

Simulação

Este trabalho consiste em estimar probabilidades de vitória e derrota em três contextos diferentes. Tais probabilidades e outras medidas deverão ser estimadas simulando-se muitas vezes cada situação apresentada. A simulação deve ser feita por programas (em qualquer linguagem) usando números aleatórios.

1 Duelo

Dois jogadores se revezam atirando um no outro até que um seja atingido. A precisão (probabilidade de acertar o oponente em um tiro) é conhecida para ambos os jogadores. Note que não há estratégia no jogo, apenas continuar atirando. Estamos interessados em saber a probabilidade de cada jogador sobreviver.

Seja A o primeiro jogador e B o segundo. A sobrevive se:

- A acerta o primeiro tiro, com probabilidade P_A ; ou
- A erra, B também erra e A acerta o segundo tiro, com probabilidade $(1 - P_A)(1 - P_B)P_A$; ou
- A erra, B erra, A erra, B erra, A acerta, com probabilidade $(1 - P_A)(1 - P_B)(1 - P_A)(1 - P_B)P_A$; ou...

A probabilidade de A sobreviver é dada, então, pela soma infinita:

$$\sum_{i=0}^{\infty} ((1 - P_A)(1 - P_B))^i P_A$$

Esta é uma soma no formato $P_A(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$ com $x = (1 - P_A)(1 - P_B)$. Como x está entre 0 e 1, ela pode ser escrita como $P_A \frac{1}{1-x}$. Temos então que a probabilidade de A sobreviver é:

$$\frac{P_A}{P_A + P_B - P_A P_B}$$

e a de B sobreviver é:

$$\frac{P_B(1 - P_A)}{P_A + P_B - P_A P_B}$$

Por exemplo, se as precisões de A e B são $P_A = \frac{4}{6}$ e $P_B = \frac{5}{6}$ respectivamente, então a probabilidade de A sobreviver é $\frac{12}{17}$ e a de B é $\frac{5}{17}$. Como esperado, quem começa o duelo tem grande vantagem.

1.1 Atividade

Estimar, por simulação, a probabilidade de A e B sobreviverem. Simular o duelo 100, 1000, 10000 vezes, contar a frequência que cada jogador sobrevive e dividir pelo número de duelos simulados. Verifique se a estimativa por simulação é boa o suficiente, comparando o resultado com o valor exato (fórmulas acima).

2 “Truelo”

Em um duelo, não há estratégia, exceto continuar atirando no adversário na sua vez. E no caso de um duelo entre 3 pessoas (um “truelo”)? Na sua vez, cada jogador precisa escolher em quem atirar...

Suponha, por exemplo, um truelo entre A , B e C , sendo C um péssimo atirador. Se A e B forem “sensatos”, eles provavelmente vão atirar um no outro, já que cada um é a maior ameaça contra o outro. Desta forma, eles tentam eliminar o melhor oponente para continuar o duelo com o oponente mais fraco. Uma vez que um tenha eliminado o outro, é a vez de C atirar. E é a melhor oportunidade dele vencer, já que ele começa o duelo final.

Mas e se, por ironia do destino, enquanto A e B estão atirando um no outro, C conseguir atingir um deles? O duelo será entre C e o sobrevivente, mas nesse caso não será C a começar o duelo final... O sobrevivente entre A e B é que começa atirando em C , e, seja quem for, tem uma pontaria bem melhor.

Sejam P_A , P_B e P_C a precisão do tiro de cada jogador. A probabilidade de cada um vencer é mais difícil de calcular que no duelo, porque não depende apenas da precisão do tiro, depende também dos alvos escolhidos pelos jogadores. Mas podemos fazer uma simulação similar à do duelo, só que agora cada jogador deve escolher, a cada tiro, em quem atirar. Consideremos duas estratégias:

1. cada jogador, na sua vez, atira no de maior precisão ainda vivo (ou seja, A e B atiram um no outro e C atira no melhor entre eles, já que, se acertar, não terá um duelo final contra o melhor)
2. C não atira enquanto A e B estão vivos (supondo que isso seja permitido); quando um deles acertar o oponente, C atira no sobrevivente (e continuam o duelo) – assim ele garante começar o duelo final

2.1 Atividade

Considere que A tem precisão de $\frac{4}{6}$, B de $\frac{5}{6}$ e C de $\frac{2}{6}$. Estimar, por simulação, a probabilidade de cada um vencer o truelo nas duas estratégias do jogador C . Na primeira, A começa dando um tiro, depois B , C , A ... até sobrar apenas um vivo; cada jogador, na sua vez, atira no de maior precisão ainda vivo. Na segunda estratégia, A começa dando um tiro, depois B , A , B , até um deles ser atingido. Então C atira no sobrevivente e continuam o duelo até sobrar apenas um vivo. A probabilidade deve ser estimada com muitas simulações¹. Verifique se a estratégia de C de só começar a atirar quando alguém for atingido tem algum impacto. Particularmente, se isso realmente aumenta suas chances de sobreviver.

3 Jogo de azar

Dois jogadores, A com R\$ 3 e B com R\$ 7, decidem jogar um jogo. Em cada rodada eles jogam uma moeda. Se der cara, A ganha R\$ 1 de B . Se der coroa, B ganha R\$ 1 de A . O jogo termina quando um jogador fica sem dinheiro.

Vimos que, no duelo, quem começa tem grande vantagem. Nesse jogo de azar, o jogador que começa com mais dinheiro parece ter mais chance de vencer, mas quanto? Qual a probabilidade de A vencer?

É fácil perceber que uma partida dura no mínimo 3 rodadas com os dados fornecidos, pois a moeda precisa ser lançada pelo menos 3 vezes para alguém (no caso, o jogador A) ficar sem dinheiro. Mas pode durar bem mais (veja Figura 1). Aliás, não há limite, pois a moeda pode ficar alternando entre cara e coroa. Quanto tempo dura um jogo típico, isto é, quantas vezes a moeda é lançada, em média? Isso depende apenas do valor inicial de A ou o valor inicial de B influencia também?

¹1000, 10000, ou melhor: um valor que na parte 1 tenha dado uma boa estimativa do valor exato

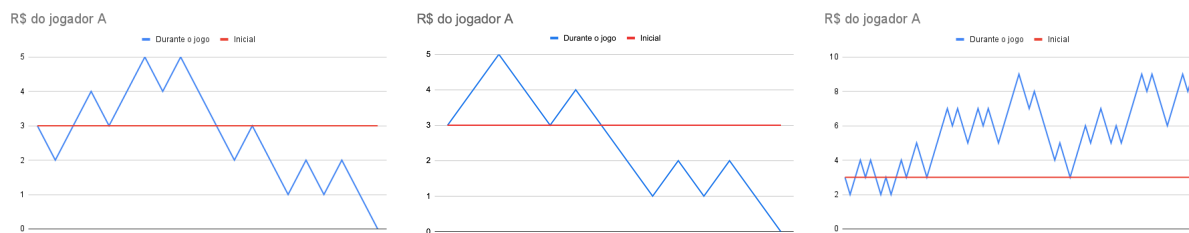


Figura 1: Evolução do valor em posse de A em 3 partidas simuladas (A começa com R\$ 3 e B com R\$ 7)

Ainda em relação à duração da partida, o que acontece se os valores iniciais forem alterados? Por exemplo, se os jogadores começarem com R\$ 30 e R\$ 70 em vez de R\$ 3 e R\$ 7, o jogo duraria 10 vezes mais? E se comesçassem com R\$ 1 e R\$ 100, o jogo acabaria bem mais rápido?

Qual a chance do vencedor ficar na frente o jogo todo? Quantas vezes alterna o jogador que está em vantagem? Se eles comesçassem com a mesma quantidade (p. ex. R\$ 5 e R\$ 5), cada um fica na frente em metade dos lançamentos?

3.1 Atividade

Simular o jogo começando com R\$ 3 e R\$ 7 muitas vezes para estimar a probabilidade de vitória de cada um, a duração típica (média) do jogo, quantas vezes alterna quem está em vantagem, entre outros. Simular o jogo também com outros valores iniciais para responder às perguntas feitas acima.

4 Considerações

Esta não é uma disciplina de Estatística, Probabilidade, nem de Análise de Algoritmos ou Combinatória. É de Computação Experimental. Então você não terá que fazer um estudo teórico para determinar funções de probabilidade ou valores exatos (se quiser fazer, ótimo, pode verificar se os resultados batem com a teoria, mas não é necessário). Tudo será feito por experimentação, no caso, simulação. Faça um programa para cada situação apresentada e execute muitas simulações (milhares ou milhões) para ter um resultado mais preciso. Verifique inclusive o que acontece quando aumenta o número de simulações.

O importante aqui não é seu programa. Não importa se há um só programa para todos os cálculos, um programa para cada, se o programa executa todos os testes de uma vez ou se você executa o programa várias vezes, se o programa faz um sumário dos resultados ou se você usa uma planilha para isso. Enfim, o que importa é a análise dos resultados. Você pode levantar hipóteses além das apresentadas e fazer simulações para coletar os dados e então fazer tabelas e gráficos para confirmar ou rejeitar a hipótese (p.ex., no jogo de azar, se A começa com R\$ 1, o jogo é rápido não importa o valor de B ? no truelo, se um jogador decide aleatoriamente em quem atirar, cai sua chance de sobreviver? etc – os resultados mostrarão o que acontece).

A pontuação depende não apenas da quantidade ou relevância dos resultados analisados e das conclusões retiradas, mas também da qualidade da apresentação. É importante apresentar gráficos, não apenas tabelas e números (por exemplo, um histograma do número de rodadas no jogo de azar). Toda tabela e todo gráfico deve ser referenciado e analisado no texto. Não se esqueça de explicar o significado de cada coluna de uma tabela, nem de explicar e identificar os dados mostrados nos gráficos, bem como colocar títulos ou legendas. Lembre-se de usar os conceitos já vistos na disciplina. Por exemplo, ao apresentar uma

média, é interessante apresentar o desvio padrão? Qual a medida de centro mais interessante? É importante analisar a relação entre duas variáveis? De toda forma, não é necessário colocar as fórmulas das medidas apresentadas (por exemplo, fórmulas de média, variância, desvio padrão, coeficiente de correlação, etc) – basta informar a ferramenta usada.