma más variables en consideración normalmente, es mas improbable (aunque posible) que esta situación aparezca.

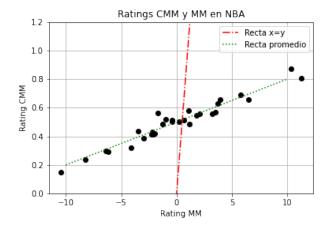


Fig. 3. Rating ortogado por los sistemas de CMM y MM de cada equipo.

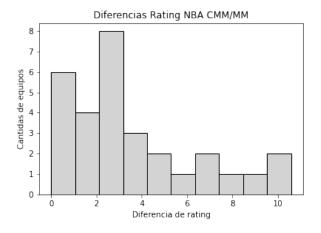


Fig. 4. Datos sacados de los datos entregados por la catedra.

2) MM y comparación de los tres métodos: Una particularidad del deporte es que puede haber una diferencia importante de puntos en cada partido. Ésto, al ser una de las variables más tomadas en cuenta por el método MM ocasiona que halla equipos con mucho más rating o menos si los comparamos con otro método. Como MM no toma en consideracion victoria de partidos, puede suceder que un equipo gane menos partidos con una gran diferencia de puntos y luego perder con una diferencia minimal, logrando que el equipo tenga un ranking mucho mayor a lo que tendria si se analizaran las victorias con algun otro sistema. Como se puede observar en la Fig.2., hay casos peculiares como los de Indiana

y Detroit. Éstos dos equipos están en el top dieciséis de MM mientras que en los otros métodos no. Ésto se debe a que tuvieron una mejor diferencia de puntos que los equipos que estaban en los otros métodos. Además, si contrastamos en Fig.3. los ratings de CMM y MM, podemos apreciar una relación de perpendicularidad, lo que indica que efectivamente son métodos con criterios de comparación distintos. Finalmente en Fig.4. se puede ver que hay casos donde la diferencia de los ratings llega hasta diez puntos.

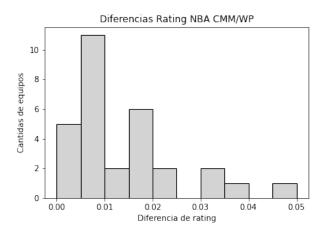


Fig. 5. Datos sacados de los datos entregados por la catedra.

NBA utiliza el metodo WP, por ende las tablas de WP y CMM son las que mas se asimilan a las tablas reales [1]. MM proporciona una solucion al problema de WP declarado antes, ya que analiza el puntaje toma en consideracion puntaje, logrando que sea mas dificil que dos equipos tengan el mismo rating.

D. SuperLiga Argentina

La Superliga Profesional del Fútbol Argentino, tambien conocida como Superliga Argentina de Fútbol, tal como se explica en [link] fue una asociación civil encargada de la organización y desenvolvimiento del campeonato de Primera División, la máxima categoría del sistema de competiciones oficiales del fútbol argentino, desde la temporada 2017-2018 hasta la de 2019-20. En esta competencia esperamos obtener datos diferentes que pongan nuestros metodos en situaciones particulares, hay empates, diferencias muy pequeans, muchos partidos y pocos equipos.

Los datos utilizados para el análisis fueron sacados de [3], donde conseguimos los datos de la temporada 2019-2020.

SL: Ranking De Cada Método

Equipo	WP	Equipo	CMM	Equipo	MM
River Plate	0.608696	Boca Juniors	0.711538	Boca Juniors	1.125000
Boca Juniors	0.608696	River Plate	0.692308	River Plate	0.958333
San Lorenzo	0.478261	Racing Club	0.634615	Vélez Sarsf	0.541667
Vélez Sarsf	0.478261	Argentinos Jun	0.615385	Newell's OB	0.333333
Argentinos Jun	0.434783	Vélez Sarsf	0.596154	Defensa y Just	0.333333
Talleres	0.434783	Lanús	0.576923	Racing Club	0.208333
Defensa y Just	0.434783	Rosario Cent	0.576923	Arsenal	0.208333
Racing Club	0.391304	Newell's OB	0.557692	Argentinos Jun	0.208333
Arsenal	0.391304	Defensa y Just	0.557692	Talleres	0.166667
Lanús	0.391304	Arsenal	0.538462	Lanús	0.125000
Newell's OB	0.391304	San Lorenzo	0.538462	San Lorenzo	0.083333
Rosario Cent	0.391304	Talleres	0.519231	Independiente	0.083333
Estudiantes	0.347826	Estudiantes	0.480769	Rosario Cent	0.083333
Independiente	0.347826	Tucumán	0.480769	Estudiantes	0.041667

Fig. 6. Tabla de rankings de la superliga

1) $\it CMM vs WP$: Si miramos la $\it Fig.6$. podemos ver que, a diferencia de la NBA, se tiene un corrimiento en la recta promedio de los valores. Sin embargo, la recta es casi paralela, lo que significa que se mantiene una relacion uniforme. Esto se debe principalmente a que hay una baja proporción de partidos-equipos. En la Liga hubo veintitres partidos por equipo mientra que en la NBA treinta Además, en nuestros datos existen los empates. Mientras que CMM considera en parte ese resultado, WP no lo hace ya que lo considera como derrota para los equipos que se enfrentaron. Esto se ve aún mas claro en la $\it Fig.7$., ya que las diferencias de los ratings se concentran alrededor de 0.15 (promedio de 0.12 más que en la NBA).

2) MM y comparación de los tres métodos: En un partido de fútbol no es normal que haya mucha diferencia de puntos, ésto implica que ya de por si MM va a funcionar muy distinto en la Super Liga Argentina que en la NBA. Si miramos la tabla podemos observar que entre la tercera posición y la segunda hay un salto de más de 0.4 puntos. Al observar la tabla de ratings para cada método se puede ver que hay un caso interesante entre Vélez y River en el rating de MM. En nuestra notebook[8] realizamos una comparación de los puntajes de ambos equipos y llegamos a que claramente eso se debía a la diferencia de goles a favor. River tenía veintitres, mientras que Vélez trece. Para WP se puede

ver que entre los mejores catorce equipos (segun WP) hay solamente cinco valores distintos de rating. Esto se debe fundamentalmente a que para todos los equipos la cantidad de partidos es la misma y todos juegan una única vez con cada equipo. Esto implica que todos tienen el mismo divisor en la ecuacion de WP (1), por lo tanto, ya no puede suceder que alguien gane menos pero a su vez tenga un mejor porcentaje de victoria, lo cual hubiese llevado a una posicion mas alta en el ranking. Por esta razón, no es extraño que haya para varios equipos la misma cantidad de partidos ganados.

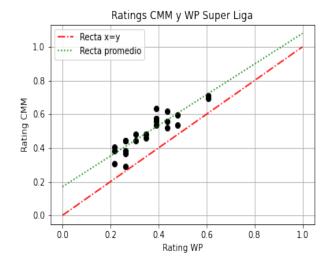


Fig. 7. Rating ortogado por los sistemas de CMM y WP de cada equipo.

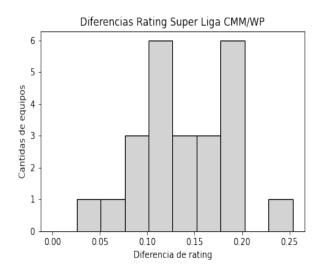


Fig. 8. Dado las diferentes muestras, se ve cuanta diferencia hubo entre los ratings otorgados por cada metodo.

E. ¿Es CMM justo?

Al abordar la cuestión sobre si un método de ranking es justo o no, no es menor notar que hablamos de un concepto cargado de subjetividad, por lo que trataremos abstenernos de estas. El sistema CMM está en su origen definido como una probabilidad. El hecho que no pueda ser 0 o 1 representa, en el contexto de deportes, que un equipo con mal performance siga teniendo chances de poder ganar, al igual que un equipo dominante tenga chances de perder. Esto en el ámbito deportivo es importante de recalcar, ya que representa una competencia mucho mas saludable que un escenario como el de, por ejemplo, WP. Es importante además decir que es un método que se deshace de creencias o inclinaciones previas al torneo (culturales, religiosas, fanatismo), comparando los ratings de cada participante a medida que se va realizando. Esto lo hace un método transparente en este sentido. Respecto a las hipotesis que nos planteamos al comienzo del proyecto:

- CMM: nos planteabamos que este metodo funcionaria mejor en NBA debido a que los datos plantean un escenario donde no se juegan igual cantidad de partidos y donde podriamos buscar un ranking mas "justo" desde este punto. Esto es cierto pero no del todo, ya que el CMM no toma en cuenta el peso de ciertos partidos mas importantes (como finales).
- **WP:** tal y como podemos ver en Fig.6. wp es menor a CMM desde un punto de vista probabilistico, esto es asi debido a que no interpreta los empates.
- MM: pensabamos que se daria ventajas a equipos agresivos y eso fue mostrado tanto en fig.6. y fig.2..

Podemos concluir entonces que CMM es el mas justo ya que comparte los beneficios que nos trae WP, y otorga flexibilidad distribuyendo mejor las probabilidades para casos especiales.

F. Estrategias

En esta sección indicaremos para cada método cual es la forma de obtener el mejor rating minimizando la cantidad de partidos

- **WP:** Este sistema como vimos tiene una falla importante y es que no tiene en cuenta el rating de los demás equipos. Basta jugar un solo partido y ganarlo para asegurarse el primer puesto en el rating.
- **CMM:** Este sistema en cambio si tiene en cuenta el rating de los demás, lo que implica que dependiendo

del rating del otro equipo una victoria puede tener mas valor que otra. Para minimizar la cantidad de partidos jugados el equipo debería ganar a los equipos con mayor rating en el torneo, y evitar perder con los que menos tienen.

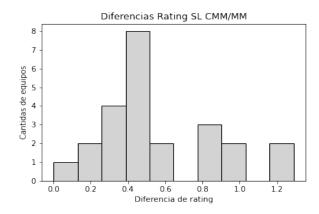


Fig. 9. Dado las diferentes muestras, se ve cuanta diferencia hubo entre los ratings otorgados por cada metodo.

MM: Como se ha visto en el desarrollo, este sistema tiene muy en cuenta la diferencia de puntos. Una victoria por mucha diferencia provoca un salto en el rating del equipo ganador, mientras que una derrota peleada o empate no afecta en mucha medida.



Fig. 10. Rating ortogado por los sistemas de CMM y MM de cada equipo.

IV. CONCLUSIONES:

En este trabajo realizamos un proceso de investigación y aplicación de distintas herramientas para obtener, en base a éstas, rankings de competencias reales. Cada método se adapta mejor dependiendo del tipo de deporte y cuáles son los datos que se quieren obtener. No hay un marco de referencia para saber cuál es el "mejor" método de rankeo, pero aun así todos muestran resultados que responden al sentido común. Si el deporte que queremos analizar no tiene o tiene muy pocos empates, seguro será una buena idea usar cmm o wp, ya que estos se adaptan muy bien como vimos en el caso de la NBA. Comprobamos que wp tiende a tener una correlacion casi lineal con cmm, pero que al tener casos que se salen de lo supuesto comienza a fallar. Como se observa en Fig7. Lléndonos a un contexto más publicitario, en el caso del fútbol argentino, utilizar MM ofrece una ventaja notable que es identificar a los equipos que meten muchos goles, ya que la pasión del hincha y la esencia del fútbol se hacen ver cuando la pelota llega al arco. Este es un factor importante que podría una empresa tener en cuenta a la hora de elegir sponsorear a un equipo.

REFERENCES

- [1] NBA
- [2] NBAManiacs
- [3] Resultados de Superliga Argentina
- [4] The Temporalized Massey's Method por Massimo Franceschet, Enrico Bozzo y Paolo Vidoni
- [5] Extracto del libro "Who's 1?: The Science of Rating and Ranking" por Amy N. Langville y Carl D. Meyer
- [6] A. Y. Govan, C. D. Meyer, and R. Albright, "Generalizing Google's PageRank to Rank National Football League Teams," in Proceedings of SAS Global Forum 2008, 2008.
- [7] W. N. Colley, "Colley's Bias Free College Football Ranking Method: The Colley Matrix Explained," 2002.
- [8] Notebook adjuntada en los archivos.